arXiv:2301.01708v1 [math.CO] 4 Jan 2023

树的补图的离心率矩阵的极值问题

Iswar Mahato * M. Rajesh Kannan†

2023年1月5日

摘要

连通图 G的离心率矩阵记为 $\mathcal{E}(G)$，它由 G 的距离矩阵构造而成：保留每行和每列中的最大非零元素，其余元素置零。G 的 $\mathcal{E}$-特征值是 $\mathcal{E}(G)$ 的特征值，其中最大特征值是 G的 $\mathcal{E}$-谱半径。G 的 $\mathcal{E}$-能量是 G所有 $\mathcal{E}$-特征值绝对值之和。本文研究树的补图的离心率矩阵的一些极值问题，并刻画极值图。首先，我们确定在所有树的补图中，补图的 $\mathcal{E}$-谱半径最小（分别为最大）的唯一树。然后，我们证明树的补图的 $\mathcal{E}$-特征值关于原点对称。由此，我们刻画了在所有树的补图中，补图最小 $\mathcal{E}$-特征值最小（分别为最大）的树。最后，我们讨论树的补图的第二大 $\mathcal{E}$-特征值和 $\mathcal{E}$-能量的极值问题，并刻画极值图。作为应用，我们得到一棵树及其补图的第二大 $\mathcal{E}$-特征值和 $\mathcal{E}$-能量的 Nordhaus-Gaddum 型下界。

AMS学科分类（2010年）： 05C50,05C35.

关键词。 树的补图，离心率矩阵， $\mathcal{E}$-谱半径，第二大 $\mathcal{E}$-特征值，最小 $\mathcal{E}$-特征值， $\mathcal{E}$-能量。

1 引言

本文中，我们始终考虑有限简单连通图。设 $G = (V(G)\ E(G))$ 是一个图，其顶点集为 $V(G)$ $= \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，边集为 $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$。 G 中顶点的数量称为 G 的阶。若 G 中的两个顶点 u 和 v 相邻，则记作 $u \sim v$，否则记作 $u \nsim v$。 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 是一个 $n \times n$ 矩阵，其行和列由 G 的顶点索引，矩阵元素定义如下：

$$A(G)_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{if } u \sim v, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

*数学系，印度理工学院卡拉格普尔分校，印度卡拉格普尔 721302。电子邮箱：iswarmahato02@gmail.com, iswarmahato02@iitkgp.ac.in

†数学系，印度理工学院海得拉巴分校，印度海得拉巴 502285。电子邮箱：ra- jeshkannan1.m@gmail.com, rajeshkannan@math.iith.ac.in

设 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的特征值为 $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \ldots \geq \lambda_n(G)$。 $A(G)$ 的最大特征值是 G 的谱半径。 G 的能量（或 A-能量）定义为 $E_A(G) = \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i(G)\right|$。 G 中顶点 u 与 v 之间的距离记为 $d_G(u,v)$，它是 G 中连接这两个顶点的最短路径的长度；并定义对所有 $u \in V(G)$， $d_G(u,u) = 0$。 G 的距离矩阵 $D(G)$ 是一个 $n \times n$ 矩阵，其行和列由 G 的顶点索引，且第 (u,v) 个元素等于 $d_G(u,v)$。令 $N_G(v)$ 表示 G 中与顶点 v 相邻的顶点集合， $N_G(v)$ 称为 G 中 v 的邻域。顶点 $v \in V(G)$ 的离心率 $e_G(v)$ 是 G 中 v 到所有其他顶点的最大距离。 G 中所有顶点的最大离心率称为 G 的直径，记作 $\mathrm{diam}(G)$。直径路径是长度等于 G 的直径的路径。

图 G 的离心率矩阵记为 $\mathcal{E}(G)$，其中图 G 有 n 个顶点。该矩阵的行和列由图 G 的顶点索引，其元素定义如下:

$$\mathcal{E}(G)_{uv} = \begin{cases} d_G(u,v) & \text{if } d_G(u,v) = \min\{e_G(u), e_G(v)\}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

图 G 的离心率矩阵 $\mathcal{E}(G)$ 是实对称矩阵，因此其所有特征值均为实数。 $\mathcal{E}(G)$ 的特征值是 G 的 $\mathcal{E}$-特征值，其中最大特征值是 G 的 $\mathcal{E}$-谱半径。 G 的所有 $\mathcal{E}$-特征值构成 G 的 $\mathcal{E}$-谱。若 G 的不同 $\mathcal{E}$- 特征值为 $\xi_1 > \xi_2 > \ldots > \xi_k$，则将 G 的 $\mathcal{E}$- 谱记为

$$\mathrm{Spec}_{\varepsilon}(G) = \left\{ \begin{array}{cccc} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_k \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_k \end{array} \right\},$$

其中 m_i 是 $i = 1$ 中 ξ_i 的重数，2，.....， k。

谱极值问题是谱图论中的一个有趣问题。近来，图的离心率矩阵极值问题日益受到重视，并引起了研究人员的关注。在 [23], , Wei 等人研究了树的 $\mathcal{E}$-谱半径极值问题，并确定了所有具有 n 个顶点的树中 $\mathcal{E}$-谱半径最小的树。他们还刻画了给定直径的树中 $\mathcal{E}$-谱半径最小的树。在 [14], , 作者研究了给定直径的图的 $\mathcal{E}$-谱半径最小化问题，并刻画了极值图。此外，他们确定了具有最小 $\mathcal{E}$-谱半径的唯一二部图。Wang 等人 [19] 刻画了 $\mathcal{E}$-谱半径最小和次小的图，以及最小和次小 $\mathcal{E}$-特征值最大的图。最近，He 和 Lu [4] 研究了固定奇数直径的树的 $\mathcal{E}$-谱半径最大化问题，并确定了极值树。Wei 等人 [25] 刻画了 $\mathcal{E}$-谱半径次小的树，并确定了匹配数较小且 $\mathcal{E}$-谱半径最小的树。最近，Wei 和 Li [24]研究了完全多部图的主序与 $\mathcal{E}$-谱半径之间的关系，并确定了 $\mathcal{E}$-谱半径最小和最大的极值完全多部图。Mahato 和 Kannan [16]研究了树的第二大 $\mathcal{E}$-特征值极值问题，并确定了除星图外，所有具有 n 个顶点的树中第二大 $\mathcal{E}$-特征值最小的唯一树。关于图的离心率矩阵的更多进展，参见 [7, 8, 13, 15, 17, 18, 21, 22]。

图的离心率能量（或 $\mathcal{E}$-能量） G 定义为 [20] 如下

$$E_{\mathcal{E}}(G) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| ,$$

其中 ξ_1，ξ_2，……，ξ_n 是 $\mathcal{E}$ 的特征值。近年来，许多研究人员专注于图的离心率能量研究。在 [20], Wang 等人研究了图的 $\mathcal{E}$-能量，并得到了图的 $\mathcal{E}$-能量的一些界，确定了相应的极值图。Lei 等人[8] 得到了图的 $\mathcal{E}$-能量的一个上界，并刻画了极值图。最近，Mahato 和 Kannan [16] 研究了树的 $\mathcal{E}$-能量极小化问题，并刻画了在所有具有 n 个顶点的树中 $\mathcal{E}$-能量最小的树。关于图的 $\mathcal{E}$-能量的更多详情，请参阅 [14, 15, 18]。

