基于二元先验的超分辨率：理论与算法

Pulak Sarangi、Ryoma Hattori、Takaki Komiyama 和 Piya Pal

arXiv:2301.01724v2 [eess.SP] 3 Mar 2023

摘要—超分辨率问题关注的是如何从事件（或尖峰）与低通滤波器卷积后的采样值中，重建在时间或空间上局部出现的事件。不同于以往利用适当域中的稀疏性来求解由此产生的病态问题的研究，本文探讨二元先验在超分辨率中的作用，其中假设尖峰（或信号源）的幅度取二值。我们的研究受到神经尖峰反卷积问题的启发，也适用于混合毫米波通信系统中的符号检测等其他应用。本文在理论和算法方面做出了多项贡献，使得仅凭极少量测量值也能实现二元超分辨率。我们的结果表明，相较于稀疏性，二元约束能够提供强得多的可辨识性保证，使我们能够在“极限压缩”条件下运行，此时测量值的数量可以显著小于尖峰的稀疏度。为了在这种“极限压缩”条件下确保精确恢复，必须设计能够在不进行松弛的情况下精确执行二元约束的算法。为克服由此带来的计算挑战，我们考虑一种一阶自回归滤波器（该滤波器见于神经尖峰反卷积），并利用其特殊结构。由此，我们将超分辨率二元尖峰恢复问题转化为一维二分搜索这一新颖形式。我们进行了数值实验，验证了我们的理论，并展示了二元约束在基于真实钙成像数据集进行神经尖峰反卷积时的优势。

索引词—二元压缩感知、超分辨率、尖峰反卷积、稀疏性、二分搜索、β 展开

I. 引言

从模糊核与局部事件（尖峰）的卷积中恢复这些事件的问题，广泛存在于各种科学与工程应用中，例如荧光显微镜 [1]，神经尖峰反卷积 [2]–[4]，混合毫米波（mmWave）通信 [5]，等等。考虑 K 时间尖峰，可将其表示为：

$$x_{\text{hi}}(t) = \sum_{k=1}^{K} c_k \delta(t - n_k T_{\text{hi}})$$

这里，高分辨率的尖峰位于间距为 T_{hi} 的细时间网格上，$n_k \in \mathbb{Z}$ 是对应于第 k^{th} 个尖峰的时间索引的整数，而 c_k 表示其幅度。尖峰与滤波器 $h(t)$ 卷积后，通常以采样率为 $T_{\text{lo}} = \mathrm{D}T_{\text{hi}}$（$\mathrm{D} > 1$）进行均匀（下）采样，从而得到测量值：

$$y[n] = x_{\text{hi}}(t) \star h(t)|_{t=nT_{\text{lo}}} = \sum_{k=1}^{K} c_k h(nT_{\text{lo}} - n_k T_{\text{hi}}) \quad (1)$$

超分辨率的目标是从数量有限（M）的低速率采样 $\{y[n]\}_{n=0}^{M-1}$ 中恢复尖峰的位置 n_k 和幅度 c_k，$k = 1、2、\cdots、K$。由于低通滤波器 $h(t)$ 会系统性地衰减尖峰的高频成分，该问题通常是不适定的。为了使问题适定，需要利用稀疏性 [6]–[9] 和/或非负性 [10], [11] 等先验。近年来，在开发能够以可证明方式求解超分辨率问题 [7]–[19]的高效算法方面，已取得显著进展。

本文研究二元超分辨率问题，其中尖峰的幅度先验已知为 $c_k = A$，但其数量（K）和位置（n_k）未知。受双光子钙成像中神经尖峰反卷积问题 [2], [20]，的启发，我们将重点研究可表示为稳定的一阶自回归（AR(1)）滤波器的模糊核。每个神经尖峰都会导致 Ca^{2+} 浓度迅速升高，随后缓慢指数衰减（建模为 AR(1) 滤波器的脉冲响应），使邻近尖峰事件的响应发生重叠，导致时间分辨率较低 [2], [21]。

A. 相关工作

超分辨率的早期研究可追溯到代数/子空间方法，例如 Prony 方法、 MUSIC [12], [22],ESPRIT [8], [23] 和矩阵铅笔法 [9], [24]。继 [6],的开创性工作之后，人们在理解稀疏性作为超分辨率先验所发挥的作用方面取得了长足进展 [7], [25], [26]。近年来，研究人员开发了基于凸优化的技术，采用总变差（TV）范数和原子范数正则化项，以促进稀疏性 [7], [18], [19], [25],[26] 和/或非负性 [10], [11], [27]。这些技术主要通过在傅里叶/频域采样，并假设核函数 $h(t)$（近似）带限。然而，选择合适的截止频率对超分辨率至关重要，需要仔细考量 [25],[28]。与子空间方法不同，这些凸优化算法的理论保证依赖于尖峰之间的最小间隔；研究还表明，即使不存在噪声，这一条件也是必要的 [29]。有限创新率（FRI）框架 [30]–[34] 也研究了如何从使用指数衰减核获取的测量值中恢复尖峰，其中包括本文所考虑的 AR(1)滤波器。在无噪声的情况下，FRI 能够从 $M = \Omega(K)$[1]个测量值中精确恢复 K 具有任意幅度的尖峰，无需任何间隔条件 [32]。值得注意的是，上述所有方法都需要 $M > K$个测量值才能分辨 K 个尖峰。相比之下，我们将证明，可以从 $M \ll K$中恢复 K 个尖峰

[1]这种记号本质上表示存在一个正数常量 c，使得 $M \geq cK$。

个测量值，方法是利用脉冲信号的二元特性。上述算法旨在处理任意实值幅度，因此并未利用二元先验。因此，在区间 $M < K$内，它们无法成功恢复尖峰；下文将该区间称为极端压缩区间。

近期，研究者开始以二元压缩感知（BCS） [35]–[42]的框架研究如何从欠定线性测量（未知数多于方程/测量值）中恢复二值信号。在 BCS 中，欠采样操作采用随机（通常是稠密的）采样矩阵；而我们考虑的是由滤波器导出的确定性结构化测量矩阵，并在其后进行均匀下采样。此外，现有 BCS 的理论保证关键依赖于稀疏性假设，我们将证明这些假设并不适用于我们的问题（详见第II-C节）。最重要的是，为了实现计算上的可处理性，BCS 放宽了二元约束，并求解连续值优化问题。因此，其理论保证并不适用于极限压缩区间 $M < K$。

如前所述，我们的研究源于钙成像中出现的神经尖峰反卷积问题 [3],[4], [20], [32], [43]–[45]。现有的大多数脉冲反卷积技术 [4], [43], [44]都在荧光信号的采样速率（较低）下推断脉冲活动，并在与成像帧率分辨率相等的时间分箱内，得到尖峰计数或尖峰率等单一估计。虽然已有基于序贯蒙特卡洛的技术，可在高于钙成像帧率的速率下生成尖峰 [3], ，但目前没有理论保证能够证明这些方法确实可以唯一识别高频脉冲活动。仅依赖稀疏性和非负性的算法 [43], [44] ，无法有效推断速率远高于钙成像采样率的神经元尖峰活动。另一方面，在高频率下，脉冲活动通常被假设为二值的，因为在细时间网格上相邻两个时刻之间发生两个或更多尖峰的概率可以忽略不计[2], [46]。因此，我们提出利用神经尖峰固有的二元特性，并首次提供理论保证，证明确实能够从以低得多速率采集的钙荧光信号中恢复高频二元神经尖峰。

B. 我们的贡献

我们针对尖峰位于细网格上的情形下的二元超分辨率问题，在理论和算法方面均作出了贡献。我们从理论上证明，在采样率极低时，稀疏性和非负性不足以精确重建二进制尖峰（引理 2）。然而，利用脉冲活动的二元特性，可以获得比经典稀疏性结果强得多的可辨识性结果（定理 1）。我们表明，在没有噪声的情况下，仅凭K 个 $M = \Omega(1)$ 低速率测量值，就有可能唯一恢复二进制尖峰。分析还揭示了二元先验与以下因素之间相互作用的有趣见解：AR(1)滤波器的“无限记忆”。

尽管在极端压缩区间（$M \ll K$）有可能唯一确定二进制尖峰，但二元约束的组合特性给精确施加这些约束带来了计算上的困难。我们的第二项贡献是利用 AR(1)测量值的特殊结构，克服极端压缩区间 $M < K$ 中的这一计算挑战（第三节-A）。我们的公式揭示了二值超分辨率与寻找实数的广义基数表示之间一个有趣且新颖的联系，这种表示称为 β-展开 [47]–[49] （第三节）。为了避免穷举搜索的问题，我们预先构建并存储（在内存中）一棵完全由模型参数（滤波器和欠采样因子）决定的二叉树。当获取低速率测量值后，我们可以高效地执行二分搜索来遍历该树并找到所需的二元解。利用内存换取计算效率的能力，得益于由 AR(1)滤波器控制的测量模型所具有的独特结构。即使测量值受到小幅有界（对抗性）噪声的干扰，该算法仍能保证实现精确超分辨率；噪声强度取决于 AR滤波器参数和欠采样因子。当测量值受到加性高斯噪声干扰时，我们刻画了极端压缩区间 $M < K$ 中的错误解码概率（定理 3），并说明了滤波器参数、信噪比与压缩程度之间的权衡关系。最后，我们还展示了二元先验如何提升一种广泛使用的尖峰反卷积算法（OASIS [43]）在真实钙成像数据集上的性能。

II. 二元超分辨率的基本样本复杂度

设 $y_{\text{hi}}[n]$ 是参数为 α、 $0 < \alpha < 1$ 的稳定一阶自回归 AR(1) 滤波器的输出，该滤波器由未知的二值输入信号 $x_{\text{hi}}[n] \in \{0, A\}$、 $A > 0$ 驱动：

$$y_{\text{hi}}[n] = \alpha y_{\text{hi}}[n-1] + x_{\text{hi}}[n] \tag{2}$$

在本文中，我们考虑这样一种超分辨率设定：不直接观测 $y_{\text{hi}}[n]$，而是以较低速率获取 M 个测量值 $\{y_{\text{lo}}[n]\}_{n=0}^{M-1}$，即通过均匀下采样 $y_{\text{hi}}[n]$ ，下采样因子为 D：

$$y_{\text{lo}}[n] = y_{\text{hi}}[\mathrm{D}n], \quad n = 0, 1, \cdots, M-1, \tag{3}$$

信号 $y_{\text{lo}}[n]$ 对应于对信号 $x_{\text{hi}}[n]$ 进行滤波和下采样后的版本，其中滤波器是一个在 α 处具有单极点的无限冲激响应（IIR）滤波器。令 $\mathbf{y}_{\text{lo}} \in \mathbb{R}^M$ 为通过堆叠低速率测量值$\{y_{\text{lo}}[n]\}_{n=0}^{M-1}$得到的向量：

$$\mathbf{y}_{\text{lo}} = [y_{\text{lo}}[0], y_{\text{lo}}[1], \cdots, y_{\text{lo}}[M-1]]^\top$$

由于 (2) 表示一种因果滤波操作，低速率信号 $\mathbf{y}_{\text{lo}}$ 仅取决于当前和过去的高速率二进制信号。记 $L := (M-1)\mathrm{D} + 1$。$\mathbf{y}_{\text{lo}}$ 中的 M 低速率测量值是以下 L 个高速率

二进制输入信号 $\{x_{\text{hi}}[n]\}_{n=0}^{L-1}$样本的函数。这些 L 个样本由以下向量 $\mathbf{x}_{\text{hi}} \in \{0, A\}^L$给出:

$$\mathbf{x}_{\text{hi}} := [x_{\text{hi}}[0], x_{\text{hi}}[1], \cdots, x_{\text{hi}}[L-1]]^\top.$$

假设系统初始时处于静止状态，即 $y_{\text{hi}}[n] = 0,\ n$ <0，我们可以将式（3）中的 M 个样本用紧凑的矩阵—向量形式表示为:

$$\mathbf{y}_{\text{lo}} := \mathbf{S}_{\text{D}}\mathbf{y}_{\text{hi}} = \mathbf{S}_{\text{D}}\mathbf{G}_\alpha\mathbf{x}_{\text{hi}} \tag{4}$$

其中，$\mathbf{G}_\alpha \in \mathbb{R}^{L\times L}$ 是一个托普利茨矩阵，定义如下:

$$\mathbf{G}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{L-1} & \alpha^{L-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

而 $\mathbf{S}_{\text{D}} \in \mathbb{R}^{M\times L}$ 定义如下:

$$[\mathbf{S}_{\text{D}}]_{i,j} = \begin{cases} 1, & j = (i-1)\text{D}+1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}.$$

矩阵 $\mathbf{S}_{\text{D}}$ 表示 D–倍降采样操作。我们的目标是根据低速率测量值 $y_{\text{lo}}[n]$推断未知的高采样率二进制输入信号$x_{\text{hi}}[n]$。这本质上是一个“超分辨率”问题，因为 AR(1)滤波器会先衰减 $x_{\text{hi}}[n]$的高频分量，而均匀下采样操作则会系统性地丢弃测量值。因此，发生在两个低速率测量值 $y_{\text{lo}}[n-1]$ 和 $y_{\text{lo}}[n]$ “之间”的脉冲活动$\{x_{\text{hi}}[(n-1)\text{D}+k]\}_{k=1}^{\text{D}}$ 似乎就丢失了。原则上，可以对其进行任意插值，因此这个问题似乎无解。下一节将令人惊讶地证明，在不存在噪声的情况下，由于$\mathbf{x}_{\text{hi}}$ 的二元特性以及 AR(1)滤波器的“无限记忆”，$\mathbf{x}_{\text{hi}}$ 仍可由$\mathbf{y}_{\text{lo}}$ 辨识。

A. I二进制超分辨率的可辨识性条件　　率

考虑$\mathbf{x}_{\text{hi}}$ 的如下划分：将其划分为 M 个互不相交的块，其中第一个块是标量，其余 $M-1$ 个块的长度均为 D：$\mathbf{x}_{\text{hi}} = [x_{\text{hi}}{}^{(0)}, \mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(1)\top}, \ldots\ldots, \mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(M-1)\top}]^\top$。这里，$x_{\text{hi}}{}^{(0)} = x_{\text{hi}}[0]$ 且$\mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)} \in \{0, A\}^{\text{D}}$ 的定义如下:

$$[\mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}]_k = x_{\text{hi}}[(n-1)\text{D}+k], \quad 1 \le n \le M-1 \tag{6}$$

子向量$\mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}$、和$\mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n-1)}$ ($n \ge 1$)分别表示高采样率二进制脉冲信号中连续且互不相交的块（长度为 D）。为了研究$\mathbf{x}_{\text{hi}}$ 能否由$\mathbf{y}_{\text{lo}}$唯一确定，我们首先通过如下方式构造一个序列 $c[n]$，为式 (4) 引入一种替代表示（但与原表示等价）： $c[0] = y_{\text{lo}}[0]$,

$$c[n] = y_{\text{lo}}[n] - \alpha^{\text{D}}y_{\text{lo}}[n-1],\ 1 \le n \le M-1 \tag{7}$$

根据式（2）中定义的高采样率 AR(1) 模型，可以递归地将 $y_{\text{hi}}[\text{D}n]$ 表示为 $y_{\text{hi}}[\text{D}n-1]$，而后者又可以表示为 $y_{\text{hi}}[\text{D}n-2]$，依此类推。利用这一递归关系，我们可以将 $y_{\text{hi}}[\text{D}n-1]$ 表示为 $y_{\text{hi}}[\text{D}n-\text{D}]$ 和 $\{x_{\text{hi}}[\text{D}n-i]\}_{i=0}^{\text{D}-1}$，并将 $y_{\text{lo}}[n]$ 重写为

$$\begin{aligned} y_{\text{lo}}[n] &= y_{\text{hi}}[\text{D}n] = \alpha y_{\text{hi}}[\text{D}n-1] + x_{\text{hi}}[\text{D}n] \\ &= \alpha^{\text{D}}y_{\text{hi}}[\text{D}n-\text{D}] + \alpha^{\text{D}-1}x_{\text{hi}}[\text{D}(n-1)+1] + \cdots \\ &\qquad + \alpha x_{\text{hi}}[\text{D}n-1] + x_{\text{hi}}[\text{D}n], \\ y_{\text{lo}}[n] - \alpha^{\text{D}}y_{\text{lo}}[n-1] &= \alpha^{\text{D}-1}x_{\text{hi}}[\text{D}(n-1)+1] + \cdots \\ &\qquad + \alpha x_{\text{hi}}[\text{D}n-1] + x_{\text{hi}}[\text{D}n] \end{aligned} \tag{8}$$

最后一个等号成立，是因为 $y_{\text{lo}}[n-1] = y_{\text{hi}}[\text{D}n-\text{D}]$。结合式（7）和式（8），序列 $c[n]$ 可以重写为 $c[0] = y_{\text{lo}}[0] = x_{\text{hi}}{}^{(0)}$，对于 $1 \le n \le M-1$

$$c[n] = \sum_{i=1}^{\text{D}} \alpha^{\text{D}-i}x_{\text{hi}}[(n-1)\text{D}+i] = \mathbf{h}_\alpha^T\mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)} \tag{9}$$

