arXiv:2301.01688v1 [math.OC] 4 Jan 2023

具有表面张力鲁棒性的储液罐系统反馈稳定化

Iasson Karafyllis、Filippos Vokos，数学系，雅典国立技术大学，Zografou 校区，15780，希腊雅典，电子邮件：iasonkar@central.ntua.gr、fivojean@mail.ntua.gr

Miroslav Krstic，机械与航空航天工程系，加利福尼亚大学，拉霍亚，圣迭戈，CA 92093-0411，美国，电子邮件：krstic@ucsd.edu

2023年1月5日

摘要

我们为包含表面张力且不含壁面摩擦的黏性圣维南偏微分方程（PDE）系统构造了一种鲁棒稳定反馈律。圣维南系统描述了装有黏性液体的水槽的运动。我们假设液体与水槽壁面之间的接触角为常数，并利用控制李雅普诺夫泛函（CLF），实现了对表面张力具有鲁棒性的无溢出指数稳定化。所提出的控制李雅普诺夫泛函给出一族参数化集合，从内部逼近状态空间。基于该控制李雅普诺夫泛函，我们构造了一种非线性稳定反馈律，确保闭环系统在适当范数意义下指数收敛到期望的平衡点。

1 引言

圣维南模型源自 [2],，是流体力学中一个重要且极具影响力的数学模型。文献中也将其称为浅水模型。圣维南模型的近期扩展考虑了多种类型的力，例如黏性应力、表面张力和摩擦力（见 [10, 19, 29, 33, 41, 43]）。

圣维南模型的反馈稳定化问题颇具挑战性。文献中主要研究的情形包括无黏模型（忽略黏性应力和表面张力等作用）以及

线性化模型（见 [1,3–5, 11–14,16–18,30,35,36]）。 [11,12,14,35,36]研究了含有流体的一维水箱的流体运动问题。具体而言， [11,12,14]给出了无黏度、无摩擦且无表面张力的圣维南模型的可控性结果； [35] 提出了圣维南方程的一种新变分形式，并证明了若干控制配置下线性近似模型的稳态可控性。 [36] 研究了无黏圣维南模型，并构造了适当的稳定化全状态反馈和输出反馈控制律。 [3–5, 12, 13, 16–18, 30]研究了流体在明渠中的运动。 [1,3,4,13,17,18]给出了稳定化结果。 [3, 4, 17, 18, 30] 采用线性化圣维南模型，而 [1]研究了一般线性双曲系统；这类系统也出现在圣维南方程及其他线性双曲定律中。 [5,12,13,16]研究了非线性圣维南模型。 [5] 研究了一般非线性双曲系统的前馈控制问题，并给出了一个采用含摩擦圣维南模型的应用实例。 [12,13] 利用基于黎曼不变量的严格李雅普诺夫函数，保证了守恒律双曲系统状态的局部收敛性。此外，还给出了无黏、无摩擦圣维南模型的应用实例。论文 [16]采用无摩擦、无表面张力的无黏圣维南模型，实现了对水道中水流和水位的调节。

文献中很少有研究涉及非线性黏性圣维南模型，该模型用于描述装有不可压缩牛顿流体的水槽运动。首篇研究无壁面摩擦且无表面张力的非线性黏性圣维南模型的工作是 [23]。在 [23] 中，作者构造了一种适当的非线性反馈律，并通过遵循控制李雅普诺夫函数方法获得半全局稳定化结果。工作 [25] 将 [23]中得到的结果扩展到了考虑壁面摩擦力的情形。在 [25] 中，研究了摩擦系数与速度无关的情形以及摩擦系数的一般情形，并构造了一种对壁面摩擦具有鲁棒性的稳定化反馈律。另一项研究非线性黏性圣维南模型的工作是 [24]。在 [24]中，作者为无壁面摩擦且无表面张力的黏性圣维南偏微分方程系统构造了一种稳定化输出反馈控制律。该输出反馈控制律通过泛函观测器方法和控制李雅普诺夫函数方法加以实现。

对与气体边界和固体边界相互作用的流体运动进行研究，必然与表面张力、接触角和润湿性的概念密切相关（见 [27, 34]）。表面张力至关重要，因为它作用于液气界面。从数学角度来看，表面张力非常重要，因为它会改变偏微分方程的阶数（其以三阶项的形式表示）。如 [34], 所述，接触角是流体表面与固体边界相交时形成的角度，也是衡量固体表面润湿性的指标。关于接触角这一主题已有大量文献（例如见 [20,21,27,28,37,38,42,43]）。接触角这一概念意义重大

因为它为我们的研究提供了一个附加边界条件。

本文解决了一个水槽的反馈稳定化问题。该水槽盛有液体，其动力学由包含表面张力且不考虑壁面摩擦的偏微分方程黏性圣维南系统建模。我们考虑液体与水槽壁面之间具有恒定接触角的情形，如 [37, 38] 所示。我们采用了 [25], 中最初提出的一种特定形式的反馈律，它是 [23] 中反馈律的一种更一般形式，并具有对表面张力的鲁棒性。事实上，我们发现，无论表面张力系数的值是多少，所提出的反馈律都能保证稳定化。因此无需知道表面张力系数，且反馈律独立于该系数。我们实现了具有表面张力鲁棒性的无溢出指数稳定化。与 [23–25] 一样，我们采用控制李雅普诺夫函数方法，并基于一个适当的泛函（即控制李雅普诺夫函数）设计反馈律。控制李雅普诺夫函数确定了一个特定的参数化集合，该集合从内部逼近控制问题的状态空间。

尽管本工作与 [25], 在技术上有许多相似之处，但也存在一些关键差异。首先，与 [25], 不同，偏微分方程系统包含一个由表面张力引起的额外项，且不包含摩擦项。此外，为了使模型完整并确保问题适定，我们采用了一个额外的边界条件。该边界条件由恒定接触角这一假设给出。这里我们只使用一个控制李雅普诺夫函数，而 [25] 则提出了两个不同的泛函。因此，由于缺少合适的泛函，本工作无法像 [25], 那样给出流体速度上确界范数的界。这里的控制李雅普诺夫函数不同于 [25], 中相应的控制李雅普诺夫函数，因为它包含一个由表面张力作用引起的额外势能项。

本文结构如下。第2节描述控制问题及其主要目标。第3节阐述本工作的直观思路和研究结果，并给出一些辅助引理。第4节包含第3节所述结果的全部证明。最后，第5节总结本工作，并提出未来研究的主题。

符号说明

* 实数集$_{+} = [0, +\infty)$ 表示非负实数集。

* 设 S $\subseteq$ 实数集^{n} 是一个开集，A $\subseteq$ 实数集^{n} 是一个集合，且 S $\subseteq$ A $\subseteq$cl(S)。用 $C^{0}(A; \Omega)$ 表示 A 上取值于 $\Omega \subseteq$实数集^{m} 的连续函数类。用 $Ck(A; \Omega)$ 表示 A $\subseteq$实数集^{n} 上取值于 $\Omega \subseteq$实数集^{m} 且具有 k 阶连续导数的函数类，其中 $k \geq 1$ 是一个整数。换言之，$Ck(A; \Omega)$ 类函数是在 $S = \text{int}(A)$ 上具有 k 阶连续导数，并且可连续延拓至 $\partial S \cap A$ 中所有点的函数。当 $\Omega =$ 实数集 时，记作 $C^{0}(A)$ 或 $Ck(A)$。当 I $\subseteq$ 实数集 是一个区间，且

