《机器图形学与视觉》，波兰科学院，第13卷，第4期，第329-344页，ISSN 1230-0535，2004年

等值面提取基本方法的比较

JAN PATERA[1]，VÁCLAV SKALA[2]
计算机科学与工程系
应用科学学院，西波希米亚大学
Univerzitní 22，比尔森
CZECH REPUBLIC
hopatera@kiv.zcu.cz, skala@kiv.zcu.c z
http://herakles.zcu.cz

摘要：本文比较了四种基于将单元分解为四面体的等值面提取基本方法。这些方法在数学生成数据集和真实数据集上均进行了比较。对于数学数据，比较从不同角度进行，例如面积近似和体积近似；另一方面，对于真实数据集，则使用豪斯多夫距离和均方根来比较这些方法。本文所展示的比较结果有助于在经过测试的方法中做出选择，也有助于将新开发的方法与其他现有方法进行比较。

关键词：比较、等值面提取、误差、豪斯多夫距离、体数据、计算机图形学。

1 引言

近年来，体数据在许多科学领域中开始发挥重要作用，并广泛应用于各行各业。在医学领域，各种设备（例如计算机断层扫描（CT）扫描仪和磁共振成像（MRI）扫描仪）都会生成体数据。数学或物理模拟及实验也会产生体数据，研究人员需要对这类数据进行可视化。

[1] 由捷克共和国教育部资助；项目编号 MSM 235200005（信息系统与技术）
[2] 由项目 NoE – 3DTV PLT 511568 资助

体数据可视化主要有两种技术。第一种方法基于体绘制（类光线追踪方法），第二种方法基于表面绘制（类等值面提取方法）。体绘制方法较为复杂，处理的是整个体数据。本文着重讨论表面绘制方法，该方法用于绘制存储在体数据中的表面（即等值面）。提取出的等值面由一个阈值确定。等值面上的所有点，其数值都等于该阈值。

等值面提取领域十分广泛。用于等值面提取的方法有很多，例如视点相关技术、并行或分布式方法、外存（有时也称为 I/O）技术、基于多分辨率（细节层次）的提取方法等。一般来说，我们可以通过以下步骤描述等值面生成与可视化过程：

1. 搜索所有活动单元（与等值面相交的单元） 2. 近似这些单元内的等值面及其法向量（例如，使用三角形集合） 3. 等值面可视化（可视化三角形集合；可根据所选阈值、Alpha 混合等方式，以不同颜色显示不同的等值面）

等值面提取的第一阶段可以通过一系列加速算法 [7], [9], [10], [11], [17] 或 [18]来加速。不过，我们关注的重点并非提取过程的速度，而是输出三角形集合的性质。

由于等值面生成方法多种多样，而且对于给定的阈值，每种方法通常都会生成所求等值面的不同近似，因此，除非我们知道等值面应当呈现何种形态，否则无法相互比较生成的等值面。我们尝试比较不同方法生成的等值面。

可以根据体数据的数学或物理模型生成体数据时，便能够获得有关对象的一些额外信息，从而使比较更加全面、客观。例如，我们假设可以计算此类对象的面积或体积。对于真实数据集，如果没有关于扫描对象的任何额外信息，就只能采用通用的比较方法，例如豪斯多夫距离或均方根（RMS）距离。

本文的组织结构如下：首先介绍参与比较的方法，随后说明所采用的比较方法以及数据的生成方式。最后两节将讨论误差分析、方法比较和结论。

2 方法描述

2.1 行进立方体

体数据有多种类型。在仿真中，我们通常会得到非结构化体数据；另一方面，医学成像的输出数据则是结构化数据。我们旨在比较用于结构化数据、尤其是规则网格的等值面生成方法。所比较的方法在所用的插值类型上没有区别，区别仅在于它们将一个单元划分为四面体的方式。最著名的方法是行进立方体（MC）方法，该方法最初由 Lorensen 和 Cline 发表 [12]。

输入体数据由按规则三维笛卡尔网格排列的采样点组成。利用这样的网格，我们可以轻松获得一组单元。在这种情况下，单元呈立方体形状，由相邻两个采样平面上对应的八个采样点组成。每个平面上有四个采样点。MC方法依次处理体数据中的所有单元。我们要寻找的等值面由阈值指定。

每个单元分别进行处理。首先计算单元索引。一个单元有八个顶点，依次将它们命名为 A 到 H，每个顶点都有自己的数据值。根据所选阈值，为顶点分配二进制值索引 = $ABCDEFGH_B$。当对应顶点的数据值小于阈值时，索引的相应位为 0，否则为 1。