其中 $\mathbf{h}_\alpha = [\alpha^{\text{D}-1}, \alpha^{\text{D}-2}, \ldots, \alpha, 1]^T \in \mathbb{R}^{\text{D}}$。这意味着，$c[n]$ 仅取决于块$\mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}$。记$\mathbf{c} := [c[0], c[1], \ldots, c[M-1]]^\top \in \mathbb{R}^M$。对于任意 D，(9) 均可紧凑地表示为:

$$\mathbf{c} = \mathbf{H}_{\text{D}}(\alpha)\mathbf{x}_{\text{hi}} \tag{10}$$

其中 $\mathbf{H}_{\text{D}}(\alpha) \in \mathbb{R}^{M\times L}$ 由下式给出:

$$\mathbf{H}_{\text{D}}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \cdots & \mathbf{0}^\top \\ 0 & \mathbf{h}_\alpha^\top & \mathbf{0}^\top & \cdots & \mathbf{0}^\top \\ 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{h}_\alpha^\top & \cdots & \mathbf{0}^\top \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \cdots & \mathbf{h}_\alpha^\top \end{bmatrix}$$

下面的引理建立了(4)与(10)之间的等价性。

引理1。 给定$\mathbf{y}_{\text{lo}}$，按照(7)构造$\mathbf{c}$。则，当且仅当$\mathbf{x}_{\text{hi}}$ 是满足(10)的唯一二进制向量时，存在满足(4) 的唯一二元$\mathbf{x}_{\text{hi}} \in \{0, A\}^L$。

证明。 首先，假设存在满足(4)的唯一二元$\mathbf{x}_{\text{hi}} \in \{0, A\}^L$，但(10)具有非唯一二元解，即存在$\mathbf{x}_{\text{hi}}{}' \in \{0, A\}^L$、$\mathbf{x}_{\text{hi}}{}' \neq$ 和$\mathbf{x}_{\text{hi}}$，使得

$$\mathbf{c} = \mathbf{H}_{\text{D}}(\alpha)\mathbf{x}_{\text{hi}} = \mathbf{H}_{\text{D}}(\alpha)\mathbf{x}_{\text{hi}}{}' \tag{11}$$

定义$\mathbf{y}_{\text{hi}}{}' :=\mathbf{G}_\alpha\mathbf{x}_{\text{hi}}{}'$，其各项定义如下:

$$y_{\text{hi}}{}'[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}x_{\text{hi}}{}'[k], \quad 0 \le n \le L-1 \tag{12}$$

注意，(7) 可以改写为

$y_{\text{lo}}[0] = c[0] = x_{\text{hi}}[0], y_{\text{lo}}[1] = c[1] + \alpha^{\text{D}}y_{\text{lo}}[0] = c[1] + \alpha^{\text{D}}c[0]$

$y_{\text{lo}}[2] = c[2] + \alpha^{\text{D}}y_{\text{lo}}[1] = c[2] + \alpha^{\text{D}}c[1] + \alpha^{2\text{D}}c[0]$

$\vdots$

根据这一递归关系，并利用 (9) 和 (11)，我们可以进一步将 $y_{\text{lo}}[n]$ 改写为:

$$\begin{aligned} y_{\text{lo}}[n] &= \sum_{i=0}^{n} \alpha^{(n-i)\text{D}}c[i] = \alpha^{n\text{D}}x'_{\text{hi}}{}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha^{(n-i)\text{D}}\mathbf{h}_\alpha^\top\mathbf{x}_{\text{hi}}{}'^{(i)} \\ &= \alpha^{n\text{D}}x'_{\text{hi}}{}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\text{D}} \alpha^{n\text{D}-(i-1)\text{D}-j}x'_{\text{hi}}[(i-1)\text{D}+j] \\ &\overset{(a)}{=} \sum_{k=0}^{n\text{D}} \alpha^{n\text{D}-k}x'_{\text{hi}}[k] \overset{(b)}{=} y'_{\text{hi}}[n\text{D}] \end{aligned} \tag{13}$$

等式 (a) 是通过将求和重新索引为单个求和得到的，而 (b) 则由 (12) 得出。将 (13) 写成矩阵形式后，我们得到以下关系：

$$\mathbf{y}_{\text{lo}} = \mathbf{S}_{\text{D}}\mathbf{G}_{\alpha}{\mathbf{x}_{\text{hi}}}'$$

然而，根据 (4)，我们有 $\mathbf{y}_{\text{lo}} = \mathbf{S}_{\text{D}}\mathbf{G}_{\alpha}\mathbf{x}_{\text{hi}}$。这与 (4) 存在唯一二元解的假设相矛盾。

接下来，假设 (10) 存在唯一二元解，但 (4) 的二元解非唯一，即存在 ${\mathbf{x}_{\text{hi}}}' \in \{0, A\}^L$、${\mathbf{x}_{\text{hi}}}' \neq \mathbf{x}_{\text{hi}}$，使得

$$\mathbf{y}_{\text{lo}} = \mathbf{S}_{\text{D}}\mathbf{G}_{\alpha}{\mathbf{x}_{\text{hi}}}' = \mathbf{S}_{\text{D}}\mathbf{G}_{\alpha}\mathbf{x}_{\text{hi}}$$

根据 (7) 和 (10)，我们还可以得到 $\mathbf{c} = \mathbf{H}_{\text{D}}(\alpha){\mathbf{x}_{\text{hi}}}' = \mathbf{H}_{\text{D}}(\alpha)\mathbf{x}_{\text{hi}}$，这与 (10) 的解唯一这一假设相矛盾。 □

引理1保证，当且仅当 (10) 存在唯一的二元解$\mathbf{x}_{\text{hi}} \in \{0, A\}^L$ 时，二元$\mathbf{x}_{\text{hi}}$ 才能从测量值 $\mathbf{y}_{\text{lo}}$ 中被唯一确定。从 (9) 可以看出，$c[n]$ 和 $c[n-1]$ 仅由高采样率尖峰${\mathbf{x}_{\text{hi}}}^{(n)}$、和${\mathbf{x}_{\text{hi}}}^{(n-1)}$的互不相交的块贡献。因此，实际上，我们只有一个标量测量值 $c[n]$ 来解码长度为 D 的整个块${\mathbf{x}_{\text{hi}}}^{(n)}$，而不论它有多稀疏。仅凭一个测量值解码${\mathbf{x}_{\text{hi}}}^{(n)}$ 似乎是一个毫无希望的“病态”问题，这是由均匀下采样操作造成的。但恰恰在这里，$\mathbf{x}_{\text{hi}}$ 的二元特性可以作为强有力的先验，使问题适定。定理 1 给出了实现这一点的条件。

定理 1. *(可辨识性)* 对任意 $\alpha \in (0,1)$，除 α 可能属于一个勒贝格零测集$\mathbf{x}_{\text{hi}} \in \{0, A\}^L$ 外，对每个 $\text{D} \geq 1$，都存在唯一满足式 *(10)* 的解。

证明。 见附录A。 □

利用引理1和定理 1，我们可以得出结论：对于几乎所有 $\mathbf{x}_{\text{hi}}$，都可以根据 $\mathbf{y}_{\text{lo}}$ 唯一确定 (0,1)中的 取值。 可以验证，当 $\alpha = 1$ 时，该映射不是单射。定理 1 表明，从本质上说，有可能仅凭一个测量值 ${\mathbf{x}_{\text{hi}}}^{(n)}$，就解码出长度为 D 的每个块 $c[n]$。由于 ${\mathbf{x}_{\text{hi}}}^{(n)}$ 可以取 2^{D} 个可能值，原则上总可以对这些 个可能的二元序列进行穷举搜索；根据定理 1，其中只有一个满足 $\mathbf{h}_{\alpha}^{\top}{\mathbf{x}_{\text{hi}}}^{(n)}$。由于穷举搜索在计算上难以承受，这自然引出了寻找其他解法的问题。在第三节中，我们将提出一种替代算法，利用内存与计算之间的权衡，显著降低运行时解码复杂度。

B. 与有限创新率方法的比较

在相关的一系列研究 [30]–[32], [34], 中，研究者发展了 FRI 框架，以从此处考虑的测量模型中重建尖峰。然而，在一般的 FRI 框架中，并不对尖峰的幅度作任何假设；对于 D 个尖峰的位置和幅度，共有 2D 个实数值未知量。在 [32], 中，研究表明，利用指数再生核的性质，只要有至少 2D+1($>$ D) 个低速率测量值，就可以使用 Prony 型算法恢复任意幅度和尖峰位置。然而，由于我们利用了脉冲活动的二元特性，因此所需的样本复杂度远低于 FRI。事实上，定理 1 表明，利用尖峰位于高分辨率网格上且幅度为二进制这一事实，无论 D 有多大，只需 $M = \Omega(1)$ 个测量值即可识别 D 个尖峰。直接应用 FRI 方法在这种情况下无法成功，因为尖峰数量多于测量值数量。尽管如此，只要测量值足够多，FRI 技术就很强大，还能识别离网格脉冲。未来，若能将二元先验融入基于 FRI 的技术并消除网格假设，将两种方法结合起来，会很有意义。

C. 均匀降采样的诅咒：稀疏性和非负性不足

由于$\mathbf{x}_{\text{hi}}$ 是二值信号，因此它天然具有稀疏性和非负性。因此，我们可能会问，稀疏性和/或非负性是否足以唯一确定 $\mathbf{x}_{\text{hi}}$，使其与$\mathbf{c}$相对应，而无需施加任何二元约束。具体而言，我们希望了解，在 $\mathbb{R}^L$ 中寻找满足式 (10) 的最稀疏非负向量这一问题的解，是否确实与真实的$\mathbf{x}_{\text{hi}} \in \{0, A\}^L$一致

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L} \quad \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to } \mathbf{c} = \mathbf{H}_{\text{D}}(\alpha)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad \text{(P0)}$$

引理 2. 对于每个$\mathbf{x}_{\text{hi}} \in \{0, A\}^L$ （除$\mathbf{x}_{\text{hi}} = A\mathbf{e}_1$外），以及满足(10)的$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^M$，以下结论成立

(i) 存在一个$x^\star \neq \mathbf{x}_{\text{hi}}$，它是 (P0) 的一个满足条件的解

$$\|\mathbf{x}^\star\|_0 \leq \|\mathbf{x}_{\text{hi}}\|_0 \qquad (14)$$

(ii) 只要存在一个整数 $n_0 \geq 1$，使得$\mathbf{x}_{\text{hi}}$ 中（在(6)中定义的）块$\mathbf{x}^{(n_0)}{}_{\text{hi}}$ 满足 $\|\mathbf{x}^{(n_0)}{}_{\text{hi}}\|_0 \geq 2$，式(14) 中的不等式就是严格的。

证明。 证明见附录 B。 □

引理 2 表明，(10) 存在其他非二元解（不同于$\mathbf{x}_{\text{hi}}$），其稀疏性与二值信号$\mathbf{x}_{\text{hi}} \in \{0, A\}^L$相同或更低。此外，存在一些问题实例，其中 (P0) 的最稀疏解比$\mathbf{x}_{\text{hi}}$严格更稀疏。因此，仅凭稀疏性和/或非负性不足以唯一确定真实值$\mathbf{x}_{\text{hi}}$。

松弛的隐式偏差： 优化问题 (P0) 是非凸的，且没有施加二元约束。在二元压缩感知中，通常通过盒约束对二元约束进行松弛，并按以下方式将 l_0 范数松弛为 l_1 范数: [35], [36],

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to } \mathbf{c} = \mathbf{H}_{\text{D}}(\alpha)\mathbf{x}, \ \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq A\mathbf{1} \quad \text{(P1-B)}$$

在下面的引理中，我们证明 (P1-B) 的解中引入了隐式偏差。

引理 3。 对于满足(10)的每个$\mathbf{x}_{\text{hi}} \in \{0, A\}^L$和$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^M$，存在满足以下条件的$\mathbf{x}^\star$，其为(P1-B)的一个解

$$\|\mathbf{x}^\star\|_1 \leq \|\mathbf{x}_{\text{hi}}\|_1. \qquad (15)$$

此外，对于所有 $n \geq 1$，$\mathbf{x}^\star$ 的$\mathbf{x}^{(n)\star} \in \mathbb{R}^{\mathrm{D}}$ 块满足：

$$supp(\mathbf{x}^{(n)\star}) = \{\mathrm{D}, \mathrm{D}-1, \cdots, \mathrm{D}-j_n\},\ if\ c[n] \neq 0 \quad (16)$$

对于某些 $0 \leq j_n \leq \mathrm{D}-1$ 和$\mathbf{x}^{(n)\star} = \mathbf{0}$，若 $c[n] = 0$，则无论$\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}$的支撑集如何，均成立。

证明。 证明见附录 B。 □

引理 3 表明，即使在无噪声情形下，将盒约束作为二值约束的松弛方式引入，也会使恢复的脉冲的支撑集产生偏差。无论生成测量值的真实脉冲模式$\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}$ 如何，最优解总会使脉冲集中在每个长度为 D 的块的末端附近。这种偏差既源于松弛的本质，也与问题中测量矩阵$\mathbf{H}_{\mathrm{D}}(\alpha)$的特定结构有关。

D. 超分辨率中的内存作用：*IIR* 与 *FIR* 滤波器

在无噪声的情况下，能够从 D–倍欠采样测量值$\mathbf{y}_{\mathrm{lo}}$ 中识别高速率二进制信号$\mathbf{x}_{\mathrm{hi}} \in \{0, A\}^L$ （D 可以任意大），部分也归功于 AR(1)滤波器的“无限记忆”或无限冲激响应。事实上，对于有限冲激响应（FIR）滤波器，在不损失可辨识性的前提下，降采样倍率存在上限。我们在早先的研究中对此进行了研究 [40]，并证明欠采样极限由 FIR 滤波器的长度决定。为说明这一点，考虑二值信号$\mathbf{x}_{\mathrm{hi}} = [u[0], u[1], \cdots, u[r-1]]^T \in \mathbb{R}^r$ 与 r 长度为$\mathbf{u}$的 FIR 滤波器的卷积：$z_f[n] = \sum_{i=0}^{r-1} u[r-1-i]x_{\mathrm{hi}}[n+i]$. 这些采样可通过适当的零填充，以向量形式表示为$\mathbf{z}_f := \mathbf{u} \star \mathbf{x}_{\mathrm{hi}} \in \mathbb{R}^L$。与之前一样，假设我们只观测输出的 D–倍降采样结果 $z_{\mathrm{D}}[n] = z_f[\mathrm{D}n]$。低速率观测中的两个连续样本 $z_{\mathrm{D}}[p], z_{\mathrm{D}}[p+1]$ 如下：

$$z_{\mathrm{D}}[p] = \sum_{i=0}^{r-1} u[r-1-i]x_{\mathrm{hi}}[\mathrm{D}p+i],$$
$$z_{\mathrm{D}}[p+1] = \sum_{i=0}^{r-1} u[r-1-i]x_{\mathrm{hi}}[\mathrm{D}(p+1)+i]$$

如果 $\mathrm{D} > r$，请注意，没有任何测量值是样本 $x_{\mathrm{hi}}[\mathrm{D}p+r]$、$x_{\mathrm{hi}}[\mathrm{D}p+r+1]$、$\cdots$、$x_{\mathrm{hi}}[\mathrm{D}(p+1)-1]$ 的函数。因此，可以为它们任意赋予二值，同时仍与低速率测量值 $z_{\mathrm{D}}[n]$ 一致。当抽取因子大于滤波器长度（$\mathrm{D} > r$）时，这使得无法精确恢复 $\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}$ （即使已知其为二值）成为可能。下面的引理总结了这一结果。

引理 4。 对于每个 *FIR*滤波器 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$，如果欠采样因子超过滤波器长度，即 $\mathrm{D} > r$，则存在 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \{0, A\}^L$，$\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1$，使得 $\mathbf{S}_{\mathrm{D}}(\mathbf{u} \star \mathbf{x}_0) = \mathbf{S}_{\mathrm{D}}(\mathbf{u} \star \mathbf{x}_1)$。

这表明，定理 1 中给出的可辨识性结果并不仅仅是二元先验的结果；在无噪声的情况下，自回归过程的无限记忆对于允许任意欠采样 $\mathrm{D} > 1$ 同样至关重要。对于此类 IIR滤波器，过去所有（二元）脉冲活动的记忆都会以适当的加权方式编码到脉冲之后获取的每个测量值中，而有限脉冲响应滤波器则不具备这一特性。

III. 使用二分搜索和结构化测量的高效二元超分辨率

根据定理 1，我们已经知道，可以通过穷举搜索，从 $\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}$ 唯一确定$\mathbf{c}$ （或者等价地，通过单个测量值 $c[n]$唯一确定每个块$\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}$ ）。现在，我们将解码问题表述为在适当集合上进行“二分搜索”，从而展示如何避免这种穷举搜索，并实现更高的计算效率。我们首先介绍一些记号和定义。给定一个非负整数 $k, 0 \leq k \leq 2^{\mathrm{D}}-1$，令 $(b_1(k)\ b_2(k)\ \cdots, b_{\mathrm{D}}(k))$ 表示 k 的唯一 D 位二进制表示：$k = \sum_{d=1}^{\mathrm{D}} 2^{\mathrm{D}-d} b_d(k)$ $b_d(k) \in \{0,1\}\ \forall\ 1 \leq d \leq \mathrm{D}$. 其中，$b_1(k)$ 是最高有效位，$b_{\mathrm{D}}(k)$ 是最低有效位。利用这一记号，我们定义以下集合：

$$\mathcal{S}_{\mathrm{all}} := \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_{2^{\mathrm{D}}-1}\}, \quad (17)$$

