arXiv:2301.01712v1 [math.PR] 4 Jan 2023

Wigner 型矩阵的介观特征值统计

Volodymyr Riabov*奥地利科学技术
研究所*volodymyr.riabov@ist.ac.at*

摘要。我们证明了一个普适的介观中心极限定理：对于谱的内部的 Wigner 型矩阵，在测试函数具有紧支撑且二阶连续可微的条件下，其线性特征值统计量满足该定理。主要的新颖要素是关于二点函数 $T(z,\zeta)$ 的最优局部定律，以及涉及邻近谱参数处两个预解式的一般相关量类。

Date：2023年1月5日
Keywords and phrases：Wigner 型矩阵、介观特征值统计、中心极限定理
2010 Mathematics Subject Classification：60B20、15B52

1 引言

在大规模随机矩阵特征值分布的研究中，大数定律最著名的对应结果是 Wigner 半圆定律 [25]。该定律指出，特征值的经验密度收敛到一个称为半圆分布的确定性极限 ρ_{sc}。更明确地说，若 H 是一个 $N\times N$ Wigner 矩阵，且 f 是一个足够光滑的测试函数，那么 线性特征值统计量 $N^{-1}\operatorname{Tr} f(H)$ 依概率收敛到 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\rho_{sc}(x)\mathrm{d}x$，当 N趋于无穷大时。

相应的中心极限定理（CLT）断言，线性特征值统计量 $\operatorname{Tr} f(H)-\mathbb{E}[\operatorname{Tr} f(H)]$ 的渐近涨落服从高斯分布。经典中心极限定理中出现的 $N^{-1/2}$归一化因子在此缺失，这可视为特征值强相关性的体现。对于特殊情形 $f(x)=(x-z)^{-1}$ 且 $\operatorname{Im} z\neq 0$，Khorunzhy、Khoruzhenko 和 Pastur [16]得到了这一结果。Johansson 在 [15]中证明了具有任意多项式势的不变系综的中心极限定理。在 [4]，中，Bai 和 Yao 使用鞅中心极限定理，证明了这一结果对具有解析测试函数的 Wigner 矩阵成立。Lytova 和 Pastur [22]的研究则给出了有界测试函数 f（其导数也有界）情形下的证明。在后续研究中，许多作者对矩阵的不同矩条件以及测试函数的正则性条件进行了广泛探讨，例如 [6, 18, 23, 24]。

固定测试函数表示谱中的宏观平均，而我们可以引入依赖于 N 的缩放，并考虑形如 $f(x)=g(\eta_0^{-1}(x-E_0))$ 的缩放测试函数，其中 E_0 是谱内部的一个固定参考能量，$\eta_0\equiv\eta_0(N)\ll 1$ 是缩放参数，且 g 是紧支撑的。于是，$\operatorname{Tr} f(H)$ 仅涉及约 $N\eta_0$ 个 H 的特征值。特别地，在对应于 $N^{-1}\ll\eta_0\ll 1$ 的介观尺度上，极限方差由 g 的 $\dot{H}^{1/2}$ 范数的平方给出。Boutet de Monvel 和 Khorunzhy 首先在 [7] 中研究了高斯正交系综的介观测试函数；随后，[8] 将结果推广到实 Wigner 矩阵，并得到 $N^{-1/8}\ll\eta_0\ll 1$。在 [13]，中，He 和 Knowles 证明了 Wigner 矩阵在所有缩放参数 $N^{-1}\ll\eta_0\ll 1$ 下、针对一般介观测试函数的中心极限定理。

*由ERC高级资助“RMTBeyond”（编号：101020331）支持

在近期的研究中，这一结果被推广到更一般的系综，例如参见 [5]和 [20]。特别是，Li 和 Xu 针对谱内部和谱边缘处的广义 Wigner 矩阵 [1]，在整个尺度范围 C_c^2 内证明了介观中心极限定理，所用的 [21]。

最后，Landon、Lopatto 和 Sosoe 证明了更一般的 Wigner 型矩阵系综的体区中心极限定理 [17]，适用于两类 C^∞ 测试函数。对于一类特殊的全局支撑正则化隆起函数，该证明在大尺度上采用预解式技术，并借助 Dyson 布朗运动（DBM）动力学将结果扩展至整个介观值域。对于更常见的紧支撑缩放测试函数，则结合 DBM 与格林函数比较，在所有介观尺度 $N^{-1} \ll \eta_0 \ll 1$ 上建立了体区中心极限定理。

Wigner 型矩阵最早于 [2]中引入；其元素以零为中心，H_{jk} 除受对称性约束外相互独立 $H = H^*$。方差矩阵 S定义为 $S_{jk} := \mathbb{E}\left[|H_{jk}|^2\right]$，并假设其平坦，即 $S_{jk} \sim N^{-1}$，且满足分段 H¨older 正则性条件（见（B））。

作为本文证明中心极限定理的主要步骤，我们证明了二点函数的最优平均局部定律和逐项局部定律（推论 3.3），其定义为 T:

$$T_{xy}(z,\zeta) := \sum_{a\neq y} S_{xa} G_{ay}(z) G_{ya}(\zeta), \quad x,y \in \{1,\dots,N\}, \tag{1.1}$$

其中 $G(z)$ 是 H 的预解式。广义 Wigner 矩阵这一较简单情形下的相应结果见 [21]。利用 $T(z,\zeta)$ 的最优局部定律，我们证明了 Wigner 型矩阵的体谱介观中心极限定理，适用于 $N^{-1} \ll \eta_0 \ll 1$ 紧支撑 C^2缩放测试函数的全部尺度范围（定理 2.2）。我们的证明完全基于预解式方法，避开了 [17] 中使用的 DBM 动力学。

正如 $T(z,\zeta)$ 是理解中心极限定理的关键要素，[17] 中已认识到这一点。事实上，$T_{xy}(z,\zeta)$ 的一个次优逐项局部定律已在 [17] 的命题 5.1 中得到证明。若仅依赖预解式方法，该局部定律只能为介观中心极限定理在尺度 $\eta_0 \gg N^{-1/5}$ 上提供充分控制。造成这一限制的主要原因是，[17] 中的误差项包含被求逆的稳定算子的范数（定义见（4.5））。本文表明，可以通过分离出与稳定算子最小特征值对应的去稳定化特征方向来消除这一因子。利用这一方法，我们证明了一类涉及两个预解式的广义量的局部定律（定理 3.2），并推得 $T(z,\zeta)$ 的最优平均局部定律和逐项局部定律。特别地，这使我们无需依赖 DBM，便能在所有介观尺度上得到中心极限定理。

主要困难在于，与广义 Wigner 情形不同，Wigner 型矩阵的预解式的确定性近似并非恒等矩阵的倍数 [21]。因此，失稳方向不再与全 1 向量平行，而且通常无法写出相应特征投影算子的闭式表达。值得注意的是，对于 [20], 中研究的变形 Wigner 矩阵，其确定性近似也不是恒等矩阵的倍数，但 $S_{jk} = N^{-1}$。因此，二点函数可以表示为预解式的平方，并且可以像标准 Wigner 情形那样，利用局部定律进行研究。

为避免这一困难，我们不去近似失稳方向，而是采用特征投影算子的围道积分表示。这使我们能够将[21] 的分解方法推广到 Wigner 型系综。该方法的优点在于，在测试函数满足比[17], 中更弱的正则性条件时，仍能得到适用于所有介观尺度的方差积分表示，而且只依赖预解式方法。

本文的组织结构如下。第 2 节给出模型的精确定义，并陈述主要结果——介观中心极限定理定理 2.2。第 3 节介绍主要技术结果，即定理 3.2 中关于二点函数的最优局部定律。第 4 节汇集全文中会用到的记号和预备结果。第 5 节利用命题 5.1 和命题 5.2 推导定理 2.2，并以关于 $T(z,\zeta)$ 的局部定律（推论 3.3）为输入证明命题 5.1。定理 3.2 和推论 3.3 的证明见第 6 节。第 7 节证明命题 5.2，该命题将线性特征值统计量的方差与 $\dot{H}^{1/2}$-范数联系起来。

致谢。
我谨向 L´aszl´o Erd˝os 致以谢意，感谢他提出这一课题并指导我的工作。同时也感谢 Yuanyuan Xu 和 Oleksii Kolupaiev，感谢他们进行了许多有益的讨论。

[1]广义 Wigner 矩阵的特征在于其方差矩阵 S 是平坦的双随机矩阵。与 Wigner 情形不同，其元素 S_{jk} 不要求相等。极限特征值分布仍为半圆分布。

2 模型与主要结果

我们首先介绍 Wigner 型矩阵的定义，该定义最初见于 [2] 第 1.1 节。

定义 2.1（Wigner 型矩阵）。设 $H = (H_{jk})_{j,k=1}^{N}$ 是一个具有独立元素的 $N \times N$ 矩阵，满足厄米对称性条件 $H = H^*$

$$\mathbb{E}[H_{jk}] = 0. \tag{2.1}$$

我们同时考虑实 Wigner 型矩阵和复 Wigner 型矩阵。若矩阵 H 为复矩阵，我们还假设 Re H_{jk} 与 Im H_{jk} 相互独立，并且 $\mathbb{E}[H_{jk}^2] = 0$ 对于 $k \neq j$。

记 S 为方差矩阵 $S_{jk} := \mathbb{E}[|H_{jk}|^2]$，并假设它满足

$$\frac{c_{inf}}{N} \leq S_{jk} \leq \frac{C_{sup}}{N}, \tag{A}$$

对于所有 j、$k \in \{1, \ldots, N\}$ 以及某些严格为正的常数 C_{sup}、c_{inf}，

我们假设 $\sqrt{N}H_{jk}$的所有其他矩都一致有界，也就是说，对于任意 $p \in \mathbb{N}$，存在正常数 C_p 使得

$$\mathbb{E}\left[|\sqrt{N}H_{jk}|^p\right] \leq C_p \tag{2.2}$$

对所有 j、$k \in \{1, \ldots, N\}$均成立。

此外，我们假设 S 满足 H ¨older 正则性条件[1]，，即

$$|S_{jk} - S_{j'k'}| \leq \frac{L}{N}\left(\frac{|j-j'| + |k-k'|}{N}\right)^{1/2}, \tag{B}$$

对所有 j、j'、k、$k' \in \{1, \ldots, N\}$ 以及某个正常数 L均成立。常数 c_{inf}、C_{sup}、C_p和 L 均与 N无关。

2.1 介观线性特征值统计量的中心极限定理

定理 2.2。（参见 *[17]*中的定理 2.5）设 g 为一个 $C_c^2(\mathbb{R})$ 测试函数。设 ε_0 为一个固定的小常数，并设 $N^{-1+\varepsilon_0} \leq \eta_0 \leq N^{-\varepsilon_0}$，且设 E_0 为谱的内部的一个固定参考能量，即 $\rho(E_0) \geq \varepsilon_0$（这里 ρ 是将在下文（3.3）中定义的态密度）。定义缩放测试函数 f 为

$$f(x) \colon = g\left(\frac{x - E_0}{\eta_0}\right), \tag{2.3}$$

then

$$\operatorname{Tr} f(H) - \mathbb{E}[\operatorname{Tr} f(H)] \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2\beta\pi^2}\|g\|_{\dot{H}^{1/2}}^2\right), \tag{2.4}$$

其中 $\beta = 1$ 和 $\beta = 2$ 分别对应实对称和复厄米 H。 $y.$

注 2.3。我们指出，(2.4)中的普适极限方差与标准 Wigner 矩阵对应的公式一致 *[13]*，其中 $S_{jk} = N^{-1}$，$m_j(z) = m_{sc}(z)$ 对所有$j, k \in \{1, \ldots, N\}$，且 $m_{sc}(z)$ 是半圆律的斯蒂尔切斯变换。

[1]如前所述，[2]，假设 (B) 可弱化为分段 1/2-H¨older 正则性条件（对某个正常数 L 在有限个区间上，即 e

$$\max_{a,b}\max_{j,j' \in (NI_b)}\max_{k,k' \in (NI_a)} N^{3/2}\frac{|S_{jk} - S_{j'k'}|}{|j-j'|^{1/2} + |k-k'|^{1/2}} \leq L,$$

其中 $\{I_a\}_{a=1}^n$ 是将 $[0,1]$ 划分为更小区间的一个固定有限划分，而 (NI_a) 表示满足 j/N 属于 I_a 的正整数集合 j。

3 双点函数的局部定律

本节将介绍我们的主要技术结果：涉及 Wigner 型矩阵的两个预解式的量所满足的局部定律。我们的首要动机是研究函数 $T(z,\ \zeta)$，其定义见 (1.1)，但我们的方法还可以估计一类更一般的量，即

$$\sum_{a\neq y} w_a G_{\alpha a}(z)G_{a\beta}(\zeta),\quad \sum_b\sum_{a\neq b} W_{ab}G_{ba}(z)G_{ab}(\zeta), \tag{3.1}$$

对于固定指标 α，β，y，以及满足 w_a，W_{ab} 的确定性权重 $|w_a|$，$|W_{ab}|\le cN^{-1}$，其中某个常数 $c>0$。这里 $G(z):=(H-z)^{-1}$ 表示 H 的预解式。这类对象最早在 [11] 中针对随机带状矩阵进行了研究。我们以随机支配的意义得到这些估计。

定义 3.1。（[12]中的定义 2.1）设 $\mathcal{X}=\mathcal{X}^{(N)}(u)$ 和 $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}^{(N)}(u)$ 是两族可能依赖于参数 $u\in U^{(N)}$ 的随机变量。若 $\mathcal{Y}$ 在 u 上一致地随机支配 $\mathcal{X}$，则称对于任意 $\varepsilon>0$ 和 $D>0$，存在 $N_0(\varepsilon,D)$，使得对任意 $N\ge N_0(\varepsilon,D)$，

$$\sup_{u\in U^{(N)}} \mathbb{P}\left[\mathcal{X}^{(N)}(u)>N^{\varepsilon}\mathcal{Y}^{(N)}(u)\right]<N^{-D}.$$

我们用 $\mathcal{X}\prec\mathcal{Y}$ 或 $\mathcal{X}=\mathcal{O}_{\prec}(\mathcal{Y})$ 表示这种关系。

我们考虑位于区域 $\mathcal{D}$ 内的谱参数 z，其定义如下：

$$\mathcal{D}:=\{z\in\mathbb{C}: N^{-1+\tau}\le|\operatorname{Im} z|\le\tau^{-1},\,|\operatorname{Re} z|\le\tau^{-1}\}, \tag{3.2}$$

对固定的 $\tau>0$。与定理 2.2中一样，我们的分析仅限于谱的内部，我们通过自洽态密度 $\rho(E)\equiv\rho_N(E)$ 来定义。密度 $\rho(E)$ 由斯蒂尔切斯反演公式给出：

$$\rho(E):=\pi^{-1}\lim_{\eta\to+0}\operatorname{Im} m(E+i\eta), \tag{3.3}$$

其中 $m(z):=N^{-1}\sum_{j=1}^N m_j(z)$，并且 $\mathbf{m}(z)=(m_j(z))_{j=1}^N$ 是中向量 Dyson 方程的唯一解（定理4.1）[2]向量 Dyson 方程

$$\frac{-1}{\mathbf{m}(z)}=z+S\mathbf{m}(z),\quad \operatorname{Im}\mathbf{m}(z)\operatorname{Im} z>0. \tag{3.4}$$

