arXiv:2301.01700v2 [cs.GT] 8 Aug 2024

小闭拟阵类的非自适应先知不等式

Kanstantsin Pashkovich、Alice Sayutina

滑铁卢大学组合学与优化系，200 University Avenue West，滑铁卢，安大略省，加拿大 N2L 3G1

摘要

我们研究拟阵先知不等式问题。自适应机制的情形已得到广泛研究。特别是，对于所有拟阵，都存在一个紧的 2-竞争机制 [KW12]。

然而，目前尚不清楚哪些类的拟阵能够支持具有常数保证的非自适应机制。近期， [CGKM20]证明了图拟阵存在竞争比为常数的非自适应机制。在本文中，我们证明若干已知类的拟阵都支持竞争比为常数的非自适应机制。

1 引言

我们考虑经典先知不等式问题 [KS77]。一名赌徒观察一列非负的独立随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，它们对应于物品 n 的一列价值。赌徒知道 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的分布。赌徒最多可以接受一件物品，且希望最大化所接受物品的价值。然而，赌徒不能直接选择价值最大的物品，因为这些物品 n 的价值是逐个揭示给赌徒的；每当当前物品的价值揭晓时，赌徒都必须立即决定是否接受该物品，且决定不可撤销。

赌徒应采用什么停止规则，才能使其接受的物品的期望值最大化？赌徒只知道 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的分布，而 先知 知道 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的实现。因此，与赌徒不同，先知总能获得价值最高的物品。Krengel 和 Sucheston 的开创性成果 [KS77] 表明，赌徒至少能获得先知所获期望值的一半。

经典先知不等式问题引出了一系列关于该问题不同变体的研究。一个自然的变体是对问题进行推广：赌徒可以购买多个物品，但所购物品集合必须满足已知的可行性约束。形式化地，设给定一个物品集合的集族 $\mathcal{S} \subseteq 2^{[n]}$ 。那么，赌徒和先知都可以从 $\mathcal{S}$ 中选取任意物品集合 S 。因此， $\mathcal{S}$ 定义了选择物品的可行性约束。在大多数标准的可行性约束示例中， $\mathcal{S}$ 可以定义为所有基数至多为某个自然数 k 的物品集合构成的集族，其中 k 。更一般地， $\mathcal{S}$ 可以定义为某个拟阵中的所有独立集构成的集族；在这种情况下，我们称之为 拟阵先知不等式问题。

[SC84] 的结果表明，在单物品场景中，赌徒通过采用以下阈值规则，可以获得至少一半的先知价值：根据已知分布确定一个常数 T，并接受第一个超过 T的物品。这一规则产生了一个 2-竞争机制，与 [KS77]的自适应方法类似。值得注意的是，已知这一近似保证是紧的。[KW12], 还提出了另一种设定阈值的方法，同样能产生一个 2-竞争机制。Chawla 等人在 [CHMS10] 和 [CGKM20] 中将其扩展到了多个物品的场景。

[KW12] 提出的结果还可进一步扩展到拟阵先知不等式，在此问题中，接受的物品必须构成一个已知拟阵中的独立集。这为每个拟阵都带来了一个 2-竞争机制，与单物品场景中的结果相匹配。然而，与单物品场景中的机制不同，拟阵的机制是自适应的：物品的阈值根据先前接受的物品来计算。根据 [KW12], , 对于由常数个拟阵交集定义的可行性约束，也存在一个常数竞争比的自适应机制。Dütting 和 Kleinberg 在 [DK15]中进一步将 Kleinberg 和 Weinberg 的机制扩展为适用于多拟阵的 2-竞争机制。

Gravin 和 Wang [GW19] 研究了这个问题的二分图匹配版本：在他们的版本中，到达的物品是已知二分图的边。Gravin 和 Wang 提出了一种竞争比为 3 的非自适应机制，为图中的每个顶点分配阈值，并且只有当一条边的权重至少等于其两个端点所对应阈值之和时，才接受该边。

Feldman、Svensson 和 Zenklusen [FSZ16] 研究了称为“在线竞争消解方案”（OCRS）的在线物品选择机制。他们证明，在满足某些特殊性质时，OCRS 可以直接转化为针对同一问题、对抗全能对手的常数竞争比先知不等式；也就是说，对手事先知道所有物品的实现以及算法生成的随机位。因此，他们为常数个拟阵、背包和匹配约束的交所对应的先知不等式，设计了常数竞争比机制。这些机制在某种意义上“几乎”是非自适应的：它们为所有物品设定阈值，但也施加了一项子约束，即如果某件物品与先前接受的物品一起构成某个固定禁集，就不能接受该物品。

最后，在其论文的后续版本中， [FSZ21], 证明，纯粹的非

自适应机制即使面对“正常”对手，也无法达到常数竞争比近似。他们构造了一族拟阵，证明对于含有 n 个元素的拟阵，非自适应机制的保证存在 $\Omega(\log n/\log\log n)$ 的下界。

已有研究探讨了目标不同但设置相似的问题。Chawla 等人 [CHMS10] 研究了在固定物品到达顺序下，或面对能够控制顺序的对手时的贝叶斯物品选择过程。他们从拍卖者收益最大化的角度对其进行了研究。与著名的 Myerson 机制 [Mye81], 相比，该机制具有常数竞争比；后者能在真实机制中实现最大的期望收益。Chawla 等人 [CHMS10] 提出的机制具有一项优势：它会确定静态阈值及一个子约束，从而能够以在线方式向每位代理人提供要么接受要么放弃价格。

近期，Chawla 等人 [CGKM20] 针对对手物品排序，为图拟阵开发了一种竞争比为 32 的非自适应机制。

1.1 我们的结果

首先，我们列出上一节中提到的已知非自适应机制结果。

定理1 (**秩为 1 的一致拟阵** 1 **拟阵** [SC84])。 在单物品场景中，存在一种竞争比为2的非自适应机制。

定理 2 (**图拟阵** [CGKM20])。 存在一种针对图拟阵、竞争比为32的非自适应机制。

现在列出我们的结果。对于简单图，即没有平行边或自环的图，我们可以通过考虑与 [CGKM20] 基本相同的机制，但对拟阵多面体中的一个点采用不同的缩放方式，略微改进上述定理。我们给出这一结果是为了完整起见。

定理 3. 对于简单图，存在一种针对图拟阵、竞争比为16的非自适应机制。

此外，机制 [CGKM20] 可以推广到k-列稀疏拟阵的情形。稍后我们将利用这一结果得到定理 8。

定理 4 (k-**列稀疏拟阵**)。 存在一种竞争比为$(2^{k+2}k)$的非自适应机制，适用于 k-列稀疏拟阵。

请注意，定理2 的 [CGKM20] 可由定理4推出，因为图拟阵也是一种2-列稀疏拟阵，定义在$\mathbb{F}_2$上。

采用与 [Sot13], 中类似的方法，我们还为余图拟阵设计了一种机制。

定理5 (**余图拟阵**)。 存在一种针对余图拟阵的竞争比为6的非自适应机制。

[Sot13] 中的方法立即得出关于 γ-稀疏拟阵的以下结果。

定理 6 (γ**-稀疏拟阵** [Sot13])。 存在一种针对 γ-稀疏拟阵、竞争比为 γ 的非自适应机制。

结合上述结果并利用经典的 Seymour 分解结果，我们得到以下定理。

定理 7 (**正则拟阵**)。 存在一种针对正则拟阵、竞争比为 256 的非自适应机制。

在 Geelen、Gerards 和 Whittle 提出的结构假设 1 下（该假设将在后文陈述），我们还可以推出以下结果。

定理 8。 在结构假设 *1*下，对于每个素数 p，对于每一个可在$\mathbb{F}_p$上表示的真次拟阵封闭类，都存在一种常数竞争机制。

我们还想指出，近期一些关于“单样本先知不等式”（SSPI）的结果可以导出常数竞争比的非自适应机制。为此，SSPI 中赌徒所需的单个样本可以由我们的赌徒直接从可用分布中抽取。特别是， [AKW19] 和 [CFPP21] 关于层状拟阵和截断分割拟阵的结果，受到 [MTW16] 中机制的启发，可导出用于先知不等式的非自适应机制。要获得这些结果，关键在于 [MTW16] 中的机制不涉及子约束；也就是说，只要物品不处于“观察阶段”，且该物品通过仅基于“观察阶段”设定的阈值，并与先前接受的物品构成独立集，就接受该物品。相比之下，目前尚不清楚如何从 [AKW19] 中基于 [DK14] 机制的正则拟阵结果中导出非自适应机制。

因此，可以分别直接从 [AKW19] 和 [CFPP21], 得到以下结果。

定理 9 (**层状拟阵** [AKW19])。 对于层状拟阵，存在一个9.6竞争比的非自适应机制。

定理 10 (**截断分割拟阵** [CFPP21])。 对于截断分割拟阵，存在一个8竞争比的非自适应机制。

2 与已知结果的比较

我们关于余图拟阵和 k 列稀疏拟阵的结果，分别通过修改 [Sot13] 和 [CGKM20], 中的论证得出。关于正则拟阵和次拟阵封闭拟阵族的结果，则遵循 [HN20] 中针对秘书问题提出的方法。作为必要的构建模块，我们使用了关于余图拟阵和双列稀疏拟阵的结果。请注意

对我们而言，最大的挑战之一是非自适应阈值与收缩之间的兼容性。事实上，推导收缩拟阵子式的机制时，标准工具需要使用子约束，而非自适应机制不允许使用子约束。为获得这些结果，我们仅在可由有限域表示的拟阵这一背景下解决了这个问题，相关论证见引理 8。若能知道在不假设拟阵可由有限域表示的情况下，收缩拟阵子式是否也有类似结果，将会很有意思。

3 预备知识

本文研究拟阵先知不等式问题，其中物品以对抗性顺序在线到达。对手知道所有 X_1、 X_2、.....、 X_n 的分布，也知道赌徒的机制，但对手不知道 X_1、 X_2、.....、 X_n 的实现。根据可获得的信息，对手可以决定赌徒观察到物品及其价值的顺序。

3.1 先知不等式

定义 1. 设 M 是定义在基集 $[n] := \{1, \ldots, n\}$上的拟阵，其中$[n]$ 对应于 n 个物品。设 $\vec{X} := (X_1, .., X_n)$ 是表示这些 n 个物品价值的非负独立随机变量。

- 对于物品 $S \subseteq [n]$ 的每个子集，我们定义其权重如下

$$w(S) := \sum_{i \in S} X_i.$$

- 令$\boldsymbol{PROPH}_M$ 为对应于先知所获价值的随机变量

$$\boldsymbol{PROPH}_M := \max_{S \in \mathcal{I}(M)} w(S)\,,$$

  其中， $\mathcal{I}(M)$ 是 M 的独立集族。

- 令 $\boldsymbol{EPROPH}_M$ 表示先知获得的价值期望

$$\boldsymbol{EPROPH}_M := E[\boldsymbol{PROPH}_M]\,.$$

定义 2。 给定一个数 $\alpha > 0$。

- 如果赌徒通过机制 α达到竞争比 （或者说，该机制保证 α近似），那么我们称该机制在拟阵 M 上具有此性质；其条件是赌徒通过该机制获得的期望值至少为 $\frac{1}{\alpha}$ $\boldsymbol{EPROPH}_M$。
- 我们称一个机制为 α-竞争比 （也可以说，该机制保证了 α-近似），若对于拟阵类 $\mathcal{M}$ 中的每个拟阵 $M \in \mathcal{M}$，该机制都是 α-竞争比。