根据该索引，我们可以区分等值面与单元相交的 256 种情况，因为每个顶点都可能位于等值面的内部或外部。当索引为 0 或 255 时，等值面不会与该单元相交；否则，该单元称为活动单元。该索引的用途将在后文中描

之后。对于一个活动单元，使用数据样本的对称差分或非对称差分，在其所有顶点处计算法向量。

每个索引代表等值面与单元相交的一种不同情况。所有这些情况都可以制成表格，并使用线性插值轻松进行三角剖分。三角形的顶点位于单元边上。请注意，三角形的顶点仅在单元边上进行插值；对于其他方法，情况并非如此。每个单元最多需要四个三角形来近似等值面。对于每个三角形顶点，都使用线性插值，从单元顶点处的法向量计算出一个法向量。

每个单元面都与另一个单元共享。由于这种共享，等值面在相邻单元之间保持连续。需要注意的是，某些面可能存在歧义，此时 [12] 提出的三角剖分会产生孔洞。避免孔洞的方法有几种。可以检测歧义情况并采用特殊的三角剖分 [16]。也可以将单元划分为四面体，再以稍有不同的方式对所得单纯形进行三角剖分，我们将在下一节对此进行说明。其他方法不在本文讨论范围内，参见 [2], [3], [6], [13], [14], [15]。

该 MC方法的算法复杂度为 O(N)，其中 N 是所有单元的数量。

2.1 行进四面体

行进四面体（MT）方法基于与 MC方法相同的原理。其显著区别在于，立方体单元还会进一步划分为四面体。主要有两种划分方案：将单元划分为五个四面体（MT5）[8], [15] ，或将单元划分为六个四面体（MT6）[15]。将立方体单元划分为五个（例如图1）或六个四面体（例如图2）的方法有多种。

对于五四面体方案，必须交替使用两种不同的划分方案。否则，提取出的等值面的连续性将无法得到适当保持。

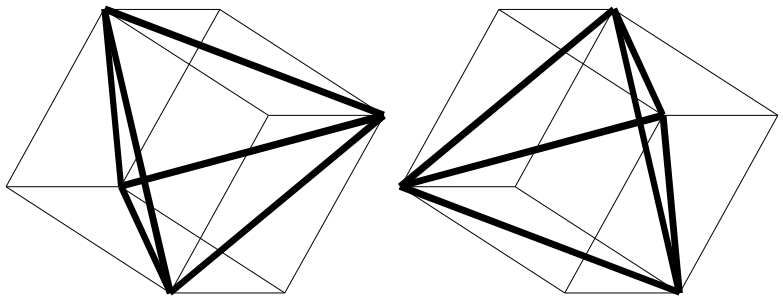


图 1 - MT5 单元的四面体划分

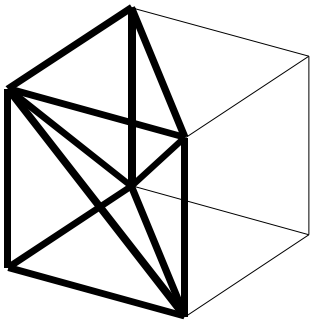


Fig. 2 - 立方体一半被划分为三个四面体，另一半以类似方式划分 way

将单元划分为四面体（四个顶点）后，分别计算每个四面体的索引=$ABCD_B$，并以类似于 MC方法中处理立方体单元的方式分别处理每个四面体。四面体与等值面相交的方式只有 16 种。这些方法每个四面体最多生成两个三角形。

将立方体分解为五个或六个四面体会引入新的边，三角形的顶点需要在这些边上进行插值。对于五个四面体的情况，插值将在立方体单元的面对角线上进行；对于六个四面体的情况，则会用到面对角线和内部对角线。

如果考察五个四面体的划分，其中有一个四面体的形状和大小不同。若划分为六个四面体，则所有四面体都相同。

2.3 中心立方晶格

最后一种将要进行比较的方法是中心立方晶格（CCL）方法，见 [5]。这种方法略有不同，因为它将立方体单元划分为24个四面体。

不同之处在于，生成的四面体由相邻单元部分共享，并且会在待处理单元的重心处引入一个新的数据值，如图 3 所示。中心采样值的计算方法有多种，例如算术平均值或加权平均值。