令 $\mathcal{I}$ 为 $\rho(E)$ 为正的集合。[2] 中的定理4.1保证，$\mathcal{I}$ 由有限个开区间 $(\mathfrak{a}^{(j)},\mathfrak{b}^{(j)})$ 的并组成。于是，对于 $\kappa>0$，我们将谱内部区域定义为

$$\mathcal{D}_\kappa:=\{z\in\mathcal{D}:\operatorname{Re} z\in\mathcal{I}_\kappa\},\quad \mathcal{I}_\kappa:=\bigcup_j[\mathfrak{a}^{(j)}+\kappa,\mathfrak{b}^{(j)}-\kappa]. \tag{3.5}$$

特别地，对所有 $z\in\mathcal{D}_\kappa$，$\rho(z)\ge C(\kappa)$ 对某个常数 $C(\kappa)>0$。给定 E_0 如定理2.2所示的 κ，我们选择 $E_0\in\mathcal{I}_{2\kappa}$使得。

定理 3.2. 存在一个正常数 $\epsilon=\epsilon_\kappa$，它与 N 无关，使得对所有满足 $|\operatorname{Re}\zeta-\operatorname{Re} z|\le\epsilon$ 的 $z,\zeta\in\mathcal{D}_\kappa$，以及满足 $\|\mathbf{w}\|_\infty\le cN^{-1}$ 的确定性向量 $\mathbf{w}\in\mathbb{C}^N$，以下估计成立，

$$\begin{aligned}\sum_{a\neq y} w_aG_{\alpha a}(z)G_{a\beta}(\zeta)=\delta_{\alpha\beta}\left[\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\left(1-S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\right)^{-1}\mathbf{w}\right]_\alpha-\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha y}[\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\mathbf{w}]_\alpha\\ +\mathcal{O}_{\prec}\left((\Psi(z)+\Psi(\zeta))(\Psi(z)\Psi(\zeta)+\mathbb{1}_{\{\operatorname{Im} z\operatorname{Im}\zeta<0\}}\min\{\Theta(z),\Theta(\zeta)\})\right),\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中，向量 $\mathbf{m}$ 被视为对角算子 $\operatorname{diag}(\mathbf{m})$。

在对 z、ζ 施加相同条件的情况下，对于满足 $|W_{ab}|\le cN^{-1}$（对所有 a、b 均成立）的任意确定性 $N\times N$ 矩阵 W，有如下估计，

$$\begin{aligned}\sum_b\sum_{a\neq b} W_{ab}G_{ba}(z)G_{ab}(\zeta)=\operatorname{Tr}\left[\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\left(1-S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\right)^{-1}W\right]\\ +N\mathcal{O}_{\prec}\left((\Psi(z)+\Psi(\zeta))\Psi(z)\Psi(\zeta)+\mathbb{1}_{\{\operatorname{Im} z\operatorname{Im}\zeta<0\}}\Theta(z)\Theta(\zeta)\right).\end{aligned} \tag{3.7}$$

这里， $\Psi(z)$ 和 $\Theta(z)$ 表示定义如下的控制参数

$$\Psi(z) := \sqrt{\frac{|\operatorname{Im} m(z)|}{N|\eta|}} + \frac{1}{N|\eta|}, \quad \Theta(z) := \frac{1}{N|\eta|}, \quad z = E + i\eta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Theo注 3.2 推出了如下关于 $T(z, \zeta)$（见 (1.1)）的平均局部定律和逐项局部定律 .

推论 3.3。 设 z, ζ 满足定理 *3.2*的假设。其元素 $T_{xy}(z, \zeta)$ 满足估计

$$\begin{aligned} T_{xy}(z,\zeta) = &\left[(S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta))^2 \left(1 - S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\right)^{-1}\right]_{xy} \\ &+ \mathcal{O}_{\prec}\big((\Psi(z)+\Psi(\zeta))\big(\Psi(z)\Psi(\zeta) + \mathbb{1}_{\{\operatorname{Im} z \operatorname{Im}\zeta<0\}} \min\{\Theta(z),\Theta(\zeta)\}\big)\big). \end{aligned} \tag{3.9}$$

此外，对于所有确定性的 $N \times N$ 矩阵 A，以下等式成立

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}[A\,T(z,\zeta)] = &\operatorname{Tr}[A\big(1 - S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\big)^{-1}\big(S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\big)^2] \\ &+ N\,\|A\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}\,\mathcal{O}_{\prec}\big((\Psi(z)+\Psi(\zeta))\Psi(z)\Psi(\zeta) + \mathbb{1}_{\{\operatorname{Im} z \operatorname{Im}\zeta<0\}}\Theta(z)\Theta(\zeta)\big). \end{aligned} \tag{3.10}$$

注 3.4。 逐项局部定律 (3.6)中的误差估计，以及 (3.9) 中的误差估计，都是最优的。事实上，对于 $S_{jk} := N^{-1}$，这对应于标准 Wigner 矩阵，以及 $\zeta = \bar{z}$，利用 Ward 恒等式进行简单计算可得

$$T_{xy}(z,\bar{z}) = N^{-1}|\operatorname{Im} z|^{-1} \operatorname{Im} m_{sc}(z) - N^{-1}|m_{sc}(z)|^2 + \mathcal{O}_{\prec}\big(\Theta(z)\Psi(z)\big). \tag{3.11}$$

式 (3.7)中的误差估计并非最优；它可以改进为

$$\mathcal{O}_{\prec}\big(N(\Psi(z)+\Psi(\zeta))^2\big(\Psi(z)\Psi(\zeta) + \mathbb{1}_{\{\operatorname{Im} z \operatorname{Im}\zeta<0\}}N\Theta(z)\Theta(\zeta)\big)\big) \tag{3.12}$$

然而，(3.7) 对于建立中心极限定理已经足够，因此为简洁起见，我们不完整地给出 (3.12) 的证明细节。我们仅在下文的注 *6.8* 中指出必要的要点。

4 记号与预备知识

4.1 记号

对于一个 向量 $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N$，我们采用 ℓ^2 范数和 ℓ^∞ 范数的标准定义，即

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^2\right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_j |x_j|.$$

对于线性算子 $T: \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$，我们分别用 ℓ^2 范数和 ℓ^∞ 范数诱导的矩阵范数表示为

$$\|T\|_{\ell^2\to\ell^2} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|T\mathbf{x}\|_2, \quad \|T\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|T\mathbf{x}\|_\infty.$$

对于两个向量 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$，我们用尖括号表示 ℓ^2 标量积；对于单个向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$，尖括号表示其坐标平均值

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{j=1}^N \bar{x}_j y_j, \quad \langle \mathbf{x}\rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N x_j.$$

我们用 $\mathbf{xy}$ 表示向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的逐坐标乘积，

$$(\mathbf{xy})_j = x_j y_j, \quad j \in \{1,\dots,N\}.$$

类似地，对于一个各分量均非零的给定向量 $\mathbf{x}$，$\frac{1}{\mathbf{x}}$ 表示逐坐标乘法逆

$$\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)_j = \frac{1}{x_j}, \quad j \in \{1,\dots,N\}.$$

我们用 $\mathbf{1}$ 表示全 1 向量 $(1,\dots,1)^t$，其属于 $\mathbb{C}^N$。

对于可测函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，我们对 $p\geq 1$使用标准的 L^p 范数定义，并采用以下 $\dot{H}^{1/2}$ 范数定义

$$\|f\|_{\dot{H}^{1/2}}=\left(\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}.$$

对于依赖于 N的两个确定性量 $X,Y\in\mathbb{R}$，如果存在 $\varepsilon,N_0>0$，使得对所有 $N\geq N_0$都有 $|X|\leq N^{-\varepsilon}|Y|$，我们记作 $X\ll Y$。类似地，如果存在常数 $C,N_0>0$，使得对所有 $N\geq N_0$都有 $|X|\leq C|Y|$，我们记作 $X\lesssim Y$；若 $X\lesssim Y$ 和 $Y\lesssim X$ 均成立，则记作 $X\sim Y$。

我们用 C 和 c 表示常数，其具体取值并不重要，并且可能逐行变化。

4.2 预解式的局部定律

在本小节中，我们总结全文证明中所用到的关于 Wigner 型矩阵的事实。这些结果大多是在 [1] 中得到的（另见 [3]），但我们引用的是其简明版本，出自[2]，并针对 Wigner 型情形作了调整。

引理4.1。（[2]中的定理4.1）解$\mathbf{m}$（z）满足（3.4）具有以下性质：（1）对于每个 $j\in\{1,\dots,N\}$，都存在一个生成概率测度 ν_j（$\mathrm{d}x$），使得

$$m_j(z)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\nu_j(\mathrm{d}x)}{x-z}. \tag{4.1}$$

（2）若方差矩阵 S 满足条件（A）和（B），则对所有 $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$，该解满足以下界

$$\|\mathbf{m}(z)\|_\infty\leq\frac{c}{1+|z|},\quad \left\|\frac{1}{\mathbf{m}(z)}\right\|_\infty\leq C(1+|z|). \tag{4.2}$$

W我们现在陈述 Wigner 型矩阵最优的平均局部律和各向同性局部律。

定理4.2。（[2]中的推论1.8）设$\mathbf{w}$、$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 是 $\mathbb{C}^N$ 中的确定性向量，满足 $\|\mathbf{w}\|_\infty=1$且 $\|\mathbf{x}\|_2=\|\mathbf{y}\|_2=1$。那么以下估计对 $z\in\mathcal{D}$一致成立：

$$N^{-1}\left|\mathrm{Tr}\left[\mathbf{w}(G(z)-\mathbf{m}(z))\right]\right|\prec\Theta(z),\quad \left|\langle\mathbf{x},(G(z)-\mathbf{m}(z))\mathbf{y}\rangle\right|\prec\Psi(z), \tag{4.3}$$

其中，向量 $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{w}$ 与相应的对角矩阵相关联。

特别地，由各向同性局部律（4.3）可知，对任意 $j,\ k\in\{1,\dots,N\}$,

$$|G_{jk}(z)-\delta_{jk}m_j(z)|\prec\Psi(z). \tag{4.4}$$

4.3 稳定算子的初步界

我们的证明很大一部分围绕着稳定算子展开。该算子最初在 [1], 研究二点函数 $T(z,\ \zeta)$（定义见（1.1）时出现。本小节汇总稳定算子及相关算子的已知界。

稳定算子（$1-S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)$）由以下元素构成的矩阵定义

$$(1-S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta))_{jk}:=\delta_{jk}-S_{jk}m_k(z)m_k(\zeta),\quad j,k\in\{1,\dots,N\},\quad z,\zeta\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{4.5}$$

本文中，我们始终用 $\mathbf{m}$（以及 $\mathbf{m}$ 的各种函数，如 $\mathbf{m}$ 的虚部、 $|\mathbf{m}|$、$\mathbf{m}^{-1}$、$\mathbf{m}'$）表示一个向量 $(m_j)_{j=1}^N$ 及其对应的乘法算子，即 $\mathrm{diag}\ ((m_j)_{j=1}^N)$。请注意，若将第一个乘数视为算子，则这一记号与两个向量的逐点乘法一致。凡可能产生歧义之处，我们都会明确说明采用的是哪种解释。

稳定算子的分析依赖于相应的饱和自能算子 F，该算子在 [17], 中研究，它依赖于两个谱参数 z， ζ，并定义为

$$F_{jk}(z,\zeta) := |m_j(z)m_j(\zeta)|^{1/2} S_{jk} |m_k(z)m_k(\zeta)|^{1/2}, \quad j,k \in \{1,\dots,N\}, \quad z,\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{4.6}$$

以下陈述概述了 F 的主要性质，以及稳定算子的初步界。

命题 4.3。 (《*[17],* 》中的命题 4.3；参见 *[9]*中的命题 7.2.9 和引理 7.4.4）对于z， $\zeta \in \mathbb{C}$，在 F 中定义的主特征值(4.6) 为正且是单重的，相应的 ℓ^2-归一化特征向量$\mathbf{v}(z,\ \zeta)$ 的各分量均严格为正。 F 的范数满足以下上界

$$\|F(z,\zeta)\|_{\ell^2\to\ell^2} \le 1 - \frac{1}{2}\left(|\operatorname{Im} z| \frac{\langle \mathbf{v}(z,z), |\mathbf{m}(z)| \rangle}{\langle \mathbf{v}(z,z), \frac{|\operatorname{Im}\mathbf{m}(z)|}{|\mathbf{m}(z)|} \rangle} + |\operatorname{Im}\zeta| \frac{\langle \mathbf{v}(\zeta,\zeta), |\mathbf{m}(\zeta)| \rangle}{\langle \mathbf{v}(\zeta,\zeta), \frac{|\operatorname{Im}\mathbf{m}(\zeta)|}{|\mathbf{m}(\zeta)|} \rangle} \right). \tag{4.7}$$

若 $|z|$， $|\zeta| \lesssim 1$，则 $\mathbf{v}(z,\zeta)$ 的各分量大小相近，即

$$c_\kappa \le \sqrt{N} v_j(z,\zeta) \le C_\kappa, \quad j \in \{1,\dots,N\}, \tag{4.8}$$

此外，令 $\mathrm{Gap}\,(F)$ 表示$|F| = \sqrt{FF^*}$的两个最大特征值之差，则 $\mathrm{Gap}\,(F)$ 满足以下界

$$\mathrm{Gap}\,(F) \ge \widetilde{\delta}, \tag{4.9}$$

~其中 δ 是一个常数，仅取决于条件 (A)、(B) 以及 κ
此外，对于固定的 $\kappa > 0$ 和 z， $\zeta \in \mathcal{D}_\kappa$ 存在一个正常数 $\widetilde{c}_\kappa$ 使得 使得

$$\|F(z,\zeta)\|_{\ell^2\to\ell^2} \le 1 - \widetilde{c}_\kappa \left(|\operatorname{Im} z| + |\operatorname{Im}\zeta| \right), \tag{4.10}$$

命题 4.4。 (*[17]*中的命题 4.6 和引理 4.7）设 z， $\zeta \in \mathbb{C}$，使得 $|z|$， $|\zeta| \lesssim 1$ 且实部 z，实部$\zeta \in \mathcal{I}_\kappa$，则

$$\left\|(1 - S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta))^{-1}\right\|_{\ell^2\to\ell^2} + \left\|(1 - S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta))^{-1}\right\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty} \lesssim \frac{1}{|\operatorname{Im} z| + |\operatorname{Im}\zeta|}. \tag{4.11}$$

若进一步有 $\operatorname{Im} z \operatorname{Im}\zeta > 0$，则估计可改进为

$$\left\|(1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}})^{-1}\right\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty} \le C_\kappa, \tag{4.12}$$

其中， $C_\kappa > 0$ 是依赖于 κ的正常数。

最后，我们给出特殊情形下稳定算子的界，其中 $\zeta = z$与 $\mathbf{m}$ 的导数有关，这可由如下（向量）恒等式 $\mathbf{m}'(z) = (1 - \mathbf{m}^2(z)S)^{-1}\mathbf{m}^2(z)$ 推得，该恒等式由对式（3.4）求导得到。

引理 4.5。 (*[1],* 中的引理 5.9 *[9]*中的引理 7.3.2）设 $C > 0$ 为正常数，则对$z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ 且 $|z| \le C$ 有

$$\left\|(1 - \mathbf{m}^2(z)S)^{-1}\right\|_{\ell^2\to\ell^2} + \left\|(1 - \mathbf{m}^2(z)S)^{-1}\right\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty} \lesssim |\rho(z)|^{-2}, \tag{4.13}$$

其中 $\rho(z) = \pi^{-1}\langle$虚部$\mathbf{m}(z)\rangle$ 是 $\rho(E)$ 在 (3.3)中定义的调和延拓。