3.2 非自适应机制

如果一个机制具有以下结构，我们就称它是非自适应的：

- 给定 $\vec{X} = (X_1, .., X_n)$的分布后，机制会确定阈值 $\vec{T} = (T_1, .., T_n)$的值，其中每个 T_i, $i \in [n]$ 都是实数或 $+\infty$。

- 如果观察到物品 $i \in [n]$ 的价值，赌徒当且仅当以下两个条件都成立时才接受物品 i：1. X_i 观察到的价值至少为 T_i；2. 物品 i 与所有先前选定的物品构成关于拟阵 M的一个独立集。

请注意，非自适应机制在其运行过程中不会改变阈值。因此，没有任何阈值取决于$\vec{X} = (X_1, .., X_n)$的实现。

非自适应机制的另一个关键特征是，该机制仅使用原始拟阵 M。非自适应机制不允许我们定义一个新的拟阵 M'，使得一个物品集合在M'中独立，当且仅当它在 M中独立，并基于2修改条件（ M'）。

在这项工作中，我们专注于非自适应机制。从这里开始及之后，我们使用机制一词**专指**非自适应机制。

注 1。在这项工作中，非自适应机制允许做出非确定性决策。因此，我们允许非自适应机制以非确定性的方式构造阈值 $\vec{T} = (T_1, ..., T_n)$。

为了衡量此类机制的性能，我们使用期望总价值，其中期望不仅是关于 $\vec{X} = (X_1, .., X_n)$，也是关于 $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_n)$的期望。

3.3 拟阵

我们在此回顾拟阵。熟悉相关内容的读者可以考虑跳过或略读本节。有关拟阵的更多结果，请参阅 [Oxl06]。

一个拟阵 $M = (E, \mathcal{S})$是由有限基集 E 和独立集的集合 $\mathcal{S} \subseteq 2^E$ 构成的一个二元组。子集 $\mathcal{S} \subseteq 2^E$ 的集合满足以下条件：

(i) 空集是一个独立集，因此 $\varnothing \in \mathcal{S}$。(ii) 集合族 $\mathcal{S}$ 对取子集运算封闭，因此对于所有 $A \subseteq B \subseteq E$，如果 B 属于 $\mathcal{S}$，那么 A 属于 $\mathcal{S}$。(iii) 集合族 $\mathcal{S}$ 满足所谓的增广性质。换言之，对于所有满足 A、$B \in \mathcal{S}$ 和 $|A| > |B|$ 的 A、$B \subseteq E$，存在 $c \in A \setminus B$ 使得 $B \cup \{c\} \in \mathcal{S}$。

E 的子集如果不属于 $\mathcal{S}$，则称为**相关**。包含关系下极大的独立集称为**基**，包含关系下极小的相关集称为**回路**。任意两个基的基数相等：对于 M 的任意两个基 A 和 B，都有 $|A| = |B|$。拟阵 M 的秩函数是一个函数 r_M：$2^E \to \mathbb{N}$，使得对于每个 $A \subseteq E$，值 $r_M(A)$ 等于 A 的包含关系下极大独立子集的基数。当上下文能够明确拟阵的选择时，我们用 r 代替 r_M。

给定一个拟阵 M，我们可以在相同的基集 E 上定义其**对偶拟阵** M^*。当且仅当 $E \setminus A$ 包含 M 的一个基时，集合 A 对拟阵 M^* 独立。若 $r_M(c) = 0$，则称元素 $c \in E$ 为 M 中的一个**环**。若 $r_{M^*}(c) = 0$，则称元素$c \in E$ 为 M 中的一个**自由元素**。换言之，元素 c 是自由元素，当且仅当对于每个在 M 中独立的集合 A，$A \cup \{c\}$ 在 M 中也独立。若 $r_M(c) = r_M(d) = r_M(\{c, d\}) = 1$，则称元素 c 和 $d \in E$ 在拟阵 M 中**平行**，记作 $c \parallel d$。可以证明，“平行”在 M 的非环元素上定义了一个等价关系。没有环且没有平行边的拟阵称为**简单拟阵**。

设 $M = (E, \mathcal{S})$ 是一个拟阵，且 $A \subseteq E$。M 关于 A 的**收缩** 记作 M/A，它是在基集 $E \setminus A$ 上的拟阵，其独立集如下

$$\{S \subseteq E \setminus A : S \cup A' \in \mathcal{S}\},$$

其中，A' 是 A 的包含极大独立子集。

M 在 A上的限制记作 $M|_A$ 或 $M \setminus \overline{A}$，它是在基集 A 上的拟阵，其中集合 $S \subseteq A$ 在 $M|_A$ 中独立，当且仅当它在 M中独立。

如果 M'由 M删除所有环并将每个平行类中的元素收缩为单个元素得到，则称拟阵 M'为 M的**简单化版本**。

对于拟阵 M、N，若对于某些互不相交的集合 A、$B \subseteq E$，N与 $M/A \backslash B$ 同构，则称 N是 $M = (E, \mathcal{S})$ 的拟 ***minor***。若对于任意 $M \in \mathcal{M}$，M 的每个拟 minor 也属于 $\mathcal{M}$，则称拟阵类 $\mathcal{M}$ 是**小子封闭**。

现在列举一些拟阵的经典例子，它们在数学的各个领域中都得到了广泛研究。

- 秩为 k 的**均匀拟阵** $M = (E, \mathcal{S})$ 是满足以下条件的拟阵：

$$\mathcal{S} := \{A \subseteq E : |A| \leq k\}.$$

当 $|E| = n$ 时，我们将秩为 k 的均匀拟阵记为 $U_{k,n}$。

- 图 $G = (V, E)$ 上的**图拟阵**是拟阵 $M = (E, \mathcal{S})$，其中

$$\mathcal{S} := \{A \subseteq E : A \text{ is acyclic}\}.$$

图 G 上的图拟阵记作 $M(G)$。

• 图 $G=(V,E)$上的余图拟阵是同一张图 G上的图拟阵的对偶拟阵 $M=(E,\mathcal{S})$。在这种情况下，我们有

$\mathcal{S}:=\{A\subseteq E:\ (V,E\backslash A)$ 的连通分支数与 (V,E) 相同$\}$.

• 向量拟阵 $vector$ matroid $M=(E,\mathcal{S})$ 是一种拟阵，其中存在一个向量空间 V和一个映射 ϕ: $E\to V$，满足

$$\mathcal{S}:=\{A\subseteq E:\ \text{multiset }\ \phi(A)\ \text{is linearly independent}\}.$$

给定一个域 F，若 M 与域 F 上的向量拟阵同构，则称其可在域 F 上可表示，其中 M 同构于向量拟阵，且 V是域 F 上的向量空间。
若一个拟阵可在任意域上表示，则称其为正则。若一个拟阵可在 F_2 上表示，则称其为二元。

• 一个 k-列稀疏 拟阵 $M=(E,\mathcal{S})$ 是一种拟阵，其中存在一个域 F、维数 m 和一个映射 ϕ: $E\to \mathrm{F}^m$，使得

$\mathcal{S}:=\{A\subseteq E:$ 多重集 $\phi(A)$ 在线性意义下关于 F$\}$ 独立;

并且 $\phi(c)\ \in \mathrm{F}^m$ 对每个$c\in E$至多有 k 个非零坐标。

• 一个 γ-稀疏拟阵 $M=(E,\mathcal{S})$是满足对每个 $S\subseteq E$不等式$|S|\leqslant \gamma r_M(S)$成立的拟阵。

• 一个层状拟阵 $M=(E,\mathcal{S})$是这样一种拟阵：在基集 E 上存在一个层状族 $\mathcal{F}$，并且存在数值 $c_F\in$N、$F\in\mathcal{F}$，使得

$$\mathcal{S}:=\{A\subseteq E:\ |A\cap F|\leq c_F \text{ for every } F\in\mathcal{F}\}.$$

此外，若 $\mathcal{F}=\{E,E_1,\ldots,E_k\}$，其中 E_1、.....、 E_k 构成基集 E的一个分割，则 M 称为截断分割拟阵。回顾一下，若对每个 A、 $B\in\mathcal{F}$，都有 $A\subseteq B$ 或$B\subseteq A$ 或 $A\cap B=\varnothing$，则称族 $\mathcal{F}$ 为层状。

给定一个拟阵 $M=(E,\mathcal{S})$，我们可以将相应的多面体$P_M\subseteq \mathrm{R}^E$ 定义为对应于独立集特征向量的点的凸包。已知多面体 P_M 具有如下外部描述 [Sch03]。

$$\begin{aligned}P_M=\{x\in\mathbb{R}^E\ :\ & x\geq 0 \text{ and}\\ & x(S)\leq r_M(S) \text{ for every } S\subseteq E\},\end{aligned}$$

其中， $x(S)$ 表示 $\sum_{c\in S}x_c$。

对于拟阵 $M=(E,\mathcal{S})$ 和集合 $A\subseteq E$，我们可以将 A 的闭包定义为以下集合

$$\mathrm{cl}_M(A):=\{c\in E\mid r_M(A\cup\{c\})=r_M(A)\}.$$

对于拟阵 $M=(E,\mathcal{S})$，我们将以下函数 $\sqcap_M\colon E\times E\to\mathbb{Z}$ 称为局部连通性函数

$$\sqcap_M(X,Y)=r(X)+r(Y)-r(X\cup Y)\,.$$

以下函数 $\lambda_M\colon E\to\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 称为连通函数

$$\lambda_M(X):=\sqcap_M(X,E\setminus X)=r(X)+r(E\setminus X)-r(E)\,.$$

非正式地说，连通函数衡量基集不同部分之间相对于拟阵的相关性。为说明这一点，我们来考察向量拟阵的连通函数。设 $M=(E,\mathcal{S})$ 是由向量空间 V 和映射 $\phi\colon E\to V$定义的向量拟阵。那么我们有

$$\begin{aligned}\lambda_M(S)=&r(S)+r(E\setminus S)-r(E)=\\&\dim(\operatorname{span}\phi(S))+\dim(\operatorname{span}\phi(E\setminus S))-\dim(\phi(E))=\\&\dim\left((\operatorname{span}\phi(S))\cap(\operatorname{span}\phi(E\setminus S))\right)\,.\end{aligned}$$

3.4 对拟阵多面体进行事前松弛

事前松弛 [FSZ16] 或 [CGKM20] 的目标，是将原始问题化简为物品价值服从独立伯努利随机变量分布的问题。请注意，这两个问题使用的是同一个拟阵。

在原始问题中，物品价值 $\vec{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ 是相互独立且分布已知的随机变量。对于 $i\in[n]$，令 F_i 为 X_i的累积分布函数。我们利用拟阵多面体 P_M中的一个点 p，将原始问题化简为一个新问题。首先按照 [CGKM20]中的论证，证明存在一个具有某些性质的点 $p\in P_M$，这些性质将在后文证明是理想的。

引理 1。给定一个定义在基集 $[n]$ 上的拟阵 M 以及随机变量$\vec{X}=(X_1,..,X_n)$，存在 $p\in P_M$使得

$$\boldsymbol{EPROPH}_M\leqslant\sum_{i=1}^{n}p_it_i\,,$$

其中 $t_i:=E[X_i\mid X_i\geqslant F_i^{-1}(1-p_i)]$ 对每个$i\in[n]$[1]。

证明。令 I_{opt} 为一个随机变量，表示相对于 $\vec{X}=(X_1,\ldots,X_n)$， M中的一个最优独立集。如果对于 $\vec{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ 的某个实现存在多个最优独立集，则 I_{opt}可以选取其中任意一个集。对于 $i\in[n]$，令 p_i 为元素