$G \in C^1(I)$ 是一个单变量函数，$G'(h)$ 表示对 $h \in I$ 求导所得的导数。

* 设 I ⊆实数集为一个区间，给定常数 a < b，以及给定函数 u : I × [a, b] →实数集。我们使用记号 u[t] 表示某个 t ∈ I 处的剖面，即对于所有 x ∈ [a, b]，(u[t])(x) = u(t, x)。当 u(t, x) 关于 x ∈ [a, b], 三次可微时，我们分别用记号 ux(t, x)、uxx(t, x) 和 uxxx(t, x) 表示 u 关于 x ∈ [a, b] 的一阶、二阶和三阶导数，即：

$$u_x(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x), u_{xx}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \text{ and } u_{xxx}(t,x) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,x)$$

当$u(t,x)$关于t可微时，我们用记号$u_t(t,x)$表示u 关于t的导数，即：

$$u_t(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$$

* 给定集合U ⊆实数集$_n$，χ_U 表示U 的示性函数，其定义为

$$\chi_U(x) := \begin{cases} 1 & \text{for all } x \in U \\ 0 & \text{for all } x \notin U \end{cases}$$

符号函数 sgn：实数集 → 实数集定义为

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

* 设常数a, b满足$a < b$。对于$p \in [1, +\infty)$，$L_p(a,b)$表示勒贝格可测函数u：$(a,b) \to$ 实数集的等价类集合，其中

$$\|u\|_p := \left(\int_a^b |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

$L^\infty(a,b)$表示勒贝格可测函数u：$(a,b) \to$ 实数集的等价类集合，其中

$$\|u\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in (a,b)} (|u(x)|) < +\infty.$$

对于整数 $k \geq 1$，$H^k(a,b)$ 表示由$L^2(a,b)$ 中所有弱导数阶数不超过 $k \geq 1$ 且属于 $L^2(a,b)$ 的函数构成的索伯列夫空间。

2 控制问题

我们希望操控一个装有黏性、牛顿型不可压缩液体的水槽的运动。我们将黏度作为控制器中的增益，用于调节边界液位之差，并使系统趋于一个吸引域。水槽受到加速度作用，我们将其视为控制输入，并且该加速度遵循牛顿第二定律。该问题由黏性圣维南方程描述。我们将研究范围限定在模型的一维（1-D）情形。此外，与先前研究不同，本研究不忽略作用于自由液面（液气界面）的表面张力，但忽略液体与储罐壁之间的摩擦。

我们的目标是使水槽渐近地移动到指定位置。必须在不发生液体溢出的情况下实现上述目标，并使水槽及其中的液体都处于静止状态。描述水槽中液体运动的方程，可以通过进行质量与动量平衡推导得出（从第一性原理出发，假设液体压力由静水压力和杨-拉普拉斯方程所给出的毛细压力组成（参见 [15]），并忽略液体与储罐壁之间的摩擦）。也可以通过对不可压缩流体的纳维–斯托克斯方程进行近似来推导这些方程（参见 [6–8, 28, 32, 37, 38]；关于涉及毛细现象的流体方程，另见 [21, 29] ）。

我们用$a(t)$表示时刻$t \geq 0$ 水槽左侧的位置，并将水槽的长度记为$L > 0$（一个常数）。液位和液体速度的演化由以下方程描述

$$H_t + (Hu)_z = 0, \text{ for } t > 0, z \in [a(t), a(t) + L] \tag{1}$$

$$(Hu)_t + \left(Hu^2 + \frac{1}{2}gH^2\right)_z - \sigma H\left(\frac{H_{zz}}{\left(1 + H_z^2\right)^{3/2}}\right)_z = \mu(Hu_z)_z$$
$$\text{for } t > 0, z \in (a(t), a(t) + L) \tag{2}$$

其中，$H(t,z) > 0$、$u(t,z) \in \mathrm{R}$分别表示时刻$t \geq 0$、位置$z \in [$处的液位和液体速度，$a(t), a(t) + L],$；而$g, \mu, \sigma > 0$（常数）分别表示重力加速度z 液体的运动黏度以及表面张力与液体密度之比。在一些论文中，项$\left(H\left(1 + \quad H_z^2\right)^{3/2}\right)_z$被$H$

$\overline{\qquad\qquad}_{zzz}$取代（参见 [6–8,32],），但这里我们倾向于对表面张力进行更准确的描述。

水槽壁处的液体速度与水箱速度相等。因此：

$$u(t, a(t)) = u(t, a(t) + L) = w(t), \text{ for } t \geq 0 \tag{3}$$

其中，$w(t) = \dot{a}(t)$ 表示水槽在时刻 $t \geq 0$ 的速度。此外，我们得到水槽的

$$\ddot{a}(t) = -f(t), \text{ for } t > 0 \tag{4}$$

其中， $-f(t)$ 是该问题的控制输入，即水箱加速度。定义这些量

$$v(t,x) := u(t,a(t)+x) - w(t) \tag{5}$$
$$h(t,x) := H(t,a(t)+x) \tag{6}$$
$$\xi(t) := a(t) - a^* \tag{7}$$

其中，$a^* \in \mathrm{R}$ 是位置（一个常数），即我们希望水槽左侧到达的位置，由此得到模型:

$$\dot{\xi} = w, \text{ for } t \geq 0 \tag{8}$$
$$\dot{w} = -f, \text{ for } t \geq 0 \tag{9}$$
$$h_t + (hv)_x = 0, \text{ for } t > 0, x \in [0,L] \tag{10}$$
$$(hv)_t + \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x - \sigma h\left(\frac{h_{xx}}{\left(1+h_x^2\right)^{3/2}}\right)_x = \mu(hv_x)_x + hf, \quad \text{for } t > 0, x \in (0,L) \tag{11}$$
$$v(t,0) = v(t,L) = 0, \text{ for } t \geq 0 \tag{12}$$

方程 (10) 和 (12) 表明，(8)-(12) 的每个经典解都满足以下条件

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^L h(t,x)dx\right) = 0 \text{ for all } t > 0 \tag{13}$$

因此，液体的总质量 $m > 0$ 是常数，并且不失一般性，我们可以假设 (8)-(12) 的每个解都满足方程

$$\int_0^L h(t,x)dx \equiv m \tag{14}$$

鉴于问题的性质，必须指出，液位 $h(t,x)$ 在所有时刻都必须为正，即必须满足:

$$\min_{x\in[0,L]}(h(t,x)) > 0, \text{ for } t \geq 0 \tag{15}$$

与先前研究不同，模型 (8)-(12)、(14) 并未完整描述该系统。通过研究模型 (8)-(12)、(14) 的线性化可以直接看出这一点，查阅相关文献也能发现这一点（参见 [27, 37, 38, 42, 43] 及其中的参考文献）。要完整地建立该系统的数学模型，我们还需要两个边界条件，用以描述液体与水槽固体壁面之间的相互作用。描述液体与固体边界接触角演变的方式有很多种（详见 [27]）。在 [37, 38], 中，Schweizer 根据能量论证，并考虑到实际的微观接触角与表观的宏观接触角之间可能存在差异，建议采用恒定接触角。此外，

恒定接触角的假设使整个问题具有适定性（至少对小数据而言；参见 [37, 38, 42]）。恒定接触角方法已在文献中得到广泛应用（例如参见 [20, 42, 43]）。

在本文中，我们采用恒定接触角方法，令接触角等于 $\pi/2$。因此，模型 (8)-(12)、(14) 还需满足以下边界条件：

$$h_x(t,0) = h_x(t,L) = 0, \text{ for } t \geq 0 \tag{16}$$

为避免液体溢出，必须满足以下条件：

$$\max_{x\in[0,L]} (h(t,x)) < H_{\max}, \text{ for } t \geq 0 \tag{17}$$

其中，$H_{\max} > 0$ 为储罐壁的高度。我们考虑系统 (8)-(12)、(14)、(16) 的经典解，即考虑

$\xi \in C^2$(实数集+)，$w \in C^1$(实数集+)，$h \in C^1([0,+\infty) \times [0,L]; (0,+\infty)) \cap C^3((0,+\infty) \times (0,L))$，$v \in C^0([0,+\infty) \times [0,L]) \cap C^1((0,+\infty) \times [0,L])$，其中对每个 $t > 0$，$v[t] \in C^2((0,L))$