因此，对于所有满足 $\operatorname{Re} z \in \mathcal{I}_\kappa$ 的 $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$，我们有

$$\|\mathbf{m}'(z)\|_\infty \lesssim 1. \tag{4.14}$$

4.4 累积量展开公式

引理 4.6。 (第 II 节见 *[7],* 引理 3.1 见 *[13]*) 令 h 为具有有限矩的实值随机变量，令 f 为一个 $C^\infty(\mathbb{R})$ 函数。那么对任意 $\ell \in \mathbb{N}$ 以下展开式成立，

$$\mathbb{E}\left[h \cdot f(h)\right] = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{j!} c^{(j+1)}(h)\, \mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}h^j} f(h)\right] + R_{\ell+1}, \tag{4.15}$$

其中 $c^{(j)}$ 是由 h 定义的第 j 阶累积量

$$c^{(j)}(h) = (-i)^j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} \left(\log \mathbb{E}\left[e^{ith}\right] \right) \Big|_{t=0},$$

且余项 $R_{\ell+1}$ 满足

$$|R_{\ell+1}| \le C_l \, \mathbb{E}\left[|h|^{\ell+2}\right] \sup_{|x|\le M} |f^{(\ell+1)}(x)| + C_l \, \mathbb{E}\left[|h|^{\ell+2} \cdot \mathbb{1}_{|h|>M}\right] \left\| f^{(\ell+1)}(x) \right\|_\infty, \tag{4.16}$$

对任意 $M > 0$。

我们将公式（4.15）应用于 h 取为矩阵元 H_{jk}。相应地，在实数情形（$\beta = 1$）中，$\mathcal{C}^{(p)}$ 表示 p 阶累积量矩阵 H，$\mathcal{C}^{(p)}_{jk} := \mathcal{C}^{(p)}(H_{jk})$。在复数情形（$\beta = 2$）中，$\mathcal{C}^{(p)}$ 用作记号上的简写，表示实部和虚部的 p 阶累积量矩阵之和，即 H: $\mathcal{C}^{(p)}_{jk}$（Re H_{jk}）$+\mathcal{C}^{(p)}$（Im H_{jk}）。

5 主要结果的证明

定理 2.2 的证明。我们将证明分为以下命题所包含的两部分。我们在括号中标出它们在 [21] 和 [17] 情形下的对应版本。

命题 5.1。（参见 *[21]* 中的定理 2.2 以及 *[17]*中的（5.76））设 η_0，$\varepsilon_0 > 0$ 和 E_0 满足定理 2.2的假设，令 f 为式（2.3）中定义的缩放测试函数，并令 ϕ（λ）为 Tr f（H）$-\mathbb{E}$[Tr f（H）],

$$\phi(\lambda) := \mathbb{E}\left[\exp\{i\lambda \left(\operatorname{Tr} f(H) - \mathbb{E}\left[\operatorname{Tr} f(H)\right]\right)\}\right], \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

那么其导数 $\phi'(\lambda)$ 满足以下方程,

$$\phi'(\lambda) = -\lambda\phi(\lambda)V(f) + \mathcal{O}_{\prec}\big(N^{-1/2}\eta_0^{-1/2}(1+|\lambda|^4) + (1+|\lambda|)N^{-\varepsilon_0/2}\big), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

前提是 $c \le V(f) \le C$对于某些正的、与 N 无关的常数 c和 C。

这里，缩放测试函数 f 的方差 $V(f)$ 定义为

$$V(f) := \frac{1}{\pi^2} \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_0'} \frac{\partial \widetilde{f}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \widetilde{f}(z)}{\partial \bar{z}} \mathcal{K}(z,\zeta) \mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}z, \tag{5.3}$$

其中，对于 $z, \zeta \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$，核 $\mathcal{K}(z,\zeta)$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z,\zeta) :=& \frac{2}{\beta}\frac{\partial}{\partial\zeta} \operatorname{Tr}\left[\frac{\mathbf{m}'(z)}{\mathbf{m}(z)}\big(1 - S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\big)^{-1}\right] \\ &+ \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \operatorname{Tr}\left[S\mathbf{m}'(z)\mathbf{m}'(\zeta)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} \left\langle \overline{\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)}, \mathcal{C}^{(4)}\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta) \right\rangle, \end{aligned} \tag{5.4}$$

其中 $\mathcal{C}^{(4)}$ 表示四阶累积量矩阵 $\mathcal{C}^{(4)}_{jk}$。积分区域Ω_0,Ω_0' 在(5.3) 中定义为

$$\Omega_0 := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| > N^{-\varepsilon_0/2}\eta_0\}, \quad \Omega_0' := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| > 2N^{-\varepsilon_0/2}\eta_0\}, \tag{5.5}$$

~和 f 是 f 的拟解析延拓，定义为

$$\widetilde{f}(x+i\eta) = \chi(\eta)\left(f(x) + i\eta f'(x)\right), \tag{5.6}$$

其中 $\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个偶的 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 函数，其支集为 $[-1,1]$，满足 $\chi(\eta) = 1$ 对 $|\eta| < 1/2$.

命题 5.2。（参见 *[17]* 中的引理 6.7）设 E_0，η_0 满足定理 2.2的条件。设 f 为缩放测试函数，且 $g \in C_c^2$（$\mathbb{R}$）由（2.3）给出；再设 V（f）为（5.3）中定义的方差，则

$$V(f) = \frac{1}{2\beta\pi^2}\|g\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \mathcal{O}\left(\eta_0 \log N + N^{-\varepsilon_0}\right). \tag{5.7}$$

命题 5.2 意味着 $V(f)$ 满足命题 5.1的条件，因此

$$\phi'(\lambda) = -\lambda\phi(\lambda)V(f) + o(1), \tag{5.8}$$

当 $N \to \infty$，对于任意固定的 $\lambda \in \mathbb{R}$。由勒维连续性定理可得，$\mathrm{Tr}\ f(H) - \mathbb{E}[\mathrm{Tr}\ f(H)]$依分布收敛到方差为 $(2\beta\pi^2)^{-1}\|g\|^2_{H^{1/2}}$的中心高斯分布。因此，要证明定理 2.2，只需证明命题5.1 和 5.2 成立，这分别在第 5.1 节和第 7 节中完成。 □

注 5.3. 为便于表述，我们仅证明实对称（$\beta = 1$）矩阵的情形。复厄米（$\beta = 2$）情形仅需将累积量展开公式（引理4.6）替换为其复数版本。显而易见的修改留给读者完成。

5.1 线性特征值统计量的特征函数

命题 5.1 的证明. 利用特征函数方法中的标准技巧（例如参见 [17] 的第 5.2 节（另见 [19] 的第 4.2 节及其中的参考文献）），我们可以得到关于线性特征值统计量 $\phi(\lambda)$ 的特征函数及其导数 $\phi'(\lambda)$ 的以下一系列估计。证明只需对 [17], 中的类似论证作相对直接的修改，因此我们将证明放在附录 A。

引理 5.4。设 ϕ（λ） 是定义于 （5.1）中的特征函数，则在满足定理 2.2的条件下，以下估计成立

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda) &= \mathbb{E}[\widetilde{e}(\lambda)] + \mathcal{O}_{\prec}\big(N^{-\varepsilon_0/2}\big),\\
\phi'(\lambda) &= \frac{i}{\pi}\int_{\Omega_0}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{z}}\,\mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\{1-\mathbb{E}\}[\mathrm{Tr}\,G(z)]\right]\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}z + \mathcal{O}_{\prec}\big(|\lambda|N^{-\varepsilon_0/2}\big),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

其中

$$\widetilde{e}(\lambda) := \exp\left\{\frac{i\lambda}{\pi}\int_{\Omega_0'}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{z}}\{1-\mathbb{E}\}[\mathrm{Tr}\,G(z)]\,\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}z\right\}. \tag{5.10}$$

此外，对于所有 $z \in \mathcal{D}_\kappa$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widetilde{e}(\lambda)\{1-\mathbb{E}\}[\mathrm{Tr}\,G(z)]] = {}& \mathbb{E}[\widetilde{e}(\lambda)\{1-\mathbb{E}\}\mathcal{T}(z,z)] + \frac{2i\lambda}{\pi}\,\mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\int_{\Omega_0'}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\mathcal{T}(z,\zeta)\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta\right]\\
&+ \frac{i\lambda}{\pi}\,\mathbb{E}[\widetilde{e}(\lambda)]\int_{\Omega_0'}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{\zeta}}\,\mathrm{Tr}\,[S\mathbf{m}'(z)\mathbf{m}'(\zeta)]\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta\\
&+ \frac{i\lambda}{2\pi}\,\mathbb{E}[\widetilde{e}(\lambda)]\int_{\Omega_0'}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\zeta}\langle\overline{\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)}, \mathcal{C}^{(4)}\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\rangle\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta\\
&+ \mathcal{O}_{\prec}\big((1+|\lambda|^4)(N\Psi(z)\Theta(z) + \Psi(z)\eta_0^{-1/2})\big),
\end{aligned} \tag{5.11}$$

其中，随机函数 $\mathcal{T}(z,\zeta)$ 定义为

$$\mathcal{T}(z,\zeta) := \mathrm{Tr}\left[\frac{\mathbf{m}'(z)}{\mathbf{m}(z)}T(z,\zeta)\right]. \tag{5.12}$$

现在我们继续估计 (5.11) 右侧的前两项，使得$\widetilde{\ }\ \mathbb{E}[\widetilde{e}(\lambda)]$ 可以提取出来。根据缩放测试函数 (2.3) 的定义， f 的支集包含在以 E_0 为中心、宽度为 $\sim \eta_0$的竖直条带内，因此我们将后续分析限制在以下范围内：$|\mathrm{Re}\,\zeta - \mathrm{Re}\ z| \lesssim \eta_0 \ll \epsilon$，其中 ϵ 在定理 3.2 的陈述中定义。我们使用权重矩阵 A，并应用推论 3.3 来估计函数$\mathcal{T}(z,\zeta)$：$= \mathrm{m}'(z)\,\mathrm{m}(z)$。由界 (4.2) 和 (4.14) 可知$\|A\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty} \lesssim 1$，因此对所有满足 Re z、Re $\zeta \in \mathrm{supp}(f)$ 的 $z,\zeta \in \mathcal{D}_\kappa$，

$$\mathcal{T}(z,\zeta) = \mathrm{Tr}\left[\frac{\mathbf{m}'(z)}{\mathbf{m}(z)}\big(1 - S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\big)^{-1}\big(S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\big)^2\right] + \mathcal{E}(z,\zeta), \tag{5.13}$$

其中误差项 $\mathcal{E}(z,\zeta)$ 关于两个变量均为解析函数，并满足以下界

$$\mathcal{E}(z,\zeta) \prec N\Psi^2(z)\Psi(\zeta) + N\Psi(z)\Psi^2(\zeta) + \mathbb{1}_{\{\operatorname{Im} z \operatorname{Im}\zeta<0\}} N\Theta(z)\Theta(\zeta). \tag{5.14}$$

由（5.13）和（5.14）可得，对于 $\zeta = z$，有

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\{1-\mathbb{E}\}\left[\mathcal{T}(z,z)\right]\right] \prec N\Psi(z)^3, \tag{5.15}$$

从而得到（5.11）右侧第一项所需的上界。

现在估计（5.11）中的第二项。固定 $z \in \mathcal{D}_\kappa$，并考虑位于（ζ Ω_0' 由（5.5）定义）内的点。对 5.13）关于 ζ 求导，得到

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\mathcal{T}(z,\zeta) = \frac{\partial}{\partial\zeta}\operatorname{Tr}\left[\frac{\mathbf{m}'(z)}{\mathbf{m}(z)}\big(1-S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\big)^{-1}\big(S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\big)^2\right] + \frac{\partial}{\partial\zeta}\mathcal{E}(z,\zeta). \tag{5.16}$$

为了估计误差项 $\mathcal{E}(z,\zeta)$ 的导数，我们使用以下技术引理。

引理 5.5。（*[17]*中的引理 5.5）设 $K(z)$ 是定义在 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$上的全纯函数，那么对所有 $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$以及任意 $p \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{\partial^p K}{\partial z^p}(z)\right| \le C_p |\operatorname{Im} z|^{-p} \sup_{|\zeta-z|\le|\operatorname{Im} z|/2} |K(\zeta)|, \tag{5.17}$$

其中 $C_p > 0$ 是仅依赖于 p的常数。

引理 5.5　将其应用于估计式（5.14）可知，误差项 $\partial_\zeta\mathcal{E}(z,\ \zeta)$ 满足以下界

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\mathcal{E}(z,\zeta) \prec N|\operatorname{Im}\zeta|^{-1}\big(\Psi(z)^2\Psi(\zeta) + \Psi(z)\Psi(\zeta)^2 + \Theta(z)\Theta(\zeta)\big). \tag{5.18}$$

为继续推导，我们还需要另一个技术引理。

引理 5.6。（参见 *[19]*中的引理 4.4）设 f 为 (2.3)中定义的缩放测试函数 Ω 是如下形式的区域

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : cN^{-\tau'}\eta_0 < |\operatorname{Im} z| < 1, a < \operatorname{Re} z < b\}, \tag{5.19}$$

使得 $\operatorname{supp}(f) \subset (a,b)$，且 τ'、c为正常数。设 $K(z)$ 是 Ω 上满足下列条件的全纯函数

$$|K(z)| \le C|\operatorname{Im} z|^{-s}, \quad z \in \Omega, \tag{5.20}$$

对某个 $0 \le s \le 2$成立。则存在一个常数 $C' > 0$，其仅依赖于 g（(2.3)中的 χ、（(5.6)中的s，使得

$$\left|\int_\Omega \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{z}}(x+iy)K(x+iy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le CC'\eta_0^{1-s}\log N. \tag{5.21}$$

引理的证明 5.6。由（2.3）可得 $\|f\|_1 \sim \eta_0$，$\|f'\|_1 \sim 1$，$\|f''\|_1 \sim \eta_0^{-1}$。当 $1 \le s \le 2$时，不等式（5.21）由 [19] 中的引理 4.4 得出。对于 $0 \le s < 1$，证明方法大致相同，不同之处在于，当 $\eta_0 \le |\operatorname{Im} z| \le 1$时需进行两次分部积分。□

引理 5.6 和矩阵恒等式 $(1-X)^{-1}X^2 = (1-X)^{-1} - X - 1$ 可得以下表达式。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\int_{\Omega_0'}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\zeta}\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta\right] &= \mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\right]\int_{\Omega_0'}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\operatorname{Tr}\left[\frac{\mathbf{m}'(z)}{\mathbf{m}(z)}\big(1-S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta)\big)^{-1}\right]\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta \\ &\quad - \mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\right]\int_{\Omega_0'}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{\zeta}}\operatorname{Tr}\big[S\mathbf{m}'(z)\mathbf{m}'(\zeta)\big]\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta \\ &\quad + \mathcal{O}_\prec\big(N^{1/2}\Psi(z)^2\eta_0^{-1/2} + \Psi(z)\eta_0^{-1} + \Theta(z)\eta_0^{-1}\big),\end{aligned} \tag{5.22}$$

最后，由（5.11）和（5.22），结合（5.9），我们得出

$$\phi'(\lambda) = -\lambda V(f)\,\mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\right] + \widetilde{\mathcal{E}}(\lambda), \tag{5.23}$$

~其中 V（f）在（5.3）中定义，而 $\mathcal{E}$（λ）是从先前推导中汇总并对 $\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}z$积分得到的总误差项。引理 5.6 结合（5.9）、（5.11）、（5.15）和（5.18）中的误差估计，给出了误差项的如下界

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{O}_{\prec}\big(N^{-1/2}\eta_0^{-1/2}(1+|\lambda|^4) + |\lambda|N^{-\varepsilon_0/2}\big). \tag{5.24}$$