[1]这里，我们假设对于每个 $i\in[n]$，事件 $X_i=F_i^{-1}(1-p_i)$ 发生的概率为零；对于所有连续分布，这一条件都成立。对于离散分布，则需要引入适当的平局处理。

i属于 I_{opt}的概率。注意， $p=(p_1,\ldots,p_m)$ 是 M的独立集的凸组合，因此属于 P_M。

由于 $\mathbf{EPROPH}_M = E[\sum_{i\in I_{opt}} X_i]$，剩下要证明的是

$$E[\sum_{i\in I_{opt}} X_i] \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i t_i \,.$$

我们有

$$E[\sum_{i\in I_{opt}} X_i] = \sum_{i=1}^{n} P[i\in I_{opt}]E[X_i \mid i\in I_{opt}] = \sum_{i=1}^{n} p_i E[X_i \mid i\in I_{opt}] \,.$$

对于每个 $i\in[n]$，我们都有 t_i 和 $E[X_i \mid i\in I_{opt}]$ 是同一个随机变量 X_i 的期望，但分别以事件 $X_i \geqslant F_i^{-1}(1-p_i)$ 和事件 $i\in I_{opt}$ 为条件。注意，这两个事件的概率都等于 p_i。然而，以 $X_i \geqslant F_i^{-1}(1-p_i)$ 为条件时， X_i 的期望是 X_i 在概率为 p_i 的事件上的"最大"条件期望。因此，对于每个 $i\in[n]$ ，我们都有 $p_i E[X_i \mid i\in I_{opt}] \leqslant p_i t_i$ ，从而得到所需的不等式

$$\sum_{i=1}^{n} p_i E[X_i \mid i\in I_{opt}] \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i t_i \,.$$

□

下面说明如何利用引理 $p=(p_1,\ldots,p_n)$ 保证的点 1 来简化原问题。我们定义如下相互独立的伯努利随机变量 $\vec{X}'=(X'_1,..,X'_n)$，对于每个 $i\in[n]$

$$X'_i = \begin{cases} t_i & \text{with probability } p_i \\ 0 & \text{with probability } 1-p_i \,, \end{cases}$$

其中 $t_i := E[X_i \mid X_i \geqslant F_i^{-1}(1-p_i)]$。

假设我们对原始拟阵 M和物品价值 $\vec{X}'=(X'_1,\ldots,X'_n)$ 有一个非自适应机制，该机制设置非负阈值$\vec{T}'=(T'_1,\ldots,T'_n)$。根据 $\vec{X}'=(X'_1,\ldots,X'_n)$ 的定义，对于每个 $i\in[n]$， T'_i 的确切价值本身并不重要，关键在于它是否为 $t_i \geq T'_i$ 或$t_i < T'_i$。如果对于某个 $i\in[n]$，我们有 $T'_i > t_i$，那么该物品 i就是"非活跃"的，因此使用 M和 $\vec{X}'=(X'_1,\ldots,X'_n)$ 的赌徒永远不会选择它。

关键在于，为原拟阵 M 和物品价值 $\vec{X}'=(X'_1,\ldots,X'_n)$ 构造一个非自适应机制，并设置正阈值 $\vec{T}'=(T'_1,\ldots,T'_n)$，使得对于每个物品 $i\in[n]$ ，赌徒选中 i 的概率至少为 αp_i。现在，我们可以利用这种针对原拟阵 M 和物品价值 $\vec{X}'=(X'_1,\ldots,X'_n)$ 的非自适应机制，为同一拟阵 M 和随机变量 $X=$ 构造一个非自适应的 α-竞争机制

$(X_1, \ldots, X_n)$。我们将阈值 $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ 定义如下，对每个 $i \in [n]$

$$T_i := \begin{cases} +\infty & \text{if } t_i < T_i' \\ F_i^{-1}(1 - p_i) & \text{otherwise}. \end{cases}$$

为了说明阈值 $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ 能为 M 和 $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ 带来 α-竞争比的机制，我们按如下方式将随机变量 X_i' 与随机变量 X_i 耦合

$$X_i' := \begin{cases} t_i & \text{if } X_i \geq F_i^{-1}(1 - p_i) \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

注意，$\vec{X}' = (X_1', \ldots, X_n')$ 是相互独立的伯努利随机变量，其中对每个 $i \in [n]$，变量 X_i' 以概率 p_i 取值 t_i，以概率 $1 - p_i$ 取值 0。当以这种方式将 $\vec{X}'$ 与 $\vec{X}$ 耦合时，在给定 X_i' 为 t_i 的条件下，X_i 和 X_i' 的期望值相同。阈值为 $\vec{T}$ 的机制在运行于 $\vec{X}$ 时，仅当阈值为 $\vec{T}'$ 的机制在运行于 $\vec{X}'$ 时选中物品 i，才会选中物品 $i \in [n]$。此外，对于这两种算法，在物品 i 被选中的事件条件下，i 的期望值等于 t_i。现在，根据引理 1，阈值 T 对 $\neg M$ 和 X 的 α-竞争比保证随之成立。

4 图拟阵与 k-列稀疏拟阵

首先，我们为不含平行边的图拟阵构造一种竞争比为 16 的非自适应机制。我们的构造采用对拟阵多面体的先验松弛，沿用 [FSZ16] or [CGKM20] 中的工作。随后，我们证明只要 k 是常数，就可以为 k-列稀疏拟阵构造一种具有常数竞争比的非自适应机制。

4.1 图拟阵

现在我们可以为图拟阵提供一种竞争比为 16 的非自适应机制。该机制本质上是 [CGKM20] 中构造的机制，但其保证提升了 2 倍；这是通过将拟阵多面体中的点缩放 2 倍而非 4 倍实现的。

设有一个简单图 $G = (V, E)$，并考虑其在基集 E 上对应的图拟阵 M。回顾一下，E 的子集相对于 M 独立，当且仅当它在 G 中无环。另假设图 G 有 n 条边，因此 $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$。

引理 2. 设 $p = (p_1, \ldots, p_n)$ 是多面体 P_M 中的一个点。因此，我们假设对于每个 $i \in [n]$，p 中对应于边 e_i 的坐标为 p_i。那么，图 $G = (V, E)$ 中存在一种边的定向 $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$，使得对于每个顶点 $v \in V$，都有 $\sum_{i \in [n]: e_i \in \delta^-(v)} p_i \leq 2$。

证明. 注意，在一个有 $|V|$ 个顶点的森林中，顶点的平均度至多为 $(2|V|-2)/|V| = 2-1/|V| \leqslant 2$。

我们利用这一事实，通过对图 G中的顶点数进行归纳，证明所需结论。

如果图 G 至多有两个顶点，那么定向是平凡的。否则，由于 p 是 G中与森林对应的点的凸组合，因此所有顶点 $v \in V$ 上的值$\sum_{i\in[n]:e_i\in\delta(v)} p_i$ 的平均值至多为 2。因此，存在一个顶点 $v \in V$，使得$\sum_{i\in[n]:e_i\in\delta(v)} p_i \leq 2$成立。我们将所有关联于 v 的边定向为 $\delta^-(v)$中的边，因此这些边相对于 v均为入边。然后移除顶点 v 及所有关联于它的边，并按照归纳假设所保证的定向对剩余边进行定向。

□

现在我们给出一个适用于简单图的图拟阵的算法。

算法 1 简单图拟阵的一种非自适应 16-竞争机制

1: 取 p 为多面体 P_M 中的一个点，使引理 1 的结论成立。2: 对原图 $G = (V, E)$ 的边定向，使引理 2 的结论成立。3: 对于每条边 $e_i \in E, i \in [n]$，以概率 $1/2$将边 e_i 独立地随机标记为“舍弃”。4: 均匀随机选取一个割 $S \subseteq V$，将所有不属于 $[S$ 的边标记为“舍弃”。这里，$[S$表示这样一组边：其尾端位于 S，头端位于 $\overline{S}$。5: 按如下方式设置阈值 $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_n)$：对于每个 $i \in [n]T_i$，若 e_i为“舍弃”（$1 - p_i$），否则 。

引理 3. 对于每个 $i \in [n]$，我们都有

$$P[e_i \text{ is selected} \mid X_i \geq T_i \text{ and } e_i \text{ is not “discarded”}] \geq 1/2\,.$$

证明。 假设顶点 v 是有向边 e_i的头端。再假设 e_i 未标记为“已丢弃”，且 $X_i \geq T_i$。

由于边 e_i 未“丢弃”，边 e_i 属于选定集合 $[S;\ \overline{S}]$。因此，与 v 关联且未“丢弃”的每条边，其头端都是顶点 v 。

因此，只要赌徒没有选定另一条头端位于顶点 v 的边，赌徒就必须选定 e_i。我们声称，以至少 $1/2$的概率，赌徒没有选定另一条头端位于 v 的边。

令 I 表示这样一个事件：“赌徒选择了一条边 $e_j, j \neq i$，使得 v 是 e_j 的头端”，换言之，“存在 $j \in [n], j \neq i$，使得

v 是 e_j 和 $X_j \geq T_j$ 的头端，且 e_j 未被标记为“舍弃”。令 J 表示这样一个事件：“在选择割之后，e_i 未被标记为‘舍弃’”，换言之，“ e_i 的头端位于 $\overline{S}$，且 e_i 的尾端位于 S”。

我们来证明

$$P[I \mid J] \leq 1/2\,.$$

由并集界可得

$$P[I \mid J] \leqslant \sum_{j \in [n] \setminus \{i\} : e_j \in \delta^-(v)} P[X_j \geq T_j \text{ and } e_j \text{ is not “discarded”} \mid J]$$

注意，对于每条边 $e_j \in \delta^-(v)$，我们有 $P[X_j \geq T_j | J] = p_j$，并且还有 $P[e_j$ 不会被“丢弃”$|J] = 1/4$。注意，任意一条边在算法 1 的步骤 3 中不会被“丢弃”的概率为 $1/2$，在算法 1 的步骤 4 中不会被“丢弃”的概率为 $1/4$。然而，由于这些概率是针对边 $e_j \in \delta^-(v)$ 计算的，并且是在事件 J发生的条件下计算的，因此在算法 1的步骤 4 中不会被“丢弃”的条件概率为 $1/2$。此外，即使在 J 这些事件“$X_j \geq T_j$”和“e_j 不会被‘丢弃’”相互独立。因此，我们有

$$\sum_{j \in [n] \setminus \{i\} : e_j \in \delta^-(v)} P[X_j \geq T_j \text{ and } e_j \text{ is not “discarded”} \mid J] \leq \sum_{j \in [n] \setminus \{i\} : e_j \in \delta^-(v)} p_j/4 \leqslant 1/2\,,$$

最后一个不等式由定向可得。 □

我们现在通过证明算法 3 的竞争比为 1 ，来证明定理 16-，适用于没有平行边的图拟阵。

定理 3 的证明。 根据引理 3 对于每个 $i \in [n]$ 边 e_i在给定 $X_i \geq T_i$ 且未被“丢弃”的条件下被接受的概率至少为 $1/2$。

总的来说，边 e_i 被接受的概率至少为 $\frac{1}{16}p_i$。因此，该机制保证获得至少 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{16}p_i t_i$ 的期望总价值。根据引理 1，我们有 $\sum_{i \in [n]} \frac{1}{16}p_i t_i \geqslant \frac{1}{16}\mathbf{EPROPH}_M$，证明完毕。 □