随后，以与 MT5 或 MT6 方法相同的方式，分别处理每个四面体。

与先前的方法一样，这种划分会引入新的边，并在这些边上进行插值。这些边位于相邻中心点之间。

在这种划分方案中，所有 24 个四面体的尺寸都相同（与 MT6 方法类似）。

立方体单元还有其他可能的分解方式，例如 [19] 将平行六面体单元分解为两个四面体和一个八面体。我们的研究未涵盖这些技术。

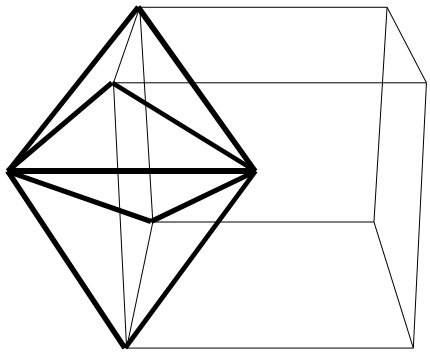


图3——一个单元面的中心立方晶格划分

3 比较方法

3.1 豪斯多夫距离

如前所述，我们主要使用豪斯多夫距离 [20] 来比较从真实数据集中提取的等值面。首先，我们将点 p（来自曲面 S）与曲面 S’（由点 p’ 构成）之间的距离定义为

$$d(p, S') = \min ||p - p'||,$$

对于所有 S’ 中的 p’。现在我们可以定义两个曲面 S 和 S’ 之间的豪斯多夫距离 as

$$d_H(S,S') = \max d(p,S'),$$

对于 S 中的所有 p。需要注意的是，豪斯多夫距离并不对称：d(S,S’)≠d(S’,S)。将 d(S,S’) 称为正向距离，将 d(S’,S) 称为反向距离后，我们可以定义对称豪斯多夫距离 [1] as

$$d_{SH}(S,S') = \max(d(S,S'), d(S',S)).$$

对称差能更好地衡量两个表面之间的误差。我们使用 METRO 软件工具（见 [4]）精确计算两个离散表面（三角网格）之间的豪斯多夫距离。METRO工具主要用于比较原始网格与其简化版本（例如，经抽取简化后的版本）。我们使用它来比较分别通过不同方法生成的两个等值面。

3.2 均方根距离

我们还使用计算所得距离的均方根（RMS）。离散情形下的均方根距离定义为 [20]

$$RMS(S,S') = \frac{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}}{n},$$

其中，n 是网格 S’ 的点数，x_i（其中 i=*1*.. n）表示对应点 p_i’ 到 S 的距离 x_i=d(p_i’, S)。我们将 S’ 与 S 进行比较。

需要注意的是，与豪斯多夫距离一样，均方根也不具对称性。我们的测试中不使用对称均方根距离，因此这里不作定义。此测量值也由 METRO工具计算。

豪斯多夫距离和均方根距离均使用 METRO工具，根据某个源网格进行计算。我们使用 MC方法生成的网格作为该源网格。

3.3 数学数据

首先，我们应说明如何根据基本数学对象生成测试数据。对于这类对象，我们需要知道一个方程。以球体为例，规则网格的每个顶点都有其坐标，我们需要为其赋值。顶点值是根据网格顶点（已知坐标）到物体表面（已知方程）的距离计算得出的。随后，零阈值在体数据中表示物体表面。

已知物体的方程及其尺寸后，我们便能计算有关该物体的一些附加信息，例如表面积、物体体积、三角形与物体表面之间的位置差异等。我们认为，计算这些属性很有价值，因为它们有助于区分不同方法的质量。

表面积——提取方法生成的等值面由一组三角形构成。我们将所有三角形的面积相加，计算总面积。随后，可以计算数学物体的面积，并将其与得到的等值面面积进行比较。对于球体等特殊物体，我们能够追踪误差随球体半径变化的情况。

等值面所围成的体积——对于基本物体，可使用相应的方程计算其体积。等值面所围成的体积

e 的计算方式如下（仅适用于四面体）。四面体有三种情况：

1. 整个四面体都位于等值面之外——不会影响总体积的计算。2. 整个四面体都位于等值面之内——整个四面体都计入总体积。四面体体积很容易计算。3. 等值面与四面体相交——我们必须计算四面体中位于等值面之内的部分。由于每个四面体最多生成两个三角形，这些三角形与相应的四面体顶点构成两个小四面体，因此我们能够计算四面体中计入总体积的部分的体积。