受上述研究的启发，本文研究树的补图的离心率矩阵的极值问题，并刻画树的补图中关于 $\mathcal{E}$-谱半径、第二大 $\mathcal{E}$-特征值、最小 $\mathcal{E}$-特征值和 $\mathcal{E}$-能量的极值图。关于树的补图的其他图矩阵的极值问题已在 [2, 9, 10, 11] 中研究。设树 T，令 T^c 为 T的补图。全文中，我们始终假设 T^c 是连通的；因此， T 不同构于星图。令$\mathcal{T}_n^c$ 表示所有具有 n 个顶点的树的补图。注意，若 T 是满足 $\mathrm{diam}(T) > 3$ 的树，则 $\mathcal{E}(T^c) = 2A(T)$。若 $\mathrm{diam}(T) = 3$，则 $\mathcal{E}(T^c) \geq 2A(T)$ 按元素比较。由于 $A(T)$ 不可约，因此 $\mathcal{E}(T^c)$ 也不可约。

本文安排如下：第 2 节汇集所需的记号和一些预备结果。第 3 节刻画树的补图中具有最小和最大$\mathcal{E}$谱半径的极值图。由此，我们确定树的补图中具有最小和最大最小 $\mathcal{E}$特征值的唯一图。第 4 节和第 5 节分别讨论树的补图的第二大 $\mathcal{E}$特征值和 $\mathcal{E}$能量的极值问题。

2 预备知识

本节介绍一些记号，并汇集后续各节将用到的一些预备结果。首先，我们定义商矩阵和平衡划分。

定义 2.1 (平衡划分 [1])。 设 A 为一个实对称矩阵，其行和列由 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$索引。设 $\Pi = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ 为 X的一个划分。特征矩阵 C是一个 $n \times m$矩阵，其第 j列为 X_j的特征向量$(j = 1, 2, \ldots, m)$。将 A 按照 Π 划分为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm} \end{bmatrix},$$

其中， A_{ij} 表示由 A 中属于 X_i 的行和属于 X_j的列构成的子矩阵（块）。若q_{ij}表示 A_{ij}的平均行和，则矩阵 $Q = (q_{ij})$ 称为 A的商矩阵。若每个块 A_{ij} 的行和均为常数，则称划分 Π 为平衡划分。

在下述定理中，我们陈述一个关于与平衡划分对应的商矩阵的谱的著名结果。

定理 2.1 ([1]). 设 Q 是任意方阵 A 对应于某个平衡划分的商矩阵。那么， A 的谱包含 Q的谱。

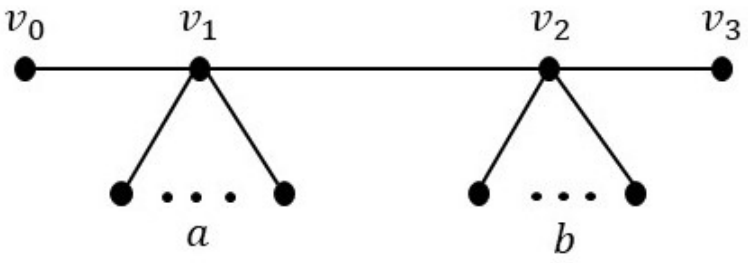

图 1：树 $T^{a,}{}_{n\,3}{}^{,b}$，其中 $a+b=n-4$。

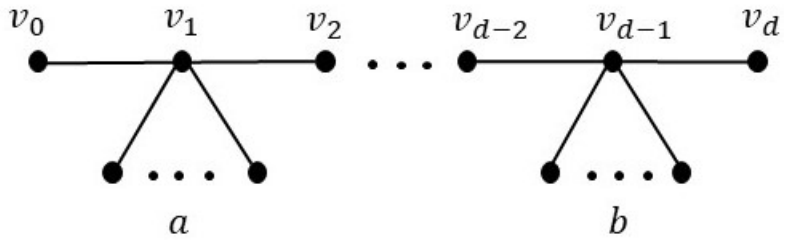

图 2：树 $D^{a,}{}_{n\,d,}{}^{b}$，其中 $a+b=n-d-1$ 和 $d\geq 4$。

令 K_n、P_n 和 $K_{1,n-1}$ 分别表示具有 n 个顶点的完全图、路和星图。对于 $d=3$，令 $T^a_{n\,d}{}^b$ 为由 $P_4=v_0v_1v_2v_3$ 通过分别向 v_1 添加 a 个悬挂顶点、向 v_2添加 b 个悬挂顶点得到的树，其中 $a+b=n-4$ 且 $b\geq a\geq 0$。对于 $d\geq 4$，令 $D^a_{n\,d}{}^b$为由 $P_{d+1}=v_0v_1v_2\ldots v_d$通过分别向 v_1添加 a个悬挂顶点、向 v_{d-1}添加 b个悬挂顶点得到的树，其中 $a+b=n-d-1$且 $b\geq a\geq 0$。树 $T^a_{n\,3}{}^b$和 $D^a_{n\,d}{}^b$分别如图 1 和图 2 所示。对于实数 x，令 $\lfloor x\rfloor$ 表示小于或等于 x的最大整数，令 $\lceil x\rceil$ 表示大于或等于 x的最小整数。在下面的引理中，我们计算树 $T^a_{n\,3}{}^b$的补图的 $\mathcal{E}$-谱，其中 $a+b=n-4$ 且 $b\geq a\geq 0$。

引理 2.1。对于满足 $a+b=n-4$ 的 $b\geq a\geq 0$，$(T^{a,}{}_{n\,3}{}^{,b})^c$ 的 $\mathcal{E}$-谱为

$$\mathrm{Spec}_{\mathcal{E}}\left((T^{a,b}_{n,3})^c\right)=\left\{\begin{array}{ccc}-\sqrt{\frac{4n+1\pm\sqrt{(4n+1)^2-64(a+1)(b+1)}}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{4n+1\pm\sqrt{(4n+1)^2-64(a+1)(b+1)}}{2}}\\ 1 & n-4 & 1\end{array}\right\}.$$

证明。令 $T^{a,}{}_{n\,3}{}^{,b}$ 为由 $P_4=v_0v_1v_2v_3$通过分别在 v_1处添加 a个悬挂顶点 u_1，……，u_a，并在 v_2处添加 b个悬挂顶点 w_1，……，w_b得到的树，其中 $a+b=n-4$且 $b\geq a\geq 0$。那么其

$(T^{a,\ n\ b}_{\ 3\ ,\ })^c$ 的离心率矩阵为

$$\mathcal{E}\big((T^{a,b}_{n,3})^c\big) = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ \vdots \\ u_a \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} u_1 & \dots & u_a & v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & w_1 & \dots & w_b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

容易看出，$\mathcal{E}\big((T^{a,\ n\ b}_{\ 3\ ,\ })^c\big)$ 的秩为 4。因此，$\mathcal{E}\big((T^{a,\ n\ b}_{\ 3\ ,\ })^c\big)$ 的特征值 0 的重数为 $n-4$。