4.2 k 列稀疏拟阵

在秘书问题的背景下，已有针对 k 列稀疏拟阵的常数竞争机制 [Sot13]。然而，这些机制并不能直接导出具有常数竞争保证的非自适应机制。原因并非阈值更新，而是所考虑的拟阵发生了隐式变化。

在此，我们为 k-列稀疏拟阵类中的每个常数 k给出一种竞争比为常数的机制。注意，图拟阵是2-列稀疏拟阵的子类。鉴于其重要性，2-列稀疏拟阵在文献中也称为表示框架拟阵。随后，我们将利用2-列稀疏拟阵证明第6.4节中的结果。

设 M 是域F上的 k-列稀疏拟阵。本节证明，存在一种适用于 M、竞争比为$(2^{k+2}k)$的机制。

假设 $M = (E, \mathcal{S})$ 的 k-稀疏表示由映射 $\phi : E \to \mathrm{F}^d$ 定义。注意，如果对于某个元素 $t \in E$，向量 $\phi(t)$ 是零向量，那么 c 是一个环，因此可以不予考虑。

现在我们考虑一个顶点集为 $[d]$ 的无向超多重图 G。每个拟阵元素 $t \in E$ 在该图中诱导出一条超边 e_t，连接 $\phi(t)$ 的非零坐标。形式上，超边 e_t 定义如下：$e_t := \{i \in [d] : \phi(t)_i \neq 0\}$。我们称超多重图 G 的顶点 $i \in [d]$ 与 G 中满足 $i \in e$ 的每条边 e 关联。对于顶点 $i \in [d]$，我们用 $\delta(i)$ 表示与其关联的超边集。超多重图 G 中顶点 i 的度等于 $|\delta(i)|$。

主张 1。 假设 I 是拟阵 M 的独立集。那么，在顶点为 $[d]$、超边为 $\{e_t : t \in I\}$ 的超多重图中，顶点的平均度至多为 k。

证明。注意到 $|I| \leqslant d$，因为在 d 维向量空间 F^d 中拥有多于 d 个向量会导致线性相关。

由于 M 是 k 列稀疏的，因此 $\{e_t$ 中的每条边：$t \in I\}$ 至多与 $[d]$ 中的 k 个顶点关联。因此，总度至多为 kd，从而顶点的平均度至多为 k。□

现在我们考虑图 G 的定向。图 G 的一个定向是一个函数 φ，它将每条边 e_t 映射到与 e_t 关联的 G 中的一个顶点。我们称 $\varphi(e_t)$ 为边 e_t 的头端，其余所有顶点（如果有）称为尾端。对于每个顶点 $i \in [d]$，我们将入边集合记为 $\delta^-(i)$，形式化地，$\delta^-(i) = \{e_t : \varphi(e_t) = i, \ t \in E\}$。

引理 4. 设 p 是多面体 P_M中的一个点。我们假设，对于每个$t \in E$，p 的坐标 p_t 对应于元素 t。那么，超多重图 G 中超边存在一种定向 φ，使得对于每个顶点 $i \in [d]$，都有 $\sum_{t \in E : e_t \in \delta^-(i)} p_t \leqslant k$。

引理的证明 4 与引理 2的证明类似。现在我们来描述一种适用于 k-列稀疏拟阵的算法。

引理 5. 对于每个 $t \in E$，都有

$$P[t \text{ is selected} \mid X_t \geq T_t \text{ and } t \text{ is not “discarded”}] \geq 1/2\,.$$

证明。注意，只要满足 $X_t \geq T_t$，且未从 $\delta^-(\varphi(t))$ 中未丢弃的边里选中其他物品，物品 $t \in E$ 就会被接受。根据并集界，对于每个事件 J，我们可以对其概率给出如下上界：

$$P[\text{there } j \in E \setminus \{t\} \text{ such that } j \text{ is selected and } e_j \in \delta^-(\varphi(t)) \mid J] \leqslant \sum_{j \in E \setminus \{t\} : e_j \in \delta^-(\varphi(t))} P[e_j \text{ is not “discarded” and } X_j \geq T_j \mid J]\,.$$

算法 2 一种非自适应的 $2^{k+2}k$ 竞争比机制，适用于 k 列稀疏拟阵

令 p 为多面体 P_M 中的一个点，使引理 1 的陈述成立。

将超多重图 G 的边定向，使得该陈述引理 4 成立。

对于每条边 $e_i \in E, i \in [n]$，独立地将边 e_i 标记为“已弃用”，弃用概率为 $1 - \frac{1}{2k}$。

均匀随机选取一个割 $S \subseteq [d]$，将所有不在 $[S;\overline{S}]$ 中的边标记为“已弃用”。这里，$[S;\overline{S}]$ 表示这样一组边：它们的定向满足所有尾端都在 S 中，且头端在 $\overline{S}$中。特别地，对于 $t \in E$，我们称 e_t 相对于定向 φ 位于割 $[S;\overline{S}]$ 中，当且仅当 $\varphi(e_t) \in \overline{S}$ 并且对于每个 $i \in e_t \setminus \{\varphi(e_t)\}$，我们都有 $i \in S$。

按如下方式设置阈值 $\{T_t : t \in E\}$，对每个 $t \in E$

$$T_t := \begin{cases} +\infty & \text{if } t \text{ is “discarded”} \\ F_t^{-1}(1-p_t) & \text{otherwise}. \end{cases}$$

令 J 表示事件“在割的选择之后，e_t 未被标记为“已丢弃””。那么对于每个 $j \in E\setminus\{t\}$，都有 $P[e_j$未被“丢弃”，且 $X_j \geq T_j \mid J] \leq \frac{1}{2k}p_j$。根据引理 4，我们有 $\sum_{j\in E:\ e_j\in\delta^-(\varphi(t))} p_j \leqslant k$，从而得到所需的不等式。 □

注意，引理 5 的证明类似于引理 3的证明。下面通过证明算法 2 对 $2^{k+2}k$ 具有 k竞争比，来证明定理：列稀疏拟阵。

定理 4的证明。对于每个物品 $t \in E$，我们有 $P[X_t \geq T_t] = p_t$ 且$P[t$未被“丢弃”$] \geq \frac{1}{2^{k+1}k}$。根据引理 5，我们知道，物品 $1/2$ 以至少 t 的概率在未被“丢弃”时被选中，并且 $X_t \geq T_t$。因此，算法 2 的期望总价值至少为 $\sum_{j\in E} \frac{1}{2^{k+2}k}p_j t_j$，而这至少为 $\frac{1}{2^{k+2}k}\mathbf{EPROPH}_M$（根据引理 1）。

□

5 余图拟阵与 γ-稀疏拟阵

5.1 余图拟阵

我们重新审视 Soto [Sot13] 针对余图拟阵秘书问题提出的一种机制，该机制基于 Edmond 拟阵划分定理 [Edm65]的以下推论。该机制导出了一种适用于余图拟阵的非自适应机制。

命题 1. 设 $G=(V,E)$ 是一个三边连通图。那么，存在生成树 H_1,H_2,H_3，使得它们的补集之并包含所有边 E，即 $E=(E\setminus H_1)\cup(E\setminus H_2)\cup(E\setminus H_3)$。

算法 3 一种适用于三边连通情形下余图拟阵的非自适应 3-竞争机制

1: 令 H_1、H_2 和 H_3 为命题 6中的生成树。2: 均匀随机地从 H_1、H_2 和 H_3 中选取一棵生成树 H^*。设置阈值 $\{T_e:\ e\in E\}$，如下所示，对每个 $e\in E$

$$T_e:=\begin{cases}+\infty & \text{if } e \text{ is not in } H^*\\ 0 & \text{otherwise}.\end{cases}$$

引理 6。 令 $G=(V,E)$ 为一个三边连通图，并令 M 为定义在 G上的余图拟阵。那么，算法 *3* 是拟阵 M的非自适应 *3*-竞争机制。

证明。 算法 3所提供机制的期望总价值 $E[\sum_{e\in E\setminus H^*}X_e]$ 等于以下内容，可以估算如下

$$E[\sum_{e\in E\setminus H^*}X_e]=\frac{1}{3}E[\sum_{i\in[3]}\sum_{e\in E\setminus H_i}X_e]\geq\frac{1}{3}E[\sum_{e\in E}X_e]\geq\frac{1}{3}\mathbf{EPROPH}_M\,.$$

□

下一个定理给出了定理 5的证明。

定理 11。 令 $G=(V,E)$ 为一个图，并令 M 为定义在 G上的余图拟阵。那么，算法 *4*是拟阵 M的非自适应 *6*-竞争机制。

证明。 我们可以假设 G 没有桥，因为每一条这样的桥在 M中都是一个环。因此，赌徒和先知都无法选择这些边。所以我们可以假设 $G=G'$ 和 $M=M'$。

如果 G 的每个连通分量都是三边连通的，那么算法 4 会对每个分量运行算法 3，从而得到一个 3-竞争性非自适应机制。

否则，存在一对或多对边 e,e'，使得 $\{e,e'\}$ 对应于 G中的一个割。在这种情况下，边 e,e' 对应于余图拟阵 M中的平行元素。

算法4 考虑将 E 划分为平行元素类 C_1,$C_2,\ldots,C_k$。我们通过收缩每个类中除一条边以外的所有边，构造拟阵 M''，它由 M得到 $C_1,C_2,\ldots,C_k$。注意， M''的基集有 k个元素。为方便起见，我们将基集中的这些元素称为

算法 4 适用于余图拟阵的非自适应6-竞争机制 1：删除 M 的所有自环，得到拟阵 M'。从 $G=(V,E)$ 中移除所有桥，得到图 $G'=(V',E')$。 2：令 $C_1,\ldots,C_k$ 为 M' 中关于平行关系的等价类。通过收缩每个等价类 $C_1,C_2,\ldots,C_k$ 中除一条边以外的所有边，从 M' 构造拟阵 M''。注意， M'' 的基集包含 k 个元素，且拟阵 M'' 是图 G'' 上的余图拟阵，其中 G'' 的每个连通分量都是三边连通的。为方便起见，我们仍将 M'' 基集中的元素记为 $C_1,C_2,\ldots,C_k$。 3：令 H_1,H_2 和 H_3 为 G'' 中的森林，使得将 H_1,H_2 和 H_3 限制到 G'' 的每个连通分量后，均满足相应连通分量的命题 6。 4：从 H_1,H_2 和 H_3 中均匀随机选取一个森林 H^*。 5：对于每个 $i\in[k]$，按照定理1 选取阈值 $\overline{T}_e$，$e\in C_i$；其中赌徒仅可接受 C_i 中的一个物品，且 $X_e,e\in C_i$ 的分布与 $e\in C_i$ 的价值原始分布相同。 6：按如下方式设置阈值 $\{T_e:\ e\in E\}$，对每个 $e\in E$

$$T_e := \begin{cases} \overline{T}_e & \text{if } e\in C_i \text{ and } C_i\in H^* \text{ for some } i\in[k] \\ +\infty & \text{otherwise}. \end{cases}$$

$C_1,C_2,\ldots,C_k$。拟阵 M'' 同构于图 G''上的余图拟阵，其中 G'' 的每个连通分量都是三边连通的。根据引理 6，算法 4 为图 H_1,H_2,H_3 构造森林 G''。

因此，算法 4 为我们带来了一个 6-竞争机制。事实上，拥有 M 且面对 X_e、 $e\in E$ 的原始分布的先知，其表现与拥有 M'' 且面对 X_i'' 的对应分布 $=\max_{e\in C_i}X_e$, $i\in[k]$ 的先知完全相同。通过在算法 4 中选择森林，当所有类 C_1、 C_2、.....、 C_k 都是单元素类时，赌徒的期望收益为 $E[\sum_{i\in[k]}X_i'']/3$。然而，对于非单元素类，我们还需要考虑相对于先知的另一个 2 倍近似因子：先知对每个 $i\in[k]$ 都能获得期望值 $E[X_i'']$，而赌徒则只能保证对每个 $i\in[k]$ 获得期望值 $E[X_i'']/2$。 □