三角形位置差——我们测量三角形重心与物体表面之间的差异。这为我们提供了三角形相对于物体表面的位置差异信息。

上述三种几何属性是我们用于比较提取方法输出的主要方面。所得结果将在下一节中展示。

4 结果

首先，我们应介绍用于比较的数据集，并说明选择它们的原因。所用数据集的主体是一组数学生成对象，如图 4 所示。我们还使用了一个真实数据集，以展示豪斯多夫距离如何取决于所采用的等值面提取方法。以下段落将简要介绍所用的数据集。

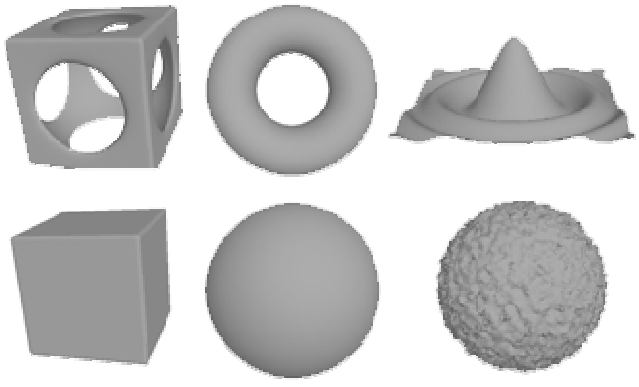


图4 - 对象（csph、环面、墨西哥帽曲面、立方体、球体和noisedsph）

4.1 使用的对象

球体——球体是我们用于观察误差行为与球体半径之间关系的对象示例。用于数据生成的球体方程是一个经过修改的隐式方程

$$F(x,y,z)=\sqrt{(x-s_X)^2+(y-s_Y)^2+(z-s_Z)^2}-r$$

其中，x、y 和 z 为样本坐标，sx、sy 和 sz 为球心坐标，r 为球体半径，F(x,y,z) 为相应的样本值。该方程为所有体数据样本赋予数据值。随后，球体由零阈值等值面表示。球体内部的样本值为负，球面上的样本值为零，球体外部的样本值为正。样本值表示该样本到球面的距离。我们的实验中半径设为 25。

在本研究中，单元边的长度设为 1。物体尺寸（例如半径、边长）均以单元边长为基准。

加噪球体 – (noisedsph)：为研究噪声对输出三角形集合形状的影响，我们生成了一个加噪球体。我们向体数据的所有样本中引入（添加）随机噪声。噪声大小以球体半径的百分比表示。我们使用的半径为 25，噪声为 10%。

立方体——我们使用这类对象来观察等值面在边上的行为和特性。我们将主要通过视觉方式展示等值面的差异。数据的生成方式与前一种情况类似，即根据样本到最近的面、边或顶点的距离生成。内部、位于表面上和外部的样本值分别为负、零和正。立方体使用 a=b=c=*42* 生成。

立方体减球体——（csph）这种对象旨在结合球体（r=*25*）和立方体（a=b=c=*42*）的特性。它的生成过程略微复杂。首先，在体数据中生成立方体。随后，将所有距离球体比距离立方体更近的样本值修改为新的距离值。

典型的数学生成对象。环面由以下方程定义 [20]

$$F(x,y,z)=\sqrt{(c-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2}-a$$

其中，x、y 和 z 是样本坐标，c 是环面的主半径，a 是环面的次半径，F(x,y,z) 是对应的样本值。样本值也可以为负、零或正。在我们的案例中，环面的尺寸为 c=*20* 和 a=*42* 。

墨西哥帽曲面是我们使用的最后一个数学生成物体。它是一个由数学方程定义的曲面（取自 Derive 数学程序）。

$$F(x,y,z) = y - \frac{a \cdot \cos(b \cdot (x^2 + z^2))}{c + x^2 + z^2}$$

其中，x、y 和 z 是样本坐标，F(x,y,z) 是相应的样本值，a、b 和 c 是用于调整函数形状的常数。我们使用的墨西哥帽曲面参数为 a=*12*、b=*0*.25 和 c=*3*。

真实数据集——真实数据集的样本仅包含正值，这些值表示样本位置处空间的密度（我们使用了 engine.vol、ctmayo.vol 和 hplogo.vol 数据集）。

