稀疏阵列超分辨率：时空权衡的非渐近分析

Pulak Sarangi、Mehmet Can H¨uc¨umeno˘glu、Robin Rajam¨aki 和 Piya Pal

arXiv:2301.01734v1 [eess.SP] 4 Jan 2023

摘要——**稀疏阵列凭借其更高的自由度（DOF）和更出色的分辨率，已成为传统均匀线性阵列（ULA）的一种广受欢迎的替代方案。在被动场景中，这些优势是通过利用不同传感器接收信号之间的相关性实现的。因此，人们认为，稀疏阵列需要大量时间测量值，才能根据这些相关性可靠地估计感兴趣参数，所以在样本匮乏区间可能并非首选。本文通过对协阵列 ESPRIT 算法进行严格的非渐近分析，揭示了这一观点并不成立。这一看似违反直觉的结果，源于协阵流形奇异值的尺度变化，它能够补偿有限快拍区间内可能较大的协方差估计误差。具体而言，我们证明，对于工作在信源数量少于传感器数量这一条件（$S = O(1)$）下的嵌套阵列，只要 (i) 时间快拍数（L）仅随传感器数量（P）对数增长，即 $L = \Omega(\ln(P)/\epsilon^2)$，且 (ii) 满足适当的分离条件，则以高概率，估计得到的到达方向（DOA）与真实到达方向之间的匹配距离误差可被限制在任意小的量（ϵ）以内。我们的结果还从理论上证明了稀疏阵列广为人知的经验性分辨率优势：信源之间的最小间隔可以达到$\Omega(1/P^2)$，而相同传感器数量的均匀线性阵列则要求间隔达到$\Omega(1/P)$ 。除了阵列几何结构，我们给出的样本复杂度表达式还揭示了其对其他关键模型参数的依赖关系，例如信噪比（SNR）和信源功率的动态范围。这使我们能够从理论和实验两方面确立嵌套阵列更强的抗噪性。** [1]

关键词—**稀疏阵列、嵌套采样、超分辨率、托普利兹协方差矩阵、非渐近保证。**

I. 引言

信源定位问题出现在各种不同场景中，包括声呐和雷达中的目标检测、混合毫米波信道估计，以及阵列信号处理中的到达方向估计 [1]–[3]。传统上，这些应用采用均匀线阵，已知其利用 P 个传感器最多可分辨 $S = O(P)$ 个信源。然而，确定性稀疏阵列几何结构（例如嵌套阵列和互素阵列） [1], [2],近年来受到了广泛关注，主要归因于其两项吸引人的特性。首先，稀疏阵列仅使用 P 个传感器，就能够识别最多 $S = O(P^2)$ 个不相关信源。其次，稀疏阵列具有性能增益，表现为更低的 Cram´er-Rao 界和更高的角分辨率 [4]–[8]。这两项特性都可归因于所谓差分互质阵列所带来的增强空间自由度，其规模最大可达 $\Theta(P^2)$。互质阵列增强的自由度通过计算空间测量值之间的时间相关性，并构造一个称为“差分协阵协方差矩阵”的增广协方差矩阵来实现，其大小由差分互质阵列的规模决定。在构造差分协阵协方差矩阵之后，便可以充分利用差分互质阵列的优势，并使用经典子空间技术（如 MUSIC、ESPRIT 或矩阵铅笔法）识别未知信源方向 [9]–[11]。尽管基于互质阵列的算法取得了成功，但人们普遍认为，为了充分利用互质阵列所提供的自由度，需要大量的时间快拍。产生这一认识的根本原因，主要在于现有性能分析存在不足：这些分析主要通过刻画互质阵列多重信号分类 [5] 和 Coarray ESPRIT 算法 [12]的渐近均方误差（MSE）来进行。具体而言，这类渐近结果主要依赖于 [13], 提出的一阶扰动分析框架，而该框架留下了有关互质阵列算法性能的两个关键问题尚未解答。首先，该扰动框架无法从理论上解释稀疏阵列相较于均匀线阵所带来的分辨率提升——这一现象已在数值实验中得到广泛观察 [5], [14]。其次，该分析未能充分揭示时间快拍数量与关键模型参数之间的依赖关系，例如阵列几何结构、传感器数量、信噪比以及信源功率的动态范围。

上述不足在[15], 中得到部分解决，该研究将超分辨率理论的最新进展 [16], [17] 应用于互质阵列场景。其分析基于全变差范数最小化，确实是非渐近的。然而，可以证明，在此场景中，所需快拍数随传感器数量 P呈二次增长（而非线性增长），这并不理想。在另一项采用基于网格模型的相关研究中，我们最近证明，即使信源间隔很近，$\Omega(P^2)$个快拍也足以以高概率确保精确支撑集恢复，其中最小信源间隔按$\Omega(1/P^2)$的尺度变化 [18]。尽管该分析适用于 $S > P$ （信源数量多于传感器数量）的情形，但当 $S \leq P$时，样本复杂度$\Omega(P^2)$仍然偏保守。在 [19], 中，研究采用原子范数表述来利用差分协阵协方差矩阵的托普利兹结构。该分析刻画了协方差矩阵估计误差，却没有刻画达到所需到达方向估计误差所需的样本复杂度，而后者往往是人们最关心的量。事实上，普遍的看法是