5.2 伽马稀疏拟阵

我们还来重新考察 Soto [Sot13] 关于 γ-稀疏拟阵的一种机制，以验证它能直接导出一种非自适应机制。

定理 12. 设 $M=(E,\mathcal{S})$ 是一个 γ-稀疏拟阵。存在一种针对 M 的 γ-竞争性非自适应机制。

证明。 首先注意，点 $x:=\mathbb{1}/\gamma$ 属于拟阵多面体 P_M。

事实上，它是非负的，并且对于每个集合 $S \subseteq E(M)$，都有 $x(S) = |S|/\gamma \leqslant r_M(S)$。

那么， x 可以表示为与 M的独立集相对应的示性变量的凸组合。换言之，对于某些 $\alpha \geqslant 0$、 $\sum_{S\in\mathcal{S}} \alpha_S = 1$，有 $x = \sum_{S\in\mathcal{S}} \alpha_S \mathbb{1}_S$，其中 $\mathbb{1}_S$ 表示 S的特征向量。

现在，以概率 α_S从拟阵 M 中随机抽取一个独立集 S 。让赌徒选取 S 中的所有物品，并将 S 之外的所有物品都留作未选。

如果 X_e 是对应于元素 $e \in E(M)$权重的随机变量，那么该机制产生的总期望值如下

$$\sum_{S\in\mathcal{S}} \alpha_S \sum_{e\in S} E[X_e] = \sum_{e\in E} (1/\gamma) E[X_e] = E[\sum_{e\in E} X_e]/\gamma \geqslant \mathbf{EPROPH}/\gamma\,,$$

从而完成证明。 □

注意，命题1 意味着，对于三边连通图 G， G 的余图拟阵是3-稀疏的。因此，引理6 是定理12的推论。

类似地，对于平面图 G ，其图拟阵是3-稀疏的，由此得到以下推论。

推论 1. 设 G 是一个平面图， M 是其对应的图拟阵。对于 M，存在一个竞争比为3的竞争性非自适应机制。

6 可表示拟阵

拟阵理论中的许多结果都会用到由限制和收缩得到的拟阵子式。为了利用拟阵理论提供的工具箱，我们需要了解在考虑拟阵子式时，先知不等式的保证会如何变化。

6.1 预备知识

引理 7. 设 M 是一个拟阵，且拟阵 N 是拟阵 M的一个限制。如果在 M上存在一个竞争比为 α的非自适应机制，那么对于 N，就存在一个竞争比为 α的非自适应机制。

证明. 为了为拟阵 N构造一个机制，我们可以为从基集中移除、以便从拟阵 M 得到其限制 N的物品设定阈值 $+\infty$。其余物品在两个机制中使用相同的阈值。

□

对于非自适应机制，收缩的类似结果更难获得。事实上，一种直接的方法需要我们为收缩后的物品设定阈值 $+\infty$ ，同时对剩余物品使用给定的

机制。遗憾的是，这还要求我们“改变”底层拟阵；换句话说，赌徒可能被迫拒绝某件物品，尽管它的价值超过了指定的阈值，而且将它加入当前选定的物品后，选定集合相对于 M 仍然是独立的。

由于这一困难，本文仅针对可在有限域上表示的拟阵，给出了关于收缩的匹配结果。该结果足以满足本文的目的。

引理 8. 设 $M = (E, \mathcal{S})$ 是一个可在域 $\mathbb{F}_p$ 上表示的拟阵，其中 p。设 $T \subseteq E$ 是基集的一个子集，使得 $\lambda_M(T) \leqslant k$，其中 k。

那么存在 $S \subseteq T$，使得 $M|_S$ 中的每个独立集也是 $M/_{\overline{T}}$ 中的独立集，并且

$$\boldsymbol{EPROPH}_{M|_S} \geqslant \frac{1}{p^{k+1}} \boldsymbol{EPROPH}_{M/_{\overline{T}}}.$$

回想一下，$\overline{T}$ 表示相对于基集 E而言， T 的补集。

证明。 考虑拟阵 M 在 F_p 上的表示。令 $\phi: E \to \mathrm{F}_p^m$ 为描述 M 表示的映射。因此，对于每个 $S \subseteq E$，集合 $\phi(S) = \{\phi(e) \in \mathrm{F}_p^m: e \in S\}$ 在域 F_p 上独立，当且仅当 S 是拟阵 M 的一个独立集。

由于 $\lambda_M(T) \leqslant k$成立，根据 λ_M的定义，我们有

$$r_M(T) + r_M(\overline{T}) - r_M(E) \leqslant k.$$

对于每个 $R \subseteq E$，都有 $r_M(R) =$dim span($\phi(R)$)。因此，我们有
dim 张成空间 $\phi(E)$ =dim 张成空间 $\phi(T)$+dim 张成空间 $\phi(\overline{T})$−dim ((张成空间 $\phi(T)$) ∩(张成空间 $\phi(\overline{T})$)).
因此

$$\dim\left((\operatorname{span}\phi(T)) \cap (\operatorname{span}\phi(\overline{T}))\right) \leqslant k.$$

由于我们是在域 F_p上进行讨论，线性空间 $L :=$(span $\phi(T)$) ∩(span $\phi(\overline{T})$) 至多包含 p^k 个向量。令 C为线性空间 L 在空间 span $\phi(T)$中的正交补。因此，我们可以将 span $\phi(T)$ 表示为$L \oplus C$。对于 span $\phi(T)$中的每个向量 $v \in$，我们分别用 $v|_L$ 和 $v|_C$表示其在 L和 C 上的正交投影。

对于每个向量 $a \in L$，定义集合 $T_a := \{t \in T: \phi(t)|_L = a, \phi(t) \neq a\}$。注意，根据定义，对于每个 $a \in L$，都有 $T_a \cap L = \varnothing$。现在让我们从 L中均匀随机地选取a 。

断言 2. $E_a[\mathbf{EPROPH}_{M|_{T_a}}] \geq \frac{1}{p^k}\mathbf{EPROPH}^{M/_{\overline{T}}}$。

证明。 为了证明所需的不等式，我们证明对于物品价值的任意实现，相应的不等式都成立。从现在起，我们固定物品价值的实现，因此要证明以下不等式

$$E_a[\mathbf{PROPH}_{M|_{T_a}}] \geq \frac{1}{p^k}\mathbf{PROPH}_{M/_{\overline{T}}}$$

考虑先知实现 $\mathbf{PROPH}^{M/\overline{T}}$ 的集合 I_{opt}。注意，集合 I_{opt} 不包含任何满足 $\phi(e)$ 属于 L 的物品 e，因为每个这样的物品 e 都是 $M/\overline{T}$ 中的一个环。因此，集合 I_{opt} 可以分割为集合 $I_{opt,a}$, $a \in L$，其中 $I_{opt,a}$ 是 T_a 的子集。

集合 I_{opt} 在 $M/\overline{T}$ 中是独立的，因此 I_{opt} 在 M 中也独立。因此，集合 $I_{opt,\ a}$、$a \in L$ 在 M 中也独立。于是，对于每个 $a \in L$，$\mathbf{PROPH}_{M|_{T_a}} \geqslant w(I_{opt,\ a})$。因此我们有

$$E_a[\mathbf{PROPH}_{M|_{T_a}}] \geqslant \frac{\sum_{a\in L} w(I_{opt,a})}{|L|} = \frac{1}{|L|} w(I_{opt}) \geqslant \frac{1}{p^k} \mathbf{PROPH}_{M/\overline{T}},$$

至此命题得证。

□

现在，我们选择使 $\mathbf{EPROPH}^{M|_{T_a}}$ 最大化的 $a^* \in L$。根据前一个命题，我们有

$$\mathbf{PROPH}_{M|_{T_{a^*}}} \geqslant \frac{1}{p^k} \mathbf{PROPH}_{M/\overline{T}}.$$

现在，对每个 $c \in C$，定义集合 $H_c := \{t \in T_{a^*} : (\phi(t)\ |_C) \cdot c = 1\}$。现在，让我们从 C 中均匀随机地选择 c。

命题 3. $E_c[\mathbf{EPROPH}_{M|_{H_c}}] \geq \frac{1}{p} \mathbf{EPROPH}^{M|_{\overline{T}_{a^*}}}$.

证明。为了证明所需的不等式，我们证明对于物品价值的任意实现，相应的不等式都成立。从现在起，我们固定物品价值的实现，因此要证明以下不等式

$$E_c[\mathbf{PROPH}_{M|_{H_c}}] \geq \frac{1}{p} \mathbf{PROPH}_{M|_{\overline{T}_{a^*}}}.$$

令 I_{opt} 为与 $\mathbf{PROPH}^{M|_{T_{a^*}}}$相对应的集合。因此，对于每个 $e \in I_{opt}$，$\phi(e)$ 不属于 L，所以 $\phi(e)\ |_C$ 不是零向量。由于$P_c[c \cdot t = 1] = 1/p$，对于每个 $t \in T_{a^*}$，我们有

$$E_c[w(I_{opt} \cap H_c)] = \sum_{t\in I_{opt}} P_c[c \cdot t = 1] w(t) = \frac{1}{p} \sum_{t\in I_{opt}} w(t) = \frac{1}{p} w(I_{opt}) = \mathbf{PROPH}_{M|_{T_{a^*}}}.$$

最后，由于 I_{opt} 在 M 中是独立的，$I_{opt} \cap H_c$也如此。因此，我们有

$$E_c[\mathbf{PROPH}_{M|_{H_c}}] \geq \frac{1}{p} \mathbf{PROPH}_{M|_{\overline{T}_{a^*}}},$$

从而完成该命题的证明。

□

现在，选择 c^* 使得 $\mathbf{EPROPH}^{M|_{H_c}}$ 最大化，并令 $S^* := H_{c^*}$。于是我们有 $\mathbf{EPROPH}(M\ |_{S^*}) \geqslant \frac{1}{p^{k+1}} \mathbf{EPROPH}(M/\overline{T})$。

最后，我们需要证明，在 $M\ |_{S^*}$ 中独立的每个集合，都是 $M/\overline{T}$ 中的独立集。反设存在一个集合，它是独立的

在 $M|_{S^*}$ 中，但不是 $M/_{\overline{T}}$ 中的独立集。那么，张成空间 S^* 与张成空间 $\overline{T}$ 存在非平凡交集，设 $x \in$（张成空间 ϕ（S^*））$\cup$（张成空间 ϕ（$\overline{T}$））。我们来证明 x 是零向量。由于 $x \in$ 张成 S^*，因此对于某个 $\alpha_s \in \mathbf{F}_p$，$x = \sum_{s\in S^*} \alpha_s \phi$（$s$）。

考虑 x 在 C 和 L 上的投影。由于 $x \in$ 张成 ϕ（$\overline{T}$），我们有 x 属于 L，因此 $x|_C$ 是零向量。于是 $x|_C = \sum_{s\in S^*} \alpha_s$（$\phi$（$s$）$|_C$）是零向量。