其中每个 $\mathbf{v}_k \in \{0, A\}^{\mathrm{D}}$ 都是一个二进制向量，其定义如下：

$$[\mathbf{v}_k]_d = A b_d(k). \quad 1 \leq d \leq \mathrm{D} \quad (18)$$

换句话说，二进制向量 $\frac{1}{A}\mathbf{v}_k$ 是其索引 k 的 D 位二进制表示。按照这一约定，$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$（即全由 $0'$ 组成的二元序列）和 $\mathbf{v}_{2^{\mathrm{D}}-1} = A\mathbf{1}$ （即全由 A' 组成的二元序列）。回顾式 (6) 中定义的 $\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}$ 的划分，其中每个块 $\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}$ $(n \geq 1)$ 都是一个长度为 D 的二进制向量，且 $x_{\mathrm{hi}}{}^{(0)} \in \{0, A\}$ 是标量。显然，式 (17) 包含了每个块 $\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}$ 可能取值的全部组合。根据式 (9)，每个标量测量值 $c[n]$ 可写为：$c[0] = x^{(0)}$，$c[n] = \mathbf{h}_\alpha{}^\top \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)},\ 1 \leq n \leq M-1$.对于每个 α，我们定义以下集合：

$$\Theta_\alpha := \{\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{2^{\mathrm{D}}-1}\},\ \text{where } \theta_k := \mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{v}_k \quad (19)$$

注意到，每个测量值 $c[n] = \sum_{i=1}^{\mathrm{D}} \alpha^{\mathrm{D}-i} x_{\mathrm{hi}}[(n-1)\mathrm{D}+i]$ 都取自集合 Θ_α，具体取值取决于脉冲模式的底层块 $\mathcal{S}_{\mathrm{all}}$。我们的目标是根据 $c[n]$ 恢复尖峰 $\{x_{\mathrm{hi}}[(n-1)\mathrm{D}+i]\}_{i=1}^{\mathrm{D}}$。

下面我们将证明，这个问题等价于求一个实数在任意基数下的表示，这种表示称为“β-展开” [49]。给定一个实数（可能不是整数） $\beta > 1$，另一个形如以下形式的实数 $p \geq 0$ 的表示：

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta^{-n},\ \text{where } 0 \leq a_n < \lfloor \beta \rfloor \quad (20)$$

被称为 β-展开。系数 $0 \leq a_n < \lfloor \beta \rfloor$ 为整数。这是对数表示方式的推广，将表示范围从整数基数扩展到基数可取任意实数的系统。Rényi 首先在 [49], 年提出了任意基数下表示的概念，此后该概念得到了广泛研究 [47], [48], [50]。β-展开与本文所研究的二元超分辨率问题之间存在直接联系。在当前问题中，任意元素 $\theta_k \in \Theta_\alpha$ 都可以写成：

$$\theta_k = \mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{\mathrm{D}} \alpha^{\mathrm{D}-i} [\mathbf{v}_k]_i$$

$\overset{\text{令}}{=}$ 当 $1/2 < \alpha < 1$ 时，$\beta = 1/\alpha$，可知 (20) 中的系数必须满足 $0 \leq a_n < \lfloor 1/\alpha \rfloor < 2$，即，

它们被限制为二值 $a_n \in \{0,1\}$。因此，从观测值 $\mathbf{v}_k$ 解码尖峰 θ_k 等价于为数值 D−寻找一个 θ_k/A 位的二进制表示，其基数为非整数 $\beta = 1/\alpha$。关于 β-展开是否存在，以及如何求有限β–展开的系数（若其存在），一直是一个活跃的研究课题 [47], [48], [50], [51]。当 $\beta \geq 2$ （等价地，$0 < \alpha \leq 1/2$）时，可以使用贪心算法求出系数；该算法的步骤类似于求整数的 D 位二进制表示 [47], [51]。然而， $\beta \in (1, 2)$ 这一范围（等价地， $1/2 < \alpha < 1$）要复杂得多，至今仍是研究热点 [47], [48], [50]。据我们所知，当 $1/2 < \alpha < 1$ 时，目前尚无已知的计算高效方法来求有限β-展开（若其存在） [N. Sidorov，私人通信，5 月 24, 2022]。在实践中，我们遇到的滤波器取值 α ($= 1/\beta$) 非常接近 1，因此需要采用另一种方法，为 θ_k求出这一有限的 β-基数表示。在下一节中，我们将说明，通过执行适当的预处理，可以将有限的 β-基数表示表述为一个二分搜索问题；对于所有允许唯一有限 β–展开的 β 值，该问题都保证能够成功。

A. 将其表述为二分搜索问题

在介绍算法之前，我们先引入无碰撞集的概念。

定义 1 (无碰撞集)。给定一个欠采样因子D，定义一类“无碰撞”*AR(1)*滤波器如下：

$$\mathcal{G}_{\mathrm{D}} = \{\alpha \in (0,1) \; s.t. \; \mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{v}_i \neq \mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{v}_j \; \forall \; i \neq j, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in \mathcal{S}_{\text{all}}\}$$

集合 $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ 表示 AR(1) 滤波器参数 α 的允许取值，使得$\mathcal{S}_{\text{all}}$ 中的 2^{D} 个二元序列分别映射到集合 Θ_α中的唯一元素。换言之，对于所有 $\alpha \in \mathcal{G}_{\mathrm{D}}$，每个 $\theta_k \in \Theta_\alpha$ 都有唯一的 D–位展开。这自然引出了一个问题：“集合 $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$有多大？”定理 1 已经回答了这个问题：可辨识性结果意味着，对于每个 D，几乎所有$\alpha \in (0, 1)$中的取值都属于该集合 $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ （可能的例外是一个零测集）。因此，定理 1 确保存在无限多种无碰撞滤波器参数的选择。

引理 5。 对于每个 $\alpha \in \mathcal{G}_{\mathrm{D}}$，映射 $\mathbf{\Phi}_\alpha(.)$： $\mathcal{S}_{\text{all}} \to \Theta_\alpha$,$\mathbf{\Phi}_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{v}$ 在 $\mathcal{S}_{\text{all}}$ 与 Θ_α之间构成一个双射。

证明。 由于 $\alpha \in \mathcal{G}_{\mathrm{D}}$，根据集合 $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ 的定义，显然对于任意 $\mathbf{v}_i$,$\mathbf{v}_j \in \mathcal{S}_{\text{all}}$, $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}^j$ ，都有 $\mathbf{h}_\alpha{}^\top \mathbf{v}_i \neq \mathbf{h}_\alpha{}^\top \mathbf{v}j$。因此，该映射是单射。此外，由 (19) 还可得 $|\Theta_\alpha| \leq |\mathcal{S}_{\text{all}}| = 2^{\mathrm{D}}$。由于 $\mathbf{\Phi}_\alpha$(·) 是单射，我们也必有 $|\Theta_\alpha| = 2^{\mathrm{D}}$ ，因此映射 $\mathbf{\Phi}_\alpha$(.) 在 $\mathcal{S}_{\text{all}}$ 与 Θ_α之间构成双射。 □

当 $\alpha \in \mathcal{G}_{\mathrm{D}}$时，引理 5 指出，每个 $\theta_k \in \Theta_\alpha$ 的有限 β 展开都是唯一的。引理 5 提供了一种避免对 $\mathcal{S}_{\text{all}}$ 进行穷举搜索，同时以计算高效的方式从 $c[n]$ 确定 $\mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}$ 的方法。根据引理 5，我们知道， $\mathcal{S}_{\text{all}}$ 中的每种脉冲模式 2^{D} 都映射到 Θ_α 中唯一的元素，而 Θ_α 中的每个元素也都有对应的脉冲模式。因此，我们可以不搜索 $\mathcal{S}_{\text{all}}$，而是等价地搜索集合 Θ_α ，以确定未知的脉冲模式。由于 Θ_α 允许“排序”，搜索 Θ_α 相比搜索 $\mathcal{S}_{\text{all}}$具有明显的计算优势。这种排序使我们能够在（有序的）Θ_α 上使用二分搜索，并以计算高效的方式找到所需元素。为此，我们首先对集合 Θ_α 按升序排序，并以相同的顺序排列 $\mathcal{S}_{all}$ 中对应的元素。给定 Θ_α 作为输入，函数 SORT(·) 返回排序列表 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$以及索引集合 $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, \cdots, i_{2^{\mathrm{D}}-1}\}$，其中包含列表中已排序元素的索引 Θ_α。

$$\Theta_\alpha^{\text{sort}}, \mathcal{I} \leftarrow \text{SORT}(\Theta_\alpha)$$

将排序列表中的元素记为 $\Theta_\alpha^{\text{sort}} = \{\theta_0, \cdots, \theta_{2^{\mathrm{D}}-1}\}$ 和 $\mathcal{S}_{\text{all}}^{\text{sort}} = \{\tilde{\mathbf{v}}_0, \cdots, \tilde{\mathbf{v}}_{2^{\mathrm{D}}-1}\}$，其中:

$$\widetilde{\theta}_0 < \widetilde{\theta}_1 < \cdots < \widetilde{\theta}_{2^{\mathrm{D}}-1} \quad \text{and } \widetilde{\theta}_j = \theta_{i_j}, \quad \widetilde{\mathbf{v}}_j = \mathbf{v}_{i_j} \quad \forall j.$$

需要注意的是，这一步排序不依赖于测量值 $\mathbf{c}$，因此可以作为预处理流程的一部分离线执行。然而，这确实需要占用内存来存储排序列表。在

算法 1 无噪声脉冲恢复

1: 输入： 测量值 $c[n]$，排序列表 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$及相应的尖峰模式 $\mathcal{S}_{\text{all}}^{\text{sort}}$
2: 输出： 解码脉冲块 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}{}^{(n)}$
3: $i^\star \leftarrow$ 二分查找$(\Theta_\alpha^{\text{sort}}, c[n])$
4: 返回 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}{}^{(n)} \leftarrow \tilde{\mathbf{v}}_{i^\star}$

在无噪声情形下，我们知道每个标量测量值$c[n] = \mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}$ 都属于集合 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$。因此，如果我们确定其索引（记为 $i^\star$），就可以通过返回 $\tilde{\mathbf{v}}_{i^\star}$ 中对应的二进制向量，成功恢复$\mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}$ 。因此，我们可以将解码问题表述为：在排序列表 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$中搜索输入 $c[n]$ 。使用“二分搜索”可以高效地完成这一操作。无噪声尖峰解码流程总结如算法 1 所示。由于在包含 N个元素的有序列表中执行二分搜索的复杂度为 $O(\log\ N)$，算法 1 的复杂度关于 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$的基数呈对数级，因此复杂度为 $O(\log(2^{\mathrm{D}})) = O(\mathrm{D})$。我们在以下引理中总结这一结果。

引理 6. 假设 $\alpha \in \mathcal{G}_{\mathrm{D}}$。给定有序集 Θ_α^{sort}和输入 $c[n] = \mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}$, 算法 1 在 $O(\mathrm{D})$步内终止，其输出 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}{}^{(n)}$ 满足 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}{}^{(n)} = \mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}$。

B. 含噪测量值与1 D 最近邻搜索

我们将含噪尖峰检测表述为一维最近邻搜索问题，以此说明即使存在噪声，二分搜索仍然有用。设$\{z_{\text{lo}}[n]\}_{n=0}^{M-1}$ 表示含噪的 D 倍抽取滤波器输出

$$z_{\text{lo}}[n] = y_{\text{lo}}[n] + w[n], \quad 0 \leq n \leq M-1 \qquad (21)$$

这里，$w[n]$ 表示对（无噪声）低速率测量值 $y_{\text{lo}}[n]$造成干扰的加性噪声项。与（7）类似，我们按如下方式从 $z_{\text{lo}}[n]$计算 $c_e[n]$：

$$c_e[n] = z_{\text{lo}}[n] - \alpha^{\text{D}} z_{\text{lo}}[n-1] \tag{22}$$

$$= \sum_{i=1}^{\text{D}} \alpha^{\text{D}-i} x_{\text{hi}}[(n-1)\text{D}+i] + e[n] = c[n] + e[n] \tag{23}$$

其中 $c[n] = \mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)} \in \Theta_\alpha^{\text{sort}}$，且 $e[n] = w[n] - \alpha^{\text{D}} w[n-1]$。我们可以将 $c_e[n]$ 解释为元素 $c[n] \in \Theta_\alpha^{\text{sort}}$ 的含噪/受扰版本，其中 $e[n]$ 表示噪声。这个受扰信号可能不再属于 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$（即 $c_e[n] \notin \Theta_\alpha^{\text{sort}}$），因此我们无法在集合 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$ 中找到完全匹配的元素。相反，我们旨在通过求解以下问题，在 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$ 中找到最接近的元素（即 $c_e[n]$ 的最近邻）：

$$\widehat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}{}^{(n)} = \arg\min_{\mathbf{v} \in \mathcal{S}_{\text{all}}^{\text{sort}}} |c_e[n] - \mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{v}| \tag{24}$$

求解 (24) 等价于找到脉冲序列 $\widetilde{\mathbf{v}}_i \in \mathcal{S}_{\text{all}}^{\text{sort}}$，使其映射到集合 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$ 中 $c_e[n]$ 的最近邻。利用排序列表 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$，无需再按顺序解析该列表（这会产生 $O(2^{\text{D}})$ 的复杂度），而是可以执行一种改进的二分搜索，算法 2 对此进行了总结；与普通二分搜索相比，该方法会跟踪额外的索引。最后，我们返回 $\mathcal{S}_\alpha^{\text{sort}}$ 中唯一的脉冲模式，它映射到含噪测量 $c_e[n]$ 的最近邻。众所周知，对于任意查询，找到最近邻需要 $O(\log(2^{\text{D}})) = O(\text{D})$ 步，而非 $O(2^{\text{D}})$ 的线性复杂度。这保证了通过求解 (24) 可以实现计算高效的脉冲解码。

接下来，我们刻画导致一个尖峰块发生错误检测的错误事件。回想一下，集合 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$ 已排序，且其元素满足以下顺序关系：

$$0 = \widetilde{\theta}_0 < \widetilde{\theta}_1 < \cdots < \widetilde{\theta}_{l_{\text{D}}} = 1 + \alpha + \cdots + \alpha^{\text{D}-1}$$

其中 $l_{\text{D}} := 2^{\text{D}} - 1$。此外，$\widetilde{\theta}_k = \mathbf{h}_\alpha^\top \widetilde{\mathbf{v}}_k$，其中 $\widetilde{\mathbf{v}}_k \in \mathcal{S}_{\text{all}}^{\text{sort}}$ 是长度为 D 的二进制脉冲序列。

对于每个 $\widetilde{\mathbf{v}}_k$ 和每个 n，我们将确定错误事件 $\widehat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}{}^{(n)} \neq \mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}$，其中 $\mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)} = \widetilde{\mathbf{v}}_k$。首先，考虑 $\mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)} = \widetilde{\mathbf{v}}_k$ 对某个 $0 < k < l_{\text{D}}$ 成立的情况（不包括 $\widetilde{\mathbf{v}}_0, \widetilde{\mathbf{v}}_{l_D}$）。$\widetilde{\mathbf{v}}_k$ 对应的无噪测量值为 $c[n] = \theta_k = \mathbf{h}_\alpha^\top \widetilde{\mathbf{v}}_k$，满足 $\widetilde{\theta}_{k-1} < c[n] = \widetilde{\theta}_k < \widetilde{\theta}_{k+1}$。由于 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$ 已排序，很容易验证，当且仅当 $c_e[n]$ 满足以下条件时，$c_e[n]$ 的最近邻为 θ_k：

$$(\widetilde{\theta}_{k-1} + \widetilde{\theta}_k)/2 \leq c_e[n] \leq (\widetilde{\theta}_{k+1} + \widetilde{\theta}_k)/2 \tag{25}$$

由于 $\widetilde{\theta}_k = \mathbf{h}_\alpha^\top \widetilde{\mathbf{v}}_k$，(24) 的解在 $\widetilde{\mathbf{v}}_k \in \mathcal{S}_{\text{all}}^{\text{sort}}$ 处取得，且解码成功。因此，当且仅当 $c_e[n]$ 违反 (25) 时，算法 2 才会对 $\widetilde{\mathbf{v}}_k$ 给出错误估计。~~事件 $c_e[n] \notin [\frac{\theta_{k-1}+\theta_k}{2}, \frac{\theta_{k+1}+\theta_k}{2}]$ 等价于 $e[n] \in \mathcal{E}_k$ 在 n，其定义已在 23 中给出，其中~~

$$\mathcal{E}_k = \{e[n] < -\frac{\widetilde{\theta}_k - \widetilde{\theta}_{k-1}}{2}, \text{ or } e[n] > \frac{\widetilde{\theta}_{k+1} - \widetilde{\theta}_k}{2}\} \tag{26}$$

最后，我们刻画了 $k = 0$，l_{D}的错误事件。$c[n] = \theta_0 = 0$ 或 $c[n] = \theta_{l_{\text{D}}}$ 的错误事件为：

$$\mathcal{E}_0 = \{e[n] \geq \widetilde{\theta}_1/2\},\ \mathcal{E}_{l_{\text{D}}} = \{e[n] \leq -(\widetilde{\theta}_{l_{\text{D}}} - \widetilde{\theta}_{l_{\text{D}}-1})/2\} \tag{27}$$

定义 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$中点之间的“最小距离”：

$$\Delta\theta_{\min}(\alpha, \text{D}) = \min_{1 \leq k \leq l_{\text{D}}} |\widetilde{\theta}_k - \widetilde{\theta}_{k-1}|.$$