4.2 测试与结果

对于所有数学生成对象，我们都能够计算三角形相对于数学对象的位置差异。首先，计算三角形的重心。由于我们已有计算点到物体的距离的例程，因此可以计算三角形重心到相应物体的距离。总位置差异 P_{ERR} 的计算公式为

$$P_{ERR} = \frac{\sum_{i=1}^{n} | objDist(\mathbf{O}, \mathbf{T_i}) |}{n}$$

其中，T_i (i 从 1 到 n) 是第 i 个三角形的重心，n 是三角形的数量，objDist(O, X) 是点 X 到物体 O 表面的距离。

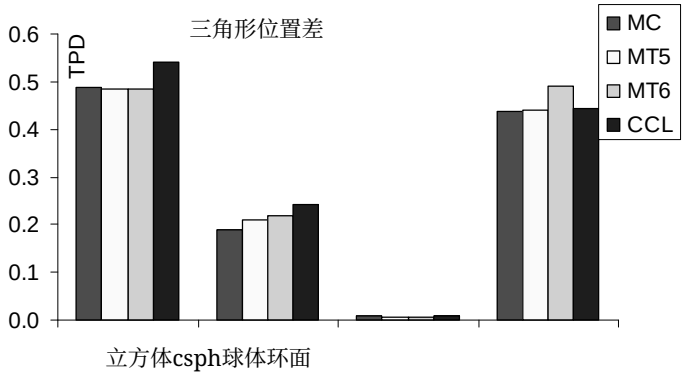


图 5 - 三角形位置差异比较（边与光滑物体）

墨西哥帽形物体的位置差异略小，与球体的结果相近。对于立方体，CCL 方法的结果最差，见图 5。这可能是由于立方体边的插值方式不同（图 6）。csph 对象的边比立方体本身更多。我们创建的四面体越多，结果就越差。令人意外的是，对于环面，MT6 方法产生的位置差异最大。我们认为，这是因为在单元内部边（最长的边）处进行了插值。

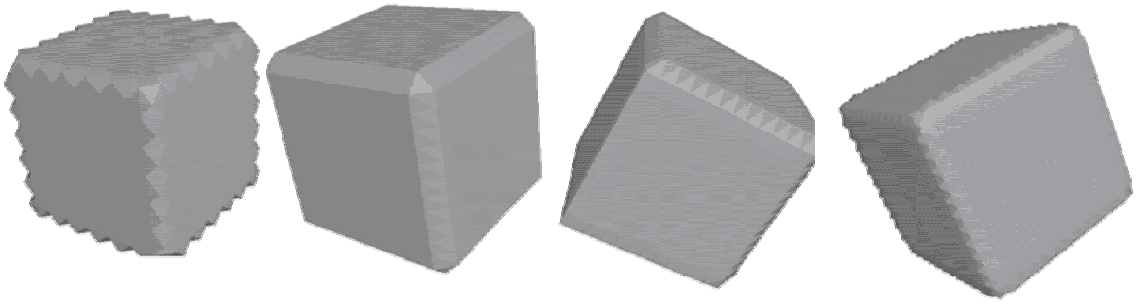


图6——边上的等值面（MT5、MC、MT6、CCL）

请注意，均方根距离与 MC方法有关。对于球体和环面，所得结果略低于墨西哥帽曲面的结果。同样，当物体带有边时，从均方根距离来看，CCL 方法的结果最差，见图 7。对于 noisedsph 物体，CCL 方法的结果最佳。我们认为，中心单元采样值计算（使用算术平均值）也会在一定程度上对数据进行滤波。

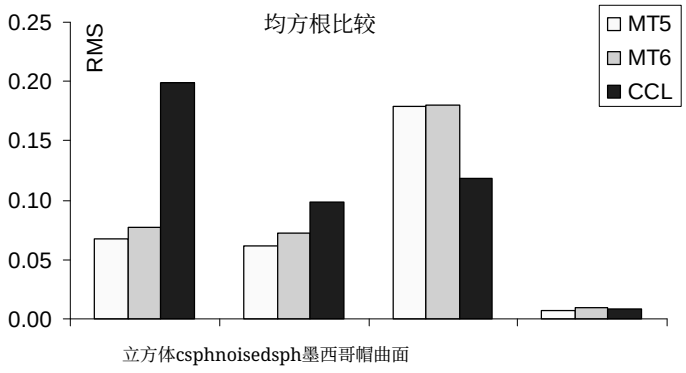


图7——均方根距离直方图

再次，与环面相比，球体和墨西哥帽曲面的结果大致相似。从豪斯多夫距离来看，MT6 方法对于所有测试对象的结果都是最差的，见图 8。正如你所看到的，对于 noisedsph，CCL 方法是最佳选择。在