在命题 5.1 $V(f)$ 有界，因此由 (5.9) 和 (5.23) 中的第一个估计可得 (5.2) 成立。至此，命题5.1的证明结束。 □

6 二点函数局部定律的证明 s

本节将推导证明定理 3.2 及其关于二点函数 $T(z,\zeta)$ 的特例推论 3.3 所需的全部工具。为使记号更简洁，我们引入如下约定 ~ $G \equiv G(z)$，$G \equiv G(\zeta)$, $\mathrm{m} \equiv \mathrm{m}(z)$，~$\mathrm{m} \equiv \mathrm{m}(\zeta)$，$\Psi \equiv \Psi(\zeta)$，~ $\Psi \equiv \Psi(z)$，$\Theta \equiv \Theta(z)$，$\Theta \equiv \Theta(\zeta$。

对于一个确定性矩阵 W，其元素为 $|W_{ab}| \lesssim N^{-1}$，量 $\sum_{a\neq y} W_{ax}G_{\alpha a}\widetilde{G}_{a\beta}$ 在两种特殊情形下可以很容易地得到估计。首先，若 W 的每一列都与全 1 向量成比例，~ ~即 $W_{ab} = w_b$ 仅依赖于 b，则对 a 求和可得 $w_x([GG]_{\alpha\beta} - G_{\alpha y}G_{y\beta})$，再由预解式恒等式和定理 4.2中的局部定律即可得到该估计。其次，若 $X := (1 - S\mathbf{m}\,\tilde{}\,\mathbf{m})^{-1}W$的元素均由 CN^{-1}控制，则可由下文的引理 6.1得到该估计。我们将证明，这两种特殊情形是完备的，也就是说，任意一个 W 都可以表示为这两种情形的线性组合，且系数受控。

为此，我们证明，在相关区域内，算子（$1 - S\mathrm{m}\,\tilde{}\,\mathrm{m}$）具有一个非常小的致不稳定特征值，并且其上方存在一个数量级为 1 的谱隙。此外，若 Π 是算子（$1 - S\mathrm{m}\,\tilde{}\,\mathrm{m}$）对应于主特征值的特征投影算子，则将（$1 - S\mathrm{m}\,\tilde{}\,\mathrm{m}$）$^{-1}$ 限制在 Π 的核上所得算子的 $\ell^\infty \to \ell^\infty$-范数同样是一个数量级为 1 的量。最后，我们证明，全 1 向量 1 与 Π的核之间具有充分大的距离。

6.1 稳定方向局部定律

For 对于任意 $N \times N$确定性矩阵 W以及任意指标 x、y、α、β，我们定义以下量 s

$$\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}(W) := \sum_{a\neq y} W_{ax}G_{\alpha a}\widetilde{G}_{a\beta}, \quad f^{xy}_{\alpha}(W) := m_\alpha\widetilde{m}_\alpha([(1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}})^{-1}W]_{\alpha x} - \delta_{\alpha y}W_{\alpha x}). \tag{6.1}$$

我们证明以下估计。

引理 6.1。对于任意 z、$\zeta \in \mathcal{D}_\kappa$ 以及任意确定性 $N \times N$矩阵 X，

$$\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}((1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}})X) = \delta_{\alpha\beta}f^{xy}_{\alpha}((1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}})X) + \mathcal{O}_{\prec}\big(N\,\|X\|_{\max}\,\Psi\widetilde{\Psi}(\Psi + \widetilde{\Psi})\big). \tag{6.2}$$

若满足 $\|X\|_{\max} := \max_{j,\ k} |X_{jk}| \lesssim 1$。

我们采用以下用于随机支配界的自我改进机制，例如借鉴自 [14]。

引理 6.2.（ *[14]*中的引理 6.3）设 $\mathcal{X}$ 是一个随机变量，满足 $0 \le \mathcal{X} \prec N^C$，其中某个 $C > 0$，并设 $\Xi \ge 0$ 是一个确定性量。假设存在常数 $q \in [0,1)$，使得对于任意满足 $\Xi \le \Phi \le N^C$ 的 Φ，以及任意 $d \in \mathbb{N}$，都有如下蕴含

$$\mathcal{X} \prec \Phi \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\big[|\mathcal{X}|^{2d}\big] \prec \sum_{k=1}^{2d}\big(\Phi^q\Xi^{1-q}\big)^k\,\mathbb{E}\big[|\mathcal{X}|^{2d-k}\big], \tag{6.3}$$

则 $\mathcal{X} \prec \Xi$。

引理的证明 *6.1*。 设 $Y := (1 - S\mathbf{m}\,\tilde{}\,\mathbf{m})X$，则我们需要估计的量为 $[\mathcal{G}Y]_{yx} = \mathcal{F}^{xy}_{yy}(Y)$。由形式为 (4.4) 的局部定律可得

$$\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}(Y) \prec N\,\|X\|_{\max}\,\Psi\widetilde{\Psi} =: \Lambda. \tag{6.4}$$

~设 Φ 是一个确定性控制参数，满足界 $(\Psi+\Psi)\Lambda \le \Phi \le \Lambda$，使得

$$\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}(Y) - \delta_{\alpha\beta} f^{xy}_{\alpha}(Y) \prec \Phi. \tag{6.5}$$

由（6.4）和（6.5）可直接得出

$$\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}(Y) \prec \Phi + \delta_{\alpha\beta}\Lambda. \tag{6.6}$$

令 ∂_{jk} 表示关于矩阵元 H_{jk}的偏导数，则 $\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}$ 的偏导数为

$$\partial_{ab}\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}(Y) = -(1+\delta_{ab})^{-1}(G_{\alpha a}\mathcal{F}^{xy}_{b\beta}(Y) + G_{\alpha b}\mathcal{F}^{xy}_{a\beta}(Y) + \mathcal{F}^{xy}_{\alpha b}(Y)\widetilde{G}_{a\beta} + \mathcal{F}^{xy}_{\alpha a}(Y)\widetilde{G}_{b\beta}). \tag{6.7}$$

我们结合向量 Dyson 方程（3.4）与预解式恒等式 $zG = HG - 1$，得到

$$\widetilde{G}_{a\beta} = -\widetilde{m}_a \sum_b \Big(H_{ab}\widetilde{G}_{b\beta} + S_{ab}\widetilde{m}_b \widetilde{G}_{a\beta} \Big) + \widetilde{m}_a \delta_{a\beta}. \tag{6.8}$$

令 $d \in \mathbb{N}$，定义 $\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}(d-1,d) := (\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}(Y) - \delta_{\alpha\beta}\mathrm{f}^{xy}_{\alpha}(Y))^{d-1}(\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}(Y) - \delta_{\alpha\beta}\mathrm{f}^{xy}_{\alpha}(Y))^{d}$。对于任意$p \in \mathbb{N}$，定义 $M_p := \mathbb{E}\big[|\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}(Y) - \delta_{\alpha\beta}\mathrm{f}^{xy}_{\alpha}(Y)|^p\big]$。将（6.8）代入定义（6.1），并应用引理 4.6 的累积量展开公式，我们得到

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}(X)\mathcal{P}\big] = \sum_{a\neq y} m_a \widetilde{m}_a X_{ax}\, \mathbb{E}\big[\mathcal{F}^{ay}_{\alpha\beta}(S)\mathcal{P}\big] + \delta_{\alpha\beta} f^{xy}_{\alpha}(Y)\, \mathbb{E}[\mathcal{P}] + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta y} S_{yy} m_y^2 \widetilde{m}_y^2 X_{yx}\, \mathbb{E}[\mathcal{P}] \tag{6.9a}$$

$$+ \mathbb{E}\Big[\sum_{a\neq y}\sum_b \widetilde{m}_a X_{ax} S_{ab}\big(G_{\alpha a}(\widetilde{G}_{bb} - \widetilde{m}_b)\widetilde{G}_{a\beta} + G_{\alpha b}(G_{aa} - m_a)\widetilde{G}_{b\beta}\big)\mathcal{P}\Big] \tag{6.9b}$$

$$+ \mathbb{E}\Big[\sum_{a\neq y}\sum_{b\neq a} \widetilde{m}_a X_{ax} S_{ab} G_{\alpha a}\big(G_{ba} + \widetilde{G}_{ba}\big)\widetilde{G}_{b\beta}\mathcal{P}\Big] + R_2 \tag{6.9c}$$

$$+ \sum_{a\neq y} X_{ax} m_a \widetilde{m}_a S_{ay}\, \mathbb{E}\big[\big(G_{\alpha y}\widetilde{G}_{y\beta} - \delta_{\alpha y}\delta_{y\beta} m_y \widetilde{m}_y\big)\mathcal{P}\big] \tag{6.9d}$$

$$+ \delta_{\beta\neq y}\widetilde{m}_\beta X_{\beta x}\, \mathbb{E}\big[(G_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} m_\beta)\mathcal{P}\big] - \mathbb{E}\Big[\sum_{a\neq y} \widetilde{m}_a X_{ax} G_{\alpha a} \sum_b S_{ab}\widetilde{G}_{b\beta}\partial_{ab}\mathcal{P}\Big], \tag{6.9e}$$

其中 R_2 是高阶累积量带来的总误差，所有无约束求和的范围均为 1 到 N。我们依次对（6.9）右侧出现的项（6.9b）至（6.9e）进行估计。由条件 (A)、局部定律（4.4）、上界 (4.2) 和（6.5）可知，项（6.9b）~以及（6.9c）中的第一项均有界于 $\mathcal{O}_{\prec}((\Psi+\Psi)\Lambda M_{2d-1})$。类似地，项（6.9d）和（6.9e）中的~第一项有界于 $\mathcal{O}_{\prec}(\|X\|_{\max}(\Psi+\Psi)M_{2d-1})$。

我们对（6.9e）中的第二项进行估计。由（A）、（4.4）、估计（4.2）、（6.6）和（6.7）可得

$$\sum_b S_{ab}\widetilde{G}_{b\beta}\partial_{ab}\mathcal{P} \prec (\Psi + \widetilde{\Psi} + \delta_{\alpha a} + \delta_{a\beta})\widetilde{\Psi}\Phi M_{2d-2}. \tag{6.10}$$

因此，（6.9e）中的第二项可估计为 $\mathcal{O}_{\prec}((\Psi+\widetilde{\Psi})\Lambda\Phi M_{2d-2})$。最后，利用估计（4.16）、（6.6）和恒等式（6.7），结合条件（A）和（4.2），容易验证误差项 $R_2 \prec (\Psi+\widetilde{\Psi})\Lambda M_{2d-1} + (\Psi+\widetilde{\Psi})\Lambda\Phi M_{2d-2} + (\Psi+\widetilde{\Psi})\Lambda\Phi^2 M_{2d-3}$。

注意到，（6.9a）右端的第一项可以表示为

$$\sum_{a\neq y} m_a \widetilde{m}_a X_{ax}\, \mathbb{E}\big[\mathcal{F}^{ay}_{\alpha\beta}(S)\mathcal{P}\big] = \mathbb{E}\big[\mathcal{F}^{ay}_{\alpha\beta}(X)\mathcal{P}\big] - \mathbb{E}\big[\mathcal{F}^{ay}_{\alpha\beta}(Y)\mathcal{P}\big] - m_y\widetilde{m}_y X_{yx}\, \mathbb{E}\big[\mathcal{F}^{yy}_{\alpha\beta}(S)\mathcal{P}\big], \tag{6.11}$$

其中，最后一项可估计为 $\mathcal{O}_{\prec}(N^{-1}\Lambda M_{2d-1})$。结合（6.9）和（6.11）可得

$$\mathbb{E}\big[|\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}(Y) - \delta_{\alpha\beta} f^{xy}_{\alpha}(Y)|^{2d}\big] \prec \big(\Psi + \widetilde{\Psi}\big)\Lambda\Phi^2 M_{2d-3}, \tag{6.12}$$

对于任意满足条件的控制参数 $\Phi_{\alpha\beta,\ y}$（6.5）。因此，由引理 6.2，

$$\mathcal{F}^{xy}_{\alpha\beta}(Y) = \delta_{\alpha\beta} f^{xy}_{\alpha}(Y) + \mathcal{O}_{\prec}\big(\Lambda(\Psi + \widetilde{\Psi})\big), \tag{6.13}$$

这就完成了引理 6.1的证明。 □

注 6.3. 若 z 和 ζ 位于同一个（上或下）半平面，引理 6.1 蕴含定理 3.2。事实上，命题 4.4 中的界 (4.12) 表明，只要 $\eta\widetilde{\eta} > 0$, $X := (1 - S\mathrm{m}\ \widetilde{}\mathrm{m})^{-1}W \text{satisfies} |X_{jk}| \lesssim N^{-1}$。对 $X = (1 - S\mathrm{m}\ \widetilde{}\mathrm{m})^{-1}W$ 应用引理 6.1，即可得到 (3.6)；对 (3.6) 求和则得到 (3.7)。接下来考虑 z 和 ζ 位于不同（上和下）半平面的情形。

6.2 稳定算子分析

在本小节中，我们将获得稳定算子 $(1 - S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta))$ 的所有性质，并结合引理 6.1 完成定理 3.2 的证明，其中 z, ζ 位于相反的半平面，如第 6节开头所述。

对于两个谱参数 z, ζ，令 $\eta := \mathrm{Im}\, z$，且 $\widetilde{\eta} := \mathrm{Im}\, \zeta$。不失一般性，以下假设 $\mathrm{Re}\ z \in \mathcal{I}_\kappa, \eta > 0$ 且 $\mathrm{Re}\, \zeta \in \mathcal{I}_\kappa, \widetilde{\eta} < 0$。在本小节余下部分中，我们使用以下记号

$$\begin{aligned} F \equiv F(z) &:= |\mathbf{m}(z)|S|\mathbf{m}(z)|, \\ B \equiv B(z,\zeta) &:= 1 - S\mathbf{m}(z)\mathbf{m}(\zeta), \\ B_0 \equiv B_0(z) &:= 1 - S|\mathbf{m}(z)|^2 = |\mathbf{m}(z)|^{-1}(1 - F)|\mathbf{m}(z)|. \end{aligned} \tag{6.14}$$

我们将算子 B 视为 $B_0 = B(z, \bar{z})$的一个扰动，因为 $|\zeta - \bar{z}|$ 很小。我们根据 B_0的性质，推导出 B 所需的性质；而这些性质又源自式（4.9）中得到的 F 的谱隙下界。

令 $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ 表示 F 的特征值，按降序排列（计入重数）。因此，根据 Perron–Frobenius 定理，主特征值 ψ_1 为实数，且等于谱半径$\|F\|_{\ell^2 \to \ell^2}$。此外，对向量 Dyson 方程（3.4）两边取虚部，并逐坐标乘以 $|\mathbf{m}|$，得到

$$\big(1 - F\big)\frac{\mathrm{Im}\,\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|} = \eta|\mathbf{m}|. \tag{6.15}$$

此外，根据条件（A），对每个 j，有（$S\,\mathrm{Im}\mathbf{m}$）$_j \sim \langle \mathrm{Im}\,\mathbf{m}\ (z)\ \rangle \sim \rho\ (z)$，其中 $\rho\ (z)$ 是自洽态密度 $\rho\ (x)$ 在（3.3）中定义的向 $\mathbb{C}$上的调和延拓。因此，对（3.4）取虚部，得到

$$\frac{\mathrm{Im}\, m_j}{|m_j|} \sim |m_j|(\rho(z) + \eta),, \quad j \in \{1, \ldots, N\}. \tag{6.16}$$

因此，由（6.15）和（6.16），$1 - \psi_1 \lesssim \eta$。结合关于 4.10）的上界 $\|F\|_{\ell^2 \to \ell^2}$，可推出 $1 - \psi_1 \sim \eta$。由（4.9）可知，F的主特征值与其余谱之间隔着一个环域，即存在 $r > 0$ 和 $\delta > 0$，它们与 z 和 N 无关，使得

$$|1 - \psi_1| < r - \delta, \quad \text{and} \quad |1 - \psi_j| > r + \delta, \quad j \in \{2, \ldots, N\}. \tag{6.17}$$