若 $U=\{u_1,\dots,u_a,v_0\}$ 且 $W=\{v_3,w_1,\dots,w_b\}$，则 $\Pi_1=U\cup\{v_1\}\cup\{v_2\}\cup W$ 是 $\mathcal{E}\big((T^{a,\ n\ b}_{\ 3\ ,\ })^c\big)$ 的一个平衡划分，其商矩阵为

$$Q_1=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2(a+1) & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2(b+1) \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

直接计算可得，Q_1 的特征值为

$$\pm\sqrt{\frac{4a+4b+17+\sqrt{(4a+4b+17)^2-64(a+1)(b+1)}}{2}} \quad \text{and}$$
$$\pm\sqrt{\frac{4a+4b+17-\sqrt{(4a+4b+17)^2-64(a+1)(b+1)}}{2}}.$$

现在，将 $a+b=n-4$ 代入定理 2.1，即可得到证明。 □

在下面的定理中，我们求出具有 n 个顶点的路图的邻接能量。为使结果完整，我们给出该结果的证明。

定理 2.2。 n 个顶点的路 P_n 的能量为

$$E_A(P_n)=\begin{cases} 2\left(\cot\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)-1\right) & \textit{if } n \textit{ is odd,} \\ 2\left(\csc\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)-1\right) & \textit{if } n \textit{ is even.} \end{cases}$$

证明。我们知道，P_n 的特征值为 $2\cos\frac{\pi k}{n+1}$，$k=1,2,\dots,n$。利用公式 $\cos x+\cos 2x+\dots+\cos nx=\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\csc\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$（关于该恒等式的证明，请参阅

[6]），可得

$$
\begin{aligned}
E_A(P_n) &= \begin{cases} 4\Big(\cos\big(\frac{\pi}{n+1}\big)+\cos\big(\frac{2\pi}{n+1}\big)+\ldots+\cos\big(\frac{(n-1)\pi}{2(n+1)}\big)\Big) & \text{if } n \text{ is odd},\\ 4\Big(\cos\big(\frac{\pi}{n+1}\big)+\cos\big(\frac{2\pi}{n+1}\big)+\ldots+\cos\big(\frac{n\pi}{2(n+1)}\big)\Big) & \text{if } n \text{ is even}; \end{cases}\\
&= \begin{cases} 4\sin\big(\frac{(n-1)\pi}{4(n+1)}\big)\csc\big(\frac{\pi}{2(n+1)}\big)\cos\big(\frac{\pi}{4}\big) & \text{if } n \text{ is odd},\\ 4\sin\big(\frac{n\pi}{4(n+1)}\big)\csc\big(\frac{(n+2)\pi}{4(n+1)}\big)\cos\big(\frac{\pi}{4}\big) & \text{if } n \text{ is even}; \end{cases}\\
&= \begin{cases} 2\Big(\cos\big(\frac{\pi}{2(n+1)}\big)-\sin\big(\frac{\pi}{2(n+1)}\big)\Big)\csc\big(\frac{\pi}{2(n+1)}\big) & \text{if } n \text{ is odd},\\ 2\Big(\sin\big(\frac{\pi}{2}\big)-\sin\big(\frac{\pi}{2(n+1)}\big)\Big)\csc\big(\frac{\pi}{2(n+1)}\big) & \text{if } n \text{ is even}; \end{cases}\\
&= \begin{cases} 2\Big(\cot\big(\frac{\pi}{2(n+1)}\big)-1\Big) & \text{if } n \text{ is odd},\\ 2\Big(\csc\big(\frac{\pi}{2(n+1)}\big)-1\Big) & \text{if } n \text{ is even}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

□

现在，我们汇集一些关于树的邻接矩阵的谱半径、第二大特征值和能量的结果。

定理 2.3 ([12])。 设 T 是一棵有 n 个顶点的树。那么 $\lambda_1(T) \geq 2\cos\frac{\pi}{n+1}$，当且仅当 $T \cong P_n$ 时等号成立。

定理 2.4 ([5, 定理 2])。 设 T 是一棵有 $n \geq 4$ 个顶点的树，且 $T \ncong K_{1,\,n-1}$。那么$\lambda_1(T) \leq \sqrt{n-1+\sqrt{n^2-6n+13}}{2}$，当且仅当 $T \cong T^{0,\,n-4}_{3}$，时等号成立。

定理 2.5 ([26, 定理 2])。 设 T 是一棵阶为 $n \geq 4$ 且 $T \ncong K_{1,\,n-1}, T^{0,\,n-4}_{3}$，的树。那么$\lambda_2(T) \geq 1$。

定理 2.6 ([5, 定理 10])。 设 T 是一棵有 $n \geq 4$ 个顶点的树。

1. 若 $T \ncong T^{s-1,\,s-1}_{n\,5}$，，则 $\lambda_2(T) \leq \sqrt{\frac{n-3}{2}}$。当且仅当 $n = 2s+3$ 且 $T \cong T^{s-1,\,s-1}_{n\,4}$，，$T^{s-2,\,s-1}_{n\,5}$，，$T^{s-2,\,s-2}_{n\,6}$，时，等号成立。

2. 若 $T \cong T^{s-1,\,s-1}_{n\,5}$，，则 $\lambda_2(T) = x$，其中 x 是方程$x^3+x^2-(s+1)x-s=0$的正根。

引理 2.2 ([3, 命题 4])。 设 T是一棵有 $n \geq 2$个顶点的树，且 T与$K_{1,\,n-1}, T^{0,\,n-4}_{3}$，，$T^{1,\,n-3}_{3}$，不同构，且 $T^{0,\,n-5}_{4}$，。则

$$E_A(T) > E_A(T^{0,n-5}_{n,4}) > E_A(T^{1,n-3}_{n,3}) > E_A(T^{0,n-4}_{n,3}) > E_A(K_{1,n-1}).$$

引理 2.3 ([3, 命题 3])**.** 设 T 是一棵具有 $n \geq 2$ 个顶点的树，满足 $T \ncong K_{1,n-1}, P_n$. 则

$$E_A(K_{1,n-1}) < E_A(T) < E_A(P_n).$$

接下来，我们给出一个关于树的最小第二大 $\mathcal{E}$-特征值的结果。

Th定理 2.7 ([16])。 设 T 是一个有 $n \geq 4$ 个顶点且不是星图的树。那么

$$\xi_2(T) \geq \sqrt{\frac{13n - 35 - \sqrt{169n^2 - 974n + 1417}}{2}}$$

等号成立当且仅当 $T \cong T^{0,\overset{n-4}{n\,3}}$，。

The 下面的定理刻画了具有最小 $\mathcal{E}$-能量的树 y.