它们满足方程 (8)-(12)、(14)、(16)，且给定输入 $f \in C^0$(实数集+)。

对于具有 $f(t) \equiv 0$ 的系统 (8)-(12)、(14)、(16)（即开环系统），存在连续统的平衡点，即这些点

$$h(x) \equiv h^*, v(x) \equiv 0, \text{ for } x \in [0,L] \tag{18}$$

$$\xi \in \mathbb{R}, w = 0 \tag{19}$$

其中 $h^* = m/L$。我们假设这些平衡点满足条件 (17)，即 $h^* < H_{\max}$。

我们拟构造一种对表面张力具有鲁棒性的控制律，其形式为

$$f(t) = F(h[t], v[t], \xi(t), w(t)), \text{ for } t > 0, \tag{20}$$

该控制律可稳定具有 $\xi = 0$ 的平衡点。此外，我们还施加条件 (17)。

由 (18)、(19) 可知，对于开环系统，所需的平衡点并非渐近稳定。因此，所述控制问题绝非易事。

3 反馈律

3.1 控制李雅普诺夫泛函（控制李雅普诺夫函数）

我们将集合 $S \subset$ 实数集$^2 \times \left(C^0([0,L])\right)^2$ 定义如下：

$$(\xi, w, h, v) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} h \in C^0([0,L]; (0,+\infty)) \cap H^1(0,L) \\ v \in C^0([0,L]) \\ \int_0^L h(x)dx = m \\ (\xi, w) \in \mathbb{R}^2, v(0) = v(L) = 0 \end{cases} \tag{21}$$

上述定义保证每个 $(\xi,w,h,v) \in S$都满足 (12) 和 (14)。此外，对于所有 $(\xi,w,h,v) \in S$，我们定义以下泛函：

$$V(\xi,w,h,v) := \delta E(h,v) + W(h,v) + \frac{qk^2}{2}\xi^2 + \frac{q}{2}(w+k\xi)^2 \tag{22}$$

$$\begin{aligned} E(h,v) := \frac{1}{2}\int_0^L h(x)v^2(x)dx + \frac{g}{2}\left\|h - h^*\chi_{[0,L]}\right\|_2^2 \\ +\sigma\int_0^L\left(\sqrt{1+(h'(x))^2}-1\right)dx \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} W(h,v) := \frac{1}{2}\int_0^L h^{-1}(x)\left(h(x)v(x)+\mu h'(x)\right)^2 dx + \frac{g}{2}\left\|h - h^*\chi_{[0,L]}\right\|_2^2 \\ +\sigma\int_0^L\left(\sqrt{1+(h'(x))^2}-1\right)dx \end{aligned} \tag{24}$$

其中，$k,q > 0$ 分别是位置误差和速度增益（待选取），$\delta > 0$ 且 $h^* = m/L$。特别地：

- 泛函 E 是水槽内液体的机械能，因为它是势能

$$\frac{g}{2}\left\|h - h^*\chi_{[0,L]}\right\|_2^2 + \sigma\int_0^L\left(\sqrt{1+(h'(x))^2}-1\right)dx$$

  与动能之和

$$\frac{1}{2}\int_0^L h(x)v^2(x)dx$$

  的液体。需要注意的是，水槽-液体界面的机械能没有任何贡献，因此可以将边界条件 (16)（恒定接触角）解释为液体和固体之间不存在相互作用的结果。

- 泛函 W 是水槽内液体的一种机械能，已广泛用于等熵可压缩液体流动的文献中（见 [22, 31, 39, 40]），也见于 [23–25]。

由（22）定义的泛函 $V(\xi,w,h,v)$ 将用作该系统的控制李雅普诺夫函数（CLF），并用于推导函数 h 的有用界限，这一点由以下引理保证。

引理1. 设常数 $q,k,\ \delta > 0$ 已给定，并定义增函数 $G \in C^0$(实数集) $\cap C^1((-\infty,0) \cup (0, +\infty))$ 如下

$$G(h) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(h-h^*)\left(\frac{2}{3}h\sqrt{h} - 2h^*\sqrt{h} + \frac{4}{3}h^*\sqrt{h^*}\right) & \text{for } h > 0 \\ -\frac{4}{3}h^*\sqrt{h^*} + h & \text{for } h \le 0 \end{cases} \tag{25}$$

将 G^{-1}： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 记为 G 的反函数，并定义常数

$$c := \frac{1}{\mu\sqrt{\delta g}} \tag{26}$$

那么，对于每个 $(\xi、w、h、v) \in S$，以下不等式成立：

$$Q_1(V(\xi,w,h,v)) \le h(x) \le Q_2(V(\xi,w,h,v)),\ for\ all\ x \in [0,L], \tag{27}$$

其中，函数 Q_i： $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\ (i = 1、2)$ 对所有 $s \ge 0$ 定义如下：

$$Q_1(s) := \max\left(G^{-1}(-cs), N_1(s), N_2(s)\right) \tag{28}$$

$$Q_2(s) := \min\left(G^{-1}(cs), P_1(s), P_2(s)\right) \tag{29}$$

其中，函数 N_i： $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\ (i = 1、2)$ 和 P_i： $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\ (i = 1、2)$ 对所有 $s \ge 0$ 的定义表达式如下：

$$N_1(s) := h^* - \sqrt{\frac{2m(1+\delta)s}{\delta\mu^2}}, \tag{30}$$

$$N_2(s) := h^* - \sqrt{\left(\frac{s}{\sigma(\delta+1)} + L\right)^2 - L^2}, \tag{31}$$

$$P_1(s) := h^* + \sqrt{\frac{2m(1+\delta)s}{\delta\mu^2}}, \tag{32}$$

$$P_2(s) := h^* + \sqrt{\left(\frac{s}{\sigma(\delta+1)} + L\right)^2 - L^2} \tag{33}$$

注记 1. 由 (25)、(26)、(28) 以及$h^* = m/L$ 这一事实可得$Q_1(V(\xi,w,h,v)) > 0$ 当

$$V(\xi,w,h,v) < \max(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \tag{34}$$

with

$$\theta_1 := \frac{4}{3}\mu h^*\sqrt{\delta g h^*},\ \theta_2 := \frac{\mu^2 h^* \delta}{2L(1+\delta)} \quad \text{and}$$

$$\theta_3 := \sigma(\delta+1)\left(\sqrt{(h^*)^2 + L^2} - L\right)$$

定义 (28) 和 (29) 意味着Q_2 : 实数集$_+$ →实数集是增函数，而Q_1 : 实数集$_+$ →实数集是递减函数。

需要指出的是，引理1比 [23] 中的引理1和 [25]中的引理1更一般。 [23] 中的引理1仅适用于$\delta = 1$ 和 $\sigma = 0$的情况，而 [25] 中的引理1仅适用于 $\sigma = 0$的情况。这里的引理1适用于所有 $\delta > 0$ 和 $\sigma \geq 0$。

3.2 状态空间

与 [23–25] 中一样，将适当地定义状态空间，以排除由式（21）定义的集合S中违反条件（17）的状态，即导致液体溢出的状态。定义如下

$$X := \left\{ (\xi, w, h, v) \in S : \max_{x \in [0,L]} (h(x)) < H_{\max} \right\} \tag{35}$$

$$R := \frac{2\mu\sqrt{\delta g h^*}}{3} (H_{\max} - h^*) \min(\zeta_1, \zeta_2) \tag{36}$$