这种情况下，最佳选择可能是 MT5方法，因为它生成的三角形没有 CCL 方法那么多。

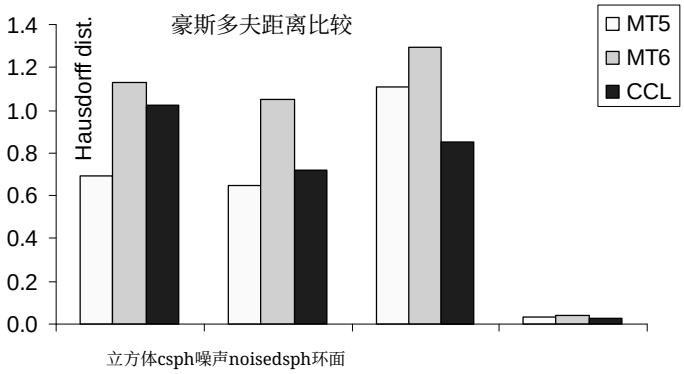


图 8 - 豪斯多夫距离直方图

对于所有经过测试且具有边的对象，使用的四面体越多，提取出的面积就越大，见图 9。由于数学结果，图 9 和图 10 中的结果均为相对值。对于环面这类没有边的对象，结果与球体大致相同。我们认为，就面积近似而言，MC方法是最佳选择。

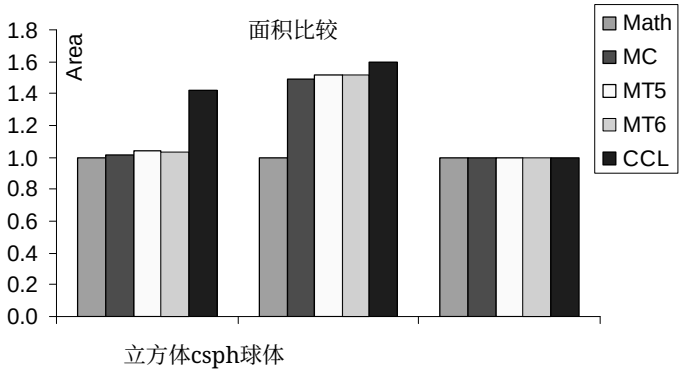


图 9 - 面积比较（相对于数学体积）

在大多数情况下，MT5方法略优于MT6 方法，且这两种方法得到的体积都从下方逐渐接近原始体积，见图 10。另一方面，CCL 方法在大多数情况下得到的体积从上方逐渐接近数学计算所得的体积。未纳入 MC方法，因为很难计算由等值面所包围的体积（原因是有 256 种情况）。

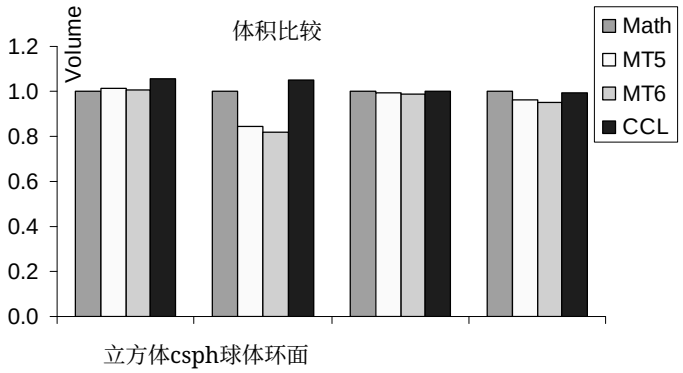


图 10 - 体积比较（相对于数学体积）

4.3 球体附加测试

相对体积误差定义如下

$$Error = \frac{V_{TR} - V}{V}$$

其中，V_{TR} 是由等值面三角形围成的体积，V是通过数学方法计算出的球体体积。

对于体积近似，CCL 方法是最佳选择，见图 11。我们认为这是由于四面体数量较多。CCL 方法的误差围绕零值波动。MT5 的结果略优于 MT6 方法。误差变化趋势相似。这两种方法的误差都从负值逐渐趋近于零。我们还比较了提取的三角形数量。