定理 2.8 ([16])。 设 T 是一个有 $n \geq 5$ 个顶点的树。那么

$$E_{\mathcal{E}}(T) \geq 2\sqrt{13n - 35 + 8\sqrt{n-3}}$$

等号成立当且仅当 $T \cong T^{0,\overset{n-4}{n\,3}}$，。

3 $\mathcal{E}$-谱半径和最小 $\mathcal{E}$-特征值的极值问题

本节刻画了所有具有 n 个顶点的树的补图中， $\mathcal{E}$-谱半径最小和最大的图。由此，我们确定了在 $\mathcal{T}_n^c$ 中，最小 $\mathcal{E}$-特征值达到最小值和最大值的图，其中 $\mathcal{T}_n^c$ 表示所有具有 n 个顶点的树的补图。首先，我们根据 $\mathcal{E}$-谱半径对直径为 3 的树的补图进行排序。

定理 3.1. 设 T 是一棵直径为 3 的树，即 $T \cong T^{a,\overset{b}{n\,3}}$，其中 $a+b = n-4$、 $b \geq a \geq 0$。那么，$T^{a,\overset{b}{n\,3}}$ 的补图可按其 $\mathcal{E}$-谱半径排列如下：

$$\xi_1\big((T_{n,3}^{0,n-4})^c\big) > \xi_1\big((T_{n,3}^{1,n-3})^c\big) > \ldots > \xi_1\Big(\big(T_{n,3}^{\lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor,\lceil\frac{n-4}{2}\rceil}\big)^c\Big).$$

证明。 根据引理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}\xi_1\big((T_{n,3}^{a,b})^c\big) &= \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{(4n+1)^2 - 64(a+1)(b+1)}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{(4n+1)^2 - 64(n-3+a(n-4-a))}}{2}} \qquad (\text{since, } a+b = n-4).\end{aligned}$$

现在，考虑函数 $f(x) = 4n+1+\sqrt{(4n+1)^2 - 64(n-3+x(n-4-x))}$，其中 $0 \leq x \leq \lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor$。因此，

$$f'(x) = \frac{-32(n-4-2x)}{\sqrt{(4n+1)^2 - 64(n-3+x(n-4-x))}} \leq 0.$$

因此， $f(x)$ 是关于 x 的递减函数，其中 $0 \leq x \leq \lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor$。因此，对于 $0 \leq a \leq \lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor$， $\xi_1\big((T^{a,\overset{b}{n\,3}})^c\big) = \sqrt{f(a)}$ 2是递减函数。证明至此完成。 □

由上述结果可得以下推论。

推论3.1。 设 T 是一个有 $n \geq 4$ 个顶点且直径$(T) = 3$的树。那么

$$\xi_1(T^c) \leq \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{(4n+1)^2-64(n-3)}}{2}}$$

当且仅当 $T \cong T^0_{,\ n\,3}{}^{n-4}$，时等号成立。

证明。 由引理 2.1 和定理 3.1 可得结论。 □

推论 3.2。 若 T 是一棵直径为3的树，则

$$\xi_1(T^c) \geq \begin{cases} \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{72n-63}}{2}} & if\ n\ is\ even, \\ \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{72n-47}}{2}} & if\ n\ is\ odd. \end{cases}$$

当且仅当 $T \cong T^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor}_{,\ n\,3}{}^{\lceil \frac{n-4}{2} \rceil}$，时等号成立。

证明。 若 $T \cong T^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor}_{,\ n\,3}{}^{\lceil \frac{n-4}{2} \rceil}$，，由引理 2.1 可得

$$\xi_1(T^c) = \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{(4n+1)^2-64\left(\lceil \frac{n-2}{2} \rceil \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor\right)}}{2}}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{72n-63}}{2}} & \text{if } n \text{ is even}, \\ \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{72n-47}}{2}} & \text{if } n \text{ is odd}. \end{cases}$$

如果 $T \ncong T^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor}_{,\ n\,3}{}^{\lceil \frac{n-4}{2} \rceil}$，，那么根据定理 3.1，可得 $\xi_1(T^c) > \xi_1\left(\left(T^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-4}{2} \rceil}_{n,3}\right)^c\right)$。证明完毕。 □

在下面的定理中，我们刻画了这样一类树：其补图的 $\mathcal{E}$-谱半径在所有具有 n 个顶点的树的补图中达到最小。注意，如果 T 是一棵满足 diam$(T) > 3$ 的树，那么 $\mathcal{E}(T^c) = 2A(T)$。如果 diam$(T) = 3$，那么 $\mathcal{E}(T^c) \geq 2A(T)$ 按元素比较成立。

定理 3.2。 设 T 是一棵阶为 $n \geq 4$ 的树。那么

$$\xi_1(T^c) \geq \xi_1(P_n^c)$$

当且仅当 $T \cong P_n$时等号成立。

证明。 由于 P_4 是唯一一个补图连通的 4 阶树，我们假设 $n \geq 5$。对于 $n \geq 5$，有 $\xi_1(P_n^c) = 2\lambda_1(P_n) = 4\cos\frac{\pi}{n+1} < 4$。

若 T 是一棵直径为 3 的树，由推论 3.2 可得

$$\xi_1(T^c) \geq \begin{cases} \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{72n-63}}{2}} & \text{if } n \text{ is even}, \\ \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{72n-47}}{2}} & \text{if } n \text{ is odd}. \end{cases}$$

容易验证 $\sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{72n-47}}{2}} > \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{72n-63}}{2}} > 4$。因此，$\xi_1(T^c) \geq \xi_1(P_n^c)$。若 T 是一棵满足 diam$(T) \geq 4$ 的树，则结论可由定理 3.2 得出。 □

现在，我们确定在 $\mathcal{T}_n^c$ 中，其补图具有最大 $\mathcal{E}$-谱半径的唯一一棵树。

定理3.3。 设 T 是一个阶为 $n \geq 4$的树。则

$$\xi_1(T^c) \leq \xi_1\big((T_{n,3}^{0,n-4})^c\big)$$

当且仅当 $T \cong T^{0,\ n\ 3}{}^{n-4}{}_{,}$ 时等号成立。

证明。 若 T 是直径为3的树，则结论由推论3.1得出。若 T 是满足 diam(T) ≥ 4 的树，则 $\xi_1(T^c) = 2\lambda_1$ (T)，结论由定理 2.4 得出。 □

现在，我们研究树的补图的最小 $\mathcal{E}$-特征值的极值问题，并刻画极值图。首先，我们证明树的补图的 $\mathcal{E}$-特征值关于原点对称。

定理3.4。 设 T 是一个阶为 $n \geq 4$的树。则 $\mathcal{E}(T^c)$ 的特征值关于原点对称；也就是说，若 λ 是 $\mathcal{E}(T^c)$ 的一个重数为 k的特征值，则 $-\lambda$ 也是 $\mathcal{E}(T^c)$ 的一个重数为 k的特征值。

证明。 若 T 是直径为 3 的树，则结论由引理 2.1 得证。设 T 是满足 diam(T) ≥ 4 的树。则 $\mathcal{E}(T^c) = 2A(T)$。由于每棵树都是二部图， $A(T)$ 的特征值关于原点对称，因此 T^c 的 $\mathcal{E}$-特征值也关于原点对称。

□

令 $\xi_n(T^c)$ 表示 $\mathcal{E}(T^c)$ 的最小 $\mathcal{E}$-特征值。在下列定理中，我们分别刻画其补图在 $\mathcal{T}_n^c$ 中具有最小和最大最小 $\mathcal{E}$-特征值的树。

定理3.5。 设 T 是阶为 $n \geq 4$ 的树。则

$$\xi_n(T^c) \geq \xi_n\big((T_{n,3}^{0,n-4})^c\big)$$

等号成立当且仅当 $T \cong T^{0,n\ 3}{}^{n-4}{}_{,}$。

证明。 证明由定理3.3和定理3.4得出。 □

定理3.6。 设 T 是阶为 $n \geq 4$ 的树。则

$$\xi_n(T^c) \leq \xi_n(P_n^c)$$

当且仅当 $T \cong P_n$ 时等号成立。

证明。 该证明由定理 3.2 和定理3.4 得出。 □

4 第二大 $\mathcal{E}$-特征值的极值问题

本节研究树的补图的第二大 $\mathcal{E}$-特征值的极值问题，并刻画极值图。首先，我们根据第二大 $\mathcal{E}$-特征值对直径为 3 的树的补图进行排序。