其中

$$\zeta_1 := \max(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \text{ and} \tag{37}$$

$$\zeta_2 := \frac{h^*}{H_{\max} - h^*} \max(2, \Delta_1, \Delta_2) \tag{38}$$

其中 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Delta_1$ 和 Δ_2 定义如下:

$$\Gamma_1 := \sqrt{\frac{H_{\max}}{h^*}} - \frac{2\sqrt{h^*}}{\sqrt{H_{\max}} + \sqrt{h^*}}, \tag{39}$$

$$\Gamma_2 := \frac{3\mu\sqrt{\delta}(H_{\max} - h^*)}{4m(1+\delta)\sqrt{g h^*}}, \tag{40}$$

$$\Gamma_3 := \frac{3\sigma(\delta+1)\left(\sqrt{L^2 + (H_{\max} - h^*)^2} - L\right)}{2\mu\sqrt{\delta g h^*}(H_{\max} - h^*)}, \tag{41}$$

$$\Delta_1 := \frac{3\mu\sqrt{\delta}}{4L\sqrt{g h^*}(1+\delta)}, \tag{42}$$

$$\Delta_2 := \frac{3\sigma(\delta+1)\sqrt{h^*}}{2\mu\sqrt{\delta g}\left(\sqrt{(h^*)^2 + L^2} + L\right)} \tag{43}$$

上述定义(36)、$h^* < H_{\max}$ 这一事实以及引理1表明，对于所有满足$V(\xi, w, h, v) <$实数集 的$(\xi, w, h, v) \in S$，有如下结论

$$0 < Q_1(V(\xi, w, h, v)) \leq h(x) \leq Q_2(V(\xi, w, h, v)) < H_{\max}, \text{ for all } x \in [0, L] \tag{44}$$

因此，当$(\xi,w,h,v)\in S$且$V(\xi,w,h,v)<$实数集时，满足避免液体溢出的条件(17)。

由（35）定义的集合 X 是系统（8）-（12）、（14）、（16）的状态空间。特别地，我们将度量空间 $X\subset \mathrm{R}^2\times H^1(0,L)\times L^2(0,L)$ 视为状态空间，其度量由底层赋范线性空间 $\mathrm{R}^2\times H^1(0,L)\times L^2(0,L)$ 的范数诱导，即，

$$\|(\xi,w,h,v)\|_X=\left(\xi^2+w^2+\|h\|_2^2+\left\|h'\right\|_2^2+\|v\|_2^2\right)^{1/2} \tag{45}$$

然而，我们需要利用某些参数化集合从状态空间的内部对其进行逼近，以便获得有用的估计。我们定义

$$X_V(r):=\{(\xi,w,h,v)\in S:V(\xi,w,h,v)\le r\},\ \text{for } r\ge 0 \tag{46}$$

不等式（44）意味着

$$X_V(r)\subseteq X,\ \text{for all } r\in[0,R) \tag{47}$$

如下命题所示，对于$r>0$，集合 $X_V(r)$ 包含 $\left(0,0,h^*\chi_{[0,L]},0\right)$ 的一个邻域（在X的拓扑中，其度量由（45）定义的范数 $\|\cdot\|_X$ 诱导）。

命题1. 给定常数 q、k、$\delta>0$。那么，对于每个满足不等式的 $(\xi,w,h,v)\in S$

$$\left\|(0,w,h-h^*\chi_{[0,L]},v)\right\|_X\le\varepsilon \tag{48}$$

对于某个 $\varepsilon>0$，满足

$$\varepsilon<\min(h^*,H_{\max}-h^*)/\sqrt{L}, \tag{49}$$

以下不等式成立：

$$V(\xi,w,h,v)\le C_1\left\|(\xi,w,h-h^*\chi_{[0,L]},v)\right\|_X^2+C_2\left\|(\xi,w,h-h^*\chi_{[0,L]},v)\right\|_X \tag{50}$$

其中

$$C_1:=\max\left(\frac{\mu^2}{h^*-\varepsilon\sqrt{L}},\frac{\delta+1}{2}g,\frac{(\delta+2)H_{\max}}{2},q,\frac{3qk^2}{2}\right), \tag{51}$$

$$C_2:=\sigma(\delta+1)\sqrt{L} \tag{52}$$

且 $\|\cdot\|_X$ 由 (45) 定义。

3.3 稳定化结果

以下定理保证通过非线性反馈律 (55) 实现系统 (8)-(12)、(14)、(16) 状态的指数稳定化。

定理 1（储液罐系统的稳定化）。
给定任意常数 ω、k、q、$\delta > 0$，并通过(36)定义实数集 R。给定任意 $r \in [0,R)$，并假设

$$k < q\theta(r) \tag{53}$$

其中

$$\theta(r) := \frac{\omega g \mu \delta \pi^2 Q_1(r)}{g\mu\delta\pi^2 Q_1(r) + 2\omega L(mgLH_{\max}(\delta+1)^2 + 2\mu^2\delta\pi^2 Q_1(r))} \tag{54}$$

其中 Q_1 由(28)定义。于是存在常数 M、$\lambda > 0$，具有以下性质：

(P) 系统(8)-(12)、(14)、(16) 和

$$f(t) = -\omega\left((\delta+1)\int_0^L h(t,x)v(t,x)dx + \mu(h(t,L) - h(t,0)) - q(w(t) + k\xi(t))\right), \quad \text{for } t > 0 \tag{55}$$

满足$(\xi(0), w(0), h[0], v[0]) \in X_V(r)$的每个经典解，均满足$(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) \in X_V(r)$，且对于 $t \geq 0$满足以下估计：

$$\begin{aligned} &\left\|\left(\xi(t), w(t), h[t] - h^* \chi_{[0,L]}, v[t]\right)\right\|_X \\ &\leq M \exp(-\lambda t)\left\|\left(\xi(0), w(0), h[0] - h^* \chi_{[0,1]}, v[0]\right)\right\|_X \end{aligned} \tag{56}$$

关于定理 1 的注记。
1) 任意量 ω、k、q，$\delta > 0$都是控制参数。需要指出的是，由于式（53），比值k/q 必须足够小，这是对控制参数的唯一限制。

2) 集合$X_V(r)$是实现指数稳定化的集合。正如命题1所示，对于$r > 0$，集合$X_V(r)$包含 $\left(0, 0, h^* \chi_{[0,L]}, 0\right)$的一个邻域（在$X$的拓扑中，该拓扑由范数$\|\cdot\|_X$诱导，范数由式（45）定义）。集合$X_V(r)$的大小取决于$r \in [0, R)$以及 δ、q、k（回顾式（36）和（22））。显然，参数q （或k）越大，集合$X_V(r)$越小。然而，集合$X_V(r)$对 δ的依赖关系（通过R 对 δ的依赖关系）并不明确。相反，这种依赖关系非常复杂且非单调。

3）反馈律 (55) 只需要测量以下四个量：

- 储罐位置，记为 $\xi(t)$，以及储罐速度，记为$w(t)$,
- 液体总动量，即量 $\int_0^L h(t,x)v(t,x)dx$，以及

• 水槽壁处液位之差，即量 $h(t,L) - h(t,0)$。

需要强调的是，反馈律 (55) 不需要测量整个液位和液体速度剖面，而且完全不依赖于表面张力系数。

4) 反馈律 (55) 与 [23, 25] 中所用的反馈律相同。考虑到 [23, 25] 和定理 1 中的结果，可以得出，反馈律 (55) 不仅对表面张力具有鲁棒性，而且对壁面摩擦力也具有鲁棒性。从控制的角度来看，这是理想的情况：反馈律 (55) 对基本模型可能受到的所有扰动都具有鲁棒性，测量要求极低，并能保证相应闭环（非线性，而非线性化）系统实现指数稳定化。