在本小节余下部分，我们将证明，对于所有充分接近 $\bar{z}$ 的 ζ，B 中模最小的特征值也与其余谱分离，二者之间隔着一个宽度为常数量级的环域。

利用辐角原理和雅可比公式，可以通过围道积分表示矩阵 X 在区域 Ω 内的特征值个数（按重数计）：

$$N_X(\Omega) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega} \mathrm{Tr}(w - X)^{-1}\mathrm{d}w. \tag{6.18}$$

为了证明 B 的特征值分离性，我们首先估计 B 在环域内的预解式范数：

$$\mathcal{A}_{r,\delta} := \{w \in \mathbb{C} : r - 3\delta/4 \le |w| \le r + 3\delta/4\}, \tag{6.19}$$

其中 r 和 δ 如式（6.17）所示。

~命题 6.4. 存在 $\varepsilon_1 > 0$ 和 $C > 0$，它们与 N 和 z 无关，使得

$$\left\|(w - B(z,\zeta))^{-1}\right\| \le \widetilde{C} \tag{6.20}$$

对所有 $w \in \mathcal{A}_{r,\ \delta}$ 以及所有满足 Re $\zeta \in \mathcal{I}_\kappa$、Im $\zeta < 0$ 和 $|\zeta - \bar{z}| \le \varepsilon_1$ 的 ζ 均成立。（范数 $\|\cdot\|$ 由 ℓ^2 或 ℓ^∞ 诱导。）

证明。 注意到 $\|(w-B)^{-1}\| \le \left\|\left(1-(w-B_0)^{-1}(B-B_0)\right)^{-1}\right\| \|(w-B_0)^{-1}\|$。由于 $(w-B_0)^{-1} = -|\mathbf{m}|^{-1}(1-w-F)^{-1}|\mathbf{m}|$ 且 $|\mathbf{m}| \sim 1$，（6.17）蕴含

$$\|(w-B_0)^{-1}\| \le \frac{C}{\min\limits_j |\psi_j - w|} \le \frac{4C}{\delta}, \quad w \in \mathcal{A}_{r,\delta}. \tag{6.21}$$

由关于 4.2）、（4.14）的 $|\mathbf{m}|$ 和 $|\mathbf{m}'|$ 一致有界性可得 $\|B - B_0\| \lesssim |\zeta - \bar{z}|$，这意味着存在 $\varepsilon_1 > 0$ 使得

$$\forall \zeta : |\zeta - \bar{z}| \le \varepsilon_1, \|B - B_0\| \le \frac{\delta}{8C}, \tag{6.22}$$

其中 C 是（6.21）中的常数。
立即可得 $\left\|\left(1-(w-B_0)^{-1}(B-B_0)\right)^{-1}\right\| \le 2$，因此

$$\|(w-B)^{-1}\| \le \frac{8C}{\delta}. \tag{6.23}$$

□

断言 6.4 意味着，对于任意充分大的固定 N，式（6.18）中满足 $X := B$ 的被积函数在 $\Omega := \mathcal{A}_{r,\ \delta}$ 上一致有界，其中 ζ 满足 $|\zeta - \bar{z}| \le \varepsilon_1$；因此由解析性可得

$$N_{B(z,\zeta)}(\mathcal{A}_{r,\delta}) = 0, \quad |\zeta - \bar{z}| \le \varepsilon_1. \tag{6.24}$$

由于 $B(z,\ \zeta)$ 的特征值关于 ζ 连续，（6.24）意味着没有特征值能够在 $\mathbb{C}\backslash\mathcal{A}_r$ 的两个连通分支之间移动，δ 再结合（6.17），得到以下断言。

断言 6.5. 对任意充分大的 N，等式

$$\begin{aligned} N_B(\{|w| < r - 3\delta/4\}) &= N_{B_0}(\{|w| < r - 3\delta/4\}) = 1, \\ N_B(\{|w| > r + 3\delta/4\}) &= N_{B_0}(\{|w| > r + 3\delta/4\}) = N - 1, \end{aligned} \tag{6.25}$$

对任意满足 Re $\zeta \in \mathcal{I}_\kappa$、Im $\zeta < 0$ 和 $|\zeta - \bar{z}| \le \varepsilon_1$ 的 ζ 均成立。

Cl断言 6.5 现在使我们能够将主特征投影算子定义为 Π 的 B 围道积分 ral

$$\Pi \equiv \Pi(z,\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi|=r} (\xi - B(z,\zeta))^{-1} \mathrm{d}\xi. \tag{6.26}$$

断言 6.5 断言围道 $\{|\xi| = r\}$ 恰好围住 B 的一个特征值，其重数为 1，因此 Π 是一个秩一特征投影算子。

我们现在证明，将 B^{-1} 限制在 $(1-\Pi)$ 的值域上，其范数有一个常数上界 .

断言 6.6. 对于所有满足 Re z、Re $\zeta \in \mathcal{I}_\kappa$、Im z Im $\zeta < 0$ 和 $|\zeta - \bar{z}| \le \varepsilon_1$ 的 z、ζ，

$$\left\|B^{-1}(1-\Pi)\right\|_{\ell^\infty \to \ell^\infty} \le \widetilde{c}, \tag{6.27}$$

其中 $\widetilde{c}$ 仅取决于条件 (A)、(B) 以及 κ。

证明。 由表达式（6.26）对于 Π 可得

$$B^{-1}(1-\Pi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi|=r} \frac{1}{\xi}(\xi - B)^{-1} \mathrm{d}\xi \tag{6.28}$$

因此， $B^{-1}(1-\Pi)$ 的范数有如下界

$$\left\|B^{-1}(1-\Pi)\right\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\left(re^{i\theta}-B\right)^{-1}\right\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}\mathrm{d}\theta \le \frac{8C}{\delta}, \tag{6.29}$$

使用命题 6.4 中的界，在圆 $\{|\xi|=r\}$ 上，而该圆位于 $\mathcal{A}_{r,\delta}$ 内。 □

最后，我们证明全 1 向量与 Π 的核充分分离。这保证了空间可稳定地分解为 $(1-\Pi)$ 的值域与 1 的张成空间的直和，因此我们可以分别对每个分量应用局部定律。

命题 6.7. 存在一个与 N 和 z 无关的 $\varepsilon>0$，使得对所有满足 $\mathrm{Re}\,\zeta\in\mathcal{I}_\kappa$、$\mathrm{Im}\,\zeta<0$ 和 $|\zeta-\bar z|\le\varepsilon$ 的 ζ，

$$\frac{\|\Pi\mathbf{1}\|_\infty}{\|\Pi\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}} \ge c, \tag{6.30}$$

其中 $c>0$ 是一个与 N 和 z 无关的常数。

证明。 定义投影算子 Π_0，通过式 B_0 （6.26） $\Pi_0=|\mathbf{m}|^{-1}\widetilde{\Pi}_0|\mathbf{m}|$，其中 $\widetilde{\Pi}_0$ 是厄米算子 F对应于主特征值的正交投影算子。由于 $|\mathbf{m}|\sim 1$，我们有 $\|\Pi_0\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}\le C_0$。此外，根据命题 4.3，对应于 ℓ^2-归一化特征向量 $\mathbf{v}$ 是 F 的主特征值对应的特征向量，其分量为 $\mathbf{v}_j\ge 0$，且 $\mathbf{v}_j\sim N^{-1/2}$，因此

$$\|\Pi_0\mathbf{1}\|_\infty = \left\||\mathbf{m}|^{-1}\widetilde{\Pi}_0|\mathbf{m}|\mathbf{1}\right\|_\infty = \left\||\mathbf{m}|^{-1}\mathbf{v}\right\|_\infty\langle\mathbf{v},|\mathbf{m}|\rangle \ge c_0, \tag{6.31}$$

其中， $c_0>0$ 是一个与 N 和 z无关的常数。

Si与证明6.22类似，对于任意 $\gamma\in(0,1]$，存在 $\varepsilon_\gamma>0$，使得该界 d

$$\|B-B_0\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}\le\gamma\frac{\delta}{8C} \tag{6.32}$$

对所有 $\zeta\in\mathcal{D}_\kappa^-$ 满足 $|\zeta-\bar z|\le\varepsilon_\gamma$的情形成立。这里 δ 定义于（6.17）中，而 $C>0$ 是（6.21）中的常数。我们取 ε_γ 小于 Claim 6.4中的 ε_1，则对于所有 ζ满足 Re $\zeta\in\mathcal{I}_\kappa$、Im$\,\zeta<0$ 的情形，$|\zeta-\bar z|\le\varepsilon_\gamma$ 我们有

$$\begin{aligned}
\|\Pi-\Pi_0\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty} &\le \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|(re^{i\theta}-B)^{-1}-(re^{i\theta}-B_0)^{-1}\right\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}\mathrm{d}\theta\\
&\le \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|(re^{i\theta}-B)^{-1}(B-B_0)(re^{i\theta}-B_0)^{-1}\right\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}\mathrm{d}\theta\\
&\le r\cdot\frac{8C}{\delta}\cdot\gamma\frac{\delta}{8C}\cdot\frac{4C}{\delta}=\gamma\frac{4Cr}{\delta}.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

在倒数第二步中，我们用到了不等式（6.21）和（6.23）。我们令 γ 取值为$\gamma_0:=$最小值 $\{1,\frac{c_0\delta}{8Cr}\}$，这保证了

$$\|\Pi\mathbf{1}\|_\infty \ge \left|\|\Pi_0\mathbf{1}\|_\infty-\|\Pi-\Pi_0\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}\|\mathbf{1}\|_\infty\right| \ge c_0-\gamma_0\frac{4Cr}{\delta}\ge\frac{c_0}{2}. \tag{6.34}$$

最后，注意到

$$\|\Pi\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}\le\|\Pi_0\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}+\|\Pi-\Pi_0\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}\le C_0+c_0/2. \tag{6.35}$$

这就用 $c:=c_0/(2C_0+c_0)$ 证明了该断言。 □

6.3 完成定理 3.2 的证明

定理 3.2 的证明。回想一下，目标是估计式（3.1）中定义的量。与其-~估计 $\sum_{a\neq y} w_a G_{\alpha a} G_{a\beta}$ 本身，不如研究如下类型的对象，这样更方便：$\sim\sum_{a\neq y} W_{ax} G_{\alpha a} G_{a\beta}$，因为它们概括了式（3.6）和式（3.7）中出现的量。通过令 W_{ax}，冗余指标 $x := w_{a\circ}$

在 $\operatorname{Im} z \operatorname{Im}\zeta > 0$ 的情况下，(3.6) 和 (3.7) 直接由 (4.12 和引理 6.1（见注 6.3）得到。因此，我们着重讨论 $\operatorname{Im} z \operatorname{Im}\zeta < 0$ 的情况。

由于 Π 是秩一的，而断言 6.7 表明 $\Pi\mathbf{1} \neq 0$，因此 Π 的核与 $\mathbf{1}$ 张成$\mathbb{C}^N$。因此，我们可以将矩阵 W 的每一列分解为 $\mathbf{1}$ 与 $\ker\Pi$中的元素的线性组合，即存在一个 $N\times N$ 矩阵 Y和一个向量 $\mathbf{s}\in\mathbb{C}^N$ 使得

$$W = Y + \mathbf{1}\mathbf{s}^*, \quad \Pi Y = 0. \tag{6.36}$$

我们将 (6.36) 中的第一个等式左乘 Π，将等式两边作用于 a-阶标准基向量$\mathbf{e}_a$，其中 $\mathbb{C}^N$，并取 ℓ^∞-范数，得到

$$\|\Pi W\mathbf{e}_a\|_\infty = |s_a|\,\|\Pi\mathbf{1}\|_\infty, \quad a\in\{1,\dots,N\}. \tag{6.37}$$

根据假设，$\|W\|_{\max}\lesssim N^{-1}$，因此 $\|W\mathbf{e}_a\|_\infty \lesssim N^{-1}$。利用断言 6.7可得

$$|s_a| \lesssim \frac{N^{-1}\,\|\Pi\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}}{\|\Pi\mathbf{1}\|_\infty} \lesssim N^{-1}, \quad a\in\{1,\dots,N\}. \tag{6.38}$$

~ ~结合（6.36）以及形式为（$z-\zeta$）$GG = G - G$ 的预解式恒等式，我们得到

$$\sum_{a\neq y} W_{ax} G_{\alpha a}\widetilde{G}_{a\beta} = \sum_{a\neq y} Y_{ax} G_{\alpha a}\widetilde{G}_{a\beta} + g^y_{\alpha\beta}\bar{s}_x, \qquad g^y_{\alpha\beta} := \frac{G_{\alpha\beta}-\widetilde{G}_{\alpha\beta}}{z-\zeta} - G_{\alpha y}\widetilde{G}_{y\beta}. \tag{6.39}$$

定义 $N\times N$矩阵 $X := (1 - S\mathrm{m}\,\widetilde{}\,\mathrm{m})^{-1}Y$。由（6.36）可得 $Y = (1-\Pi)Y$，因此$X = (1 - S\mathrm{m}\,\widetilde{}\,\mathrm{m})^{-1}(1-\Pi)Y$。此外，估计 $\|W\|_{\max}\lesssim N^{-1}$、（6.36）和（6.38）意味着，对所有 a和 b，都有 $|Y_{ab}|\lesssim N^{-1}$。由于根据命题6.6 $\big\|(1 - S\mathrm{m}\,\widetilde{}\,\mathrm{m})^{-1}(1-\Pi)\big\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}\lesssim 1$，我们得出

$$\|X\|_{\max} = \max_{a,b}|X_{ab}| \lesssim N^{-1}. \tag{6.40}$$

首先，利用（6.40），我们可以对（6.39）中的第一项应用引理 6.1，得到

$$\sum_{a\neq y} Y_{ax} G_{\alpha a}\widetilde{G}_{a\beta} = \delta_{\alpha\beta} m_\alpha\widetilde{m}_\alpha\big([(1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}})^{-1}Y]_{\alpha x} - \delta_{\alpha y}Y_{\alpha x}\big) + \mathcal{O}_\prec\big(\Psi^2\widetilde{\Psi} + \Psi\widetilde{\Psi}^2\big). \tag{6.41}$$

利用（6.36），我们通过计算

$$\begin{aligned} m_\alpha\widetilde{m}_\alpha[(1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}})^{-1}Y]_{\alpha x} &= \big[\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big(1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big)^{-1}(W - \mathbf{1}\mathbf{s}^*)\big]_{\alpha x} \\ &= \big[\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big(1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big)^{-1}W\big]_{\alpha x} - \big(\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big(1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big)^{-1}\mathbf{1}\big)_\alpha\bar{s}_x. \end{aligned} \tag{6.42}$$

最后，对 3.4 中 z 和 ζ 的向量 Dyson 方程作差，即可得到

$$\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big(1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big)^{-1}\mathbf{1} = \frac{\mathbf{m}-\widetilde{\mathbf{m}}}{z-\zeta}. \tag{6.43}$$

接下来，我们估计（6.39）中的第二项。应用形式为（4.4）的局部定律，可得

$$g^y_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\frac{m_\alpha - \widetilde{m}_\alpha}{z-\zeta} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha y}m_\alpha\widetilde{m}_\alpha + \mathcal{O}_\prec\big((|\eta| + |\widetilde{\eta}|)^{-1}(\Psi + \widetilde{\Psi})\big), \tag{6.44}$$