定理 4.1. 设 T 是一棵直径为 3 的树，即 $T \cong T^{a,b}_{n,3}$，其中 $a+b=n-4, b \geq a \geq 0$。则树 $T^{a,b}_{n,3}$ 的补图可按其第二大 $\mathcal{E}$-特征值排序如下：

$$\xi_2\big((T^{0,n-4}_{n,3})^c\big) < \xi_2\big((T^{1,n-3}_{n,3})^c\big) < \ldots < \xi_2\Big(\big(T^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor,\lceil\frac{n-2}{2}\rceil}_{n,3}\big)^c\Big).$$

证明。 由引理 2.1 可知

$$\begin{aligned}\xi_2\big((T^{a,b}_{n,3})^c\big) &= \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{(4n+1)^2-64(a+1)(b+1)}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{(4n+1)^2-64(n-3+a(n-4-a))}}{2}} \qquad (\text{since, } a+b=n-4).\end{aligned}$$

现在，考虑函数 $f(x) = 4n+1-\sqrt{(4n+1)^2-64(n-3+x(n-4-x))}$，其中 $0 \leq x \leq \lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor$。因此，

$$f'(x) = \frac{32(n-4-2x)}{\sqrt{(4n+1)^2-64(n-3+x(n-4-x))}} \geq 0.$$

因此，对于 $0 \leq x \leq \lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor$，$f(x)$ 是 x 的递增函数。因此，对于 $0 \leq a \leq \lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor$，$\xi_2\big((T^{a,b}_{n,3})^c\big) = \sqrt{f_{(a)}}$ 是递增函数。证明完成。 □

由上述结果可得以下推论。

推论 4.1。 若 T 是直径3的树，则

$$\xi_2(T^c) \geq 2\sqrt{4n+1-\sqrt{(4n+1)^2-64(n-3)}}$$

当且仅当 $T \cong T^{0,n-4}_{n,3}$，时等号成立。

证明。 证明由引理 2.1 和定理 4.1 得出。 □

推论 4.2。 若 T 是直径为3的树，则

$$\xi_2(T^c) \leq \begin{cases}\sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{72n-63}}{2}} & \text{if } n \text{ is even,} \\ \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{72n-47}}{2}} & \text{if } n \text{ is odd.}\end{cases}$$

当且仅当 $T \cong T^{\lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor,\lceil\frac{n-4}{2}\rceil}_{n,3}$，时等号成立。

证明。 若 $T \cong T^{\lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor,\lceil\frac{n-4}{2}\rceil}_{n,3}$，由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}\xi_2(T^c) &= \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{(4n+1)^2-64\big(\lceil\frac{n-2}{2}\rceil\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor\big)}}{2}} \\ &= \begin{cases}\sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{72n-63}}{2}} & \text{if } n \text{ is even,} \\ \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{72n-47}}{2}} & \text{if } n \text{ is odd.}\end{cases}\end{aligned}$$

若 $T \ncong T^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor}_{,\, n\,3}{}^{\lceil \frac{n-4}{2} \rceil}_{,}$，由定理 4.1 可得 $\xi_2(T^c) < \xi_2\Big((T^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-2}{2} \rceil}_{n,3})^c\Big)$。证明至此完成。

□

在下面的定理中，我们确定了使其补图的第二大 $\mathcal{E}$-特征值在 $\mathcal{T}_n^c$ 中达到最小值的唯一一棵树。

定理 4.2. 设 T 是阶为 $n \geq 4$ 的一棵树。则

$$\xi_2(T^c) \geq \xi_2\big((T^{0,n-4}_{n,3})^c\big)$$

等号成立当且仅当 $T \cong T^{0,n\,3}{}^{n-4}_{,}$。

证明。若 T 是直径为 3 的 $n \geq 4$ 阶树，则结论由推论 4.1 得出。设 T 是一棵满足 $\mathrm{diam}(T) \geq 4$ 的树。则 $\mathcal{E}(T^c) = 2A(T)$，因此由定理 2.5 可得 $\xi_2(T^c) \geq 2$。注意到 $\sqrt{(4n-7)^2+144} > 4n-7$，因此 $(4n+1-\sqrt{(4n-7)^2+144}) < 8$。因此，$\xi_2\big((T^{0,n\,3}{}^{n-4}_{,})^c\big) = \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{(4n-7)^2+144}}{2}} < 2$。由此，$\xi_2(T^c) > \xi_2\big((T^{0,n\,3}{}^{n-4}_{,})^c\big)$。证明完毕。

□

接下来，我们刻画树的补图中第二大 $\mathcal{E}$-特征值对应的极大图。

定理 4.3. 设 T 是一棵有 $n \geq 4$ 个顶点的树。

1. 若 $T \ncong T^{s-1}_{,\, n\,5}{}^{s-1}_{,}$，则 $\xi_2(T) \leq \sqrt{2}(n-3)$。当且仅当 $n = 2s+3$ 和 $T \cong T^{s-1,}_{\,n\,4}{}^{s-1}_{,}$，$T^{s-2}_{,\, n\,5}{}^{s-1}_{,}$，$T^{s-2}_{,\, n\,6}{}^{s-1}_{,}$ 时，等号成立。

2. 若 $T \cong T^{s-1}_{,\, n\,5}{}^{s-1}_{,}$，则 $\xi_2(T) = 2x > \sqrt{2}(n-3)$，其中 x 是方程 $x^3 + x^2 - (s+1)x - s = 0$ 的正根。

证明。若 T 是一棵有 $n \geq 4$ 个顶点且直径为 3 的树，由推论 4.2 可得

$$\xi_2(T^c) \leq \begin{cases} \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{72n-63}}{2}} & \text{if } n \text{ is even}, \\ \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{72n-47}}{2}} & \text{if } n \text{ is odd}. \end{cases}$$

容易验证，对于 $n \geq 4$，$\sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{72n-47}}{2}} < \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{72n-63}}{2}} < \sqrt{2}(n-3)$。因此，$\xi_2(T^c) < \sqrt{2}(n-3)$。

设 T 是一棵树，且 $\mathrm{diam}(T) \geq 4$。则 $\xi_2(T^c) = 2\lambda_2(A(T))$，证明由定理 2.6 得出。

□

现在，我们给出一棵树及其补图的第二大 $\mathcal{E}$-特征值的 Nordhaus-Gaddum 型下界，这可直接由定理 2.7 和定理 4.2 得出。

定理 4.4。设 T 是一棵阶为 $n \geq 4$ 的树。则

$$\xi_2(T) + \xi_2(T^c) \geq \left(\sqrt{\frac{13n-35-\sqrt{169n^2-974n+1417}}{2}} + \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{16n^2-56n+193}}{2}}\right)$$

当且仅当 $T \cong T^{0,\, n\,3}{}^{n-4}_{}$ 时等号成立。

5 $\mathcal{E}$-能量的极值问题

本节分别刻画在所有具有 n 个顶点的树的补图中， $\mathcal{E}$-能量最小和最大的树的补图。首先，在下面的引理中，我们按照 $\mathcal{E}$-能量对直径为 3 的树的补图进行排序。