5) 与 [25], 相比，定理 1 并未给出范数 $\|v_x[t]\|_2$，的估计，因此也无法估计流体速度的上确界范数。未来研究的一个方向是构造适当的控制李雅普诺夫函数（CLF），以此获得范数 $\|v_x[t]\|_2$ 的估计。

4 证明

引理*1*的证明。 该证明与 [25] 中引理1的证明完全相同。唯一的区别是，这里我们可以得到关于 $\|h - h^*\chi_{[0,L]}\|_\infty$ 的一个额外估计。事实上，由于函数 φ: 实数集$_+ \to$ 实数集+定义为

$$\varphi(s) = \sqrt{s^2+1} - 1, \text{ for } s \geq 0 \tag{57}$$

是递增凸函数，我们可以使用詹森不等式（见 [9] 第120页），从而对所有 $h \in C^0([0,L]; (0,+\infty)) \cap H^1(0,L)$ 且 $\int_0^L h(x)dx = m$，有:

$$\begin{aligned} &\varphi\left(\frac{1}{L}\|h'\|_1\right) = \varphi\left(\frac{1}{L}\int_0^L |h'(x)|\,dx\right) \\ &\leq \frac{1}{L}\int_0^L \varphi\left(|h'(x)|\right)dx = \frac{1}{L}\int_0^L \left(\sqrt{(h'(x))^2+1} - 1\right)dx \end{aligned} \tag{58}$$

利用（58），不等式 $\|h - h^*\chi_{[0,L]}\|_\infty \leq \|h'\|_1$ （这直接源于以下事实：存在 $x^* \in [0,L]$ 使得 $h(x^*) = h^*$；这是由 h 的连续性、中值定理以及以下事实得出的: $\int_0^L h(x)dx = m$，$h^* = m/L$），函数 $\varphi^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ （φ 的反函数）是递增函数，且 $\varphi^{-1}(s) = \sqrt{(s+1)^2 - 1}$ 对于$s \geq 0$ 成立，以及不等式

$$\int_0^L \left(\sqrt{(h'(x))^2+1} - 1\right)dx \leq \frac{V(\xi,w,h,v)}{\sigma(\delta+1)} \tag{59}$$

这是定义（22）、（23）、（24）的直接推论，因此对于所有 $(\xi,w,h,v)\in S$，我们得到：

$$\left\|h-h^{*}\chi_{[0,L]}\right\|_{\infty}\leq\sqrt{\left(L+\frac{V(\xi,w,h,v)}{\sigma(\delta+1)}\right)^{2}-L^{2}} \tag{60}$$

结合估计式（60）、引理1的证明中给出的估计以及 [25] 中的定义（26）、（28）和（29），可得（27）。证明完毕。

□

命题*1*的证明。考虑任意满足（48）和（49）的$(\xi,w,h,v)\in S$。定义（22）、（23）、（24）以及不等式

$$(h(x)v(x)+\mu h'(x))^{2}\leq 2h^{2}(x)v^{2}(x)+2\mu^{2}(h'(x))^{2}, \tag{61}$$

$$(w+k\xi)^{2}\leq 2w^{2}+2k^{2}\xi^{2}, \tag{62}$$

$$\sqrt{1+(h'(x))^{2}}-1\leq\left|h'(x)\right| \tag{63}$$

推出：

$$\begin{aligned}V(\xi,w,h,v)\leq{}&\frac{\delta+2}{2}\int_{0}^{L}h(x)v^{2}(x)dx+\mu^{2}\int_{0}^{L}h^{-1}(x)(h'(x))^{2}dx\\&+\frac{\delta+1}{2}g\left\|h-h^{*}\chi_{[0,L]}\right\|_{2}^{2}+\frac{3qk^{2}}{2}\xi^{2}+qw^{2}+\sigma(\delta+1)\left\|h'\right\|_{1}\end{aligned} \tag{64}$$

按照 [25] 中命题2.5证明的论证，由（64）可得：

$$\begin{aligned}V(\xi,w,h,v)\leq{}&\frac{\delta+2}{2}H_{\max}\|v\|_{2}^{2}+qw^{2}+\frac{3qk^{2}}{2}\xi^{2}\\&+\mu^{2}\left(h^{*}-\varepsilon\sqrt{L}\right)^{-1}\left\|h'\right\|_{2}^{2}+\frac{\delta+1}{2}g\left\|h-h^{*}\chi_{[0,L]}\right\|_{2}^{2}+\sigma(\delta+1)\sqrt{L}\left\|h'\right\|_{2}\end{aligned} \tag{65}$$

不等式（50）可由（65）和定义（45）直接推出。证明完毕。□

为了证明本文的主要结果，我们需要先给出一些预备引理及其证明。

引理2. 系统(8)-(12)、(14)、(16) 的每个经典解对所有 $t>0$ 均满足以下方程：

$$\frac{d}{dt}E(h[t],v[t])=-\mu\int_{0}^{L}h(t,x)v_{x}^{2}(t,x)dx+f(t)\int_{0}^{L}h(t,x)v(t,x)dx \tag{66}$$

$$\frac{d}{dt}W(h[t],v[t]) = -\mu g\|h_x[t]\|_2^2 - \mu\sigma\int_0^L \frac{h_{xx}^2(t,x)dx}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}$$
$$+f(t)\int_0^L (h(t,x)v(t,x)+\mu h_x(t,x))\,dx \tag{67}$$

其中 E、W 分别由(23)、(24)定义。

证明。 由 (10) 和 (11) 可得，对于$t>0$、$x\in(0,L)$:

$$\begin{aligned} &v_t(t,x)+v(t,x)v_x(t,x)+gh_x(t,x)\\ &=\sigma h^{-1}(t,x)\left(\frac{1+h_x^2(t,x)+h(t,x)h_{xx}(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}\right)_x\\ &\quad+\mu h^{-1}(t,x)\left(h(t,x)v_x(t,x)\right)_x+f(t) \end{aligned} \tag{68}$$

结合定义 (23)、(10) 和 (68)，对于所有$t>0$，可得泛函 (23) 关于时间的导数表达式如下:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(h[t],v[t]) &= -\frac{1}{2}\int_0^L (h(t,x)v(t,x))_x v^2(t,x)dx\\ &-\int_0^L h(t,x)v^2(t,x)v_x(t,x)dx - g\int_0^L h(t,x)v(t,x)h_x(t,x)dx\\ &+\sigma\int_0^L v(t,x)\left(\frac{1+h_x^2(t,x)+h(t,x)h_{xx}(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}\right)_x dx\\ &+\mu\int_0^L v(t,x)\left(h(t,x)v_x(t,x)\right)_x dx + f(t)\int_0^L h(t,x)v(t,x)dx\\ &-g\int_0^L (h(t,x)v(t,x))_x(h(t,x)-h^*)dx\\ &-\sigma\int_0^L \frac{h_x(t,x)}{\sqrt{1+h_x^2(t,x)}}(h(t,x)v(t,x))_{xx}dx \end{aligned} \tag{69}$$

利用式（69），按照 [25], (12) 中引理 2.11 的证明进行分部积分,

式（16）以及对所有 $t>0$ 均成立这一事实

$$\sigma\int_0^L v(t,x)\left(\frac{1+h_x^2(t,x)+h(t,x)h_{xx}(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}\right)_x dx$$
$$=-\sigma\int_0^L v_x(t,x)\frac{1+h_x^2(t,x)+h(t,x)h_{xx}(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}dx \tag{70}$$
$$-\sigma\int_0^L \frac{h_x(t,x)}{\sqrt{1+h_x^2(t,x)}}(h(t,x)v(t,x))_{xx}dx$$
$$=\sigma\int_0^L v_x(t,x)\frac{1+h_x^2(t,x)+h_{xx}(t,x)h(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}dx \tag{71}$$