这里用到了 $|z-\zeta|\geq|\eta|+|\widetilde{\eta}|$，因为 $\eta\widetilde{\eta}<0$。结合式（6.38）、（6.39）以及（6.41）-（6.44），得到

$$\begin{aligned} \sum_{a\neq y} W_{ax} G_{\alpha a}\widetilde{G}_{a\beta} = \delta_{\alpha\beta}\big[\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big(1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big)^{-1}W\big]_{\alpha x} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha y}[\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}W]_{\alpha x} \\ + \mathcal{O}_\prec\big((\Psi + \widetilde{\Psi})(\Psi\widetilde{\Psi} + \min\{\Theta, \widetilde{\Theta}\})\big), \end{aligned} \tag{6.45}$$

令 $W_{ax} := w_a$，即可证明式（3.6）。

以证明 (3.7)，我们注意到，令 $x = y = \alpha = \beta = b$ 在（6.39）中成立并对 b 求和，可得 s

$$\sum_b \sum_{a\neq b} W_{ab} G_{ba} \widetilde{G}_{ab} = \sum_b \sum_{a\neq b} Y_{ab} G_{aa} \widetilde{G}_{ab} + \langle \mathbf{s}, \mathbf{g} \rangle, \quad g_b := \frac{G_{bb} - \widetilde{G}_{bb}}{z - \zeta} - G_{bb}\widetilde{G}_{bb}, \ b \in \{1, \dots, N\}. \tag{6.46}$$

为了估计 $\langle \mathbf{s},\ \mathbf{g} \rangle$，我们使用（6.38）和平均局部定律（4.3）得到

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{g} \rangle = \left\langle \mathbf{s}, \frac{\mathbf{m} - \widetilde{\mathbf{m}}}{z - \zeta} - \mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}} \right\rangle + \mathcal{O}_{\prec}\big((|\eta| + |\widetilde{\eta}|)^{-1}(\Theta + \widetilde{\Theta})\big), \tag{6.47}$$

这里我们用到了 $|z - \zeta| \geq |\eta| + |\widetilde{\eta}|$，因为 $\eta\widetilde{\eta} < 0$。

令 $x = y = \alpha = \beta = b$ 在（6.41）中成立，对 b求和，利用恒等式（6.42）和（6.43），并将结果与（6.47）结合，我们推出

$$\sum_b \sum_{a\neq b} W_{ab} G_{ba} \widetilde{G}_{ab} = \mathrm{Tr}\big[\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}} S \mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}} \big(1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big)^{-1} W\big] + N\mathcal{O}_{\prec}\big(\Psi\widetilde{\Psi}(\Psi + \widetilde{\Psi}) + \Theta\widetilde{\Theta}\big), \tag{6.48}$$

这里我们用到了 $(|\eta| + |\widetilde{\eta}|)^{-1}(\Theta + \widetilde{\Theta}) = N\Theta\widetilde{\Theta}$。这就证明了（3.7），并完成了定理3.2的证明。 □

注 6.8。 我们概述了获得最优误差估计 (3.12)所需的步骤。首先，需要调整定理 3.2的证明。更具体地说，将分解式 (6.36) 替换为

$$W = Y + \mathbf{1}\mathbf{s}^* + \mathbf{q}\mathbf{1}^*, \ \textit{such that} \ \Pi(z, \zeta) Y = Y \Pi^t(\zeta, z) = 0, \tag{6.49}$$

其中 $\Pi(z,\ \zeta)$ 是式 (6.26)中定义的不稳定特征投影算子。含有 $\mathbf{s}$ 和 $\mathbf{q}$ 的项可利用平均局部定律 (4.3)处理，方法与 (6.47)类似。

对于剩余项 $\mathcal{R} := \sum_y \mathcal{F}^{yy}_{yy}$，我们通过采用以下迭代方案来调整引理 6.1 中的机制。第一步，我们对偏导数 $\partial_{jk}\mathcal{R}$应用类似于 (6.9) 的展开。这使得对 $\mathcal{R}$ 的估计中的误差缩小一个 $(\Psi + \widetilde{\Psi})^{1/2}$因子。若以类似方式展开$\partial_{lp}\partial_{jk}\mathcal{R}$，则误差还会再缩小一个 $(\Psi + \widetilde{\Psi})^{1/4}$。通过迭代这一方法，对于任意给定的整数 d（其中 d是展开的偏导数的最大阶数），我们可以估计 $\mathcal{R}$，其误差被随机支配于 $N\Psi\widetilde{\Psi}($ $\Psi + \widetilde{\Psi})^{2-2^{-d}}$。根据定义 3.1，这足以证明 (3.12)。关于随机带状矩阵背景下的类似论证，可参见 *[10]*。

推论 *3.3* 的证明。将 3.9 式应用于 $T_{xy}(\zeta,\ z)$ 可由（3.6）令 $\alpha = \beta = y$ 且w_a 得到$:= S_{xa}$。将（3.10）式应用于 $\mathrm{Tr}[AT(z,\ \zeta)]$ 可由（3.7）令 W 得到$:= SA^t$，它满足$|W_{ab}| \lesssim N^{-1}\|A\|_{\ell^\infty \to \ell^\infty}$ 推论 3.3 的证明至此完成。 □

注 6.9。 注意，估计式 (3.6) 和 (3.7) （包括误差项改进后的 (3.12)）在求和时无需省略指标 a。事实上，由定理 *3.2* 和 *4.2* 可得

$$\begin{aligned} \sum_a w_a G_{\alpha a} \widetilde{G}_{a\beta} &= \delta_{\alpha\beta}\big[\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big(1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big)^{-1}\mathbf{w}\big]_\alpha + \mathcal{O}_{\prec}\big((\Psi + \widetilde{\Psi})(\Psi\widetilde{\Psi} + \mathbb{1}_{\{\eta\widetilde{\eta}<0\}} \min\{\Theta, \widetilde{\Theta}\})\big), \\ \sum_{a,b} W_{ab} G_{ba} \widetilde{G}_{ab} &= \mathrm{Tr}\big[\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big(1 - S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\big)^{-1} W\big] + \mathcal{O}_{\prec}\big(N(\Psi + \widetilde{\Psi})\Psi\widetilde{\Psi} + \mathbb{1}_{\{\eta\widetilde{\eta}<0\}} N\Theta\widetilde{\Theta}\big). \end{aligned} \tag{6.50}$$

7 命题 5.2的证明

本节中，我们计算中观尺度 $V(f)$ 方差定义见（5.3），其中针对中观尺度的 C_c^2 测试函数 f。在[17]，中，已针对若干类 C^∞ 测试函数计算了极限方差，其中包括紧支撑函数；然而， $V(f)$ 的计算带有一个 $\mathcal{O}(1)$ 误差（例如参见 [17]中的引理 6.7），在本文的情形下这一误差不可忽略。为得到有效的误差界，我们在 [17] 中给出的证明基础上，进一步对 $V(f)$ 的积分表示进行分部积分，从而消去 f' 项，并将误差改进一个 $\mathcal{O}(\eta_0)$ 因子。

在本节中，我们始终采用记号 $\mathrm{m} \equiv \mathrm{m}(z)$ $\widetilde{\mathrm{m}} \equiv \mathrm{m}(\zeta)$ $\eta := \mathrm{Im}\ z, \widetilde{\eta} := \mathrm{Im}\,\zeta$。

稳定算子（$1-S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}$）可以用自饱和能量算子$F$表示，该算子定义于（4.6）中，具体恒等式如下

$$1-S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}=|\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}|^{-1/2}\left(\mathrm{U}^{*}-F(z,\zeta)\right)|\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}|^{1/2}\mathrm{U},\quad \mathrm{U}:=\frac{\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}}{|\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}|}. \tag{7.1}$$

此外，由（4.9），算子 F 可以分解为

$$F(z,\zeta)=\psi_1(z,\zeta)\,\mathbf{v}(z,\zeta)\big(\mathbf{v}(z,\zeta)\big)^{*}+A(z,\zeta),\quad A(z,\zeta)\mathbf{v}(z,\zeta)=0,\quad \|A(z,\zeta)\|_{\ell^2\to\ell^2}\le 1-\widetilde{\delta}, \tag{7.2}$$

wh　　~其中 ψ_1，$\mathbf{v}$ 是 F的主特征值-特征向量对，且 δ 是（4.9　　）.

令 $R\equiv R(z,\zeta)$ 表示（$\mathbf{U}^{*}(z,\zeta)-A(z,\zeta)^{-1}$。下文中，我们省略参数，记作$A\equiv A(z,\zeta)$。下界（4.8）和（7.2）中的不等式蕴含

$$\|R\|_{\ell^2\to\ell^2}+\|R\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}\lesssim 1. \tag{7.3}$$

在以下引理中，我们汇总 F中关于饱和自能算子及相关量的微扰估计 [17]。

引理 7.1。（*[17]*中的命题 6.5、（6.52）、（6.60）、（6.71）和（6.67））令 w，ζ_1，ζ_2 为 $\mathcal{I}_\kappa+i[-1,1]$中的谱参数，并令 F 为（4.6）中定义的算子，则 ψ_1，$\mathbf{v}$ 的主特征值-特征向量对满足 F

$$\|\mathbf{v}(w,\zeta_1)-\mathbf{v}(w,\zeta_2)\|_{\ell^2\to\ell^2}+|\psi_1(w,\zeta_1)-\psi_1(w,\zeta_2)|\lesssim|\zeta_1-\zeta_2|. \tag{7.4}$$

此外，对于算子 A 定义于 (7.2)，我们有如下估计

$$\|F(w,\zeta_1)-F(w,\zeta_2)\|_{\ell^2\to\ell^2}+\|A(w,\zeta_1)-A(w,\zeta_2)\|_{\ell^2\to\ell^2}\lesssim|\zeta_1-\zeta_2|. \tag{7.5}$$

设 $z:=x+i\eta,\zeta:=y-i\eta$，其中 $x,y\in\mathcal{I}_\kappa$, $0\le\eta\le 1$，则

$$\psi_1\big\langle\mathbf{v},R\frac{\mathbf{m}'}{\mathbf{m}}\mathrm{U}^{*}R\mathbf{v}\big\rangle=\psi_1(z,z)\big\langle\mathbf{v}(z,z)\frac{\mathbf{m}'}{\mathbf{m}}\mathbf{v}(z,z)\big\rangle+\mathcal{O}(|x-y|) \tag{7.6}$$

设 $\omega\equiv\omega(z,\zeta):=1-\psi_1\langle\mathbf{v}\ R\mathbf{v}\rangle$，则

$$\omega(z,\zeta)=1-\psi_1(z,z)+\psi_1(z,z)(x-y)\overline{\big\langle\mathbf{v}(z,z)\frac{\mathbf{m}'}{\mathbf{m}}\mathbf{v}(z,z)\big\rangle}+\mathcal{O}(|x-y|^2), \tag{7.7}$$

此外　　，存在一个与 N 无关的 $\varepsilon>0$，使得对于所有满足 $|x-y|\le\varepsilon$ 的 $x,y\in\mathcal{I}_\kappa$　　，

$$|\omega(z,\zeta)|\gtrsim\eta+|x-y|. \tag{7.8}$$

最后，对于满足 $x\in\mathcal{I}_\kappa$ 的 $z:=x+i\eta$，以下恒等式成立

$$\lim_{\eta\to+0}\big\langle\mathbf{v}(z,z)\frac{\mathbf{m}'}{\mathbf{m}}\mathbf{v}(z,z)\big\rangle=\frac{i\pi}{2}\rho(x)\left\|\frac{\operatorname{Im}\mathbf{m}(x+i0)}{|\mathbf{m}(x)|}\right\|_2^{-2} \tag{7.9}$$

根据 κ，E_0 位于体区间 $\mathcal{I}_\kappa$（见式 3.5）的内部，因此若定义 ˆ$\varepsilon:=\min\{\varepsilon/4,\operatorname{dist}(E_0,\ \mathbb{R}\backslash\mathcal{I}_\kappa)\}$，则 ˆ$\varepsilon\sim 1$。此外，由于函数 g 具有紧支撑，我们假设 $\operatorname{supp}(f)\subset[E_0-\hat{}\varepsilon,\ E_0+\hat{}\varepsilon]$对于较大的 N成立。

引理 7.2。　　设 $\eta_*\equiv\eta_*(N)$满足 $0<\eta_*\le N^{-100}$，则 $V(f)$（定义于 （5.3））满足如下估计　　e

$$V(f)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{[E_0-\hat{e},E_0+\hat{e}]^2}(f(y)-f(x))^2\widetilde{\mathcal{K}}(x+i\eta_*,y-i\eta_*)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathcal{O}\left(\eta_0+N^{-\varepsilon_0}\right), \tag{7.10}$$

其中

$$\widetilde{\mathcal{K}}(z,\zeta):=-2\operatorname{Re}\operatorname{Tr}\left[\frac{\mathbf{m}'}{\mathbf{m}}(1-S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}})^{-1}S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}'(1-S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}})^{-1}\right]. \tag{7.11}$$

为证明引理7.2 ，我们定义一个辅助函数 $\mathcal{L}(z,\zeta)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(z,\zeta) &:= \mathcal{L}_{\log}(z,\zeta)+\mathcal{L}_1(z,\zeta),\\ \mathcal{L}_{\log}(z,\zeta) &:= -2\log\det\{1-S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\},\quad \mathcal{L}_1(z,\zeta) := -\operatorname{Tr}[S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}]+\frac{1}{2}\left\langle\overline{\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}},\mathcal{C}^{(4)}\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\right\rangle,\end{aligned}\tag{7.12}$$

其中 log 是复对数的主值分支， $\mathcal{C}^{(4)}$ 是 H的四阶累积量矩阵。根据行列式的导数的雅可比公式，由 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{K}$的定义可知，对所有 z、$\zeta\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial z}\mathcal{L}(z,\zeta)=\mathcal{K}(z,\zeta).\tag{7.13}$$

此外，由条件（A）和上界（4.2），可得

$$|\mathcal{L}_{\log}(z,\zeta)|\le\pi+\log|\det\{1-S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}}\}|\lesssim 1+\operatorname{Tr}\left[(1-S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}})^*(1-S\mathbf{m}\widetilde{\mathbf{m}})-I\right]\lesssim 1,\tag{7.14}$$

其中在最后一行中，我们使用了 $\left[(1-S\mathbf{m}\ \widetilde{}\ \mathbf{m})^*(1-S\mathbf{m}\ \widetilde{}\ \mathbf{m})-I\right]_{jj}\lesssim N^{-1}$。

偏导数 $\mathcal{L}_1$ 的偏导数对 $\mathcal{L}$仅贡献次主导项。事实上，我们有如下估计 s

$$\mathcal{L}_1(z,\zeta)\lesssim 1,\quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}_1(z,\zeta)\lesssim 1,\quad \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial z}\mathcal{L}_1(z,\zeta)\lesssim 1,\tag{7.15}$$

其中我们使用矩条件（2.2）来界定 S_{jk} 和 $\mathcal{C}^{(4)}_{jk}$，利用（4.2）得到上界 $\mathbf{m}\ \widetilde{}\ \mathbf{m}$。 1，以及由（4.14）得出 $\mathbf{m}'$， $\widetilde{}\ \mathbf{m}'\lesssim 1$，因为 $[E_0+\hat{}\varepsilon,\ E_0-\hat{}\varepsilon]\subset\mathcal{I}_\kappa$。

下面的断言汇总了关于 $\mathcal{K}$ 和 $\partial_z\mathcal{L}$ 的界；结合 (7.14)，这些界使我们能够对方差 $V(f)$ 的定义 (5.3) 进行分部积分，这正是引理 7.2的核心。