定理 5.1. 设 T 是一棵直径为 3 的树，即 $T \cong T^{a,\overset{b}{n}3}$，其中 $a+b=n-4, b \geq a \geq 0$。那么，补图 $T^{a,\overset{b}{n}3}$，按照其 $\mathcal{E}$-能量可排列如下：

$$E_{\mathcal{E}}\big((T_{n,3}^{0,n-4})^c\big) \leq E_{\mathcal{E}}\big((T_{n,3}^{1,n-3})^c\big) < \cdots < E_{\mathcal{E}}\big((T_{n,3}^{\lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor,\lceil\frac{n-4}{2}\rceil})^c\big).$$

证明. 由引理 2.1 可得 $E_{\mathcal{E}}\big((T^{a,\overset{b}{n}3})^c\big) = 2\Big(\xi_1\big((T^{a,\overset{b}{n}3})^c\big) + \xi_2\big((T^{a,\overset{b}{n}3})^c\big)\Big)$，其中

$$\xi_1\big((T_{n,3}^{a,b})^c\big) = \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{(4n+1)^2-64(a+1)(b+1)}}{2}} \quad \text{and}$$
$$\xi_2\big((T_{n,3}^{a,b})^c\big) = \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{(4n+1)^2-64(a+1)(b+1)}}{2}}.$$

因此，

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{E}}\big((T_{n,3}^{a,b})^c\big) &= 2\sqrt{4n+1+8\sqrt{(a+1)(b+1)}} \\ &= 2\sqrt{4n+1+8\sqrt{n-3+a(n-4-a)}} \quad (\text{since, } a+b=n-4). \end{aligned}$$

现在，考虑函数 $f(x) = 4n+1+8\sqrt{n-3+x(n-4-x)}$，其中 $0 \leq x \leq \lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor$。因此，

$$f'(x) = \frac{8(n-4-2x)}{4n+1+8\sqrt{n-3+x(n-4-x)}} \geq 0.$$

因此， $f(x)$ 是关于 x 的递增函数，其中 $0 \leq x \leq \lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor$。因此，对于 $0 \leq a \leq \lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor$，$E_{\mathcal{E}}\big((T^{a,\overset{b}{n}3})^c\big) = 2\sqrt{f(a)}$ 是递增函数。证明至此完成。 □

由上述结果可得以下推论。

推论 5.1. 如果 T 是一棵直径为3的树，那么

$$E_{\mathcal{E}}(T^c) \geq 2\sqrt{4n+1+8\sqrt{n-3}}$$

当且仅当 $T \cong T^{0,\overset{n-4}{n}3}$，时，等号成立。

证明。 由引理 2.1 可知

$$\xi_1\big((T_{n,3}^{0,n-4})^c\big) = \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{(4n+1)^2-64(n-3)}}{2}}, \quad \text{and}$$
$$\xi_2\big((T_{n,3}^{0,n-4})^c\big) = \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{(4n+1)^2-64(n-3)}}{2}}.$$

因此,

$$E_{\mathcal{E}}\big((T_{n,3}^{0,n-4})^c\big) = 2\Big(\xi_1\big((T_{n,3}^{0,n-4})^c\big) + \xi_2\big((T_{n,3}^{0,n-4})^c\big)\Big) = 2\sqrt{4n+1+8\sqrt{n-3}}.$$

现在，证明由定理 5.1 得出。 □

推论 5.2。 若 T 是直径3的树，则

$$E_{\mathcal{E}}(T^c) \le \begin{cases} 2\sqrt{8n-7} & \textit{if } n \textit{ is even,} \\ 2\sqrt{4n+1+4\sqrt{n^2-4n+3}} & \textit{if } n \textit{ is odd.} \end{cases}$$

当且仅当 $T \cong T^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor}_{,n\,3}{}^{\lceil \frac{n-4}{2} \rceil}_{,}$时，等号成立。

证明。 由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned} \xi_1\big((T_{n,3}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-4}{2} \rceil})^c\big) &= \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{(4n+1)^2-64\big(\lceil \frac{n-2}{2} \rceil \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor\big)}}{2}} \\ &= \begin{cases} \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{72n-63}}{2}} & \text{if } n \text{ is even,} \\ \sqrt{\frac{4n+1+\sqrt{72n-47}}{2}} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \xi_2\big((T_{n,3}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-4}{2} \rceil})^c\big) &= \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{(4n+1)^2-64\big(\lceil \frac{n-2}{2} \rceil \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor\big)}}{2}} \\ &= \begin{cases} \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{72n-63}}{2}} & \text{if } n \text{ is even,} \\ \sqrt{\frac{4n+1-\sqrt{72n-47}}{2}} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{E}}\big((T_{n,3}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-4}{2} \rceil})^c\big) &= 2\Big(\xi_1\big((T_{n,3}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-4}{2} \rceil})^c\big) + \xi_2\big((T_{n,3}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-4}{2} \rceil})^c\big)\Big) \\ &= \begin{cases} 2\sqrt{8n-7} & \text{if } n \text{ is even,} \\ 2\sqrt{4n+1+4\sqrt{n^2-4n+3}} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \end{aligned}$$

现在，证明由定理 5.1 得出。 □

接下来，我们通过计算 $(T^0{}_{,n\,4}{}^{n-5}_{,})^c$ 的 $\mathcal{E}$-谱，求出 $(T^0{}_{,n\,4}{}^{n-5}_{,})^c$ 的 $\mathcal{E}$-能量。这将在定理 5.2 的证明中用到。

引理 5.1. 对于 $n \ge 5$， $E_{\mathcal{E}}\big((T^0{}_{,n\,4}{}^{n-5}_{,})^c\big)$ 的 $\mathcal{E}$-能量为

$$E_{\mathcal{E}}\big((T_{n,4}^{0,n-5})^c\big) = 2\sqrt{4(n-1)+8\sqrt{2n-7}}.$$

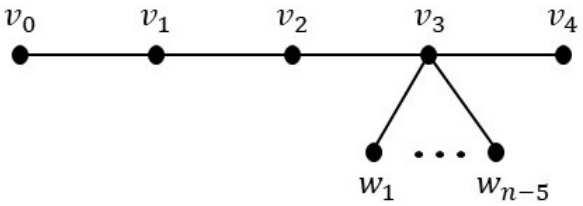

图 3：树 $T^{0,\ n-5}_{n\ 4}$ ，。

证明. $(T^{0,\ n-5}_{n\ 4},)^c$ 的离心率矩阵为

$$\mathcal{E}\big((T^{0,n-5}_{n,4})^c\big) = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & w_1 & \dots & w_{n-5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

容易看出， $\mathcal{E}\big((T^{0,\ n-5}_{n\ 4},)^c\big)$ 的秩为 4，因此 0 是 $\mathcal{E}\big((T^{0,\ n-5}_{n\ 4},)^c\big)$的一个特征值，重数为 $n-4$。

若 $W=\{v_4,w_1,\dots,w_{n-5}\}$，则 $\Pi_2=\{v_0\}\cup\{v_1\}\cup\{v_2\}\cup\{v_3\}\cup U$是 $\mathcal{E}\big((T^{0,\ n-5}_{n\ 4},)^c\big)$ 的一个平衡划分，其商矩阵为

$$Q_2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2(n-4) \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