同样，由分部积分可得方程（66）。

接下来，我们对所有 $t\geq 0$ 和 $x\in[0,L]$ 定义：

$$\varphi(t,x):=h(t,x)v(t,x)+\mu h_x(t,x) \tag{72}$$

由定义（72）、（10）和（11）可知，对所有 $t>0$ 和 $x\in(0,L)$：

$$\varphi_t(t,x)=-\left(v(t,x)\varphi(t,x)+\frac{1}{2}gh^2(t,x)-\sigma\frac{1+h_x^2(t,x)+h(t,x)h_{xx}(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}\right)_x$$
$$+h(t,x)f(t) \tag{73}$$

结合定义（24）、（73）和（10），可得对所有 $t>0$：

$$\frac{d}{dt}W(h[t],v[t])=\frac{1}{2}\int_0^L h^{-2}(t,x)\varphi^2(t,x)(h(t,x)v(t,x))_x dx$$
$$-\int_0^L h^{-1}(t,x)\varphi(t,x)\left(\varphi(t,x)v(t,x)+\frac{1}{2}gh^2(t,x)\right)_x dx$$
$$+\sigma\int_0^L h^{-1}(t,x)\varphi(t,x)\left(\frac{1+h_x^2(t,x)+h(t,x)h_{xx}(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}\right)_x dx$$
$$+f(t)\int_0^L\varphi(t,x)dx-g\int_0^L(h(t,x)-h^*)(h(t,x)v(t,x))_x dx$$
$$-\sigma\int_0^L\frac{h_x(t,x)(h(t,x)v(t,x))_{xx}}{\sqrt{1+h_x^2(t,x)}}dx \tag{74}$$

利用（12），并按照 [25], 中引理 2.11 的证明进行分部积分，我们得到

由（74）和定义（72），对所有 $t>0$:

$$\frac{d}{dt}W(h[t],v[t])=-\mu g\|h_x[t]\|_2^2+f(t)\int_0^L(h(t,x)v(t,x)+\mu h_x(t,x))\,dx$$
$$+\sigma\int_0^L v(t,x)\left(\frac{1+h_x^2(t,x)+h(t,x)h_{xx}(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}\right)_x dx$$
$$+\mu\sigma\int_0^L h^{-1}(t,x)h_x(t,x)\left(\frac{1+h_x^2(t,x)+h(t,x)h_{xx}(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}\right)_x dx$$
$$-\sigma\int_0^L\frac{h_x(t,x)(h(t,x)v(t,x))_{xx}}{\sqrt{1+h_x^2(t,x)}}dx \tag{75}$$

利用（16）、（70）、（71）以及以下事实

$$h(t,x)\left(\frac{h_{xx}(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}\right)_x=\left(\frac{1+h_x^2(t,x)+h(t,x)h_{xx}(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}\right)_x \tag{76}$$

由（75）可得，对于所有 $t>0$，等式（67）成立。证明完毕。 □

引理 3。给定常数 q、k、$\delta>0$。则存在一个非递减函数 $\Lambda:[0,R)\to(0,+\infty)$，其中 $R>0$ 由（36）定义，使得对于每个（ξ、w、h、v）$\in X$，其中 $v\in H^1(0,L)$，$h\in H^2(0,L)$ 且 $V(\xi、w、h、v)<R$，以下不等式成立：

$$\frac{V(\xi,w,h,v)}{\Lambda(V(\xi,w,h,v))}\le\left\|h'\right\|_2^2+\int_0^L\frac{(h''(x))^2}{\left(1+(h'(x))^2\right)^{3/2}}dx$$
$$+\int_0^L h(x)(v'(x))^2\,dx+\xi^2+(w+k\xi)^2 \tag{77}$$

证明。设任意的 $(\xi,w,h,v)\in X$ 满足 $v\in H^1(0,L)$，$h\in H^2(0,L)$，且 $V(\xi,w,h,v)<$实数集。利用 [25] 中引理 2.12 的证明所用的相同论证，以及以下事实：

$$\int_0^L\left(\sqrt{1+(h'(x))^2}-1\right)dx\le\left\|h'\right\|_2^2 \tag{78}$$

我们得到以下估计：

$$V(\xi,w,h,v)\le\frac{L^2(\delta+2)Q_2(V(\xi,w,h,v))}{2\pi^2Q_1(V(\xi,w,h,v))}\int_0^L h(x)(v'(x))^2dx$$
$$+\left(\frac{(\delta+1)\left(gL^2+2\sigma\right)}{2}+\frac{\mu^2}{Q_1(V(\xi,w,h,v))}\right)\left\|h'\right\|_2^2+\frac{qk^2}{2}\xi^2+\frac{q}{2}(w+k\xi)^2$$
$$\le\Lambda(V(\xi,w,h,v))$$
$$\times\left(\left\|h'\right\|_2^2+\int_0^L\frac{(h''(x))^2}{\left(1+(h'(x))^2\right)^{3/2}}dx+\int_0^L h(x)(v'(x))^2dx+\xi^2+(w+k\xi)^2\right)\quad(79)$$

其中

$$\Lambda(s):=\frac{1}{2}\max\left(\kappa_1+\frac{2\mu^2}{Q_1(s)},\frac{\kappa_2Q_2(s)}{Q_1(s)},\kappa_3\right),\ \text{for } s\in[0,R)\quad(80)$$

其中 $\kappa_1:=(\delta+1)\left(gL^2+2\sigma\right)$, $\kappa_2:=L^2(\delta+2)/\pi^2$ 且 $\kappa_3:=q\max(1,k^2)$。根据定义 (80)，以及 $Q_2:\mathrm{R}_+\to\mathrm{R}$ 是增函数、$Q_1:\mathrm{R}_+\to\mathrm{R}$ 是递减函数这一事实，可知 $\Lambda:[0,R)\to(0,+\infty)$ 是非递减函数。不等式 (77) 直接由 (79) 得出。证明完毕。□

引理 4. 给定常数 $q,k,\delta>0$。那么存在非递减函数 $G_i:[0,R)\to(0,+\infty)$, $i=1,2$，其中 $R>0$ 由(36)定义，使得对于每个$(\xi,w,h,v)\in X$，当 $V(\xi,w,h,v)<R$ 时，以下不等式成立：

$$\left\|(\xi,w,h-h^*\chi_{[0,L]},v)\right\|_X^2\le V(\xi,w,h,v)G_1(V(\xi,w,h,v))\quad(81)$$

$$\frac{V(\xi,w,h,v)}{G_2(V(\xi,w,h,v))}\le\left\|(\xi,w,h-h^*\chi_{[0,L]},v)\right\|_X^2\quad(82)$$

其中$\|\cdot\|_X$由(45)定义。

证明。任取满足$V(\xi,w,h,v)<R$的$(\xi,w,h,v)\in X$。利用定义 (22)、(23)、(24)，不等式 (61)、(62)，可得不等式

$$\sqrt{1+(h'(x))^2}\le1+(h'(x))^2\quad(83)$$

由此得到（44）

$$V(\xi,w,h,v)\le\frac{\delta+2}{2}H_{\max}\|v\|_2^2+\frac{\delta+1}{2}g\left\|h-h^*\chi_{[0,L]}\right\|_2^2$$
$$+\left(\frac{\mu^2}{Q_1(V(\xi,w,h,v))}+\sigma(\delta+1)\right)\left\|h'\right\|_2^2+\frac{3qk^2}{2}\xi^2+qw^2\quad(84)$$

不等式（84）意味着不等式（82），其中

$$G_2(s) := \max\left(\frac{\delta+2}{2}H_{\max}, \frac{\delta+1}{2}g, \frac{\mu^2}{Q_1(s)} + \sigma(\delta+1), \frac{3qk^2}{2}, q\right), \quad \text{for } s \in [0, R) \tag{85}$$