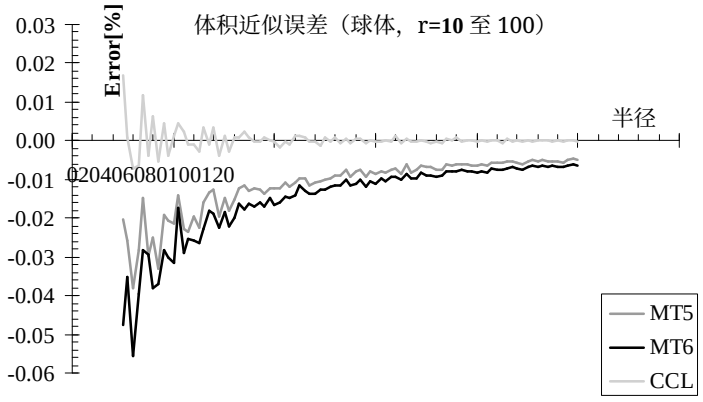


图 11 - 球体体积误差图

众所周知，生成的三角形数量主要取决于单元划分类型，见图 12。MC 使用立方体单元（每个单元最多生成四个三角形），且不会将其划分为四面体（每个四面体最多生成两个三角形）。MT5 将立方体单元划分为 5 个四面体，MT6 则划分为 6 个四面体。实际上，CCL 将立方体单元划分为 24 个四面体，但这些四面体也包含相邻立方体单元的部分。将全部 24 个四面体的体积相加后，得到两个立方体单元的体积，因此平均每个立方体单元对应 12 个四面体。

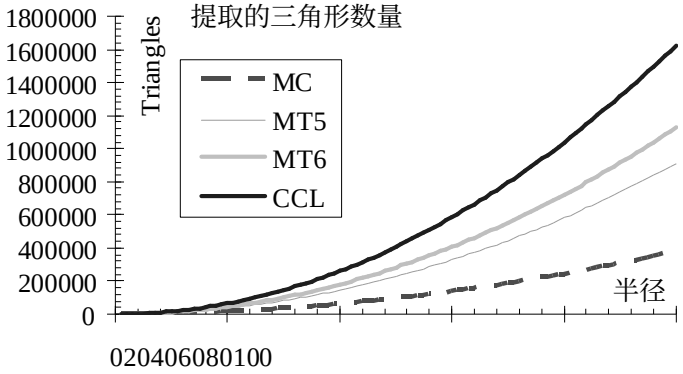


图 12 - 提取的三角形数量

4 结论

我们通过评估豪斯多夫距离、均方根距离、三角形位置差以及等值面面积和体积，对等值面提取的基本方法进行了比较。

豪斯多夫距离实际上是两个被比较表面之间的最大距离（极值距离）。通常，我们更关注两个表面之间的平均距离（均方根距离）。在这种情况下，与其他方法相比，CCL 方法的结果通常较差。若考察位置差异，MC方法似乎总体表现最佳。对于加噪球体，提取的三角形集合质量总体较差。有意思的是，无论采用哪种方法，对象体积的近似差异都相近，csph 对象除外。

需要物体的精确面积真实数据，因此，关于豪斯多夫距离更大或更小的推测并不完全正确。

致谢

我们要感谢 Ivana Kolingerová 博士在本文撰写过程中给予的帮助与支持。

参考文献

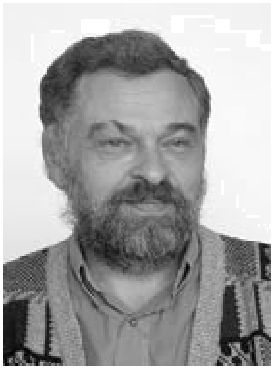
[1] Aspert,N., Santa-Cruz,D., Ebrahimi,T.：《使用豪斯多夫距离测量曲面间的网格误差》，载于《IEEE 国际多媒体与博览会会议论文集》（ICME）2002，第1卷，第705-708页，瑞士洛桑，2002年8月26-29日[2] Bonnel,K.S., Duchaineau,M.A., Schikore,D.R., Hamann,B., Joy,K.I.：《材料界面重建》，《IEEE 可视化与计算机图形学汇刊》，第9卷，第4期，第500-511页，2003年[3] Cignoni,P., Ganovelli,F., Montani,C., Scopigno,R.：《拓扑正确且自适应的三线性等值面重建》，《计算机与图形学》，第24卷，第3期，第399-418页，2000年[4] Cignoni,P., Rocchini,C., Scopigno,R.：《METRO：测量简化曲面上的误差》，《计算机图形学论坛》，布莱克威尔出版社，第17卷，第2期，第167-174页，1998年6月[5] Chan,S.L., Purisima,E.O.：《一种新的等值面生成四面体方案》，《计算机与图形学》，第22卷，第1期，第82-90页，爱思唯尔科学有限公司，1998年[6] Chernyaev,E.V.：《Marching Cubes 33：拓扑正确等值面的构建》，俄罗斯莫斯科高能物理研究所，报告 CN/95-17，1995年[7] Giles,M., Haimes,R.：《计算流体动力学的高级交互式可视化》，《工程计算系统》，第1卷，第1期，第51-62页，1990年[8] Hall,M. Warren,J.：《隐式定义曲面的自适应多边形化》，《IEEE计算机图形学与应用》，第10卷，第6期，第33-42页，1990年11月[9] Itoh,T., Yamaguchi,Y., Koya mada,K.：《利用体数据细化算法快速生成等值面》，《IEEE 可视化与计算机图形学汇刊》，第7卷，第1期，第32-46页，2001年