注意，根据定义，ϕ（s）$|_L = a^*$ 和 $c^* \cdot$（ϕ（s）$|_C$）$= 1$ 对每个 $s \in S^*$ 都成立。因此，在域 $\mathbf{F}_p$ 上，我们有

$$\sum_{s\in S^*} \alpha_s = \sum_{s\in S^*} \alpha_s(c^* \cdot (\phi(s)|_C)) = c^* \cdot \left(\sum_{s\in S^*} \alpha_s(\phi(s)|_C)\right) = c^* \cdot (x|_C) = 0\,.$$

现在考虑 $x|_L$。我们有

$$x|_L = \sum_{s\in S^*} \alpha_s(\phi(s)|_L) = \left(\sum_{s\in S^*} \alpha_s\right) a^*\,,$$

其中，最后一个表达式等于零向量，因为 $\sum_{s\in S^*} \alpha_s = 0$。因此，存在一个向量 $x \in L \oplus C$，使得两个投影 $x|_L$ 和 $x|_C$ 都是零向量。于是，向量 x 是零向量，证明完毕。

□

6.2 树分解

与拟阵秘书问题中采用的 [HN20] 方法类似，我们广泛使用拟阵的树分解。有界厚度的树分解使我们能够构造具有良好近似比的非自适应机制。在继续介绍这些构造之前，我们先来引入树分解。

拟阵 $M = (E, \mathcal{S})$ 的树分解是一个二元组 $(T, \mathcal{X})$，其中 T 是一棵树，且 $\mathcal{X} = \{X_v \subseteq E\colon\ v \in V(T)\}$，其中 $\mathcal{X}$ 中的集合构成 E 的一个分割。这里，我们分别用 $V(T)$ 和 $E(T)$ 表示树 T 的顶点集和边集。

给定树 T 的一条边 $e = \{v_1, v_2\} \in E(T)$，设 T_1 和 T_2 是 $T - e$ 的两个连通分支，换句话说，从 T 中移除边 e 会得到两个连通分支 T_1 和 T_2。边 $e = (v_1, v_2)$ 的厚度记为 $\lambda(e)$，定义如下：

$$\lambda(e) := \lambda_M(\cup_{v\in V(T_1)} X_v)\,.$$

树分解的厚度是 $E(T)$ 中边 e 的最大厚度。

设 $\mathcal{M}$ 是一个拟阵族，M 是一个拟阵，且 $(T, \mathcal{X})$ 是 M 的树分解。若树分解 $(T, \mathcal{X})$ 是 $\mathcal{M}$-树分解

当 $M\mid_{cl_M(X_v)}\in\mathcal{M}$ 对每个 $v\in V(T)$ 都成立时。设 $t_k(\mathcal{M})$ 是一组具有厚度至多为 k 的 $\mathcal{M}$-树分解的拟阵。

定理 13. 设$\mathcal{M}_{\alpha,p}$ 是能够采用 α-竞争比非自适应机制，且可在有限域$\mathbb{F}_p$上表示的拟阵族。那么对于任意自然数 k 以及任意属于 $t_k(\mathcal{M}_{\alpha,p})$的拟阵 M，拟阵 M 都存在一个(αp^{k+1})-竞争比非自适应机制。

证明。 对于自然数 m，令$t_{k,m}(\mathcal{M}_{\alpha,p})$表示这样的拟阵集合：其中的拟阵具有一个厚度至多为 k的$\mathcal{M}_{\alpha,}${v15>-树分解$(T,\mathcal{X})$，且满足 $|V(T)|=m$。

我们通过对 m使用归纳法来证明引理中的陈述。基础情形由族$\mathcal{M}_{\alpha,p}$ 的定义以及$\mathcal{M}_{\alpha,p}=t_{k,1}(\mathcal{M}_{\alpha,p})$这一事实得出。

现在我们来说明如何进行归纳步骤。设 $m\geq 2$，并考虑属于$t_{k,m}(\mathcal{M}_{\alpha,p})$的拟阵 $M=(E,\mathcal{S})$，它具有一个厚度至多为 k的$\mathcal{M}_{\alpha,}${v16>-树分解$(T,\mathcal{X})$，且满足 $|V(T)|=m$。设 ℓ是树 T的一个叶节点，并设 u 是树 T中顶点 ℓ 的邻点。

注意，树 $(V(T)\setminus\{\ell\},E(T)\setminus\{\ell u\})$ 与子族$\{X_w\colon\ w\in V(T)\setminus\{\ell\}\}$ 共同构成拟阵$M\setminus X_\ell$的一个 $\mathcal{M}_{\alpha,p}$-树分解。因此，拟阵 $M\setminus X_\ell$ 属于 $M\in t_{k,m-1}(\mathcal{M}_{\alpha,p})$。于是，根据归纳假设，存在阈值 T'_e, $e\in E\setminus X_\ell$，使得在拟阵 $M\setminus X_\ell$上，赌徒相较于先知具有 αp^{k+1}-竞争比。

断言 4. 存在阈值 T''_e, $e\in X_\ell$，可构造一个针对拟阵 $M\mid_{X_\ell}$ 的$(\alpha\cdot p^{k+1})$-竞争性非自适应机制，使得赌徒始终选择一个在 $M/_{\overline{X_\ell}}$中独立的集合。

证明。 根据引理 8，存在一个集合 $S\subseteq X_l$，使得每个在 $M\mid_S$ 中独立的集合在拟阵 $M/\overline{X_\ell}$ 中也独立，并且

$$\mathbf{EPROPH}_{M|_S}\geqslant\frac{1}{p^{k+1}}\mathbf{EPROPH}_{M/_{\overline{X_\ell}}}.$$

根据 $\mathcal{M}_{\alpha,p}$ 的定义以及 X_ℓ 在树分解中的出现方式，我们知道 $M\mid_{X_\ell}$ 属于族 $\mathcal{M}_{\alpha,p}$。根据引理 7，由于 S 是拟阵 X_ℓ 的子集，拟阵 $M\mid_S$ 也属于族 $\mathcal{M}_{\alpha,p}$。因此，存在阈值 T''_e、$e\in S$，使得可以在 $M\mid_S$ 上构造一个竞争比为 α 的非自适应机制。阈值 T''_e、 $e\in X_\ell\setminus S$ 可定义为 $+\infty$，从而完成该断言的证明。 □

现在，我们可以如下定义拟阵 M 中所有元素的阈值 T_e、 $e\in E$

$$T_e:=\begin{cases}T'_e & \text{if } e\notin X_\ell\\ T''_e & \text{otherwise}.\end{cases}$$

现在我们证明，这样的阈值 T_e, $e\in E$ 能为 M 带来一个竞争比为 (αp^{k+1}) 的竞争性非自适应机制。

首先，根据上述结论，使用拟阵$M\mid_{X_\ell}$上的阈值 $T_e, e \in X_\ell$ 时，从 X_ℓ 中选出的物品始终构成 $M/\overline{X_\ell}$ 中的一个独立集。因此，根据阈值的定义，从 X_ℓ 中选出的物品的期望价值至少为 $\mathbf{EPROPH}_{M|_{X_\ell}}/(\alpha p^{k+1})$；而从 $E\backslash X_\ell$ 中选出的物品的期望价值至少为 $\mathbf{EPROPH}_{M\backslash X_\ell}/(\alpha p^{k+1})$

为完成证明，注意到我们有

$$\mathbf{PROPH}_{M|_{X_\ell}} + \mathbf{PROPH}_{M\backslash X_\ell} \geq \mathbf{PROPH}_M$$

因此

$$\mathbf{EPROPH}_{M|_{X_\ell}} + \mathbf{EPROPH}_{M\backslash X_\ell} \geq \mathbf{EPROPH}_M .$$

□

6.3 正则拟阵

在本节中，我们证明定理 7。在开始证明之前，我们先定义与正则拟阵相关的关键概念。

拟阵基集的子集若是一个按包含关系极小的相关集，就称为回路。圈 是基集的一个子集，它可以分割成若干回路的不交并。

设 $M_1 = (E_1, \mathcal{S}_1)$、 $M_2 = (E_2, \mathcal{S}_2)$ 是两个二元拟阵。那么，拟阵和 $M_1 \triangle M_2$ 的基集为 $E_1 \triangle E_2$ ，而 $M_1 \triangle M_2$ 的圈是所有形如 $C_1 \triangle C_2$ 的集合，其中 C_1 是 M_1 的一个圈，且 C_2 是 M_2 的一个圈。

定义 3. 考虑两个二元拟阵 $M_1 = (E_1, \mathcal{S}_1)$、 $M_2 = (E_2, \mathcal{S}_2)$ 和 $M = M_1 \triangle M_2$。

1. 如果 $|E_1 \cap E_2| = 0$，且 $E_1 \neq \varnothing$、 $E_2 \neq \varnothing$、 M 被称为 M_1 和M_2的1-和。*2.* 如果 $|E_1 \cap E_2| = 1$、 $|E_1| \geq 3$、 $|E_2| \geq 3$ 和 $E_1 \cap E_2$ 不是 M_1 或 M_2 或其对偶拟阵中的环，则称 M 为 M_1 和 M_2的2-和。*3.* 如果 $|E_1 \cap E_2| = 3$、 $|E_1| \geq 7$、 $|E_2| \geq 7$ 和 $E_1 \cap E_2$ 既是 M_1中的回路，也是 M_2 中的回路，并且 $E_1 \cap E_2$ 不包含其对偶拟阵中的回路，则称 M 为 M_1 和 M_2的3-和。

定理的证明 7。 根据 Seymour 正则拟阵分解定理 [Sey80],每个正则拟阵 M 都可以通过一系列 1-和、2-和或 3-和，从图拟阵、余图拟阵或某种特殊拟阵得到。

这给出了一个厚度至多为 2 的树分解 $(T, \mathcal{X})$，使得每个 $M\mid_{X_v}, v \in V(T)$ 都是图拟阵、余图拟阵或某种特殊拟阵 R_{10}。

在每次 2-和与 3-和之前，对待删除的元素进行平行扩张，我们构造出一个拟阵 M'，使得 M是 M'的限制，并且 M'具有树分解 $(T, \mathcal{X}')$，使得每个 $M'\mid_{\mathrm{cl}_{M'}(X'_v)}$、 $v \in V(T)$ 要么是图拟阵、余图拟阵，要么是 R_{10}的平行扩张。

根据定理 2，每个图拟阵都有一个 32-竞争比的非自适应机制。根据定理 5，每个余图拟阵都有一个 6-竞争比的非自适应机制。由于拟阵 R_{10} 的基集大小为 10，根据定理1，的每个平行扩张都有一个 20-竞争比的非自适应机制。

注意，根据定义，每个正则拟阵都可在有限域 $\mathbb{F}_2$上表示。因此，根据定理 13 以及 $p = 2$， $k = 2$ 和 $\alpha = 32$，存在一个适用于拟阵 256- 竞争性非自适应机制 M'。由于 M 是 M'的一个限制，根据引理 7，存在一个适用于 256-竞争性非自适应机制 M，证明完毕。 □

6.4 小子封闭的可表示拟阵族

本节将证明，每个可在 $\mathbf{F}_p$ 上表示的拟阵小子封闭子类，都存在一个常数竞争比的非自适应机制，其中该常数仅依赖于 p。这一结论的证明与 [HN20] 中的证明类似。

定理 14 (定理 4.3，见 [Gee11])。**给定自然数 和，设 (**E， $\mathcal{S}$) 是一个不含 $U_{2,\ q+2}$ 或 $M(K_n)$ 拟阵子式的拟阵。那么有 $|E| \leq q^{q^{3n}} r_M(E)$。