Q_1：实数集$_+$ → 实数集是递减函数，根据上述定义可知，G_2：[0,实数集) →(0，+∞)是非递减函数。

不等式 (81) 的证明与 [25] 中引理 4 的证明完全相同。证明完毕。□

引理 5. 设常数 ω、k、q、$\delta > 0$和 $r \in [0,$实数集$)$已给定，其中 $R > 0$由(36)定义。那么，系统(8)-(12)、(14)、(16) 和(55)的每个经典解，对所有满足 $V(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) <$ 实数集的 $t > 0$，均满足以下不等式：

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}V(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) \le -\frac{3\mu g}{4}\|h_x[t]\|_2^2 - qk^3\xi^2(t) \\
&-\frac{\mu\delta}{2H_{\max}}\left(2H_{\max} - Q_1(r)\frac{Q_2(V(t))}{Q_1(V(t))}\right)\int_0^L h(t,x)v_x^2(t,x)dx \\
&-\mu\sigma\int_0^L \frac{h_{xx}^2(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}dx - q(q\theta(r)-k)(w(t)+k\xi(t))^2
\end{aligned} \tag{86}$$

其中 $V(t) = V(\xi(t), w(t), h[t], v[t])$，$\theta(r)$由(54)定义，而 Q_i:实数集$_+$ →实数集 $(i = 1,2)$ 是由(28) 和(29)定义的函数。

证明。 设 $\omega, k, q, \delta > 0$为给定常数，并设 $r \in [0, R)$ 为常数，其中$R > 0$ 由 (36) 定义。此外，考虑系统 (8)-(12)、(14)、(16) 和 (55) 在某一时刻$t > 0$的一个经典解，该时刻满足 $V(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) < R$。利用引理2、(66)、(67) 以及定义 (22)，并按照 [25] 中引理 2.14 证明的相同步骤，假设摩擦系数为零，可得以下不等式：

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}V(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) \le -\frac{3\mu g}{4}\|h_x[t]\|_2^2 - \mu\delta\int_0^L h(t,x)v_x^2(t,x)dx \\
&-\mu\sigma\int_0^L \frac{h_{xx}^2(t,x)}{\left(1+h_x^2(t,x)\right)^{3/2}}dx - q(q\theta(r)-k)(w(t)+k\xi(t))^2 - qk^3\xi^2(t) \\
&\qquad + \frac{\mu\delta\pi^2 Q_1(r)}{2L^2 H_{\max}}\int_0^L h(t,x)v^2(t,x)dx
\end{aligned} \tag{87}$$

由于$v(t,0) = v(t,L) = 0$(回顾 (12))，根据Wirtinger不等式及 (44)，可得：

$$\|v[t]\|_2^2 \le \frac{L^2}{\pi^2}\|v_x[t]\|_2^2 \le \frac{L^2}{\pi^2 Q_1(V(t))}\int_0^L h(t,x)v_x^2(t,x)dx \tag{88}$$

结合式（44）、（87）和（88），我们得到式（86）。证明完毕。 □

现在我们可以给出定理 1 的证明。

定理 *1* 的证明。设常数 $\omega, q, k, \delta > 0$ 满足 (53)。给定常数 $r \in$[0,实数集)。考虑满足 (55) 的系统 (8)-(12)、(14)、(16) 的一个经典解，且该解满足 $V(\xi(0), w(0), h[0], v[0]) \leq r$。设 $r \in (r, R)$ 是满足以下条件的常数：

$$\frac{Q_2(\overline{r})}{Q_1(\overline{r})} < \frac{2H_{\max}}{Q_1(r)} \tag{89}$$

$\overline{r} \in (r, R)$ 的存在性直接源于 (89) 中所涉及函数的连续性。

由 (53)、引理 5、(86) 和 (89)，以下蕴含关系成立：

$$\text{If } t > 0 \text{ and } V(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) \leq \overline{r} \text{ then } \frac{d}{dt} V(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) \leq 0 \tag{90}$$

如 [25] 中定理 2.6 的证明所示，反证可推出 $V(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) \leq r$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立。

蕴含关系 (90) 以及 $V(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) \leq r$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立这一事实意味着

$$\frac{d}{dt} V(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) \leq 0 \text{ for all } t > 0 \tag{91}$$

根据上述结果以及映射 $t \to V(\xi(t), w(t), h[t], v[t])$ 的连续性，我们得到

$$V(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) \leq V(\xi(0), w(0), h[0], v[0]) \leq r < R, \text{for all } t \geq 0 \tag{92}$$

因此，对于所有 $t \geq 0$，均有 $(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) \in X_V(r)$（回忆（46））。利用（92）和引理 5，我们得出（86）对所有 $t > 0$ 均成立。利用（92）、（86）以及 $Q_2 : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$ 是增函数，而 $Q_1 : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$ 是递减函数这一事实，我们得到对于 $t > 0$ 的如下估计

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} V(\xi(t), w(t), h[t], v[t]) \\ &\leq -\beta(r) \Bigg(\|h_x[t]\|_2^2 + \int_0^L h(t,x) v_x^2(t,x) dx + \int_0^L \frac{h_{xx}^2(t,x)}{\left(1 + h_x^2(t,x)\right)^{3/2}} dx \\ &\qquad + \xi^2(t) + (w(t) + k\xi(t))^2 \Bigg) \end{aligned} \tag{93}$$

其中

$$\beta(r) := \min\left(\frac{3\mu g}{4}, \frac{\mu\delta(2H_{\max} - Q_2(r))}{2H_{\max}}, qk^3, q(q\theta(r) - k), \mu\sigma \right) \tag{94}$$

注意到 (53) 以及 $r \in$[0,实数集) 这一事实，结合定义 (29)、(36)、(93)，可得 $\beta(r) > 0$。由引理 3、(77)、映射 $t \to V(\xi(t), w(t), h[t], v[t])$ 的连续性（回忆一下，$v \in C^0(\mathrm{R}_+; H^1(0, L))$），

$h \in C^1(\mathrm{R}_+ \times [0,L]; (0,+\infty))$ 且 $v \in C^0(\mathrm{R}_+ \times [0,L])$，由估计式 (92)、(93)、引理 4、(81) 和 (82) 可知，对所有 $t \geq 0$，以下估计成立：

$$\begin{aligned} &\left\|(\xi(t), w(t), h[t] - h^* \chi_{[0,L]}, v[t])\right\|_X^2 \\ &\leq \Omega(r) \exp\left(-\frac{\beta(r)\, t}{\Lambda(r)}\right) \left\|(\xi(0), w(0), h[0] - h^* \chi_{[0,L]}, v[0])\right\|_X^2 \end{aligned} \tag{95}$$

with

$$\Omega(r) := G_1(r)\, G_2(r) \tag{96}$$

其中，Λ 是式（77）中涉及的非递减函数，且 $G_i : [0,R) \to (0, +\infty)$（$i = 1, 2$）是式（81）、（82）中涉及的非递减函数。利用 $M = \mathrm{p}\Omega$（r）和 $\lambda = {}^{\beta}$（r）2Λ（r）得到估计（56）~~是估~~计（95）的推论。证明完毕。

□

5 结论

在本文中，我们证明了文献 [25] 提出的关于壁面摩擦具有鲁棒性的非线性反馈律，也能针对表面张力给出鲁棒稳定化结果。这进一步彰显了控制李雅普诺夫函数作为无限维情形下、由偏微分方程描述的系统的稳定化工具的重要性，并说明鲁棒性是控制李雅普诺夫函数方法所固有的特性。