此最小距离取决于 A, α 和 D。由 (26)、(27) 可验证，若对所有 n 均有 $2|w[n]| < \Delta\theta_{\min}(\alpha,\text{D})/2$（这意味着 $|e[n]| < \Delta\theta_{\min}(\alpha,\text{D})/2$），则 $\widehat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}{}^{(n)} = \mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}$。如定理2所述，算法 2 能够从受有界对抗噪声污染的测量值中精确恢复真实脉冲，其鲁棒性程度由参数 A, α, D 决定。

算法 2 噪声脉冲恢复

输入： 测量值 $c_e[n]$，排序列表 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$ 以及相应的（有序）尖峰模式 $\mathcal{S}_{\text{all}}^{\text{sort}}$
输出： 解码脉冲块 $\widehat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}{}^{(n)}$
设置 $l \leftarrow 0, u \leftarrow 2^{\text{D}} - 1$
当 $u - l > 1$
  设置 $m \leftarrow l + \lfloor (u-l)/2 \rfloor$
  if $\widetilde{\theta}_m > c_e[n]$ **则**
    $u \leftarrow m$
  else
    $l \leftarrow m$
  结束如果
结束 while 循环
查找最近邻 $i^\star = \arg\min_{i \in \{l,u\}} (c_e[n] - \widetilde{\theta}_i)^2$
返回 $\widehat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}{}^{(n)} \leftarrow \widetilde{\mathbf{v}}_{i^\star}$

定理2. 假设 $\alpha \in \mathcal{G}_{\text{D}}$。给定有序集 Θ_α^{sort}，输入为 $c_e[n]$ 的算法 2 的输出与优化问题 (24) 的解完全一致，且最多需要 $O(\text{D})$ 步。此外，若对于所有 n，$|w[n]| < \Delta\theta_{\min}(\alpha, \text{D})/4$，则算法 *2* 的输出满足 $\widehat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}{}^{(n)} = \mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}$。

由定理2可知，$\Delta\theta_{\min}(\alpha,\text{D})$ 在刻画噪声上界方面发挥着重要作用。我们试图深入了解当 D 保持不变时，$\Delta\theta_{\min}(\alpha,\text{D})$ 如何随 α 变化。

引理 7. 给定D，$\Delta\theta_{\min}(\alpha, \text{D}) = \alpha^{\text{D}-1}$ 对于 $\alpha \in (0, 0.5]$。

证明。证明见附录 C。 □

当 $\alpha \in (0, 0.5]$，$\Delta\theta_{\min}(\alpha, \text{D})$ 随 α 单调递增时。然而，对于 $\alpha > 0.5$，其趋势会随着 α 波动，且不同的 D 对应不同的变化，因此很难预测。这一点也得到了图 1 中实证图的印证。对 $\Delta\theta_{\min}(\alpha, \text{D})$ 进行更深入的分析，以了解理想的滤波器参数 α，是未来一项有趣的研究方向。

C. 内存与计算复杂度之间的权衡

算法 1 和算法 2 的一个关键特点是，它们通过离线构建排序列表 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$ 和 $\mathcal{S}_{\text{all}}^{\text{sort}}$，实现了高效的运行时间复杂度。这些列表各包含 2^{D} 个元素，需要存储在内存中，并在运行时供算法使用。天下没有免费的午餐，运行时 $O(\text{D})$ 所实现的计算效率，是以额外占用内存来存储排序列表 $\Theta_\alpha^{\text{sort}}$，$\mathcal{S}_{\text{all}}^{\text{sort}}$ 为代价的。

D. 可并行实现

算法 2（算法 1 亦然）仅以 $c_e[n](c[n])$ 作为输入，并返回 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}^{(n)}$，且与任何其他 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}^{(n')}$、$n' \neq n$ 完全解耦。请注意，实际情况下，我们获得的是测量值 $z_{\text{lo}}[n](y_{\text{lo}}[n])$，而需要计算的是 $c_e[n]$（分别为 $c[n]$）。由于这种解耦，我们可以利用连续的两个低速率采样 $z_{\text{lo}}[n]$，$z_{\text{lo}}[n-1]$ 并行计算 $c_e[n]'s$，然后执行最近邻搜索，而无需等待此前解码出的任何尖峰。因此，根据可用的并行计算资源，还可以进一步降低总解码复杂度。

IV. 高斯噪声下的错误分析

算法 2 无需了解噪声统计特性即可求解 (24)。然而，为了分析其性能，我们将对高采样率脉冲信号 $\mathbf{x}_{\text{hi}}$ 和测量噪声 $w[n]$的统计特性作出以下（标准）假设：

- **(A1)** 二进制向量 $\mathbf{x}_{\text{hi}} \in \{0, A\}^L$ 的各个分量是独立同分布的随机变量，其分布为 $x_{\text{hi}}[n] \sim A$伯努利(p)。
- **(A2)** 加性噪声 $w[n]$，$0 \leq n \leq M-1$ 与 $x_{\text{hi}}[n]$相互独立，且服从 $w[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

A. 错误解码概率

在假设（**A2**）下，$\mathbf{x}_{\text{hi}}$ 的最大似然估计由以下问题的解给出：

$$\widehat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \{0,A\}^L} \|\mathbf{z}_{\text{lo}} - \mathbf{S}_{\text{D}} \mathbf{G}_\alpha \mathbf{v}\|_2 \quad (P_{\text{NN}})$$

所提出的算法 2 并不试图求解（P_{NN}），因为该问题在计算上不可行。相反，它通过为每个 $c_e[n]$求最近邻，来求解一组 $M-1$ 一维最近邻搜索问题$n = 1, 2, \cdots, M-1$。这种标量最近邻搜索通过在预排序列表上进行并行二分搜索，以计算高效的方式实现。请注意，根据运算（22），等效噪声项 $e[n]$的方差最多会被放大（$1+\alpha^{2\text{D}}$）< 2倍。这可以看作是实现计算效率和并行化所付出的代价。以下定理刻画了若干重要量（例如信噪比（SNR）、欠采样因子 D，以及由 α控制的滤波器的频率响应）对算法 2 性能的影响。

定理 3. 假设 $\alpha \in \mathcal{G}_{\text{D}}$，并且假设 **(A1-A2)** 成立。给定 $\delta > 0$，若满足以下条件：

$$\Delta\theta_{\min}^2(\alpha, \text{D})/\sigma^2 \geq 4 \ln(2M/\delta) \tag{28}$$

那么，算法 2 可以以至少 $1-\delta$ 的概率精确恢复二值信号 $\mathbf{x}_{\text{hi}}$。

证明。 证明沿用计算
高斯噪声下符号检测的错误概率，随后进行了某些简化，并收录在附录D 中以供参考。 □

在图 1 中，我们绘制了 $\Delta\theta_{\min}(\alpha, \text{D})$ 随 D 变化的曲线，其中 α 取不同值。正如预期，$\Delta\theta_{\min}(\alpha, \text{D})$ 会随着 D 的增大而衰减。不难理解，对于固定的 α，随着 D 增大，

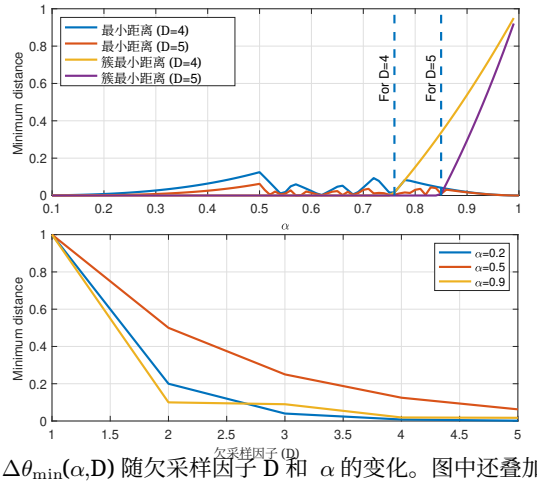


图 1： $\Delta\theta_{\min}(\alpha,\text{D})$ 随欠采样因子 D 和 α 的变化。图中还叠加了簇间距离 $\Delta_{\min}^{c}(\alpha,\text{D})$ 与 α 的关系。每条虚线表示区间 $\mathcal{F}_{\text{D}}$ 的起点。

要精确恢复尖峰会变得更加困难，因此需要更高的信噪比来弥补较低的采样率。这可以理解为在存在噪声时实现超分辨率所付出的代价。这一现象也让人联想到超分辨率中的噪声放大效应：随着目标分辨率网格变得更精细，噪声会更加严重地阻碍点源的超分辨能力[6]。 在图 1 中，我们绘制了 $\Delta\theta_{\min}$（α，D）随 α 变化的曲线。正如引理 7 所预测的，它单调递增，直到达到 0。5；但对于 $\alpha > 0.5$，其行为变得更加不规则，难以进行精确刻画。需要指出的是，在定理 3 中，我们旨在 精确恢复$\mathbf{x}_{\text{hi}}$。如下一小节所述，如果我们的目标只是恢复尖峰计数，而非真实尖峰，则可以放宽对信噪比的要求。也可以定义其他近似恢复的概念，对这些概念的分析将留待未来研究。

B. 放宽尖峰重建：计数估计

如定理2所示，在关于噪声的条件有一定限制时，可以精确恢复尖峰；具体而言，$\Delta\theta_{\min}(\alpha$，D) 必须满足该条件，而随着 D 增大，这一数值会变得非常小。因此，自然需要采用其他放宽的恢复概念，以处理更大的噪声水平。在神经科学中，人们认为，大脑中的单个神经元通过尖峰时序（时间编码）或放电率（频率编码）来编码信息。因此，即使无法在时间上精确定位神经尖峰，某个区间内的尖峰计数仍有助于理解神经功能。例如，视觉皮层中的神经元通过放电率对刺激方向进行编码 [52]。因此，我们将重点关注尖峰计数这一近似恢复指标：估计两个连续低速率测量值之间发生的尖峰数量，而不是以更高的分辨率解析单个脉冲活动。

令 $\gamma[n]$ 表示两个连续低速率采样 $z_{\text{lo}}[n]$ 和 $z_{\text{lo}}[n-1]$之间出现的尖峰总数。由于$\mathbf{x}_{\text{hi}}$ 及其估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{hi}}$ 均为二值（幅度 A），真实尖峰计数（$\gamma[n]$）和估计计数（$\hat{\gamma}[n]$）由下式给出： $\gamma[n] = \|\mathbf{x}_{\text{hi}}^{(n)}\|_0$， $\hat{\gamma}[n] = \|\hat{\mathbf{x}}^{(n)}{}_{\text{hi}}\|_0$， $n = 1, \cdots, M-1$，

$\gamma[0]=x_{\text{hi}}[0]/A$ 且 $\hat{\gamma}[0]=\hat{x}_{\text{hi}}[0]/A$，因为如式 (6) 所述，第一个块的大小为 1。定义集合 $\mathcal{C}_k^{\text{D}}$ 如下：

$$\mathcal{C}_k^{\text{D}} := \{\mathbf{v}\in\{0,A\}^{\text{D}}, \|\mathbf{v}\|_0 = k\}, \quad 0\le k\le \text{D}$$

它由所有尖峰计数为 k 的（长度为 D 的）二进制向量组成。真实尖峰块属于 $\mathcal{C}^{\text{D}}_{\gamma[n]}$。$\mathcal{C}^{\text{D}}_{\gamma[n]}$ 中的任意元素都会给出真实尖峰计数。因此，即使无法恢复尖峰，也可能精确恢复计数。

对于固定的 D，我们定义一个由 α 构成的集合，记为 $\mathcal{F}_{\text{D}}$:

$$\mathcal{F}_{\text{D}} := \{\alpha\in(0,1) | \alpha^{\text{D}} - \alpha^{\text{D}-k_0-1} - \alpha^{k_0} + 1 < 0\} \tag{29}$$

其中 $k_0=\lfloor \text{D}/2\rfloor$。当 $\alpha\in\mathcal{F}_{\text{D}}$ 时，我们将得到鲁棒尖峰计数估计的一个充分条件。可以证明，对于任意 D， $\mathcal{F}_{\text{D}}$ 始终非空。定义

$$\theta^k_{\min} := \min_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}_k^{\text{D}}} \mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{u} \quad \theta^k_{\max} := \max_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}_k^{\text{D}}} \mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{u} \tag{30}$$

注意，如果

$$\theta^{k+1}_{\min} > \theta^k_{\max}, k=0,1,\cdots,\text{D}-1 \tag{31}$$

那么，当通过变换 $\mathbf{h}_\alpha^\top\mathbf{u}$ 映射到实数轴上时，所有具有相同尖峰计数 k 的尖峰模式 $\mathbf{u}_i\in\mathcal{C}_k^{\text{D}}$ 都会聚集在一起，如图2所示。当式（31）成立时，我们可以定义“簇限制最小距离”:

$$\Delta^c_{\min}(\alpha,\text{D}) := \min_{0\le k\le \text{D}-1} \theta^{k+1}_{\min} - \theta^k_{\max} \tag{32}$$

给定含噪观测值 $c_e[n]=\mathbf{h}_\alpha^\top\mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}+e[n]$，最近邻问题（24）的解可能会返回错误的邻居 $\theta_j\neq\mathbf{h}_\alpha^\top\mathbf{x}_{\text{hi}}{}^{(n)}$。然而，当式（31）成立且含噪观测值满足以下条件时:

$$(\theta^{\gamma[n]}_{\min}+\theta^{\gamma[n]-1}_{\max})/2 < c_e[n] < (\theta^{\gamma[n]+1}_{\min}+\theta^{\gamma[n]}_{\max})/2 \tag{33}$$

那么，算法 2 中的最近邻判定规则仍能确保 $\theta_j\in\mathcal{C}^{\text{D}}_{\gamma[n]}$。图 2 也对此进行了可视化，其中每条彩色带表示各个计数对应的“安全区”，黑色虚线表示边界。这将能够正确识别尖峰计数，但脉冲模式仍会产生误差。我们在以下定理中对此进行了正式总结，该定理为从受对抗性噪声污染的测量值中精确恢复计数提供了鲁棒性保证（类似于关于尖峰恢复的定理 2）。

定理 4. 假设 $\alpha\in\mathcal{F}_{\text{D}}$。给定有序集 Θ^{sort}_α，令 $\hat{\gamma}[n]$ 为通过算法 2以 $c_e[n]$ 作为输入所得到的估计尖峰计数。如果对所有 n，$|w[n]|<\Delta^c_{\min}(\alpha,\text{D})/4$，那么即可精确恢复计数，即 $\hat{\gamma}[n]=\gamma[n]$。

证明。 证明见附录 E。 □

显然，当 (31) 成立时， $\Delta^c_{\min}(\alpha,\ \text{D})$ 不小于 $\Delta\theta_{\min}(\alpha,\ \text{D})$，因为前者是在簇内相邻元素上计算的，而 $\Delta\theta_{\min}(\text{D}\ \alpha)$ 则是在所有连续元素（包括簇间和簇内元素）上计算最小距离，

$\Theta^{\text{sort}}_\alpha$。这实质上表明，对于这一范围内的 α 和 D，计数估计可能比推断单个脉冲模式更加稳健。我们还在图1（上）中通过数值结果对此进行了说明，其中我们绘制了 $\Delta^c_{\min}$ 和 $\Delta\theta_{\min}$ 关于α 的函数曲线，而区间 $\mathcal{F}_{\text{D}}$ 的起点（通过数值方法计算）



图 2：集合 $\mathcal{C}_k^{\text{D}}$（D $=3$）的可视化。在此情形下，对应于相同计数的脉冲模式会聚集在一起，因此有利于稳健计数估计。

用点线表示。对于 D 的这两个取值，我们可以看到 $\Delta^c_{\min}>\Delta\theta_{\min}$，且随着 α 增大，差距也随之扩大。

V. 数值实验

我们通过数值实验，在合成钙成像数据集和真实钙成像数据集上评估所提出的超分辨率脉冲解码算法的性能。

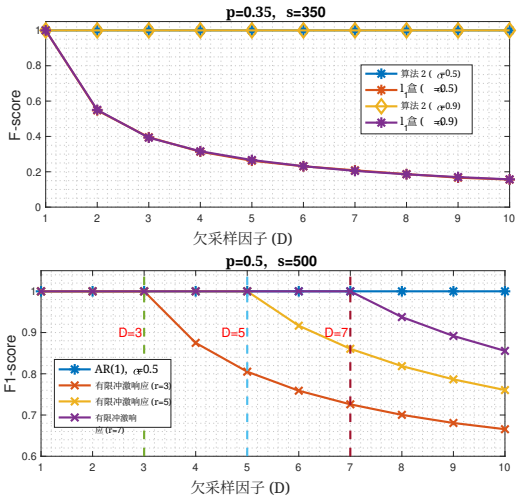
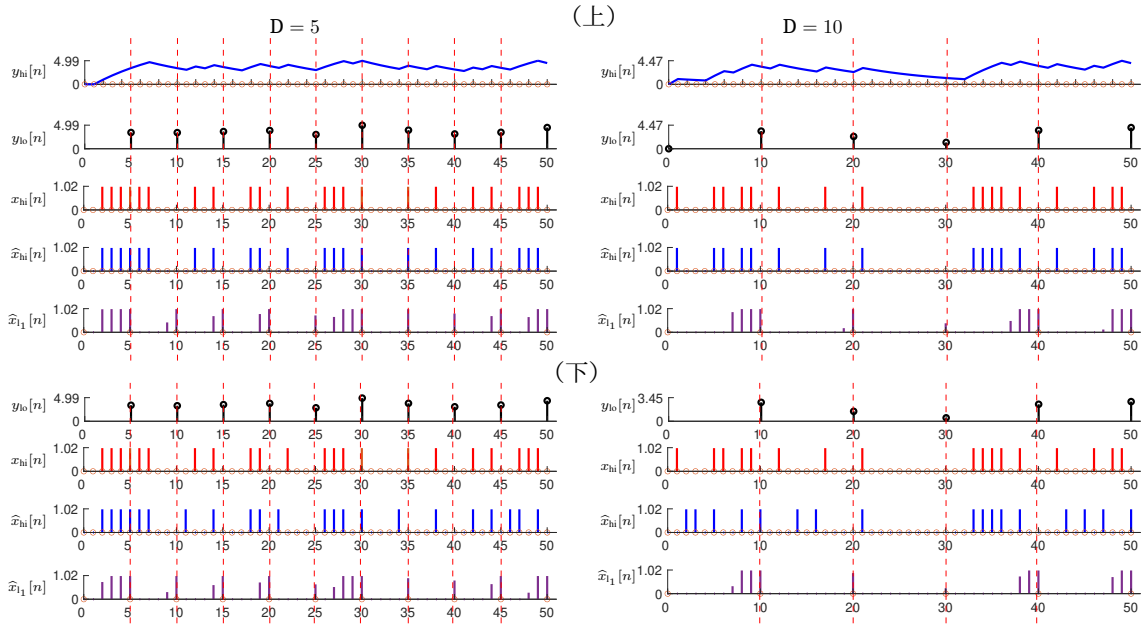