[10] Van Kreveld,M., van Oostrum,R., Bajaj,C., Pascucci,V., Schikore,D：《用于等值面遍历的等值线树与小型种子集》，载于第13届年度计算几何研讨会论文集，第212-220页，1997年[11] Livnat,Y., Parker,S.G., Johnson,C.R.：《大型成像数据集的快速等值面提取方法》，科学计算与成像中心，计算机科学系，犹他大学，美国盐湖城，1999年[12] Lorensen,W.E., Cline,H.E.：《行进立方体：一种高分辨率三维表面构建算法》，《计算机图形学》，第21卷，第4期，1987年7月[13] Lopez,A., Brodlie,K.：《提升行进立方体算法在等值面生成中的鲁棒性与精度》，《IEEE 可视化与计算机图形学汇刊》，第9卷，第1期，2003年1月至3月[14] Natarajan,B.K.：《如何从均匀采样点生成拓扑一致的等值面》，The Visual Computer，第11卷，第52-62页，1994年[15] Ning, P. and Bloomenthal, J.：《隐式曲面剖分器评估》，《计算机图形学与应用》13(6)，第33-41页，1993年11月[16] Schroeder,W., Martin,K., Lorensen,B.：《可视化工具包》，第2版，Prentice Hall PTR，ISBN 0-13-954694-4，1998年[17] Shen,H.-W., Hansen,C.D., Livnat,Y., Johnson,C.R：《以最高效率在跨度空间中生成等值面（ISSUE）》，IEEE 可视化 96，第287-294页，1996年[18] Shen,H., Johnson,C.R.：《扫描单纯形：一种用于非结构化网格的快速等值面提取算法》，《可视化 '95》论文集，IEEE 计算机学会出版社，美国洛斯阿拉莫斯，加利福尼亚州，1995年[19] Takahashi,T., Yonekura,T.：《从面心立方晶格采样的数据集中构建等值面》，ICCVG 2002论文集，第2期，第754-763页，2002年9月[20] Weisstein,E.W.：《MathWorld》，Wolfram 网络资源，http://mathworld.wolfram.com

《机器图形学与视觉》，波兰科学院，第13卷，第4期，第329–344页，ISSN 1230-0535，2004年



Ing. Jan Patera（http://zcu.cz/~hopatera）是捷克普尔森西波希米亚大学计算机科学系的博士生兼兼职导师。他于2002年毕业于西波希米亚大学，主修计算机图形学。他是计算机图形学与数据可视化中心（CGDV）的成员。他的研究涉及体数据、等值面提取、算法和数据可视化。



Vaclav Skala 是捷克普尔森西波希米亚大学应用科学学院的计算机科学正教授。他在计算机科学系负责计算机图形学、计算机图形学算法、可视化、多媒体系统、Windows 编程和 .NET 技术等课程。他是 The Visual Computer 和《Computers&Graphics》编委会成员，也是 Eurographics 执行委员会成员，并担任多个知名国际会议的程序委员会委员。他曾在英国伦敦的布鲁内尔大学、俄罗斯的莫斯科技术大学、瑞典的耶夫勒大学及欧洲其他院校从事研究或教学工作。他自1992年起每年在中欧举办 WSCG 国际会议，主题涵盖计算机图形学、可视化和计算机视觉（http://wscg.zcu.cz），并举办 .NET 技术会议（http://dotnet.zcu.cz）。他的研究兴趣包括算法、数据结构、数学、计算机图形学、计算机视觉和可视化。他还负责过多个研究项目。目前，他担任计算机图形学与可视化中心主任（http://herakles.zcu.cz）。