本文研究了具有表面张力且无壁面摩擦的黏性圣维南系统。研究具有表面张力和壁面摩擦的黏性圣维南系统这一更具挑战性的问题，以及构造一个能够为流体速度的上确界范数提供界的附加泛函，都是值得关注的方向。此外，未来研究的其他主题还包括：研究闭环系统解的存在性与唯一性，研究具有非常数（动态）接触角的问题，研究输出反馈稳定化问题，构造适当的数值格式，以及推导更强空间范数下的稳定性估计。关于输出反馈稳定化问题，文献中有许多有趣的研究可以提供借鉴，例如 [26]，该研究提出了在诺伊曼驱动下对一维热方程进行有限维观测器控制的方法。

参考文献

[1] J. Auriol, F. Di Meglio, 异向线性耦合偏微分方程的最短时间控制, Automatica, 71（2016年）, 第300–307页。[2] A. J. C. Barr´e de Saint-Venant, 《非恒定水流运动理论：及其在河流洪水与潮汐引入中的应用》

在河床中，《法国科学院报告》，73（1871），第147–154页及第237–240页。[3] G. Bastin、J.-M. Coron 和 B. d’Andr´ea Novel，倾斜渠道线性化圣维南方程的李雅普诺夫稳定性，《网络与异质介质》，4（2019），第177–187页。[4] G. Bastin 和 J.-M. Coron，一维双曲系统的稳定性与边界镇定，Birkhäuser，2016年。[5] G. Bastin、J.-M. Coron 和 A. Hayat，*2×2*非线性双曲系统的前馈边界控制及其在圣维南方程中的应用，《欧洲控制杂志》，57（2021），第41–53页。[6] D. Bresch 和 B. Desjardins，二维黏性浅水方程全局弱解的存在性及其向准地转模型的收敛，《数学物理通讯》，238（2003），第211–223页。[7] D. Bresch 和 B. Desjardins，二维黏性浅水模型与可压缩纳维–斯托克斯模型近似解的构造，《纯数学与应用数学杂志》，86（2006），第362–368页。[8] D. Bresch 和 P. Noble，浅水模型的数学论证，《分析的方法与应用》，14（2007），第87–118页。[9] H. Brezis，泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程，Springer，2011年。[10] S. A. Chin-Bing、P. M. Jordan 和 A. Warn-Varnas，关于黏性一维浅水方程的注记：行波现象，《力学研究通讯》，38（2011），第382–387页。[11] J.-M. Coron，由浅水方程建模的含流体一维水槽的局部可控性，ESAIM：《控制、优化与变分法》，8（2002），第513–554页。[12] J.-M. Coron，控制与非线性，美国数学学会，2007年。[13] J.-M. Coron、B. d’Andr´ea Novel 和 G. Bastin，守恒律双曲系统边界控制的严格李雅普诺夫泛函，IEEE 自动控制汇刊，52（2007），第2–11页。[14] J.-M. Coron、A. Hayat、S. Xiang 和 C. Zhang，线性化水箱系统的稳定化，《理性力学与分析档案》，244（2022），第1019–1097页。[15] R. Defay、I. Prigogine 和 A. Bellemans，表面张力与吸附，Longmans，伦敦，1966年。

[16] J. de Halleux 和 G. Bastin，利用黎曼不变量稳定化圣维南方程：在带移动式溢洪道的水道中的应用，IFAC 会议论文集，35（2002），第 131-136 页。[17] A. Diagne、M. Diagne、S. Tang 和 M. Krstic，线性化圣维南–埃克斯纳模型的反步稳定化，Automatica，76（2017），第 345-354 页。[18] M. Diagne、S.-X. Tang、A. Diagne 和 M. Krstic，通过反步法控制两种未混合流体的浅水波，Annual Reviews in Control，44（2017），第 211-225 页。[19] J.-F. Gerbeau 和 B. Perthame，层流浅水流黏性圣维南系统的推导：数值验证，离散与连续动力系统，B辑，1（2001），第 89-102 页。[20] S. Hensel 和 A. Marveggio，具有 *90* 度接触角且黏度相同的两种流体的纳维–斯托克斯方程的弱-强唯一性，J. Math. Fluid Mech. 24，93（2022）。[21] A. D. Ionescu 和 F. Pusateri，具有表面张力的二维水波的整体正则性，arXiv:1408.4428 [math.AP]。[22] I. Karafyllis 和 M. Krstic，两个移动活塞之间可压缩流的全局稳定化，SIAM 控制与优化杂志，60（2022），第 1117-1142 页。[23] I. Karafyllis 和 M. Krstic，黏性液体的无溢漏转移与稳定化，IEEE 自动控制汇刊，67（2022），第 4585-4597 页。[24] I. Karafyllis、F. Vokos 和 M. Krstic，黏性液体-储罐系统的输出反馈控制及其数值近似，Automatica，149（2023），110827。[25] I. Karafyllis、F. Vokos 和 M. Krstic，对壁面摩擦具有鲁棒性的储液罐系统反馈稳定化，ESAIM 控制、优化与变分法，28（2022），81。[26] R. Katz 和 E. Fridman，通过降阶线性矩阵不等式实现一维抛物型偏微分方程的延迟有限维观测器控制，Automatica，142（2022），110341。[27] M. Klitz，具有动态接触角的液滴数值模拟，博士论文，Universit¨at 波恩，波恩，2014。[28] J. Lallement、P. Villedieu、P. Trontin 和 C. Laurent，用于描述薄部分润湿液膜动力学的浅水型模型，CFM 2017—— 23`ème Congr`es Franc¸ais de M´ecanique 会议论文集，法国里尔，2017。

[29] D. Lannes，水波问题：数学分析与渐近理论，美国数学学会，2013。[30] X. Litrico 和 V. Fromion，线性化圣维南方程振荡模态的边界控制，Automatica，42（2006），第 967-972 页。[31] D. Maity、T. Takahashi 和 M. Tucsnak，黏性气体中活塞运动建模系统的分析，数学分析与应用杂志，19（2017），第 551-579 页。[32] F. Marche，具有变化地形、底部摩擦和毛细效应的新型二维黏性浅水模型的推导效应，欧洲力学杂志 B辑/流体，26（2007），第 49-63 页。[33] C. Mascia 和 F. Rousset，具有真实黏性的圣维南方程稳态的渐近稳定性，载于《流体动力学分析与模拟》，2006，第 155-162 页。[34] G. J. Merchant、J. B. Keller，接触角，Physical Review Fluids A 4，477（1992），第 477-485 页。[35] N. Petit 和 P. Rouchon，水箱系统若干控制问题的动力学与解，IEEE 自动控制汇刊，47（2002），第 594-609 页。[36] C. Prieur 和 J. de Halleux，由浅水方程建模的含流体一维水箱的稳定化，系统与控制快报，52（2004），第 167-178 页。[37] B. Schweizer，动态接触角的适定模型，非线性分析，43（2001），第 109-125 页。[38] B. Schweizer，动态接触角建模，载于《偏微分方程：理论与数值解》，W. Jager、J. Necas、O. John、K. Najzar 和 J. Stara（编），CRC出版社，2000，第 309-311 页。[39] V. Shelukhin，黏性气体中活塞运动问题的唯一可解性，连续介质动力学，31（1977），第 132-150 页。[40] J. Smoller，激波与反应-扩散方程， 2^{nd} 版，施普林格出版社，纽约，1994。[41] L. Sundbye，黏性浅水方程狄利克雷问题的整体存在性，数学分析与应用杂志，202（1996），第 236-258 页。[42]K. Watanabe，有界圆柱体中不可压缩黏性流体的局部适定性，且具有 90°-接触角，arXiv:2008.05617 [math.AP]。[43] J. Yang 和 F. Stern，与运动物体相互作用的两相流的尖锐界面方法， 18^{th} AIAA计算流体力学会议论文集，迈阿密，佛罗里达州，2007。