图 3：（上）在无噪测量条件下（容差为 $t_0=0$），算法 2 与盒约束 l_1 最小化方法的定量比较。（下）（滤波器内存的作用）：有限冲激响应滤波器和无限冲激响应（AR(1)）滤波器的平均 F 分数与 D 的关系。每条虚线表示相应的理论转变点（D $=r$）。

A. 合成数据生成与评估指标

我们通过生成满足假设（**A1**）的高速率二进制脉冲序列$\mathbf{x}_{\text{hi}}\in\{0,1\}^L$（$A=1$ 和 $L=1000$）来创建一个合成数据集。尖峰发放概率 p 控制平均稀疏度，其定义为 $s:=\mathbb{E}[\|\mathbf{x}_{\text{hi}}\|_0]=Lp$。我们的目标是根据 (21) 中定义的 $M\approx L/\text{D}$ 个低速率测量值$z_{\text{lo}}[n]$ 重建$\mathbf{x}_{\text{hi}}$。请注意，我们处于期望稀疏度大于低速率测量值总数的情形，即 $s>M$。我们采用广泛使用的F 分数指标来评估尖峰检测的准确性 [4],[10]。计算 F 分数时，首先将估计脉冲与真实脉冲进行匹配。如果某个估计脉冲与某个真实脉冲之间的距离小于 t_0，则该估计脉冲被视为与该真实脉冲“匹配”（不允许一对多匹配） [4],[10]。设 K 和 K' 分别为真实脉冲和估计脉冲的总数。被判定为真正例的尖峰数量记为 T_p。匹配完成后，我们计算召回率（$R=\frac{T_p}{K}$），其定义为真正例数量（T_p）与真实脉冲总数（K）之比。精确率（$P=\frac{T_p}{K'}$）衡量检测到的尖峰中正确尖峰所占的比例。最后，F 分数为召回率和精确率的调和平均值 $\overline{\text{F-score}}=2PR/(P+R)$。



$x_{\text{hi}}[n]$：真实脉冲，$\widehat{x}_{\text{hi}}[n]$：算法2的输出，$\widehat{x}_{l_1}[n]$：最小化 l_1 的输出，$y_{\text{hi}}[n]$：高采样率波形，$y_{\text{lo}}[n]$：低采样率样本图 4：模拟数据上算法 2 与盒约束 l_1 最小化的定性比较。对于每次模拟，都会生成含噪测量值，并满足以下条件：$\alpha = 0.9$ 使噪声实现（上）符合界限 $|w[n]| \le \Delta\theta_{\min}$（来自定理2），而（下）则违反该界限。噪声较大时（下），尖峰恢复并不完美，但仍可使用算法 2 精确恢复尖峰计数。

B. 无噪恢复：二元先验与内存的作用

我们首先考虑无噪声情形（$w[n] = 0$ 在 (21) 中）。我们比较算法 2 与 盒约束 l_1 最小化方法 [35], [36], 其中我们求解：

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^L} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ s.t. } \|\mathbf{y}_{\text{lo}} - \mathbf{S}_{\text{D}}\mathbf{G}_\alpha\mathbf{x}\|_2 \le \epsilon, \mathbf{0} \le \mathbf{x} \le A\mathbf{1} \quad \text{(P1)}$$

对于合成数据，ϵ 根据噪声项的范数$\|\mathbf{w}\|_2$进行选择。该预言机选择确保了对 (P1) 进行最有利的参数调优，不过更现实的做法是根据噪声功率（ $\epsilon = \sqrt{M}\sigma$ 来设置σ）。在无噪声情形下，我们选择 $\epsilon = 0$。问题 (P1) 是问题 (P0) 的一种标准凸松弛，它既促进稀疏性，也试图通过盒松弛（在第II-C节中引入）施加二值约束。在图 3（上）中，我们绘制了 F 分数（$t_0 = 0$）随 D 变化的曲线。可以看出，算法2 始终达到1的 F 分数，而 l_1 最小化的 F 分数则随着 D 增大而下降。这证实了引理 3：对于 $\text{D} > 1$，使用盒约束和 l_1范数最小化，无法仅凭低采样率测量实现精确恢复。在无噪声情况下，算法2 的性能不受滤波器参数 α 的影响，如图 3（上）所示。

接下来，我们比较以下两种滤波器的抽取输出重建结果：(i) AR(1)滤波器；(ii) 长度为r 、由相同输入驱动的 FIR 滤波器$\mathbf{x}_{\text{hi}} \in \{0,1\}^{1000}$。我们选择 FIR 滤波器$\mathbf{h} = [1, \alpha, \cdots, \alpha^{r-1}]^\top$（IIR滤波器的截断），且 $\alpha = 0.5$。算法2 应用于低采样率AR(1)测量值，而对于 FIR 情形，则使用 [40]中提出的算法。可以证明，当 $\alpha = 0.5$ 时，应用于 FIR 情形的算法能够以最优测量数运行，因此我们选择了这一特定的滤波器参数。在图 3（下）中，我们再次比较平均 F 分数与 D 的关系，该平均值是对10000次蒙特卡洛运行取平均，且 $p = 0.5$。正如引理 4 所预测的那样，尽管采用了二元先验，FIR滤波器的误差仍会在 $\text{D} > r$时出现相变。这表明，AR(1)滤波器的无限记忆对于在任意 D 下实现精确恢复起着关键作用。

C. 噪声尖峰解码的性能

我们生成形式为（21）的含噪测量，其中$w[n]$和 $x_{\text{hi}}[n]$ 满足假设 **(A1-A2)**。我们通过合成数据展示一些具有代表性的恢复脉冲示例。图（4）展示了针对合成生成的测量值，在两个欠采样因子 $\text{D} = 5$ (左)，10 (右)下得到的超分辨率估计。对于每个 D，顶部图展示了使用算法2 和 l_1盒约束最小化恢复的尖峰，其中噪声实现满足定理2中的界；底部图则展示了噪声实现违反该界时的相同结果。采用盒约束最小化得到的 l_1 输出不准确，尖峰聚集在每个长度为 D 的块的末端。这种偏差与引理 3 中理论结果的预测一致。当噪声足够小时（顶部），算法2 能够准确解码尖峰，包括定理2所预测的、出现在相邻两个低速率采样之间的尖峰。当噪声较大（违反界）时，使用 l_1 最小化估计的尖峰仍然存在偏差，聚集在块的末端。尽管使用算法 2恢复的尖峰并不完全准确，但大多数检测到的尖峰都落在真实脉冲的容差窗口内。事实上，正如定理 4 所预测的，尖峰计数估计完全准确。接下来，我们定量评估存在噪声时的性能，并使用 $t_0 = 2$计算度量指标。在图 5（上）中，我们绘制了不同 α取值下 F 分数随 D 变化的曲线。 对于固定的 α，两种方法的 F 分数都会随 D 增大而下降，但

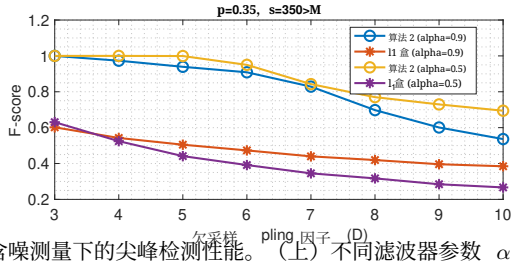


图 5：含噪测量下的尖峰检测性能。（上）不同滤波器参数 α ($\sigma = 0.01$) 对应的 F 分数随 D 的变化。此处，$L = 1000$，期望稀疏度为 $s = 350$，我们处于 $s > M$ 区间。F 分数按 $t_0 = 2$ 的容差计算。

算法 2 始终比l_1 最小化取得更高的 F 分数。 我们观察到 $\alpha = 0.5$ 得到的 F 分数更高，这可能是因为其 $\Delta\theta_{\min}(\alpha,$ D) 大于 $\alpha = 0.9$。 接下来，在图 7 中，我们研究尖峰检测表现随尖峰发放概率 p变化的情况，同时将 D 固定为 D = 5。当 σ 固定时，性能趋势不会受到尖峰发放概率的显著影响。起初，这似乎令人意外，因为期望稀疏度在增加，而测量值数量保持不变。然而，由于我们的算法利用了尖峰的二元特性（而不只是稀疏性），因此能够处理更高的稀疏度水平。使用 l_1 最小化重建的尖峰，其 F 分数远低于算法 2，因为前者在稀疏度较高时无法成功。如预期所示，较小的 σ会带来更高的 F 分数。

在图 8 中，我们研究错误尖峰检测概率随 D 的变化，并验证定理 3 中推导的上界。如果“每个”尖峰都被正确检测到，则认为解码成功。因此，在存在噪声的情况下，随着目标分辨率变得更精细，“精确超分辨”所有尖峰会变得更具挑战性。我们计算经验错误概率，并叠加相应的理论界。如图 8 所示，经验错误概率确实被我们的分析所计算出的上界所界定。经验错误概率随着欠采样因子 D 的增加而增大。

最后，我们通过比较平均 F 分数随噪声水平 σ变化的情况，评估所提出方法的噪声容限，同时将尖峰率和欠采样因子分别固定为 $p = 0.35$ 和 D $= 5$。如图 6（上）所示，随着噪声水平增加，两种算法的性能都会下降，这也符合直觉：噪声越大，越难对尖峰进行超分辨。不过，在本实验考虑的两种滤波器参数下，算法 2 的 F 分数均高于盒约束 l_1 最小化。对于较高的噪声水平（与尖峰幅度 $A = 1$相当），性能差距

在 $\alpha = 0.9$ 时会降低，而算法 2 在所有噪声水平下对 $\alpha = 0.5$ 都能取得高得多的 F 分数。

如第 IV-B 节所述，接下来我们研究一种宽松的尖峰恢复概念，重点关注两个连续低速率采样之间出现的尖峰计数。令 $[\gamma[0], \cdots, \gamma[M-1]]^\top$ $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ 为计数向量，其估计值为。图 6（下）绘制了平均 l_1 距离 $\frown\|\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}\|_1$ 随噪声水平变化的曲线。我们观察到，对于

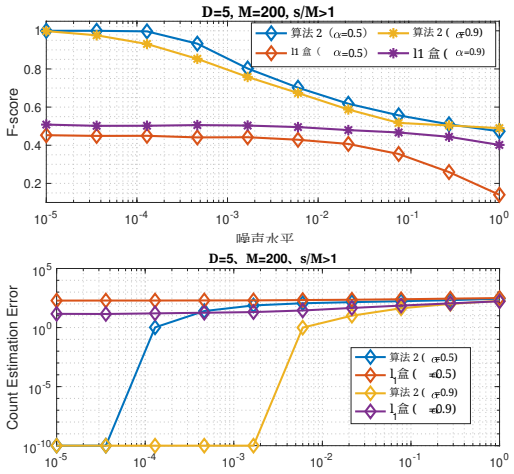


图 6：不同滤波器参数 α 下含噪测量的尖峰检测性能。（上）F 分数与噪声水平的关系（σ）；（下）计数估计误差与噪声水平的关系。此处，$L = 1000$，期望稀疏度固定为 $s = 350$，我们在 $s > M$ 的区间内进行操作。F 分数按 $t_0 = 2$ 的容差计算。

$\alpha = 0.9$ （从图 1（上）中可以验证，$0.9 \in \mathcal{F}_5$），即使 F 分数（针对时序恢复）已降至 1 以下，也有可能在更高噪声下精确恢复尖峰计数。然而，对于 $\alpha = 0.5$而言，情况并非如此，因为$0.5 \notin \mathcal{F}_5$。这与定理 4 的结论一致：该定理指出，当 $\alpha \in \mathcal{F}_{\mathrm{D}}$时，精确计数恢复的噪声容限可能远大于精确尖峰恢复，因为 $\Delta^c_{\min}(\alpha,\ \mathrm{D}) > \Delta\theta_{\min}(\alpha,\ \mathrm{D})$。

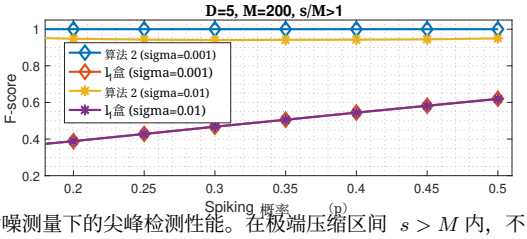


图 7：含噪测量下的尖峰检测性能。在极端压缩区间 $s > M$ 内，不同噪声水平 σ（固定 $\alpha = 0.9$，D $= 5, L = 1000$）下，F 分数与尖峰发放概率 (p) 的关系。

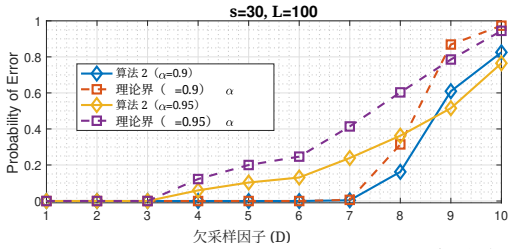


图 8 $\{0,1\}^L$ 检测的概率随欠采样因子 D 的变化。图中以虚线叠加了理论上界。这里，$L = 100$。 hi ∈： 高采样率尖峰 x 错误

D. 真实钙成像数据集的尖峰反卷积

现在讨论本文提出的数学框架如何用于钙成像中的超分辨率尖峰反卷积。双光子钙成像是一种广泛使用的成像技术，可大规模记录神经活动，具有较高的空间分辨率，但时间分辨率较低。在钙成像中，信号 $\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}$ 对应于底层神经尖峰，这些尖峰在更精细的时间尺度上被建模为二值 [2], [46]。每个神经尖峰都会引起一次急剧的

Ca^{2+} 浓度上升，随后缓慢指数衰减，从而导致相邻脉冲事件的响应相互叠加 [2]–[4]。这种钙瞬变可用第二节提出的一阶自回归模型来建模。衰减时间常数取决于钙指示剂，并在本质上决定了滤波器参数 α。信号$y_{\text{hi}}[n]$ 是一个不可观测信号，对应于以较高采样率（与底层尖峰相同的速率）采集钙荧光。观测到的钙信号 $y_{\text{lo}}[n]$对应于以显微镜帧率决定的区间对 $y_{\text{hi}}[n]$ 进行降采样。典型扫描显微镜系统的帧率（该系统用于捕捉钙荧光的变化）取决于对所需视野进行空间扫描所需的时间，因此与神经元尖峰活动的时间尺度相比，帧率显著较低。我们通过降采样操作（降采样因子为 D）对这种差异建模。因此，本文提出的数学框架可直接用于重建在比钙信号采样率更精细的时间尺度上的底层脉冲活动

利用真实钙成像数据，我们展示了如何将我们的算法与一种名为 OASIS 的热门尖峰反卷积算法相结合 [43]。OASIS 求解一个 l_1 与 (P1) 类似的最小化问题，但仅施加非负约束，以利用脉冲活动的稀疏性。与我们旨在获得更精细时间尺度上的尖峰表示的方法不同，OASIS 在低分辨率网格上返回尖峰估计值。这通常用于推断与采样间隔相等的时间分箱内的尖峰率。我们展示了所提出的框架可以与 OASIS 集成并提升其性能。正如合成实验所示，噪声水平是一个重要的考量因素。通过将算法2 与 OASIS 结合（称为“B-OASIS”），可以利用 l_1 最小化的去噪能力。令$\widehat{\mathbf{x}}_{\text{l1}} \in \mathbb{R}^M$ 为通过求解 l_1 最小化问题（例如 OASIS 中实现的问题）在低分辨率网格上获得的估计值。我们可以得到去噪后的钙信号的估计值 $\widehat{y}_{\text{lo}}[n] = \alpha^{\text{D}}\widehat{y}_{\text{lo}}[n] + \widehat{x}_{\text{l1}}[n]$, $n \geq 1$以及 $\widehat{y}_{\text{lo}}[0] = \widehat{x}_{\text{l1}}[0]$。现在，我们可以利用 OASIS 生成的去噪后的钙信号 $\widehat{y}_{\text{lo}}[n]$ 来获得估计值