推论 2. 给定自然数 $q \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 1$，设 $M = (E,\ \mathcal{S})$ 是一个没有 $U_{2,\ q+2}$ 或 $M(K_n)$ 拟阵子式的拟阵。那么存在一个针对 M 的 $q^{q^{3n}}$-竞争比非自适应机制。

证明。若 M 没有 $U_{2、\ q+2}$ 或 $M(K_n)$ 拟阵子式，则 M 的每个限制也都没有 $U_{2、\ q+2}$ 或 $M(K_n)$ 拟阵子式。因此，对每个 $X \subseteq E$，都有 $|X| \leqslant q^{q^{3n}} r_M(X)$。所以， M 是一个 $q^{q^{3n}}$-稀疏拟阵，根据定理 12，存在一个针对 M 的 $q^{q^{3n}}$-竞争比非自适应机制。 □

6.4.1 投影与提升

设 M 是一个拟阵， x 是其基集中的一个元素，它既不是拟阵 M的环，也不是自由元素。则 M/x 称为 $M \setminus x$的投影； $M \setminus x$ 称为 M/x的提升 。注意，这里及下文中，我们分别用 M/x和 $M \setminus x$ 代替 $M/\{x\}$ 和 $M \setminus \{x\}$。

设 M 和 N 是具有相同基集的两个拟阵。我们称 M 与 N 之间的距离为 t，记作 $\mathsf{dist}(M, N) = t$，如果 t 是满足下述条件的最小整数：存在一个拟阵序列 $P_0, P_1, \ldots, P_t$，其中 $P_0 = M$ 且 $P_t = N$，并且对于每个 $i \in [t]$，拟阵 P_i 都是 P_{i-1} 的提升或投影。

引理 9。设 N 是拟阵 M 的提升。若存在一个适用于 M 的 α-竞争比非自适应机制，则存在一个适用于 N 的 $(2\alpha+2)$-竞争比非自适应机制。

证明。 由于 N 是 M 的提升，存在一个拟阵 $L=(E,\mathcal{S})$ 及其基集中的一个元素 x，使得 $M=L/x$、$N=L\backslash x$。这里，x 既不是环，也不是 L 的自由元素。

令 P 为 L 中与 x 平行的元素集合，换言之 $P:=\{x'\in E\colon x'\parallel x\}$。注意，$N|_{P\setminus\{x\}}$ 是秩1均匀拟阵。还要注意，$P\setminus\{x\}$ 中的元素在 M 中是环，因此 $\mathbf{EPROPH}_M=\mathbf{EPROPH}^{M\setminus P}$。

令 $T'_e,\ e\in E\setminus\{x\}$ 为针对拟阵 M 的一个 α-竞争性非自适应机制所设定的阈值。令 $T''_e,\ e\in P$ 为定理1中针对基集 $P\setminus\{x\}$ 上的秩1均匀拟阵、保证 2-竞争性非自适应机制的阈值；并令 $T''_e, e\in E\setminus(P\cup\{x\})$ 为 $+\infty$。我们按下文所述，为拟阵 N 选择这两组阈值中的一组。针对拟阵 N 的构造的机制会随机选择其中一组阈值：第一组阈值 $T'_e,\ e\in E\setminus\{x\}$ 的选取概率为 $\gamma:=\alpha/(\alpha+1)$，第二组阈值 $T''_e,\ e\in E\setminus\{x\}$ 的选取概率为 $1-\gamma=1/(\alpha+1)$。

接下来我们将分析阈值 $T'_e,\ e\in E\setminus\{x\}$ 在拟阵 N 上的表现。请注意，这些阈值来自拟阵 M 的一个机制，但以概率 γ 用于拟阵 N。我们证明，在 N 上使用阈值 $T'_e,\ e\in E\setminus\{x\}$ 所获得的总期望值，至少与在 M 上使用这些阈值所获得的总期望值相同。为此，我们可以假设，对于每一种物品价值的实现，拟阵 N 和 M 中物品的顺序相同。为说明这一假设成立，我们可以假设以对抗性的方式选择 N 的顺序，并将其同时用作 M 中物品的顺序。

断言 5. 假设对于给定的物品价值实现，M 和 N 中物品的顺序相同。再假设对于每个物品 $e\in E\setminus\{x\}$，都使用阈值 T'_e。那么，拟阵为 N 的贪婪会选中拟阵为 M 的贪婪所选中的所有物品。

证明。 我们固定物品价值的实现以及物品顺序。设 $e_1, e_2, \ldots, e_k$ 是其价值至少达到相应阈值、且顺序与之对应的物品。

现在我们需要证明：如果具有拟阵 N 的贪婪从 $e_1, e_2, \ldots, e_k$ 中从 e_1 开始贪心地选择物品，那么所选物品集合是具有拟阵 M 的贪婪贪心选择的物品集合的超集。如果两位贪婪最终选择的物品集合完全相同，那么该命题便得证。否则，考虑第一个满足物品 e_i 恰好被两位贪婪中的一位选中的下标 $i\in[k]$。由于 $N=L\backslash x$ 和 $M=L/x$，这只可能发生在：物品 e_i 被具有拟阵 N 的贪婪选中，而被具有拟阵 M 的贪婪拒绝。

现在我们声称，后续每个物品，换言之，$e_{i+1}, \ldots, e_k$中的物品，要么被两个贪婪都选中，要么被两个贪婪都拒绝。反设不然，并考虑第一个 $e_j,\ i+1\le j\le k$ 被一个贪婪选中、却被另一个贪婪拒绝的物品。令 $S:=\{e_1,e_2,\ldots,e_{j-1}\}$，并令 T 为从集合 S中选出 M 的贪婪所选物品的集合。因此

从集合 S中选出 $T \cup \{e_i\}$ 的是 N 的赌徒。因此， $T \cup \{e_i\}$ 是$(L \setminus x)$ $|_S$的一个基，而 T是(L/x) $|_S$的一个基。因此， $T \cup \{e_i\}$和 $T \cup \{x\}$都是 L $|_S$的基。如果两个赌徒中只有一个接受物品 s_j ，那么拟阵L $|_{S \cup \{s_j\}}$ 就有两个基数不同的基，从而产生矛盾，证明得证。 □

因此，我们得到阈值 T'_e、 $e \in E \setminus \{x\}$ 至少保证了赌徒在 N 下的期望总价值为 $\mathbf{EPROPH}_M$。要证明所构造的机制是 $1/(2\alpha + 2)$-竞争的，只需证明以下断言。注意，在我们的构造中，我们对拟阵 M 使用了 α-竞争性非自适应机制，并对 $P \setminus \{x\}$上的秩1均匀拟阵使用了2-竞争性非自适应机制。

断言6。 $\gamma \frac{1}{\alpha} \mathbf{EPROPH}_M + (1-\gamma) \frac{1}{2} \mathbf{EPROPH}_{P \setminus \{x\}} \geqslant \frac{1}{2\alpha+2} \mathbf{EPROPH}_N$

证明。考虑包含极大的集合 I_{opt} ，在该集合上先知实现了 $\mathbf{PROPH}_N$。设 C_{opt} 为一个随机变量，对应于 L中 $I_{opt} \cup \{x\}$ 的唯一回路。回忆一下， x 不是 L 的自由元素，因此这样的回路存在且唯一，并且包含 x。

首先考虑 $|C_{opt}| \geqslant 3$ 时的事件。注意，根据回路的定义，对于每个 $y \in C_{opt} \setminus \{x\}$ ，集合 $(I_{opt} \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ 在 L 中是独立的。因此，对于每个 $y \in C_{opt} \setminus \{x\}$ ，集合 $I_{opt} \setminus \{y\}$ 在 M 中是独立的。所以，在以 $|C_{opt}| \geqslant 3$ 为条件时，对于每个 $y \in C_{opt} \setminus \{x\}$，我们有 $\mathbf{PROPH}_M \geq w(I_{opt} \setminus \{y\})$。令 y_{opt} 为表示 $C_{opt} \setminus \{x\}$ 中取值最小的元素的随机变量。于是，在以 $|C_{opt}| \geqslant 3$ 为条件时，我们有$w(C_{opt} \setminus \{y_{opt}, x\}) \geq w(C \setminus \{x\})/2$。因此，在以 $|C_{opt}| \geqslant 3$ 为条件时，我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{PROPH}_M &\geqslant w(I_{opt} \setminus \{y_{opt}\}) = w(I_{opt} \setminus C_{opt}) + w(C_{opt} \setminus \{y_{opt}\}) \\ &\geq w(I_{opt} \setminus C_{opt}) + \frac{1}{2} w(C_{opt} \setminus \{x\}) \geq \frac{1}{2} w(I_{opt}) = \frac{1}{2} \mathbf{PROPH}_N \,. \end{aligned}$$

接下来考虑事件 $|C_{opt}| < 3$。根据定义， x 不是 L 中的环，因此我们有 $|C_{opt}| = 2$ ，于是对于某个随机变量元素 $x_{opt} \in P \setminus \{x\}$，有 $C_{opt} = \{x, x_{opt}\}$ 。对于事件 $|C_{opt}| \geq 3$ ，我们将随机变量元素 x_{opt} 定义为 $C_{opt} \setminus \{x\}$中的任意元素。因此，若 $|C_{opt}| < 3$ ，则 **先知**$_{P \setminus \{x\}} \geq w(x_{opt})$。现在定义 $J_{opt} := I_{opt} \setminus \{x_{opt}\}$ ，并注意到 J_{opt} 在拟阵 M中是独立的。此外，由于 I_{opt} 是先知取得 **先知**$_N$的集合，我们有：在给定 $|C_{opt}| < 3$的条件下，先知在集合 J_{opt}上取得**先知**$_M$ 。

综合以上各点，我们得到

$$\begin{aligned} &\gamma \frac{1}{\alpha} \mathbf{EPROPH}_M + (1-\gamma) \frac{1}{2} \mathbf{EPROPH}_{P \setminus \{x\}} = \\ &\frac{1}{\alpha+1} \mathbf{EPROPH}_M + \frac{1}{2\alpha+2} \mathbf{EPROPH}_{P \setminus \{x\}} \geq \\ &\qquad E\left[\frac{w(x_{opt})}{2\alpha+2} + \frac{\mathbf{PROPH}_M}{\alpha+1} \,\middle|\, |C_{opt}| < 3 \right] P\left[|C_{opt}| < 3\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ E\left[\frac{\mathbf{PROPH}_M}{\alpha+1}\,\middle|\,|C_{opt}|\geqslant 3\right] P\left[|C_{opt}|\geqslant 3\right] = \\
&E\left[\frac{w(x_{opt})}{2\alpha+2}+\frac{w(I_{opt}\setminus\{x_{opt}\})}{\alpha+1}\,\middle|\,|C_{opt}|<3\right] P\left[|C_{opt}|<3\right] \\
&+ E\left[\frac{\mathbf{PROPH}_M}{\alpha+1}\,\middle|\,|C_{opt}|\geqslant 3\right] P\left[|C_{opt}|\geqslant 3\right] \geq \\
&E\left[\frac{\mathbf{PROPH}_N}{2\alpha+2}\,\middle|\,|C_{opt}|<3\right] P\left[|C_{opt}|<3\right] \\
&+ E\left[\frac{\mathbf{PROPH}_M}{\alpha+1}\,\middle|\,|C_{opt}|\geqslant 3\right] P\left[|C_{opt}|\geqslant 3\right] \geq \frac{1}{2\alpha+2}\mathbf{EPROPH}_N\,.
\end{aligned}
$$