现在， Q_2 的特征值为

$$-\sqrt{2n-2\pm 2\sqrt{n^2-10n+29}},\quad 0,\quad \text{and}\quad \sqrt{2n-2\pm 2\sqrt{n^2-10n+29}}.$$

因此，由定理 2.1 可得

$$\mathrm{Spec}_{\mathcal{E}}\left((T^{0,n-5}_{n,4})^c\right)=\left\{\begin{array}{ccc} -\sqrt{2n-2\pm 2\sqrt{n^2-10n+29}} & 0 & \sqrt{2n-2\pm 2\sqrt{n^2-10n+29}} \\ 1 & n-4 & 1 \end{array}\right\}.$$

因此， $E_{\mathcal{E}}\big((T^{0,\ n-5}_{n\ 4},)^c\big) = 2\Big(\sqrt{2n-2+2\sqrt{n^2-10n+}}29+\sqrt{2n-2-2\sqrt{n^2-10n+29}}\Big)$。

若$\alpha=\sqrt{2n-2+2\sqrt{n^2-10n+29}}$且 $\beta=\sqrt{2n-2-2\sqrt{n^2-10n+29}}$，则 $\alpha^2+\beta^2=4n-4$且

$2\alpha\beta = 8\sqrt{2n-7}$。因此,

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{E}}\big((T_{n,4}^{0,n-5})^c\big) &= 2(\alpha+\beta) \\ &= 2\Big(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}\Big) \\ &= 2\Big(\sqrt{4n-4+8\sqrt{2n-7}}\Big). \end{aligned}$$

□

定理 5.2。 设 T 是一个阶为 $n \geq 4$的树。则

$$E_{\mathcal{E}}(T^c) \geq E_{\mathcal{E}}\big((T_{n,3}^{0,n-4})^c\big)$$

当且仅当 $T \cong T^{0,\overset{n-4}{n\,3}}$ 时等号成立。

证明。 对于 $n = 4$、 $T^{0,\overset{0}{n\,3}}$ 是唯一具有连通补图的树。对于 $n = 5$ 和 6，容易看出 $E_{\mathcal{E}}(T^c) > E_{\mathcal{E}}\big((T^{0,\overset{n-4}{n\,3}})^c\big)$（见附录）。因此，设 T是一个具有 $n \geq 7$个顶点的树。

如果 T 是一个满足 $\mathrm{diam}(T) = 3$的树，则由推论 5.1可得证明。如果 T 是一个满足 $\mathrm{diam}(T) \geq 4$ 的树，则根据引理 2.2可得

$$E_{\mathcal{E}}(T^c) = 2E_A(T) \geq 2E_A(T_{n,4}^{0,n-5}) = E_{\mathcal{E}}\big((T_{n,4}^{0,n-5})^c\big).$$

再次由引理 5.1，我们有 $E_{\mathcal{E}}\big((T^{0,\overset{n-5}{n\,4}})^c\big) = 2\sqrt{4(n-1)+8\sqrt{2n-7}}$。注意，对于 $n \geq 7$，$4(n-1)+8\sqrt{2n-7} > 4n+1+8\sqrt{n-3}$，因此对于 $n \geq 7$，$E_{\mathcal{E}}\big((T^{0,\overset{n-5}{n\,4}})^c\big) > E_{\mathcal{E}}\big((T^{0,\overset{n-4}{n\,3}})^c\big)$。证明完毕。

□

在下面的定理中，我们刻画具有最大 $\mathcal{E}$-能量的树的补图。

定理 5.3. 设 T 是一个阶为 $n \geq 4$ 的树。那么

$$E_{\mathcal{E}}(T^c) \leq E_{\mathcal{E}}(P_n^c)$$

等号成立当且仅当 $T \cong P_n$。

证明. 对于 $n = 4$， P_4 是唯一具有连通补图的树。对于 $n = 5$ 和 6，容易看出 $E_{\mathcal{E}}(T^c) \leq E_{\mathcal{E}}(P_n^c)$，等号成立当且仅当 $T \cong P_n$（见附录）。因此，设 T是一个有 $n \geq 7$ 个顶点的树。对于 $n \geq 7$，由定理 2.2 可得

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{E}}(P_n^c) = 2E_A(P_n) &= \begin{cases} 4\Big(\cot\big(\frac{\pi}{2(n+1)}\big)-1\Big) & \text{if } n \text{ is odd}, \\ 4\Big(\csc\big(\frac{\pi}{2(n+1)}\big)-1\Big) & \text{if } n \text{ is even}; \end{cases} \\ &\geq \Big(\cot\big(\frac{\pi}{2(n+1)}\big)-1\Big). \end{aligned}$$

我们知道，对于 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，$\cot x > \big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi}\big)$。由于 $0 < \frac{\pi}{(n+1)} < \frac{\pi}{2}$，因此

$$E_{\mathcal{E}}(P_n^c) \geq 4\Big(\cot\Big(\frac{\pi}{2(n+1)}\Big)-1\Big) > 4\Big(\frac{4n(n+1)}{(2n+1)\pi}-1\Big). \tag{1}$$

设 T 是一棵直径为 $=3$ 的树，其中 diam(T)。因此，根据推论 5.2，可得

$$E_{\mathcal{E}}(T^c) \le \begin{cases} 2\sqrt{8n-7} & \text{if } n \text{ is even,} \\ 2\sqrt{4n+1+4\sqrt{n^2-4n+3}} & \text{if } n \text{ is odd;} \end{cases}$$
$$\le 2\sqrt{8n-7}.$$

利用 (1) 可以验证

$$E_{\mathcal{E}}(P_n^c) > 4\Big(\frac{4n(n+1)}{(2n+1)\pi} - 1\Big) > 2\sqrt{8n-7} \ge E_{\mathcal{E}}(T^c) \quad \text{for } n \ge 7.$$

因此，对于直径为 3 的任意树 T， $E_{\mathcal{E}}(P_n^c) > E_{\mathcal{E}}(T^c)$。

设 T 为一棵满足 diam(T) ≥ 4 的树。因此， $\mathcal{E}(T^c) = 2A(T)$，从而 $E_{\mathcal{E}}(T^c) = 2E_A(T)$。现在，由引理 2.3 可得

$$E_{\mathcal{E}}(T^c) = 2E_A(T) \le 2E_A(P_n) = E_{\mathcal{E}}(P_n^c)$$

并且等号成立当且仅当 $T \cong P_n$。证明完毕。 □

最后，我们得到一棵树及其补图的 $\mathcal{E}$-能量的 Nordhaus-Gaddum 型下界，这可直接由定理 2.8 和定理 5.2 得出。

定理 5.4。 设 T 为一棵阶为 $n \ge 4$ 的树。那么

$$E_{\mathcal{E}}(T) + E_{\mathcal{E}}(T^c) \ge 2\left(\sqrt{13n-35+8\sqrt{n-3}} + \sqrt{4n+1+8\sqrt{n-3}}\right)$$