$c_e[n]$间接地。 由于 OASIS 执行了非线性处理，因此很难获得由此产生的噪声统计特性。算法 2 的一个重要优势是，它不依赖于对噪声统计特性的了解。因此，我们可以直接将算法 2应用于 $\widehat{c}_e[n] = \widehat{y}_{\text{lo}}[n] - \alpha^{\text{D}}\widehat{y}_{\text{lo}}[n-1]$（而不是 $c_e[n]$），以获得二值化的“融合超分辨率尖峰估计”。

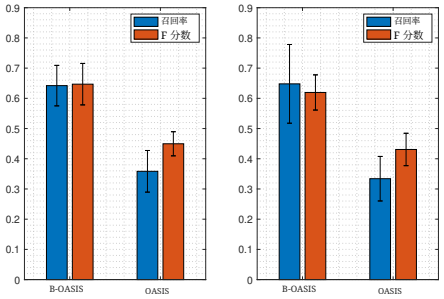


图 9：在以（左）60 Hz 和（右）30 Hz 采样的 GCaMP6f 数据集上，OASIS 和 B-OASIS 的尖峰检测性能。我们比较 OASIS 的 F 分数为 < 0.5 的数据点的平均 F 分数。误差条表示标准差。

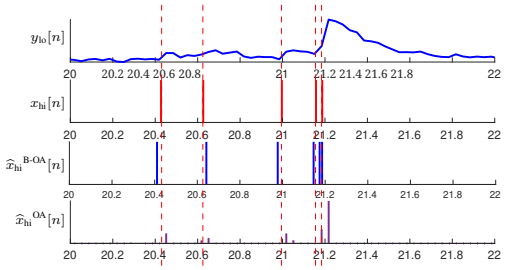


图 10：使用 OASIS 和 B-OASIS（二进制增强）对 GENIE 数据集（GCaMP6f 指示剂）上以 30 Hz 采样的钙信号进行尖峰重建的示例。

E. 结果

我们在公开可用的 GENIE 数据集 [53], [54] 上评估这些算法。该数据集包含使用基因编码的 GCaMP6f 钙指示剂 GCaMP6f [53], [54]对小鼠视觉皮层进行的同步钙成像和体内细胞贴附记录。钙图像的采集帧率为 60 Hz，真实值电生理信号以 10 KHz 进行数字化，并与钙图像帧同步。除了使用原始数据外，我们还对数据进行合成降采样，以模拟帧率降低至 30 Hz 的效果，并评估这一降采样操作对性能的影响。

在图 10 中，我们从 GCaMP6f 指示剂数据集中提取神经元 1 的一个 ~ 2 秒区间，并将检测到的尖峰与真实值进行定性比较。我们将数据下采样 2 倍，以模拟 30 Hz 的帧率，此时低速率网格会变得更粗。结果，我们观察到真实脉冲与 OASIS 生成的估计值之间存在偏移。不过，借助二元先验（B-OASIS），我们可以输出不受较粗网格限制的尖峰，从而减轻 OASIS 原始估计中观察到的偏移。

我们通过比较两种采样率下 OASIS 和 B-OASIS 的 F 分数，量化性能提升（60 和 30 Hz）。由于 OASIS 的输出不是二元值，因此通过阈值处理将估计的尖峰二值化。为确保公平比较，我们通过$80-20$ 交叉验证方案选择阈值，使留出的验证集上的平均 F 分数最大化（对验证集的 3 次随机抽样取平均）。F 分数的容差设为 100 ms。数据集包含 34 条长度为 $\sim$ 234 s 的轨迹。 OASIS 算法具有自动估计参数 α的例程，我们在实验中采用了该例程。幅度 A 采用附录 F 所述流程进行估计。我们使用 D $= 12$ 获得 B-OASIS 的尖峰表示。 为了量化增强带来的性能提升，我们筛选出 OASIS 的 F–分数低于 0。5的轨迹，并比较这些数据点的平均 F 分数和召回率。如图 9 所示，在两种采样率下，B-OASIS 的平均 F 分数均显著高于 OASIS，这归因于召回率的提高，同时精确率保持不变。此外，尽管进行了降采样，采用二元先验并未显著降低尖峰检测性能，且检测标准保持不变。

VI. 结论

我们从理论上确立了二元先验在超分辨率中的优势，并表明与基于稀疏性的方法相比，样本复杂度能够显著降低。我们基于 AR(1)模型开发并分析了一种高效算法，该算法利用测量值的特殊结构，在运行时以内存换取计算效率，从而能够在极端压缩区间（ $M \ll K$）运行。我们还证明，二元先验可用于提升现有神经尖峰反卷积算法的性能。未来，我们将开发算法框架，把二元先验纳入不同的神经尖峰反卷积流程，并在多种数据集上评估性能增益。将这一二元框架扩展到高阶 AR 滤波器，也是一个令人振奋的未来研究方向。

附录

附录A：定理1的证明

证明。 我们证明，对于任意 $\alpha \in\ 0<\alpha<1$，除至多由有限个点组成的集合外，(10) 始终有唯一的二元解。考虑所有可能的 D–维三元向量，其各个分量取自 $\{-1,0,1\}$，并将它们记为 $\mathbf{v}^{(i)}=[v_1^{(i)},v_2^{(i)},\cdots,v^{(i)}{}_{\mathrm{D}}\ ]^T\in\{-1,0,1\}^{\mathrm{D}}$，$0\le i\le 3^{\mathrm{D}}-1$. 我们采用约定$\mathbf{v}^{(0)}=0$。对于每个 $i>0$，我们定义由 $\mathbf{v}^{(i)}$ 确定的集合 $\mathcal{Z}_{\mathbf{v}^{(i)}}$ 如下：$\mathcal{Z}_{\mathbf{v}^{(i)}}:=\{x\in(0,1)\big|\sum_{k=1}^{\mathrm{D}}v_k^{(i)}x^{\mathrm{D}-k}=0\}$. 注意，$p_i(x):=\sum_{k=1}^{\mathrm{D}}v_k^{(i)}x^{\mathrm{D}-k}$ 表示一个关于 x、次数至多为 D–1的多项式，其系数由三元向量 $\mathbf{v}^{(i)}$给出。集合 $\mathcal{Z}_{\mathbf{v}^{(i)}}$ 表示包含在 (0，1) 中的 $p_i(x)$ 的零点集合。由于 $p_i(x)$ 的次数至多为 $\mathrm{D}-1$，$\mathcal{Z}_{\mathbf{v}^{(i)}}$ 是一个基数至多为 $\mathrm{D}-1$的有限集合。

现在假设 (10) 的二元解不唯一，即存在 $\mathbf{u},\mathbf{w}\in\{0,A\}^L$，$\mathbf{u}\neq\mathbf{w}$，使得

$$\mathbf{H}_{\mathrm{D}}(\alpha)\mathbf{u}=\mathbf{H}_{\mathrm{D}}(\alpha)\mathbf{w}\Rightarrow\mathbf{H}_{\mathrm{D}}(\alpha)\mathbf{u}-\mathbf{H}_{\mathrm{D}}(\alpha)\mathbf{w}=\mathbf{0}\qquad(34)$$

通过按照 (6) 中相同的方式将 $\mathbf{u},\mathbf{w}$ 划分为块 $\mathbf{u}^{(n)},\mathbf{w}^{(n)}$，我们可以将 (34) 重写为 $u^{(0)}=w^{(0)}$ 并且

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{D}}\frac{1}{A}([\mathbf{u}^{(j)}]_i-[\mathbf{w}^{(j)}]_i)\alpha^{\mathrm{D}-i}=0,\quad 1\le j\le M-1\qquad(35)$$

由于 $\mathbf{u}\neq\mathbf{w}$，它们至少在一个块上不同，即存在某个 j_0，$1\le j_0\le M-1$，使得 $\mathbf{u}^{(j_0)}\neq\mathbf{w}^{(j_0)}$。定义$\mathbf{b}:=\frac{1}{A}(\mathbf{u}^{(j_0)}-\mathbf{w}^{(j_0)})$。那么，$\mathbf{b}$ 是一个非零三元向量，即 $\mathbf{b}\in\{-1,0,1\}^{\mathrm{D}}$。现在由 (35)，我们有

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{D}}[\mathbf{b}]_i\alpha^{\mathrm{D}-i}=0,\qquad(36)$$

这意味着 $\alpha\in\mathcal{Z}_{\mathbf{b}}$。由于$\mathbf{b}$ 可以是 $3^{\mathrm{D}}-1$ 个三元向量$\mathbf{v}^{(i)}\}_{i=1}^{3^{\mathrm{D}}-1}$ 中的任意一个，因此，(36)成立当且仅当 $\alpha\in\mathbb{S}:=\bigcup_{i=1}^{3^{\mathrm{D}}-1}\mathcal{Z}_{\mathbf{v}^{(i)}}$，即它是由向量$\mathbf{v}^{(i)}$ 作为系数所定义的至少一个多项式$p_i(x)$的根。对于每个$\mathbf{v}^{(i)}$，由于 $\mathcal{Z}_{\mathbf{v}^{(i)}}$ 的基数至多为 $\mathrm{D}-1$，$\mathbb{S}$ 是有限集（基数至多为 $(\mathrm{D}-1)(3^{\mathrm{D}}-1)$），因此其勒贝格测度为 0。这意味着，只有当 α 属于零测集 $\mathbb{S}$时，(10) 才有非唯一的二元解，从而证明了该定理。 □

附录 B：引理2 和引理3的证明

证明。(i) 令 s_n 表示 $\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}$（$\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}$的 n^{th} 块）的稀疏性（非零元素的数量）。那么，总稀疏性为 $\|\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}\|_0=\sum_{n=0}^{M-1}s_n$。我们将构造一个向量 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^L$，$\mathbf{v}\neq\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}$，使其满足 $\mathbf{c}=\mathbf{H}_{\mathrm{D}}(\alpha)\mathbf{v}$ 和$\|\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}\|_0\ge\|\mathbf{v}\|_0$。根据 (6)，考虑 $\mathbf{v}\ \mathbf{v}=[v^{(0)},\mathbf{v}^{(1)\top}、\cdots、\mathbf{v}^{(M-1)\top}]^\top$的划分。首先，令 $v^{(0)}=c[0]=x_{\mathrm{hi}}{}^{(0)}$。我们按如下方式构造 $\mathbf{v}^{(n)}$。对于每个 $n\ge1$，有三种情况：

情形 I： $s_n=0$。在这种情形下，$\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}=\mathbf{0}$，因此 $c[n]=0$。所以，我们令 $\mathbf{v}^{(n)}=\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}=\mathbf{0}$。

情形 II： $s_n=1$。首先假设 $[\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}]_{\mathrm{D}}=0$。我们按如下方式构造$\mathbf{v}^{(n)}$：

$$[\mathbf{v}^{(n)}]_k=\begin{cases}c[n], & \text{if } k=\mathrm{D}\\ 0, & \text{else}\end{cases}.\qquad(37)$$

接下来假设 $[\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{n}]_{\mathrm{D}}\neq0$。由于 $s_n=1$，这意味着 $[\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}]_k=0$，$k=1,\ \cdots,\ \mathrm{D}-1$。在这种情形下，我们按如下方式构造$\mathbf{v}^{(n)}$：

$$[\mathbf{v}^{(n)}]_k=\begin{cases}c[n]/\alpha, & \text{if } k=\mathrm{D}-1\\ 0, & \text{else}\end{cases}.\qquad(38)$$

注意，(37) 和 (38) 均保证 $\mathbf{v}^{\ n}\neq\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}$ 且$c[n]=\mathbf{h}_\alpha^T\mathbf{v}^{(n)}$。此外，$\|\mathbf{v}^{(n)}\|_0=s_n$.

情形 III：$s_n\ge2$。在这种情形下，我们采用与 (37) 相同的构造。和之前一样，$\mathbf{v}^{(n)}$ 满足 $c[n]=\mathbf{h}_\alpha^\top\mathbf{v}^{(n)}$。由于 $\|\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}\|_0\ge2$ 且 $\|\mathbf{v}^{(n)}\|_0=1$，我们自然有 $\mathbf{v}^{(n)}\neq\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}$，并且 $\|\mathbf{v}^{(n)}\|_0<s_n$。因此，综合这三种情形，我们可以构造所需的向量 $\mathbf{v}$，使其满足 $\mathbf{v}\neq\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}$、$\mathbf{c}=\mathbf{H}_{\mathrm{D}}(\alpha)\mathbf{v}$，以及 $\|\mathbf{v}\|_0\le\sum_{n=0}^{M-1}s_n=\|\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}\|_0$。因此，(P0) 的解 $\mathbf{x}^\star$ 满足 $\|\mathbf{x}^\star\|_0\le\|\mathbf{v}\|_0\le\|\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}\|_0$。

(ii) 在这种情形下，我们按照情形 III 构造$\mathbf{v}^{(n_0)}$。由于 $\|\mathbf{v}^{(n_0)}\|_0<s_{n_0}$，且 $\|\mathbf{v}^{(n)}\|_0\le s_n, n\neq n_0$，因此我们有$\|\mathbf{v}\|_0<\|\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}\|_0$，这意味着 $\|\mathbf{x}^\star\|_0\le\|\mathbf{v}\|_0<\|\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}\|_0$。 □

A. 引理3的证明

证明。 我们将构造一个向量 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^L$，其支撑集具有式 (16) 的形式，满足 (P1-B)，并且我们将证明它具有最小 l_1 范数。利用式 (6) 给出的块结构，我们选取 $\mathbf{v}^{(0)}=c[0]$。对于每个 $n\ge1$，我们根据以下两种情形构造$\mathbf{v}^{(n)}$：

情形 I： $c[n]\ge A$。设 k_n 为满足以下条件的最大整数：$\mu[n]:=A(1+\alpha+\cdots+\alpha^{k_n-1})\le c[n]$，其中 $1\le k_n\le\mathrm{D}$。注意，$k_n=1$ 始终能给出一个有效的下界。不过，我们关注的是上述形式中 $c[n]$的最大下界。我们选择

$$[\mathbf{v}^{(n)}]_k=\begin{cases}A, & \text{if } \mathrm{D}-k_n+1\le k\le\mathrm{D}\\ (c[n]-\mu[n])/\alpha^{k_n}, & \text{if } k=\mathrm{D}-k_n\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

容易验证，$\mathbf{h}_\alpha^\top\mathbf{v}^{(n)}=c[n]$。根据 k_n 的定义，可得 $\mu[n]\le c[n]<\mu[n]+A\alpha^{k_n}$，因此，$0\le(c[n]-\mu[n])/\alpha^{k_n}<A$，这保证了 $\mathbf{v}$ 满足 (P1-B) 中的盒约束。现在，设 $\mathbf{v}_f\in\mathbb{R}^L$ 是 (P1-B) 的任意可行点，它必定具有以下形式：$\mathbf{v}_f^{(0)}=c[0],\mathbf{v}_f^{(n)}=\mathbf{v}^{(n)}+\mathbf{r}^{(n)}$，其中 $\mathbf{r}^{(n)}\in\mathcal{N}(\mathbf{h}_\alpha^\top)$ 是零空间中的一个向量

$\mathbf{h}_\alpha^\top$。可以验证，以下向量 $\{\mathbf{w}_t\}_{t=1}^{D-1}$ 构成 $\mathcal{N}(\mathbf{h}_\alpha^\top)$ 的一组基：

$$[\mathbf{w}_t]_k = \begin{cases} 1, & k = t \\ -\alpha, & k = t+1 \\ 0, & \text{else} \end{cases},$$

因此，$\exists\ \{\beta_t^{(n)}\}_{t=1}^{\mathrm{D}-1}$ 使得$\mathbf{r}^{(n)} = \sum_{t=1}^{\mathrm{D}-1} \beta_t^{(n)}\ \mathbf{w}_t$。我们进一步考虑两种情形：(i) $1 \le k_n \le \mathrm{D} - 2$. 在这种情形下 $[\mathbf{v}^{(n)}]_1 = 0$，并且对于 $k = 1, 2, \cdots D$，$[\mathbf{v}_f^{(n)}]_k$ 满足 [2]

$$[\mathbf{v}_f^{(n)}]_k = \begin{cases} \beta_k^{(n)}, \text{ if } k = 1 \\ \beta_k^{(n)} - \alpha\beta_{k-1}^{(n)}, \text{ if } 2 \le k \le \mathrm{D} - k_n - 1 \\ [\mathbf{v}^{(n)}]_k + \beta_k^{(n)} - \alpha\beta_{k-1}^{(n)}, \text{ if } k = \mathrm{D} - k_n \\ A + \beta_k^{(n)} - \alpha\beta_{k-1}^{(n)}, \text{ if } \mathrm{D} - k_n + 1 \le k \le \mathrm{D} - 1 \\ A - \alpha\beta_{k-1}^{(n)}, \text{ if } k = \mathrm{D} \end{cases}$$