断言 7.3。（*[17]* 中的命题 6.2 和命题 6.6）设 $\mathcal{K}(z,\zeta)$ 和 $\mathcal{L}(z,\zeta)$ 分别如 (5.4)（其中 $\beta=1$）和 (7.12) 中所定义，则对所有满足 $\operatorname{Re}z$、$\operatorname{Re}\zeta\in[E_0-\hat{}\varepsilon,\ E_0+\hat{}\varepsilon]$ 以及 $\operatorname{Im}z$、$|\operatorname{Im}\zeta|\le 1$ 的 $z,\zeta\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$，有

$$\mathcal{K}(z,\zeta)\lesssim 1+\mathbb{1}_{\{\eta\widetilde{\eta}<0\}}(|\eta|+|\widetilde{\eta}|)^{-2},\quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}(z,\zeta)\lesssim 1+(|\operatorname{Re}z-\operatorname{Re}\zeta|+|\eta|+|\widetilde{\eta}|)^{-1},\tag{7.16}$$

其中 $\eta:=\operatorname{Im}z,\widetilde{\eta}:=\operatorname{Im}\zeta$。

引理 7.2 的证明。 定义 $\Omega_*:=\{z\in\mathbb{C}\colon 1>|\operatorname{Im}z|>\eta_*\}$。回忆一下 $V(f)$ 在 (5.3) 中的定义。首先，我们证明

$$V(f)=\frac{1}{\pi^2}\int_{\Omega_*}\int_{\Omega_*}\frac{\partial\widetilde{f}(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\partial\widetilde{f}(z)}{\partial\bar{z}}\mathcal{K}(z,\zeta)\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}z+\mathcal{O}\left(N^{-\varepsilon_0}\right).\tag{7.17}$$

由（5.6）可得

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\Big(-\eta\chi'(\eta)f'(x)+i\big(\eta\chi(\eta)f''(x)+\chi'(\eta)f(x)\big)\Big).\tag{7.18}$$

此外，对所有 z满足 $|\operatorname{Im}z|<1/2$，式（7.18）以及 χ在（5.6）中的性质蕴含

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{z}}=\frac{i\operatorname{Im}z}{2}f''(\operatorname{Re}z).\tag{7.19}$$

令 $V_*(f)$ 表示 (7.17) 右端的积分，并定义 $\eta_1:=N^{-\varepsilon_0/2}\eta_0$。由 (7.16) 中的第一个不等式以及 (7.19) 可得

$$|V(f)-V_*(f)|\lesssim\iint_{\mathbb{R}^2}|f''(x)f''(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\eta_*}^{\eta_1}\int_{\eta_*}^{2\eta_1}\frac{\eta\widetilde{\eta}}{(\eta+\widetilde{\eta})^2}\mathrm{d}\widetilde{\eta}\mathrm{d}\eta.\tag{7.20}$$

注意到 $\eta\widetilde{\eta} \le (\eta+\widetilde{\eta})^2/4$，因此关于 $\mathrm{d}\widetilde{\eta}\mathrm{d}\eta$ 的积分有界于 $\eta_1^2/2$，又由于 $\|f''\|_1 \sim \eta_0^{-1}$，(7.17) 得证。

记 $z := x+i\eta$，$\zeta := y+i\widetilde{\eta}$并将（7.13）代入关于 $V(f)$ 的表达式（7.17）。利用 $\partial_z u = -i\partial_\eta u$ 对任意全纯函数 $u(z)$ 成立这一事实，并对 η分部积分，得到

$$\begin{aligned} V(f) =& \frac{i}{\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{|\widetilde{\eta}|>\eta_*}\frac{\partial\widetilde{f}(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\int_{|\eta|>\eta_*}\frac{\partial^2\widetilde{f}(z)}{\partial\eta\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\mathcal{L}(z,\zeta)\mathrm{d}\widetilde{\eta}\mathrm{d}\eta \\ & - \frac{i}{\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{|\widetilde{\eta}|>\eta_*}\frac{\partial\widetilde{f}(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\sum_{\eta=\pm\eta_*}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{z}}(x+i\eta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\mathcal{L}(z,\zeta)\mathrm{d}\widetilde{\eta} + \mathcal{O}\left(N^{-\varepsilon_0}\right). \end{aligned} \tag{7.21}$$

（7.16）中的第二个估计、表达式（7.18）以及估计 $\|f''\|_1 \sim \eta_0^{-1}$、$\|f'\|_1 \sim 1$、$\|f\|_1 \sim \eta_0$表明，（7.21）中的边界项由 $\mathcal{O}_\prec(\eta_*\eta_0^{-2})$ 控制，而后者小于 $\mathcal{O}(N^{-\varepsilon_0})$。类似地，对（7.21）右侧的第一项关于 $\widetilde{\eta}$ 分部积分，得到

$$\begin{aligned} V(f) =& -\frac{1}{\pi^2}\int_{\Omega_*}\int_{\Omega_*}\frac{\partial^2\widetilde{f}(z)}{\partial\bar{z}\partial\eta}\frac{\partial^2\widetilde{f}(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}\partial\widetilde{\eta}}\mathcal{L}(z,\zeta)\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}z \\ & + \frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{|\eta|>\eta_*}\frac{\partial^2\widetilde{f}(z)}{\partial\eta\partial\bar{z}}\sum_{\widetilde{\eta}=\pm\eta_*}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{\zeta}}(y+i\widetilde{\eta})\mathcal{L}(z,y+i\widetilde{\eta})\mathrm{d}\eta + \mathcal{O}\left(N^{-\varepsilon_0}\right). \end{aligned} \tag{7.22}$$

由（7.14）和表达式（7.18）可知，边界项（（7.22）的第二行）同样由 $\mathcal{O}_\prec(N^{-\varepsilon_0})$ 控制。

~我们对 (7.22) 两次应用斯托克斯定理：一次在 z 中，一次在 ζ中。考虑到 $\partial_\eta f(z)$ 在 Ω 的边界上恒为零*，但直线 $\{\mathrm{Im}\, z = \pm\eta_*\}$除外，因此得到

$$\begin{aligned} V(f) =& \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\sum_{\eta,\widetilde{\eta}=\pm\eta_*}\mathrm{sign}\,(\eta\widetilde{\eta})\frac{\partial\widetilde{f}(x+i\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\widetilde{f}(y+i\widetilde{\eta})}{\partial\widetilde{\eta}}\mathcal{L}(x+i\eta,y+i\widetilde{\eta})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(N^{-\varepsilon_0}\right) \\ =& -\frac{1}{2\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2} f'(x)f'(y)\widetilde{\mathcal{L}}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(N^{-\varepsilon_0}\right), \end{aligned} \tag{7.23}$$

其中

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x,y) := \mathrm{Re}\left[\mathcal{L}(x+i\eta_*,y+i\eta_*) - \mathcal{L}(x+i\eta_*,y-i\eta_*)\right] \tag{7.24}$$

我们将 (7.23) 中的积分限制在 $[E_0-\hat{}\varepsilon,\ E_0+\hat{}\varepsilon]$内，因为该区间包含 f的支集。此外，对所有 $y \in \mathrm{supp}(f)$，$y-E_0 \lesssim \eta_0$，因此 $|y-E_0 \pm \hat{}\varepsilon| \sim 1$。根据 $\mathcal{L}(z,\zeta)$ 的对称性以及 (7.16) 中的第二个估计可知

$$\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{\mathcal{L}}(E_0\pm\hat{\varepsilon},y) \lesssim 1, \quad y\in\mathrm{supp}(f). \tag{7.25}$$

我们将 $f'(y) = \partial_y(f(y)-f(x))$ 写成相应形式，在 y 中进行分部积分，并在 x 中对边界项进行分部积分，得到

$$\begin{aligned} V(f) =& \frac{1}{2\pi^2}\int_{E_0-\hat{\varepsilon}}^{E_0+\hat{\varepsilon}}\int_{E_0-\hat{\varepsilon}}^{E_0+\hat{\varepsilon}} f'(x)\left(f(y)-f(x)\right)\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{\mathcal{L}}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ & + \frac{1}{4\pi^2}\int_{E_0-\hat{\varepsilon}}^{E_0+\hat{\varepsilon}}(f(x))^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\mathcal{L}}(x,E_0+\hat{\varepsilon})-\widetilde{\mathcal{L}}(x,E_0-\hat{\varepsilon})\right)\mathrm{d}x + \mathcal{O}\left(N^{-\varepsilon_0}\right). \end{aligned} \tag{7.26}$$

由于 $\|f\|_2^2 \lesssim \eta_0$，由（7.25）可知，（7.26）中的第二个积分为 $\mathcal{O}(\eta_0)$。类似地，对 x 中的（7.26）分部积分，并利用（$-V(f)$）替换由（$+\mathcal{O}(N^{-\varepsilon_0}+\eta_0)$）得到的一个积分，我们得到

$$2V(f) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{E_0-\hat{\varepsilon}}^{E_0+\hat{\varepsilon}}\int_{E_0-\hat{\varepsilon}}^{E_0+\hat{\varepsilon}}(f(y)-f(x))^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\widetilde{\mathcal{L}}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(\eta_0+N^{-\varepsilon_0}\right), \tag{7.27}$$

这里我们再次利用（7.25）估计边界项。对于任意全纯函数 $u(z)$，其变量为 $z=x+i\eta$，有 $\partial_x u=\mathrm{Re}[\partial_z u]$，因此 $\partial_x\partial_y\mathcal{L}(x,\ y)=\mathrm{Re}\,[\mathcal{K}(x+i\eta_*,\ y+i\eta_*)-\mathcal{K}(x+i\eta_*,\ y-i\eta_*)]$。

最后，根据（7.16）中的第一个估计，$\partial_z\partial_\zeta\mathcal{L}_{log}(x+i\eta_*,y+i\eta_*)\lesssim 1$ 的贡献也有界于 $\mathcal{O}_\prec(\eta_0\|g\|_2^2+\eta_0^2\|g\|_1^2)$。此外，由（7.15）中的最后一个估计可知，我们可以将 $\mathcal{K}(x+i\eta_*,y-i\eta_*)$ 替换为 $\partial_z\partial_\zeta\mathcal{L}_{log}(x+i\eta_*,y-i\eta_*)$，因为其余项的贡献有界于 $\mathcal{O}_\prec(\eta_0\|g\|_2^2+\eta_0^2\|g\|_1^2)$。引理 7.2 的证明至此完成。□

引理 7.2 得证后，我们可以按照 [17] 中的引理 6.7 的方法，完成命题5.2的证明。

固定 $x,y\in[E_0-\hat{}\varepsilon,E_0+\hat{}\varepsilon]$ 并记 $z:=x+i\eta_*$, $\zeta:=y-i\eta_*$, 如 (7.10) 中所示。由~和 (7.1) (7.2) 可知，核 $\mathcal{K}(z,\zeta)$ 可写为

$$\widetilde{\mathcal{K}}(z,\zeta)=-2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{\mathbf{m}'}{\mathbf{m}}\mathrm{U}^*\big(R+\frac{\psi_1}{\omega}R\mathbf{v}\mathbf{v}^*R\big)F\frac{\widetilde{\mathbf{m}}'}{\widetilde{\mathbf{m}}}\big(R+\frac{\psi_1}{\omega}R\mathbf{v}\mathbf{v}^*R\big)\right],\tag{7.28}$$

其中 ω 定义见 (7.7)。展开 (7.28) 中的括号，按 ω^{-1}的幂合并同类项，并利用迹的循环性质，得到

$$\widetilde{\mathcal{K}}(z,\zeta)=-2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\psi_1^2}{\omega^2}\big\langle\mathbf{v},R\frac{\mathbf{m}'}{\mathbf{m}}\mathrm{U}^*R\mathbf{v}\big\rangle\big\langle\mathbf{v},RF\frac{\widetilde{\mathbf{m}}'}{\widetilde{\mathbf{m}}}R\mathbf{v}\big\rangle\right]+\mathcal{O}\left(1+\omega^{-1}\right),\tag{7.29}$$

由于 $\mathrm{Tr}\big[\mathrm{m}'\mathrm{m}\,\mathrm{U}^*RF\,\widetilde{\mathrm{m}}'\mathrm{m}\ R\big]$、$\mathrm{Tr}\big[\overline{\mathrm{m}'}\mathrm{m}\,\mathrm{U}^*RF\,\widetilde{\mathrm{m}}'\mathrm{m}\,R\mathrm{v}\mathrm{v}^*R\big]$ 以及 $\mathrm{Tr}\big[\underline{\mathrm{m}'\mathrm{m}}\,\mathrm{U}^*R\mathrm{v}\mathrm{v}^*RF\,\widetilde{\mathrm{m}}'\mathrm{m}\ R\big]$ 均为 $\mathcal{O}(1)$。式 (7.29) 中的第一个标量积可利用 (7.6) 进行估计。

我们计算（7.29）中的第二个标量积。由一致有界性（4.2）和（4.14）~可知 $\|\mathbf{m}(z)-\mathbf{m}(\zeta)\|_\infty\lesssim|x-y|$，因此 $\|\mathrm{U}(z,\zeta)-1\|_{\ell^2\to\ell^2}\lesssim|x-y|$。结合估计和（7.4），得到 (7.5)

$$\psi_1\big\langle\mathbf{v},RF\frac{\widetilde{\mathbf{m}}'}{\widetilde{\mathbf{m}}}R\mathbf{v}\big\rangle=\big\langle\mathbf{v}(\zeta,\zeta),F(\zeta,\zeta)\frac{\widetilde{\mathbf{m}}'}{\widetilde{\mathbf{m}}}\mathbf{v}(\zeta,\zeta)\big\rangle+\mathcal{O}(|x-y|),\tag{7.30}$$

其中我们使用了恒等式 $R(\bar{\zeta},\zeta)\mathrm{v}(\zeta,\zeta)=(1-A(\zeta,\zeta))^{-1}\mathrm{v}(\zeta,\zeta)=\mathrm{v}(\zeta,\zeta)$。

由（7.4）中关于 v 的估计可知，$\|\mathrm{v}(\zeta,\zeta)-\mathrm{v}(y,y)\|_2\lesssim\eta_*$。向量 $\mathrm{v}(y,y)$ 是 ℓ^2-归一化的 $|\mathrm{m}(y)|^{-1}\mathrm{m}$ 的虚部，因此根据（3.4），它满足 $F(y,y)\mathrm{v}(y,y)=\mathrm{v}(y,y)$。因此，利用（4.14）和（7.5）中的下界，我们得到

$$\|F(\zeta,\zeta)\mathbf{v}(\zeta,\zeta)-\mathbf{v}(\zeta,\zeta)\|_2\lesssim\eta_*.\tag{7.31}$$

将（7.31）代入（7.30）可得

$$\psi_1\big\langle\mathbf{v},RF\frac{\widetilde{\mathbf{m}}'}{\widetilde{\mathbf{m}}}R\mathbf{v}\big\rangle=\big\langle\mathbf{v}(\zeta,\zeta),\frac{\widetilde{\mathbf{m}}'}{\widetilde{\mathbf{m}}}\mathbf{v}(\zeta,\zeta)\big\rangle+\mathcal{O}(|x-y|+\eta_*),\tag{7.32}$$

结合（7.28）以及估计（7.4）、（7.6）、（7.8）和（7.32）可得

$$\widetilde{\mathcal{K}}(z,\zeta)=-2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\psi_1(z,z)\psi_1(\zeta,\zeta)}{\omega^2}\big\langle\mathbf{v}(z,z)\frac{\mathbf{m}'}{\mathbf{m}}\mathbf{v}(z,z)\big\rangle\big\langle\mathbf{v}(\zeta,\zeta),\frac{\widetilde{\mathbf{m}}'}{\widetilde{\mathbf{m}}}\mathbf{v}(\zeta,\zeta)\big\rangle\right]+\mathcal{O}(1+\omega^{-1}).\tag{7.33}$$