□

□

引理 10. 设 N 是通过对拟阵 M 进行一系列t 投影得到的拟阵。设 L 是拟阵 N 中自环的集合。假设拟阵 M 存在一个具有 α 竞争比的非自适应机制。那么，对于 $N\backslash L$ ，存在一个非自适应机制，使得该机制的期望总价值至少为 $\frac{1}{\alpha\cdot 3^t}\boldsymbol{EPROPH}^{M\setminus L}$。

引理 10的语境下，对于拟阵 $N\backslash L$ 独立的每个集合，对于拟阵 $M\setminus L$也独立。因此，我们有 $\mathbf{EPROPH}_{M\setminus L}\geq\mathbf{EPROPH}^{N\setminus L}$。因此，当 $t=1$时，引理 10 可推出以下推论。

推论 3。 设 N 是拟阵 M的一个投影。如果存在一个针对 M 的 α-竞争性非自适应机制，那么就存在一个针对 N的 3α-竞争性非自适应机制。

引理*10*的证明。 我们用归纳法证明该命题。当然，当 $t=0$ 时，有 $M=N$，命题显然成立。

现在假设 t至少为 1。设 N'为一个拟阵，使得 N'由拟阵 M经过一系列 $t-1$ 次投影得到，且 N 是 N'的一个投影。由于 N 是 N' 的一个投影，因此存在拟阵 $P=(E,\mathcal{S})$ 以及 $x\in E$，使得 $P\setminus x=N'$ 且 $P/x=N$。设 L' 为拟阵 N'中的自环集合。

根据归纳假设，存在阈值 T'_e， $e\in E\setminus(L'\cup\{x\})$ 使得在拟阵 $N'\backslash L'$下，赌徒获得的期望总价值至少为 $\frac{1}{\alpha\cdot 3^{t-1}}\mathbf{EPROPH}^{M\setminus L'}$。假设在计算阈值 T'_e，$e\in E\setminus(L'\cup\{x\})$时，将 L中物品的价值设为 0，而其他物品的价值分布保持不变。由于 $L'\subseteq L$，类似于引理 7，我们可以定义阈值

$$
T''_e:=\begin{cases}+\infty & \text{if } e\in L\\ T'_e & \text{otherwise}\end{cases}
$$

使得在拟阵 $N'\backslash L$ 下，赌徒获得的期望总价值至少为 $\frac{1}{\alpha\cdot 3^{t-1}}\mathbf{EPROPH}^{M\backslash L}$。令 T_e'''， $e\in E\setminus(L\cup\{x\})$ 为保证达到 2-竞争比的非自适应机制的阈值，如定理 1 所述，该定理针对基集 $E\setminus(L\cup\{x\})$上的秩为 1 的均匀拟阵。

拟阵 $N\backslash L$ 的构造机制会随机选择两组阈值中的一组：以 $1/3$ 的概率选择第一组阈值 T_e'', $e\in E\setminus(L\cup\{x\})$，以 $2/3$ 的概率选择阈值 T_e''', $e\in E\setminus($ $L\cup\{x\})$。请注意，阈值 T_e'', $e\in E\setminus(L\cup\{x\})$ 是为拟阵 $N'\setminus L$ 设计的，却用于拟阵 $N\setminus L$；因此，与用于 $N'\setminus L$ 时相比，可能会选中更少的物品。还请注意，阈值 T_e''',$e\in E\setminus(L\cup\{x\})$ 用于 $N\setminus L$，但它们是为秩为 1 的均匀拟阵设计的。

在分析中，令 I_{alg} 为赌徒在拟阵 $N'\setminus L$ 下使用阈值 T_e'', $e\in E\setminus($ $L\cup\{x\})$ 时所选物品集合的随机变量。类似于引理 9证明中的一个论断，我们可以假设，当使用阈值 T_e'', $e\in E\setminus(L\cup\{x\})$ 时，赌徒在$N\setminus L$ 中会选中所有物品，至多有一个例外。令 x_{opt} 为 $E\setminus(L\cup\{x\})$ 中最大值元素的随机变量。

要完成证明，只需证明以下不等式

$$\frac{1}{3}E[w(I_{alg})-w(x_{opt})]+\frac{2}{3}\frac{1}{2}E[w(x_{opt})]\geq\frac{1}{\alpha\cdot 3^t}\mathbf{EPROPH}_{M\backslash L}\,.$$

为得到这个不等式，我们可以进行如下估算

$$\frac{1}{3}E[w(I_{alg})-w(x_{opt})]+\frac{2}{3}\frac{1}{2}E[w(x_{opt})]=\frac{1}{3}E[w(I_{alg})]\geq\frac{1}{3}\frac{1}{\alpha\cdot 3^{t-1}}\mathbf{EPROPH}_{M\backslash L}\,.$$

□

现在让我们结合推论3 和引理 9。

引理 11. 设 M 和 N 是拟阵，满足 $\mathrm{dist}(M,N)\leq t$。如果拟阵 M 存在一个 α-竞争比的非自适应机制，且满足 $\alpha\geq 2$，那么拟阵 N存在一个 $3^t\alpha$-竞争比的非自适应机制。

证明。 注意，对于 $\alpha\geq 2$，我们有 $3\alpha\geq 2\alpha+2$。由于 N 可以通过一系列 t 投影和提升步骤从 M 得到，因此我们可以对每个步骤使用推论3 或引理 9，从而得到所需的竞争比。

□

6.4.2 小子封闭族定理

引理 12 ([HN20]中的引理 6)。 设 p和 n 为整数，使得 $p\leqslant n-2$，且 p为素数。拟阵 $U_{2,\ n}$ 在域 $\mathbb{F}_p$上不可表示。

以下结构假设由 Geelen、Gerards 和 Whittle 提出。该结构假设的证明尚未正式发表。

假设 1. 设 p 是一个素数，且 $\mathcal{M}$ 是一个可在$\mathbb{F}_p$上表示的真次拟阵封闭类。

那么存在 k, n, t ，使得每个 $M \in \mathcal{M}$ 都是一个$\mathbb{F}_p$-可表示拟阵 M' 的限制，该拟阵具有厚度至多为 k 的完全树分解 $(T, \mathcal{X})$，并且对于每个 $v \in V(T)$，如果 $M' |_{\mathrm{cl}_{M'}(X_v)}$有一个 $M(K_n)$拟 *minor*，那么就存在一个 2 列稀疏拟阵 N，满足 $\mathrm{dist}(M' |_{\mathrm{cl}_{M'}(X_v)} N) \leqslant t$。

定理 *8* 的证明。 设 k, n, t 如结构假设 1 中所述，关于$\mathcal{M}$。

设 $\mathcal{M}_1$ 为与某个 2 列稀疏拟阵的距离不超过 t 的拟阵集合，且这些拟阵可在 $\mathbb{F}_p$ 上表示。根据定理4 ，所有 2 列稀疏拟阵都有一个 32-竞争性非自适应机制。根据引理 11，对于集合 $\mathcal{M}_1$中的拟阵，存在一个 $3^t \cdot 32$-竞争性机制。

令 $\mathcal{M}_2$ 表示不含 M（K_n）拟 minor 且可表示于$\mathbb{F}_p$上的拟阵集合。由引理 12 可知， $\mathcal{M}_2$ 中的所有拟阵都不含$U_{2作为拟\ \mathrm{minor}_{p+2}}$ 。因此根据推论2，对于 $p^{p^{3n}}$中的每个拟阵，都存在一个具有 $\mathcal{M}_2$竞争比的非自适应机制。

根据结构假设1 ，每个 $M \in \mathcal{M}$ 都是某个 M'的限制，该 M'具有一个厚度至多为 k的完全树分解（T， $\mathcal{X}$），使得对于每个 $v \in V$（T）$M' |_{\mathrm{cl}_{M'}(X_v)} \in \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$。

因此，根据定理 13，拟阵 M'具有一个 $\gamma := (\max(3^t \cdot 32,\ p^{p^{3n}}) \cdot p^{k+1})$- 竞争性非自适应机制。根据引理 7 ，拟阵 M 也具有一个γ-竞争性非自适应机制。

□

参考文献

[AKW19] Pablo D. Azar、Robert Kleinberg 和 S. Matthew Weinberg。通过先知不等式实现先验独立机制，且信息有限。《博弈与经济行为》，118：511–532，2019。[CFPP21] Constantine Caramanis、Matthew Faw、Orestis Papadigenopoulos 和 Emmanouil Pountourakis。重新审视单样本先知不等式。*arXiv*，abs/2103.13089，2021。[CGKM20]Shuchi Chawla、Kira Goldner、Anna R Karlin 和 J Benjamin Miller。非自适应拟阵先知不等式。*arXiv* 预印本 *arXiv:2011.09406*，2020。[CHMS10] Shuchi Chawla、Jason D Hartline、David L Malec 和 Balasubramanian Sivan。多参数机制设计与顺序挂牌定价。载于第四十二届 *ACM*计算理论研讨会论文集，第 311–320 页，2010。[DK14] Michael Dinitz 和 Guy Kortsarz。正则拟阵和可分解拟阵的拟阵秘书问题。《*SIAM*计算杂志》，43(5)：1807–1830，2014。[DK15] Paul Dütting 和 Robert Kleinberg。多拟阵先知不等式。载于 *Algorithms-ESA 2015*，第 437–449 页。施普林格，2015。[Edm65] Jack Edmonds。将拟阵划分为独立子集的最小划分。《国家标准局研究杂志*B*辑》，69：67–72，1965。[FSZ16] Moran Feldman、Ola Svensson 和 Rico Zenklusen。在线竞争消解方案。载于第二十七届 *ACM-SIAM*离散算法年会论文集，第 1014–1033 页。SIAM，2016。[FSZ21] Moran Feldman、Ola Svensson 和 Rico Zenklusen。在线竞争消解方案及其在贝叶斯选择问题中的应用。《*SIAM*计算杂志》，50(2)：255–300，2021。[Gee11] Jim Geelen。拟阵中的小余回路。《欧洲组合学杂志》，32(6)：795–801，2011。[GW19] Nikolai Gravin 和 Hongao Wang。二分图匹配的先知不等式：简单且非自适应的优势。载于*2019*年 *ACM*经济学与计算会议论文集，第 93–109 页，2019。[HN20] Tony Huynh 和 Peter Nelson。小子封闭类和随机拟阵的拟阵秘书问题。《*SIAM*离散数学杂志》，34(1)：163–176，2020。

[KS77] Ulrich Krengel 和 Louis Sucheston。半鞅与有限值。《美国数学会通报》，83(4):745–747，1977。[KW12] Robert Kleinberg 和 Seth Matthew Weinberg。拟阵先知不等式。载于第四十四届 *ACM* 计算理论年度研讨会论文集，第 123–136 页，2012 年。[MTW16] Tengyu Ma、Bo Tang 和 Yajun Wang。用于若干次模拟阵秘书问题的模拟贪心算法。《计算机理论系统》，58(4):681–706，2016 年。[Mye81] Roger B Myerson。最优拍卖设计。《运筹学数学》，6(1):58–73，1981 年。[Oxl06] James G. Oxley。拟阵理论。牛津数学研究生教材。牛津大学出版社，2006 年。[SC84] Ester Samuel-Cahn。独立非负随机变量的阈值停止规则与最大值的比较。《概率年刊》，第 1213–1216 页，1984 年。[Sch03] A. Schrijver。组合优化：多面体与效率。算法与组合学第 1 卷。施普林格，2003 年。[Sey80] Paul D Seymour。正则拟阵的分解。《组合理论杂志》*B*辑，28(3):305–359，1980 年。[Sot13] José A Soto。随机分配模型中的拟阵秘书问题。《*SIAM*计算杂志》，42(1):178–211，2013 年。