为确保 $\mathbf{v}_f^{(n)}$ 是 (P1-B) 的可行点，必须满足：$0 \le \beta^{(n)}\ \mathrm{D}_{-1} \le A/\alpha$ 且 $0 \le \beta_1^{(n)} \le A$。对于 $2 \le k \le \mathrm{D} - k_n - 1$，约束 $[\mathbf{v}_f^{(n)}]_k \ge 0$ 意味着 $\beta_k^{(n)} \ge \alpha\beta_{k-1}^{(n)}$。由于$\beta_1^{(n)} \ge 0$，因此对于所有 $2 \le k \le \mathrm{D} - k_n - 1$，都有 $\beta_k^{(n)} \ge 0$。对于 $\mathrm{D} - k_n + 1 \le k \le \mathrm{D} - 1$，约束 $[\mathbf{v}_f^{(n)}]_k \le A$ 意味着$\beta_{k-1}^{(n)} \ge \beta_k^{(n)}/\alpha$。由于 $\beta^{(n)}\mathrm{D}_{-1} \ge 0$，因此对于所有 $\mathrm{D} - k_n \le k \le \mathrm{D} - 1$，都有 $\beta_k^{(n)} \ge 0$。(ii) $k_n \in \{\mathrm{D} - 1,\ \mathrm{D}\}$. 在这种情形下，对于 $k = 1, 2, \cdots, D$, $[\mathbf{v}_f^{(n)}]_k$ 满足

$$[\mathbf{v}_f^{(n)}]_k = \begin{cases} [\mathbf{v}^{(n)}]_1 + \beta_1^{(n)}, \text{ if } k = 1 \\ A + \beta_k^{(n)} - \alpha\beta_{k-1}^{(n)}, \text{ if } 2 \le k \le \mathrm{D} - 1 \\ A - \alpha\beta_{k-1}^{(n)}, \text{ if } k = \mathrm{D} \end{cases}$$

对于 $2 \le k \le \mathrm{D} - 1$，盒约束 $[\mathbf{v}_f^{(n)}]_k \le A$ 蕴含 $\beta_{k-1}^{(n)} \ge \beta_k^{(n)}/\alpha$。由于 $\beta^{(n)}{}_{\mathrm{D}-1} \ge 0$，因此对于所有 $1 \le k \le \mathrm{D} - 1$，都有 $\beta_k^{(n)} \ge 0$。综上，我们已证明 $\beta_i^{(n)} \ge 0, \forall i.$

情形 II： $c[n] < A$。在这种情形下，$\mathbf{v}^{(n)}$ 按照 (37) 构造，因此 $\mathbf{v}_f^{(n)}$ 具有如下结构：

$$[\mathbf{v}_f^{(n)}]_k = \begin{cases} \beta_k^{(n)}, \text{if } k = 1 \\ -\alpha\beta_{k-1}^{(n)} + \beta_k^{(n)}, \text{ if } 2 \le k \le \mathrm{D} - 1 \\ c[n] - \alpha\beta_{k-1}^{(n)}, \text{ if } k = \mathrm{D} \end{cases}$$

为确保 $\mathbf{v}_f^{(n)}$ 是一个可行点，必须满足 $\beta_1^{(n)} \ge 0\ \beta_k^{(n)} \ge \alpha\beta_{k-1}^{(n)} \ge 0 \quad 2 \le k \le \mathrm{D} - 1.$ for D 因此，在情形 I 和情形 II 中，我们都证明了 $\beta_k^{(n)} \ge 0$。对于每种情形，由于 $\mathbf{v}_f^{(n)}$ 是一个非负向量 $\forall n$，可以验证

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_f\|_1 &= \sum_{n=0}^{M-1} \|\mathbf{v}_f^{(n)}\|_1 = v_f^{(0)} + \sum_{n=1}^{M-1}\sum_{k=1}^{\mathrm{D}} [\mathbf{v}_f^{(n)}]_k \\ &= \underbrace{c[0] + \sum_{n=1}^{M-1}\sum_{k=1}^{\mathrm{D}} [\mathbf{v}^{(n)}]_k}_{\|\mathbf{v}\|_1} + \sum_{n=1}^{M-1}\sum_{k=1}^{\mathrm{D}-1} (1-\alpha)\beta_k^{(n)} \end{aligned}$$

[2]在$\mathbf{v}_f^{(n)}$ 的定义中，如果为 k 指定的区间为空，则会忽略该赋值。

我们用到了以下事实：$\sum_{k=1}^{D}\sum_{t=1}^{D-1} \beta_t^{(n)}[\mathbf{w}_t]_k = \sum_{t=1}^{\mathrm{D}-1}$ ($\alpha\ \beta_t^{(n)}$ $_f \ne$ $\beta_k^{(n)} \ne 0$ k)。如果$\mathbf{vv}$，则必定存在某些 和$n > 0$。这意味着 $\|\mathbf{v}_f\|_1 > \|\mathbf{v}\|_1$。不难看出，所构造向量的支撑集具有形式 (16)。此外，根据上述论证，$\mathbf{v}$ 是所有可能的 (P1-B) 可行点中具有最小 l_1 范数的唯一向量。 □

附录 C：引理7的证明

证明。 对于任意 $0 < \alpha \le 0.5$，我们首先证明，对于整数 $p \ge 1$，以下不等式成立：

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha^{\mathrm{D}-k} = \alpha^{\mathrm{D}-p-1}\left(\frac{1-\alpha^p}{1/\alpha - 1}\right) < \alpha^{\mathrm{D}-p-1} \tag{39}$$

因为 $1/\alpha - 1 \ge 1$和 $1 - \alpha^p < 1$处于 $0 < \alpha \le 0.5$的情形。令 $\mathcal{S}_1 = \{0, \alpha^{\mathrm{D}-1}, \alpha^{\mathrm{D}-2}, \alpha^{\mathrm{D}-1} + \alpha^{\mathrm{D}-2}\}$。注意，对于任意 α 和 D，$\mathcal{S}_1$ 中的元素都按升序排列。现在，我们递归地定义集合 $\mathcal{S}_i$ 如下：

$$\mathcal{S}_i := \{\mathcal{S}_{i-1}, \mathcal{S}_{i-1} + \alpha^{\mathrm{D}-1-i}\},\ 2 \le i \le \mathrm{D} - 1 \tag{40}$$

我们的假设是，对于每个 $2 \le i \le \mathrm{D} - 1$ $\alpha \in (0,\ 0.5]$和 D，按（40）式定义的集合 $\mathcal{S}_i$ 会自动按升序排列。我们通过归纳法证明这一点。对于 $i = 2$，集合 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_1 + \alpha^{\mathrm{D}-3}$ 各自均已排序。此外，根据（39）式，我们可以证明：$\max_{a\in\mathcal{S}_1} a = \alpha^{\mathrm{D}-1} + \alpha^{\mathrm{D}-2} < \alpha^{\mathrm{D}-3} = \min_{b\in\mathcal{S}_1+\alpha^{\mathrm{D}-3}} b$. 这表明 $\mathcal{S}_2$ 是有序的，从而确立了归纳法的基础情形。现在，假设对于某个 $2 \le i \le \mathrm{D} - 2$，$\mathcal{S}_i$ 是有序的。我们需要证明 $\mathcal{S}_{i+1}$ 也有序。根据归纳假设，$\mathcal{S}_i$ 和 $\mathcal{S}_i + \alpha^{\mathrm{D}-2-i}$均有序。利用 $\mathcal{S}_i$的有序性，我们有：$\max_{a\in\mathcal{S}_i} a$ $\max\sum_{j=1}^{i+1} \alpha^{\mathrm{D}-j}$ $b\in\mathcal{S}_i+\alpha^{\mathrm{D}-2-i}\ b = \alpha^{\mathrm{D}-(i+1)-1}.$ 39 ，$\min$ 根据（ ）式，我们可以得出 $\max_{a\in\mathcal{S}_i} a < \min_{b\in\mathcal{S}_i+\alpha^{\mathrm{D}-2-i}} b$，因此，$\mathcal{S}_{i+1}$ 也有序。归纳证明至此完成。此外，注意，对于 $\alpha \in (0,\ 0.5]$，我们有 $\Theta_\alpha^{\text{sort}} = \mathcal{S}_{\mathrm{D}-1}$。

令 $\Delta_{\min}(\mathcal{S}_i)$ 表示集合 $\mathcal{S}_i$ 中各元素之间的最小距离。容易看出，$\Delta_{\min}(\mathcal{S}_i) = \Delta_{\min}(\mathcal{S}_i + \alpha^{\mathrm{D}-2-i})$。由于 $\mathcal{S}_i$ 对于 $\alpha \in (0,\ 0.5]$ 已排序，$\Delta_{\min}(\mathcal{S}_i)$ 可表示为：

$$\begin{aligned} \Delta_{\min}(\mathcal{S}_i) &= \min(\Delta_{\min}(\mathcal{S}_{i-1}), \min_{x\in\mathcal{S}_{i-1}+\alpha^{\mathrm{D}-1-i}} x - \max_{y\in\mathcal{S}_{i-1}} y) \\ &= \min\{\Delta_{\min}(\mathcal{S}_{i-1}), \alpha^{\mathrm{D}-i-1} - \sum_{j=1}^{i} \alpha^{\mathrm{D}-j}\}. \end{aligned} \tag{41}$$

现在，我们用归纳法证明以下猜想：

$$\Delta_{\min}(\mathcal{S}_i) = \alpha^{\mathrm{D}-1},\ 1 \le i \le \mathrm{D} - 1 \tag{42}$$

对于基础情形 $i = 1$, $\Delta_{\min}(\mathcal{S}_1) = \min(\alpha^{\mathrm{D}-1},\ \alpha^{\mathrm{D}-2} - \alpha^{\mathrm{D}-1}) = \alpha^{\mathrm{D}-1}$，其中最后一个等式成立是因为 $\alpha \in (0,\ 0.5] \Rightarrow \alpha^{\mathrm{D}-1}(1/\alpha - 1) \ge \alpha^{\mathrm{D}-1}$。假设（42）对某个 $1 \le i \le \mathrm{D} - 2$成立。根据 $\Delta_{\min}(\mathcal{S}_{i+1})$ 的定义以及归纳法假设 $\Delta_{\min}(\mathcal{S}_i) = \alpha^{D-1}$，可得 $\Delta_{\min}(\mathcal{S}_{i+1}) = \min\{\alpha^{\mathrm{D}-1}, \alpha^{\mathrm{D}-(i+1)-1} - \sum_{j=1}^{i+1} \alpha^{\mathrm{D}-j}\}$。同样，根据（41）中 $\Delta_{\min}(\mathcal{S}_i)$ 的定义，并利用归纳法假设，我们还有 $\alpha^{\mathrm{D}-i-1} - \sum_{j=1}^{i} \alpha^{\mathrm{D}-j} \ge \Delta_{\min}(\mathcal{S}_i)$ $\alpha^{\mathrm{D}-1}$ $\alpha \le 0.5$ 。利用这一点以及 ，我们可以证明：

$$\begin{aligned} \alpha^{\mathrm{D}-i-2} - \alpha^{\mathrm{D}-i-1} - \sum_{j=1}^{i} \alpha^{\mathrm{D}-j} &\ge \alpha^{\mathrm{D}-i-2} - 2\alpha^{\mathrm{D}-i-1} + \alpha^{\mathrm{D}-1} \\ &\ge \alpha^{\mathrm{D}-1} + \alpha^{\mathrm{D}-i-1}(1/\alpha - 2) \ge \alpha^{\mathrm{D}-1} \end{aligned}$$

因此 $\Delta_{\min}\ \mathcal{S}_{i+1} = \{\alpha^{\mathrm{D}-1}, \alpha^{\mathrm{D}-i-2} - \sum_{j=1}^{i+1}\alpha^{\mathrm{D}-j}\} = \alpha^{D-1}$ $\Delta_{\min}\ \alpha =$ ( ) min 。由此，我们可以得出 (， D) $\Delta_{\min}(\mathcal{S}_{\mathrm{D}-1}) = \alpha^{\mathrm{D}-1}$。 □

附录 D：定理3的证明

证明。 根据单次测量值$\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}$ 错误识别的概率为

$$p_e := \mathbb{P}(\widehat{\mathbf{x}}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} \neq \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}) = \sum_{k=0}^{l_{\mathrm{D}}} \mathbb{P}(\widehat{\mathbf{x}}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} \neq \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} | \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} = \widetilde{\mathbf{v}}_k)\mathbb{P}(\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} = \widetilde{\mathbf{v}}_k)$$

给定二进制向量 $\mathbf{z} \in \{0,1\}^{\mathrm{D}}$，定义函数 $\psi(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{D}} z_k$，它表示 $\mathbf{z}$ 中 1 的个数。由于含噪观测为 $c_e[n] = c[n] + e[n]$，其中 $e[n] = w[n] - \alpha^{D} w[n-1]$，根据假设 (A2) 可得 $e[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$，其中 $\sigma_1^2 = (1 + \alpha^{2\mathrm{D}})\sigma^2$。由 (27) 得到 $\mathbb{P}(\widehat{\mathbf{x}}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} \neq \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} | \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} = \widetilde{\mathbf{v}}_0) = \mathbb{P}(e[n] \in \mathcal{E}_0) = Q(\alpha^{\mathrm{D}-1}/(2\sigma_1))$。类似地，$\mathbb{P}(\widehat{\mathbf{x}}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} \neq \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} | \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} = \widetilde{\mathbf{v}}_{l_{\mathrm{D}}}) = \mathbb{P}(e[n] \in \mathcal{E}_{l_D}) = Q((\theta_{l_{\mathrm{D}}} - \theta_{l_{\mathrm{D}}-1})/(2\sigma_1)) = Q(\alpha^{\mathrm{D}-1}/(2\sigma_1))$。最后一个等号源于 $\theta_{l_{\mathrm{D}}} - \theta_{l_{\mathrm{D}}-1} = \alpha^{\mathrm{D}-1}$。最后，在给定 $\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} = \widetilde{\mathbf{v}}_k$ 且 $0 < k < l_{\mathrm{D}}$ 的条件下，由 (26) 得到

$$\mathbb{P}(\widehat{\mathbf{x}}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} \neq \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} | \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} = \widetilde{\mathbf{v}}_k) = \mathbb{P}(e[n] \in \mathcal{E}_k) = Q(\frac{\widetilde{\theta}_k - \widetilde{\theta}_{k-1}}{2\sigma_1}) + Q(\frac{\widetilde{\theta}_{k+1} - \widetilde{\theta}_k}{2\sigma_1})$$

。根据关于 $\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}$ 的假设 (A1)，有 $\mathbb{P}(\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} = \widetilde{\mathbf{v}}_k) = p^{\psi(\widetilde{\mathbf{v}}_k)}(1-p)^{\mathrm{D}-\psi(\widetilde{\mathbf{v}}_k)}$。因此，$p_e$ 为

$$p_e = Q(\alpha^{\mathrm{D}-1}/(2\sigma_1))(1-p)^{\mathrm{D}} + Q(\alpha^{\mathrm{D}-1}/(2\sigma_1))p^{\mathrm{D}} + \sum_{k=1}^{l_{\mathrm{D}}-1}\left(Q(\frac{\widetilde{\theta}_k - \widetilde{\theta}_{k-1}}{2\sigma_1}) + Q(\frac{\widetilde{\theta}_{k+1} - \widetilde{\theta}_k}{2\sigma_1})\right) p^{\psi(\mathbf{v}_k)}(1-p)^{\mathrm{D}-\psi(\mathbf{v}_k)} \tag{43}$$

如果至少有一个块被错误解码，则脉冲序列 $\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}$ 就会被错误解码，因此，总错误概率为:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{M-1} \widehat{\mathbf{x}}^{(n)} \neq \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}) &\leq \sum_{n=0}^{M-1} \mathbb{P}(\widehat{\mathbf{x}}^{(n)} \neq \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)}) = Mp_e \\ &\overset{(a)}{\leq} 2MQ(\Delta\theta_{\min}(\alpha, \mathrm{D})/(2\sigma_1)) \sum_{j=0}^{\mathrm{D}} p^j (1-p)^{\mathrm{D}-j}\binom{\mathrm{D}}{j} \\ &\overset{(b)}{\leq} 2M\exp(-\Delta\theta_{\min}^2(\alpha, \mathrm{D})/(4\sigma_1^2))\end{aligned} \tag{44}$$

其中，第一个不等式由并集界得出，第二个等式则由 (43) 得出。不等式 (*a*) 是由 $Q(.)$ 函数单调递减的性质得出的；将所有具有相同计数的项分组后，可将求和重新写为 $\psi(\mathbf{v}_k) = j$。不等式 (*b*) 是由不等式 $Q(x) \leq \exp(-x^2/2)$（对于 $x > 0$）得出的。如果信噪比条件 (28) 成立，则根据 (44)，总错误概率有界于 δ。 □

附录 E：定理4的证明

证明。我们首先说明，$\alpha \in \mathcal{F}_{\mathrm{D}}$ 意味着 (31) 成立，因此具有相同计数的尖峰映射会聚集在一起。注意，对于 $k = 0$，$\theta_{\max}^k = \theta_{\min}^k = 0$。对于 $k \geq 1$，容易验证，$\theta_{\max}^k$ 和 $\theta_{\min}^k$ 分别由脉冲模式 00...1111（在索引 D $-k+1$ 至 D 处有 k 个连续尖峰）和 111...000（在索引 1 至 k 处有连续尖峰）取得，因此可将 (31) 简化为：对于 $k = 0$ 和 $\sum_{i=1}^{k+1}\alpha^{\mathrm{D}-i} > \sum_{j=0}^{k-1}\alpha^j$，$\alpha^{\mathrm{D}-1} > 0$；$k = 1, \cdots, \mathrm{D}-1$。满足上述每个关系的 α 的取值可由以下集合描述:

$$\mathcal{G}_0 = \{\alpha \in (0,1) | \alpha^{\mathrm{D}-1} > 0\}, \mathcal{G}_k = \{\alpha \in (0,1) | r_k(\alpha) < 0\},$$