由（7.9）和（7.7）可知

$$\lim_{\eta_*\to+0}\widetilde{\mathcal{K}}(x+i\eta_*,y-i\eta_*)=2|x-y|^{-2}+\mathcal{O}(|x-y|^{-1}).\tag{7.34}$$

由于 $f\in C_c^2$（$\mathbb{R}$），（7.33）表明（7.10）中的被积函数在 $\eta_*\in[0,N^{-100}]$ 上一致有界。因此，我们可以在（$\eta_*\to0$）中取极限 7.10），并应用边界估计（7.34）得到。

$$V(f)=\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{[E_0-\hat{\varepsilon},E_0+\hat{\varepsilon}]^2}\frac{(f(x)-f(y))^2}{(x-y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathcal{O}\left(\eta_0\log N+N^{-\varepsilon_0}\right),\tag{7.35}$$

因为 $\mathcal{O}(|x-y|^{-1})$ 对积分 (7.10) 的贡献有界于 $\mathcal{O}(\eta_0$ 对数 $N)$。

最后，区域 $(x,y) \notin [E_0-\hat{}\varepsilon, E_0+\hat{}\varepsilon]^2$ 对积分的贡献

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(f(x)-f(y))^2}{(x-y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|f\|^2_{\dot{H}^{1/2}} = \|g\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\,, \tag{7.36}$$

由 $\mathcal{O}_\prec(\eta_0)$界定，因此

$$V(f) = \frac{1}{2\pi^2}\|g\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \mathcal{O}\left(\eta_0 \log N + N^{-\varepsilon_0}\right). \tag{7.37}$$

这就完成了命题5.2的证明。

附录A 引理5.4

我们使用 Helffer–Sj¨ostrand 表示，将线性特征值统计量表示为预解式的形式 H （参考 [19] 第 4.2 节中的相关文献），

$$\{1-\mathbb{E}\}\left[\operatorname{Tr} f(H)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \bar{z}}\{1-\mathbb{E}\}\left[\operatorname{Tr} G(z)\right]\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}z. \tag{A.1}$$

特征函数 ϕ 因此可写为

$$\phi(\lambda) = \mathbb{E}\left[e(\lambda)\right], \quad e(\lambda) := \exp\left\{i\lambda\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \bar{z}}\{1-\mathbb{E}\}\left[\operatorname{Tr} G(z)\right]\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}z\right\}, \quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{A.2}$$

其导数 ϕ' 为

$$\phi'(\lambda) = \mathbb{E}\left[e(\lambda)\frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \bar{z}}\{1-\mathbb{E}\}\left[\operatorname{Tr} G(z)\right]\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}z\right], \quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{A.3}$$

正如[19], 区域 $|\operatorname{Im} z| \le N^{-\varepsilon_0/2}\eta_0$所述，该区域称为超局部尺度，对公式 (A.2) 和 (A.3) 中的积分没有贡献。因此得到估计 (5.9)（更多细节见 [19] 中的公式 (4.21) 和 (4.22)）。

接下来只需证明 (5.11) 成立。将累积量展开公式 (4.15) 应用于量 $\mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\{1-\mathbb{E}\}\left[G_{jj}(z)\right]\right]$，可得以下引理。

引理 A.1。(引理 5.7，见[17]) 对所有 $z\in\mathcal{D}$在(3.2) 中定义的以及 $j\in\{1,\dots,N\}$，均有

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{m_j(z)}\mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\{1-\mathbb{E}\}\left[G_{jj}(z)\right]\right] =& -m_j(z)\sum_{k=1}^N S_{jk}\,\mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\{1-\mathbb{E}\}\left[G_{kk}(z)\right]\right] \\
&- \mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\{1-\mathbb{E}\}\left[T_{jj}(z,z)\right]\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^N S_{jk}G_{kj}(z)\frac{\partial\widetilde{e}(\lambda)}{\partial H_{jk}}\right] \\
&- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N \mathcal{C}^{(4)}_{jk}m_j(z)m_k(z)\,\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\widetilde{e}(\lambda)}{\partial H^2_{jk}}\right] \\
&+ \mathcal{O}_\prec\left((1+|\lambda|^4)\left(\Psi(z)\Theta(z)+N^{-1}\Psi(z)\eta_0^{-1/2}\right)\right),
\end{aligned} \tag{A.4}$$

其中 η_0来自(2.3)，且对于 a， $b\in\{1,\dots,N\}$， z， $\zeta\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$， $T_{xy}(z,\ \zeta)$在(1.1)中定义。

令 $g_j := \mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\ \{1-\mathbb{E}\}\left[G_{jj}(z)\right]\right]$，并令 r_j 表示 (A.4) 的右端去掉第一项后所得的表达式，则 (A.4) 可写为 $\left[\left(1-S\mathrm{m}^2(z)\right)g\right]_j = -m_j(z)r_j$。算子 $\left(1-S\mathrm{m}^2(z)\right)$ 可以求逆，从而

推出 $g_j = -\left[\left(1 - S\mathbf{m}^2(z)\right)^{-1}\mathbf{m}(z)r\right]_j$，其中 $\mathbf{m}(z)$ 表示作用于向量 r上的乘法算子。对 j 求和，得到

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\left\{1-\mathbb{E}\right\}\left[\operatorname{Tr} G(z)\right]\right] = \sum_{j=1}^{N} g_j = -\sum_{j,k=1}^{N}\left[\left(1 - S\mathbf{m}^2(z)\right)^{-1}\right]_{jk} m_k(z) r_k = -\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j'(z)}{m_j(z)} r_j, \tag{A.5}$$

其中在最后一步中，我们应用了恒等式 $\mathbf{m}'(z)/\mathbf{m}^2(z) = (1 - S\mathbf{m}^2(z))^{-1}\mathbf{1}$。右端的第二项对 (A.4) 右端的第一项有所贡献；正如我们在第 6 节所示，这一项可以忽略。因此，只需估计右端第三项和第四项的贡献。以下引理汇总了关于 $\widetilde{e}(\lambda)$ 的偏导数所需的估计。

引理 A.2。 (*[17]*中的引理 5.6) 对所有 j， $k \in \{1, \ldots, N\}$ 均有

$$\frac{\partial \widetilde{e}(\lambda)}{\partial H_{jk}} = -\frac{i\lambda}{\pi}\frac{2}{1+\delta_{jk}}\widetilde{e}(\lambda)\int_{\Omega_0'}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \bar{\zeta}}\frac{\partial G_{kj}(\zeta)}{\partial \zeta}\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta. \tag{A.6}$$

此外，对所有 $p \in \mathbb{N}$，以下界成立

$$\left|\frac{\partial^p \widetilde{e}(\lambda)}{\partial H_{jk}^p}\right| = \mathcal{O}_{\prec}\left((1+|\lambda|)^p\right), \tag{A.7}$$

且对于 $k \neq j$

$$\left|\frac{\partial \widetilde{e}(\lambda)}{\partial H_{jk}}\right| = \mathcal{O}_{\prec}\left(N^{-1/2}(1+|\lambda|)\eta_0^{-1/2}\right). \tag{A.8}$$

含有 $k \neq j$ 的二阶导数为

$$\frac{\partial^2 \widetilde{e}(\lambda)}{\partial H_{jk}^2} = \frac{2i\lambda}{\pi}\widetilde{e}(\lambda)\int_{\Omega_0'}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \bar{\zeta}}\frac{\partial\left\{m_j(\zeta)m_k(\zeta)\right\}}{\partial \zeta}\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta + \mathcal{O}_{\prec}\left(N^{-1/2}(1+|\lambda|)^2\eta_0^{-1/2}\right). \tag{A.9}$$

引理 A.1 和 A.2 中误差项的写法与原文略有不同 [17]，因为我们已经应用了估计 $\|f''\|_1 \sim \eta_0^{-1}$。(A.9) 中的首项给出了 (5.11) 的第三行。

利用引理 A.2 和 5.6，我们接下来估计（A.4）右侧的第三项。

引理 A.3。（参见 *[17]* 中引理 5.8 的公式 (5.65)）对于 $z \in \mathcal{D}$ 中定义的 （3.2） 以及任意$j \in \{1, \ldots, N\}$，都有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} S_{jk}G_{kj}(z)\frac{\partial \widetilde{e}(\lambda)}{\partial H_{jk}}\right] = &-\frac{2i\lambda}{\pi}\mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\int_{\Omega_0'}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \bar{\zeta}}\frac{\partial T_{jj}(z,\zeta)}{\partial \zeta}\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta\right] \\ &-\frac{i\lambda}{\pi}S_{jj}\,\mathbb{E}\left[\widetilde{e}(\lambda)\right]\int_{\Omega_0'}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \bar{\zeta}}m_j'(\zeta)m_j(z)\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta + \mathcal{O}_{\prec}\left(\frac{\Psi(z)(1+|\lambda|)}{N\eta_0^{1/2}}\right).\end{aligned} \tag{A.10}$$

引理 A.3 的证明。由 (1.1)，将 (A.6) 乘以 $S_{jk}G_{kj}(z)$，对 $k \neq j$ 求和并取期望，即得到 (A.4) 右侧的第一项。对于剩余的 $k = j$ 项，注意函数 $K(\zeta) := G_{jj}(\zeta) - m_j(\zeta)$ 在 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ 中解析，且在 $\mathcal{D}$ 中被 $\Psi(\zeta)$ 随机支配。将 $p = 1$ 用于 $K(\zeta)$，应用引理 5.5，得到

$$\frac{\partial G_{jj}(\zeta)}{\partial \zeta} = m_j'(\zeta) + \mathcal{O}_{\prec}\left(|\operatorname{Im}\zeta|^{-1}\Psi(\zeta)\right). \tag{A.11}$$

将（A.11）代入（A.6），取 $k = j$ 并应用引理5.6，取 $K(\zeta) := \partial_\zeta G_{jj}(\zeta) - m_j'(\zeta)$，取$s = 3/2$，即可得到

$$\frac{\partial \widetilde{e}(\lambda)}{\partial H_{jj}} = -\frac{i\lambda}{\pi}\widetilde{e}(\lambda)\int_{\Omega_0'}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \bar{\zeta}}m_j'(\zeta)\mathrm{d}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta + \mathcal{O}_{\prec}\left((1+|\lambda|)N^{-1/2}\eta_0^{-1/2}\right). \tag{A.12}$$

其中我们用到了以下事实： $|e(\lambda)| = 1$ 以及（5.9）的第一行，从而将 $|\widetilde{e}(\lambda)|$ 估计为 $\mathcal{O}_{\prec}(1)$。将（A.12）乘以 $S_{jj}G_{jj}(z)$，并利用局部定律（4.4）估计 $G_{jj}(z)$，即可得到（A.4）右侧的第二项。由（A.7）取 $p = 1$可知，应用局部定律（4.4）是合理的。至此，引理A.3的证明结束。 □

将（A.10）中的主导项相加，得到（5.11）右侧的第二项和第三项。汇总所有误差项后，由（5.11）的估计现可由（4.13）、（A.5）、（A.7）（A.9）以及引理 A.3 得出。引理 5.4 的证明至此完成。

参考文献

[1] Oskari Ajanki、L´aszl´o Erd˝os 和 Torben Kr¨uger。《复上半平面上的二次向量方程》。美国数学会回忆录 261.1261（2019）。[2] Oskari Ajanki、L´aszl´o Erd˝os 和 Torben Kr¨uger。《一般 Wigner 型矩阵的普适性》。概率论及其相关领域 169（2015），第 667–727 页。[3] Oskari Ajanki、Torben Kr¨uger 和 L´aszl´o Erd˝os。《复上半平面上二次向量方程解的奇点》。纯粹与应用数学通讯 70（2017），第 1672–1705 页。[4] 白志东和姚建锋。《关于 Wigner 矩阵谱经验过程的收敛性》。伯努利 11（2005），第 1059–1092 页。[5] 包志刚、Kevin Schnelli 和 Yuanyuan Xu。《矩阵自由和的介观特征值统计量中心极限定理》。国际数学研究通知 2022.7（2020），第 5320–5382 页。[6] 包志刚和谢俊山。《一般矩条件下厄米 Wigner 矩阵线性谱统计量的中心极限定理》。概率论及其应用 60.2（2016），第 187–206 页。[7] Anne Marie Boutet de Monvel 和 Alexei Khorunzhy。《平滑特征值密度的渐近分布。I. 高斯随机矩阵》。随机算子与随机方程 7（1999），第 1–22 页。[8] Anne Marie Boutet de Monvel 和 Alexei Khorunzhy。《平滑特征值密度的渐近分布。II. Wigner 随机矩阵》。随机算子与随机方程 7（1999），第 149–168 页。[9] L´aszl´o Erd˝os。《矩阵 Dyson 方程及其在随机矩阵中的应用》。随机矩阵。第 26 卷。IAS/Park City 数学丛书，2019，第 75–158 页。[10] L´aszl´o Erd˝os、Antti Knowles 和 Horng-Tzer Yau。《随机带状矩阵预解式涨落的平均化》。Annales Henri Poincar´e 14（2013），第 1837–1926 页。[11] L´aszl´o Erd˝os、Antti Knowles、Horng-Tzer Yau 和 Jun Yin。《随机带状矩阵的离域与扩散剖面》。数学物理通讯 323（2013），第 367–416 页。[12] L´aszl´o Erd˝os、Antti Knowles、Horng-Tzer Yau 和 Jun Yin。《一类一般随机矩阵的局部半圆律》。电子概率期刊 18.none （ 2013 ），第 1–58 页。[13] 何宇坤和 Antti Knowles。《 Wigner 矩阵的介观特征值统计》。应用概率年刊 27（2017），第 1510–1550 页。[14] 何宇坤和 Matteo Marcozzi。《随机带状矩阵的扩散剖面：一个简短证明》。统计物理学杂志 177（2019），第 666–716 页。[15] Kurt Johansson。《随机厄米矩阵特征值的涨落》。杜克数学杂志 91（1998），第 151–204 页。[16] Alexei Khorunzhy、Boris Khoruzhenko 和 Leonid Pastur。《具有独立元素的大型随机矩阵的渐近性质》。数学物理学杂志 37（1996），第 5033–5060 页。[17] Benjamin Landon、Patrick Lopatto 和 Philippe Sosoe。《一般 Wigner 型矩阵的单个特征值涨落》。2021。arXiv:2105.01178。

[18] Benjamin Landon 和 Philippe Sosoe。《Wigner 矩阵中心极限定理中的近最优体谱正则性条件》。2022。arXiv:2204.03419。[19] Benjamin Landon 和 Philippe Sosoe。《介观中心极限定理在随机矩阵理论中的应用。应用概率年刊 30（2020），第 2769–2795 页。[20] Yiting Li、Kevin Schnelli 和 Yuanyuan Xu。《变形 Wigner 矩阵与样本协方差矩阵介观特征值统计量的中心极限定理》。 *Annales de l'InstitutHenri Poincar´e, Probabilit´es et Statistiques* 57（2021），第 506–546 页。[21] Yiting Li 和 Yuanyuan Xu。《广义 Wigner 矩阵整体与介观线性统计量的涨落》。 伯努利 27（2021），第 1057–1076 页。[22] Anna Lytova 和 Leonid Pastur。《具有独立元素的随机矩阵线性特征值统计量的中心极限定理》。 概率年刊 37（2009），第 1778–1840 页。[23] Mariya Shcherbina。《Wigner 随机矩阵与样本协方差随机矩阵线性特征值统计量的中心极限定理》。 数学物理分析与几何杂志 7 （ 2011 ），第 176–192 页。[24] Philippe Sosoe 和 Percy Wong。《Wigner 矩阵线性特征值统计量中心极限定理中的正则性条件》。 数学进展 249（2013），第 37–87 页。[25] Eugene Wigner。《无限维边界矩阵的特征向量 II》。 数学年刊 65.2（1957），第 203–207 页。