当且仅当 $T \cong T^0$、$n\,3^{n-4}$ 、时取等号。

参考文献

[1] Andries E. Brouwer 和 Willem H. Haemers。《图的谱》。Universitext。Springer，纽约，2012年。[2] Yi-Zheng Fan、Fei-Fei Zhang 和 Yi Wang。树的补图的最小特征值。线性代数及其应用，435(9)：2150–2155，2011年。[3] Ivan Gutman。具有极值 h¨uckel π-电子能量的无环系统。《理论化学学报》，45(2)：79–87，1977年。[4] Xiaocong He 和 Lu Lu。关于树的离心率矩阵的最大和最小特征值。《离散数学》，345(1)：论文编号112662，11页，2022年。[5] M Hofmeister。关于树的两个最大特征值。《线性代数及其应用》，260：43–59，1997年。[6] Michael P Knapp。等差数列中角的正弦和余弦。《数学杂志》，82(5)：371，2009年。

[7] Xingyu Lei 和 Jianfeng Wang。具有一个正反邻接特征值的图的谱确定。应用数学与计算，422：论文编号126995，13页，2022年。[8] Xingyu Lei、Jianfeng Wang 和 Guozheng Li。关于图的离心率矩阵的特征值。《离散应用数学》，295：134–147，2021年。[9] Shuchao Li 和 Shujing Wang。树的补图的无符号拉普拉斯矩阵的最小特征值。线性代数及其应用，436(7)：2398–2405，2012年。[10] Yuanjing Li、Rui Qin 和 Dan Li。关于单圈图和树的补图的距离无符号拉普拉斯谱。线性代数及其应用，631：235–253，2021年。[11] Huiqiu Lin 和 Stephen Drury。树的补图的距离谱。线性代数及其应用，530：185–201，2017年。[12] L´aszl´o Lov´asz 和 J´ozsef Pelik´an。关于树的特征值。《匈牙利数学期刊》，3(1-2)：175–182，1973年。[13] Iswar Mahato、R. Gurusamy、M. Rajesh Kannan 和 S. Arockiaraj。图的离心率矩阵的谱。《离散应用数学》，285：252–260，2020年。[14] Iswar Mahato、R Gurusamy、M Rajesh Kannan 和 S Arockiaraj。关于图的离心率矩阵的谱半径和能量。《线性与多重线性代数》，第1–11页，2021年。[15] Iswar Mahato 和 M. Rajesh Kannan。边删除导致完全多部图的离心率能量变化。《特殊矩阵》，10：193–202，2022年。[16] Iswar Mahato 和 M Rajesh Kannan。树的离心率矩阵能量的极小化者。*arXiv*预印本 *arXiv:2208.13462*，2022年。[17] Iswar Mahato 和 M. Rajesh Kannan。关于树的离心率矩阵：惯性指数与谱对称性。《离散数学》，345(11)：论文编号113067，2022年。[18] Ajay Kumar Patel、Lavanya Selvaganesh 和 Sanjay Kumar Pandey。图的粘合的离心率矩阵的能量与惯性指数。《离散数学》，344(12)：论文编号112591，11页，2021年。[19] Jianfeng Wang、Xingyu Lei、Shuchao Li、Wei Wei 和 Xiaobing Luo。关于图的离心率矩阵及其在烃沸点研究中的应用。化学计量学与智能实验室系统，第104173页，2020年。[20] Jianfeng Wang、Lu Lu、Milan Randi´c 和 Guozheng Li。基于离心率矩阵的图能量。《离散数学》，342(9)：2636–2646，2019年。[21] Jianfeng Wang、Mei Lu、Maurizio Brunetti、Lu Lu 和 Xueyi Huang。图的谱确定与离心率矩阵。《应用数学进展》，139：论文编号102358，25页，2022年。[22] Jianfeng Wang、Mei Lu、Lu Lu 和 Francesco Belardo。图的离心率矩阵的谱性质。《离散应用数学》，279：168–177，2020年。

[23] Wei Wei、Xiaocong He 和 Shuchao Li. 关于离心率矩阵特征值的两个猜想及其推广的解答。《离散数学》，343(8):111925，21，2020年。[24] Wei Wei 和 Shuchao Li. 完全多部图的离心率谱。应用数学与计算，424:第127036号论文，12，2022年。[25] Wei Wei、Shuchao Li 和 Licheng Zhang. 关于离心率谱半径的极值图刻画及其推广。《离散数学》，345(2):第112686号论文，29，2022年。[26] Hong Yuan. 树的特征值的精确下界。线性代数及其应用，113:101–105，1989年。

附录

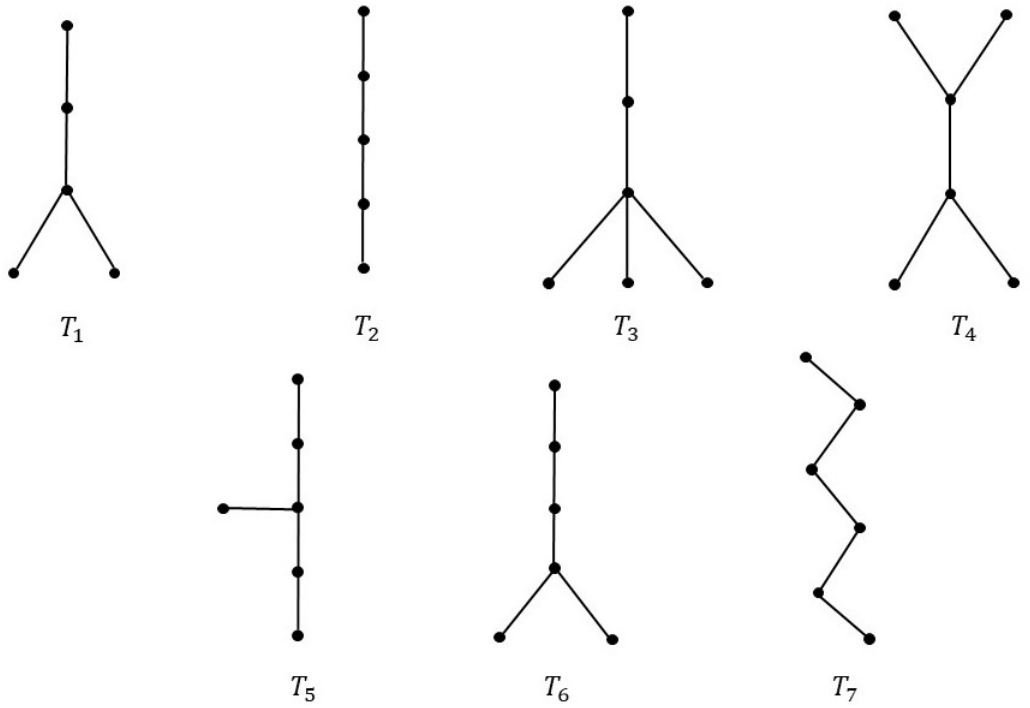

图4：具有连通补图的5阶和6阶树列表。

树（T）	$E_{\mathcal{E}}$（T^c）	树（T）	$E_{\mathcal{E}}$（T^c）
T_1	≈ 10.4528	T_5	≈ 13.798
T_2	≈ 10.9284	T_6	≈ 12.3108
T_3	≈ 11.6372	T_7	≈ 13.9756
T_4	$= 12$		

表1： $\mathcal{E}$-能量，树 T_1-T_7 的补图。