其中，对于 $1 \leq k \leq \mathrm{D}-1$，$r_k(\alpha) = \alpha^{\mathrm{D}} - \alpha^{\mathrm{D}-k-1} - \alpha^k + 1$。容易看出，$\mathcal{F}_{\mathrm{D}} = \mathcal{G}_{k_0}$。注意，这些关系是对称的，即 $\mathcal{G}_k = \mathcal{G}_{\mathrm{D}-k-1}$。此外，对于 $1 \leq k \leq \mathrm{D}/2$，我们如下证明 $\mathcal{G}_k \subseteq \mathcal{G}_{k-1}$。显然，$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_0$。对于 $2 \leq k \leq D/2$，注意到 $r_k(\alpha) - r_{k-1}(\alpha) = \alpha^{\mathrm{D}-k}(1-1/\alpha) - \alpha^k(1-1/\alpha) = (1/\alpha - 1)(\alpha^k - \alpha^{\mathrm{D}-k}) \geq 0$.因此，$\alpha \in \mathcal{G}_k \Rightarrow \alpha \in \mathcal{G}_{k-1}, k = 1, 2 \cdots, k_0$。此外，由于 $\mathcal{G}_k = \mathcal{G}_{\mathrm{D}-k-1}$，可得 $\mathcal{F}_{\mathrm{D}} = \mathcal{G}_{k_0} = \cap_{k=0}^{\mathrm{D}-1}\mathcal{G}_k$。因此，对于所有 $0 \leq i \leq \mathrm{D}-1$，$\alpha \in \mathcal{F}_{\mathrm{D}} \Rightarrow \alpha \in \mathcal{G}_i$，这意味着 (31) 成立。如果噪声扰动满足$|w[n]| < \Delta_{\min}^{\mathrm{c}}(\alpha, \mathrm{D})/4$，则意味着 $|e[n]| < \Delta_{\min}^{\mathrm{c}}(\alpha, \mathrm{D})/2$。对于任意块 $\mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} \in \mathcal{C}_k^{\mathrm{D}}$，$\theta_{\min}^k \leq \mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} \leq \theta_{\max}^k$。如果$|e[n]| < \Delta_{\min}^{\mathrm{c}}(\alpha, \mathrm{D})/2$，则有

$$\mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} + e[n] < \theta_{\max}^k + \frac{\Delta_{\min}^c(\alpha, \mathrm{D})}{2} < \theta_{\max}^k + \frac{\theta_{\min}^{k+1} - \theta_{\max}^k}{2}$$

$$\mathbf{h}_\alpha^\top \mathbf{x}_{\mathrm{hi}}{}^{(n)} + e[n] > \theta_{\min}^k - \frac{\Delta_{\min}^c(\alpha, \mathrm{D})}{2} > \theta_{\min}^k - \frac{\theta_{\min}^k - \theta_{\max}^{k-1}}{2}$$

这表明，只要 $\alpha \in \mathcal{F}_{\mathrm{D}}$，条件 $|e[n]| < \Delta_{\min}^{\mathrm{c}}(\alpha, \mathrm{D})/2$ 就足以使 (33) 成立 $\forall\ \gamma[n]$，因此可以精确恢复尖峰计数。 □

附录 F：振幅估计

如果二进制振幅 A 未知，我们建议采用一种估计方法。首先，我们评估不同时间点 $n = 1, 2, \cdots, M-1$的信号 $c[n]$。对于某些 $1 \leq n_0 \leq M-1$，我们估计一组候选振幅 $\mathcal{A} = \{A_k\}$：$A_k := c[n_0]/\mathbf{h}_\alpha^T \mathbf{v}_k$，其中 $\mathbf{v}_k \in \mathcal{S}_{\text{all}}$.。只有特定的振幅才能通过有效的二进制脉冲模式 $\mathbf{v}_k \in \mathcal{S}_{\text{all}}$生成 $c[n_0]$。我们的目标是通过依次根据剩余测量值之间的一致性检验，剔除集合中的某些候选振幅，从而对 $\mathcal{A}$ 进行筛选。在第 t^{th} 阶段（$t = 2, 3, \cdots$），对于每个剩余候选振幅 $A_k \in \mathcal{A}$，我们使用 $c[n]$ 执行以下一致性检验，以确定该候选振幅是否可能生成相应的测量值 $c[n]$。假设存在一种脉冲模式 $\mathbf{v}_l \in \mathcal{S}_{\text{all}}$，使得

$$c[n] = A_k \mathbf{h}_\alpha^T \mathbf{v}_l \tag{45}$$

那么 A_k 仍然是一个有效候选项。如果找不到与某个幅度 A_k对应的$\mathbf{v}_l \in \mathcal{S}_{\text{all}}$，我们就将其移除，$\mathcal{A} = \mathcal{A} \setminus A_k$。存在噪声时，可修改式 (45)，引入容差 γ，因为我们可能找不到完全匹配项。GENIE 数据集上的实验将容差 γ 设为 0。5。该过程利用多个测量值 $c[n]$之间共享的幅度，筛除幅度的可能取值。

致谢

作者谨向曼彻斯特大学数学系的 Nikita Sidorov 教授致谢，感谢他就如何在范围 $\beta \in (1,2)$ 内求得有限 β-展开所面临的计算挑战进行了富有帮助的讨论。本研究获得了 ONR N00014-19-1-2256 资助、DE- SC0022165、NSF2124929 和 NSFCAREER ECCS1700506 的支持。

参考文献

[1] A. Small 和 S. Stahlheber，“用于超分辨显微镜的荧光团定位算法”，《自然·方法》，第 11 卷，第 3 期，第 267–279 页，2014 年。[2] R. Brette 和 A. Destexhe，《神经活动测量手册》。剑桥大学出版社，2012 年。[3] J. T. Vogelstein、B. O. Watson、A. M. Packer、R. Yuste、B. Jedynak 和 L. Paninski，“利用序贯蒙特卡洛方法从钙成像中进行尖峰推断”，《生物物理学杂志》，第 97 卷，655，2009 2，第 636 页。[4] T. Deneux、A. Kaszas、G. Szalay、G. Katona、T. Lakner、A. Grinvald、B. Rózsa 和 I. Vanzetta，“从含噪钙信号中准确估计尖峰，以实现对大量神经元群体的超快速三维成像”，《自然·通讯》，第 7 卷，第 12190 页，2016 年。[5] S. Yang 和 L. Hanzo，“MIMO检测五十年：迈向大规模MIMO之路”，《IEEE通信调查与教程》，第 17 卷，第 4 期，第 1941–1988 页，2015 年。[6] D. L. Donoho，“通过稀疏性约束实现超分辨率”，《SIAM数学分析杂志》，第 23 卷，第 5 期，第 1309–1331 页，1992 年。[7] E. J. Candès 和 C. Fernandez-Granda，“迈向超分辨率数学理论”，《纯粹与应用数学通讯》，第 67 卷，第 6 期，第 906–956 页，2014 年。[8] W. Li、W. Liao 和 A. Fannjiang，“ESPRIT算法的超分辨率极限”，《IEEE 信息论汇刊》，第 66 卷，第 7 期，第 4593–4608 页，2020 年。[9] D. Batenkov、G. Goldman 和 Y. Yomdin，“近距离碰撞点源的超分辨率”，《信息与推断：IMA期刊》，第 10 卷，第 2 期，第 515–572 页，2021 年。[10] G. Schiebinger、E. Robeva 和 B. Recht，“无需分离的超分辨率”，《信息与推断：IMA期刊》第 7 卷，第 1 期，第 1–30 页，2017 年。[11] T. Bendory，“正脉冲序列的稳健恢复”，《IEEE 信号处理汇刊》，第 65 卷，第 8 期，第 2114–2122 页，2017 年。[12] W. Liao 和 A. Fannjiang，“用于单快照谱估计的 MUSIC：稳定性与超分辨率”，《应用与计算调和分析》，第 40 卷，第 1 期，第 33–67 页，2016 年。[13] H. Qiao 和 P. Pal，“在多测量向量模型中利用差分共阵和有限快照，保证定位出比传感器更多的信号源”，《IEEE 信号处理汇刊》，第 67 卷，第 22 期，第 5715–5729 页，2019 年。[14] ——，“非负超分辨率的非凸方法：理论与算法”，载于 ICASSP 2019-2019 IEEE 声学、语音与信号处理国际会议（ICASSP）。IEEE，2019 年，第 4220–4224 页。[15] H. Qiao、S. Shahsavari 和 P. Pal，“含噪测量下的超分辨率：协调上界与下界”，载于 ICASSP 2020- 2020 IEEE 声学、语音与信号处理国际会议（ICASSP）。IEEE，2020 年，第 9304–9308 页。[16] S. Shahsavari、J. Millhiser 和 P. Pal，“合成孔径含噪超分辨率中的基本权衡”，载于 ICASSP 2021-2021 IEEE 声学、语音与信号处理国际会议（ICASSP）。IEEE，2021 年，第 4620–4624 页。[17] H. Qiao 和 P. Pal，“关于含噪正超分辨率的连续模”，载于 2018 IEEE 声学、语音与信号处理国际会议（ICASSP）。IEEE，2018 年，第 3454–3458 页。[18] Y. Chi 和 M. F. Da Costa，“利用连续域上的稀疏性：用于超分辨率的原子范数最小化”，IEEE 信号处理杂志，第 37 卷，第 2 期，第 39–57 页，2020 年。[19] B. N. Bhaskar、G. Tang 和 B. Recht，“原子范数去噪及其在线谱估计中的应用”，《IEEE 信号处理汇刊》，第 61 卷，第 23 期，第 5987–5999 页，2013 年。[20] B. F. Grewe、D. Langer、H. Kasper、B. M. Kampa 和 F. Helmchen，“高速活体钙成像揭示具有近毫秒级精确率的神经元网络活动”，《自然·方法》，第 7 卷，399，2010 5，第 p 页。[21] E. A. Pnevmatikakis、D. Soudry、Y. Gao、T. A. Machado、J. Merel、D. Pfau、T. Reardon、Y. Mu、C. Lacefield、W. Yang 等，“钙成像数据的同步去噪、反卷积与解混”，《神经元》，第 89 卷，第 2 期，第 285–299 页，2016 年。[22] R. Schmidt，“多发射源定位与信号参数估计”，《IEEE天线与传播汇刊》，第 34 卷，第 3 期，第 276–280 页，1986 年。[23] R. Roy 和 T. Kailath，“ESPRIT——基于旋转不变技术的信号参数估计”，《IEEE 声学、语音与信号处理汇刊》，第 37 卷，第 7 期，第 984–995 页，1989 年。

[24] Y. Hua 和 T. K. Sarkar ，“矩阵 p估计用的铅笔法噪声中指数衰减／不衰减正弦信号的参数，” IEEE 声学、语音与信号处理汇刊，第 38 卷，第 5 期，第 814–824 页，1990 年。[25] B. Bernstein 和 C. Fernandez-Granda，“点源反卷积：采样定理与鲁棒性保证”，《纯粹与应用数学通讯》，第 72 卷，第 6 期，第 1152–1230 页，2019 年。[26] A. Koulouri、P. Heins 和 M. Burger，“稀疏峰反卷积中的自适应超分辨率”，IEEE 信号处理汇刊，第 69 卷，第 165–178 页，2020 年。[27] V. I. Morgenshtern 和 E. J. Candes，“正源超分辨率：离散情形”，SIAM 成像科学杂志，第 9 卷，第 1 期，第 412–444 页，2016 年。[28] D. Batenkov、A. Bhandari 和 T. Blu，“重新思考超分辨率：带宽选择问题”，载于 ICASSP 2019-2019 IEEE 声学、语音与信号处理国际会议（ICASSP）。IEEE，2019 年，第 5087–5091 页。[29] M. F. Da Costa 和 W. Dai，“通过凸规划严格反演谱分辨率极限”，载于 2018 IEEE 信息论国际研讨会（ISIT）。IEEE，2018 年，第 901–905 页。[30] T. Blu、P.-L. Dragotti、M. Vetterli、P. Marziliano 和 L. Coulot，“信号创新的稀疏采样”，IEEE 信号处理杂志，第 25 卷，第 2 期，第 31–40 页，2008 年。[31] J. A. Urigüen、T. Blu 和 P. L. Dragotti，“使用任意核的有限创新率采样”，IEEE 信号处理汇刊，第 61 卷，第 21 期，第 5310–5323 页，2013 年。[32] J. Onativia、S. R. Schultz 和 P. L. Dragotti，“一种用于从双光子钙成像中快速、准确检测尖峰的有限创新率算法”，神经工程学杂志，第 10 卷，第 4 期，第 046017 页，2013 年。[33] R. Tur、Y. C. Eldar 和 Z. Friedman，“脉冲流的创新率采样及其在超声成像中的应用”，IEEE 信号处理汇刊，第 59 卷，第 4 期，第 1827–1842 页，2011 年。[34] S. Rudresh 和 C. S. Seelamantula，“基于有限创新率采样的超分辨率雷达成像”，IEEE 信号处理汇刊，第 65 卷，第 19 期，第 5021–5033 页，2017 年。[35] M. Stojnic，“二元压缩感知中 l_1 优化的恢复阈值”，载于 2010 IEEE 信息论国际研讨会。IEEE，2010 年，第 1593–1597 页。[36] S. Keiper、G. Kutyniok、D. G. Lee 和 G. E. Pfander，“有限值信号的压缩感知”，线性代数及其应用，第 532 卷，第 570–613 页，2017 年。[37] A. Flinth 和 S. Keiper，“利用偏置测量矩阵恢复二元稀疏信号”，IEEE 信息论汇刊，第 65 卷，第 12 期，第 8084–8094 页，2019 年。[38] S. M. Fosson 和 M. Abuabiah，“通过多项式优化从压缩线性测量中恢复二元稀疏信号”，IEEE 信号处理快报，第 26 卷，第 7 期，第 1070–1074 页，2019 年。[39] Z. Tian、G. Leus 和 V. Lottici，“有限字母表约束下的稀疏信号检测”，载于 2009 IEEE 声学、语音与信号处理国际会议。IEEE，2009 年，第 2349–2352 页。[40] P. Sarangi 和 P. Pal，“无需松弛：从欠采样测量中保证恢复有限值信号”，载于 ICASSP 2021-2021 IEEE 声学、语音与信号处理国际会议（ICASSP）。IEEE，2021 年，第 5440–5444 页。[41] ——，“样本高效二元压缩感知的测量矩阵设计”，IEEE 信号处理快报，2022 年。[42] S. Razavikia、A. Amini 和 S. Daei，“通过 Hankel 结构低秩矩阵恢复从模糊图像中重建二元形状”，IEEE 图像处理汇刊，第 29 卷，第 2452–2462 页，2019 年。[43] J. Friedrich、P. Zhou 和 L. Paninski，“钙成像数据的快速在线反卷积”，PLoS 计算生物学，第 13 卷，第 3 期，第 e1005423 页，2017 年。[44] S. W. Jewell、T. D. Hocking、P. Fearnhead 和 D. M. Witten，“钙成像数据的快速非凸反卷积”，生物统计学，第 21 卷，第 4 期，第 709–726 页，2020 年。[45] P. Sarangi、M. C. Hücümeno˘glu 和 P. Pal，“欠采样对使用自回归滤波器的非负盲反卷积的影响”，载于 ICASSP 2020-2020 IEEE 声学、语音与信号处理国际会议（ICASSP）。IEEE，2020 年，第 5725–5729 页。[46] A. Rupasinghe 和 B. Babadi，“从模糊且含噪的尖峰观测中鲁棒推断神经元相关性”，载于 2020年第54届信息科学与系统年会（CISS）。IEEE，2020 年，第 1–5 页。[47] N. Sidorov，“几乎每个数都有连续统个 β展开”，美国数学月刊，第 110 卷，第 9 期，第 838–842 页，2003 年。

[48] P. Glendinning 和 N. Sidorov，“实数在非整数基底中的唯一表示”，*Mathematical Research Letters*，第 8 卷，第 4 期，第 535–543 页，2001 年。[49] A. Rényi，“实数的表示及其遍历性质”，*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*，第 8 卷，第 3-4 期，第 477–493 页，1957 年。[50] C. Frougny 和 B. Solomyak，“有限β展开”，*Ergodic Theory Dynam. Systems*，第 12 卷，第 4 期，第 713–723 页，1992 年。[51] V. Komornik 和 P. Loreti，“非整数基底中的展开。”*Integers*，第 11 卷，第 A9 期，第 30 页，2011 年。[52] D. H. Hubel 和 T. N. Wiesel，“猫的纹状皮层中单个神经元的感受野”，*The Journal of physiology*，第 148 卷，第 3 期，第 574 页，1959 年。[53] T.-W. Chen、T. J. Wardill、Y. Sun、S. R. Pulver、S. L. Renninger、A. Baohan、E. R. Schreiter、R. A. Kerr、M. B. Orger、V. Jayaraman 等，“用于成像神经元活动的超灵敏荧光蛋白”，《自然》，第 499 卷，第 7458 期，第 295–300 页，2013 年。[54] H. K. S. c. GENIE Project，Janelia Farm Campus，“表达多种基因编码钙指示剂的神经元的同步成像与松封接细胞贴附式电记录”，*CRCNS. org*，2015 年。