[1]本研究由以下资助项目提供支持：美国海军研究办公室 N00014-19-1-2256、美国海军研究办公室 N00014-19-1-2227、美国国家科学基金会 2124929，以及美国国家科学基金会 CAREER ECCS 1700506。

稀疏阵列的优势必然要以大量快拍为代价，因为通常需要估计的差分协阵协方差矩阵的规模为 $\Theta(P^2)$。因此，人们可能会误以为稀疏阵列不如均匀线阵。本文旨在通过给出有关协阵列 ESPRIT 性能的新非渐近结果，尤其关注 $S \leq P$情况下的嵌套阵列，从而消除这一误解。我们的分析受到自主感知和毫米波信道估计等当代应用的启发 [3], [14], ; 在这些应用中，识别多于传感器数量的信源或许并非必要，而且快拍数量可能会因相干多径或环境快速变化而受到限制。

尽管基于子空间的算法已有数十年历史，并已在实践中得到广泛应用，但直到近期才获得刻画其精确分辨率极限的性能保证 [20]–[24]。这项分析也已扩展至多快拍情形 [25]。实现这些保证的关键因素，是对范德蒙德矩阵最小奇异值的刻画 [24]。然而，上述所有结果仅适用于均匀线性阵列。此外，未对源信号作出任何统计假设，因此缺少互质阵列视角。确定性源与随机源之间的关键区别在于，后一种情况下，对目标子空间的扰动既源于噪声，也源于有限快拍协方差估计误差。因此，将 [20], [25]中的分析扩展到随机情形需要进行非平凡的修改。

贡献： 我们的首要贡献是对有限快拍导致的差分协阵协方差矩阵估计误差进行概率刻画。第二项主要贡献是针对 Coarray ESPRIT 算法，基于匹配距离误差这一度量开展非渐近性能分析。具体而言，我们刻画了将匹配距离误差限制在指定参数以内所需的时间快拍数量（样本复杂度）。据我们所知，我们给出的样本复杂度表达式（以快拍数表示）首次明确揭示了其对阵列几何结构、信噪比和信源功率动态范围等关键模型参数的依赖关系。此外，我们证明，对于嵌套阵列和均匀线性阵列，都可以使用（阶数意义上）相同数量的快拍 $L = \Omega(\ln P)$，将匹配距离误差限制在任意小的数值以内。然而，与均匀线性阵列相比，嵌套阵列能在小得多的间隔范围 $\Delta_{\min} = \Omega(1/P^2)$ 内实现这一点；而均匀线性阵列则需要 $\Delta_{\min} = \Omega(1/P)$。我们的分析打破了广泛持有的观点，即当信源数量少于传感器数量时，稀疏阵列所需的快拍数显著多于均匀线阵；同时也证实了嵌套阵列具有更优的分辨能力。除了推进理论认知外，这项分析还可为实践者确定合适的运行条件提供指导原则。符号说明：符号 $\odot$ 表示 Khatri-Rao（按列 Kronecker）积，而 $\|\cdot\|_2$和 $\|\cdot\|_F$分别表示矩阵的谱范数和弗罗贝尼乌斯范数。此外，$\sigma_i(\mathbf{A})$ 是 $\mathbf{A}$ 的第 i 大奇异值。对于实数集合 $\{p_1, p_2, \ldots, p_K\}$，$p_{\min}$ 和 $p_{\max}$ 表示该集合中的最小值和最大值。符号 $\mathbb{T} := [0, 1)$ 表示环面。对于次高斯随机变量 X，$\|X\|_{\psi_2}$ 表示其次高斯范数，定义为 $\|X\|_{\psi_2} := \inf\{t > 0 \mid \mathbb{E}[\exp X^2/t^2] \leq 2\}$。

II. 稀疏阵列背景

考虑一个含有 P 个传感器的稀疏线性阵列（SLA），这些传感器位于 $\{d_p\lambda/2\}_{p=1}^{P}$处，其中 λ 为入射远场窄带源信号的波长，d_p 属于整数集合 $\mathbb{S}$ ($|\mathbb{S}| = P$)。假设有 S 个具有不同到达方向 $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_S\}$ 的信源入射到该阵列，其中$\theta_i \in (-\pi/2, \pi/2]$ 对于 $i = 1, \ldots, S$。在时刻 t，P 个传感器接收到的信号为:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, \ldots, L. \tag{1}$$

矩阵 $\mathbf{A}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}_{\mathbb{S}}(\theta_1), \mathbf{a}_{\mathbb{S}}(\theta_2) \ldots, \mathbf{a}_{\mathbb{S}}(\theta_S)] \in \mathbb{C}^{P\times S}$ 是阵列流形矩阵，其中：$\mathbf{a}_{\mathbb{S}}(\theta_i) = [e^{j\pi d_1 \sin(\theta_i)} \; e^{j\pi d_2 \sin(\theta_i)} \; \cdots \; e^{j\pi d_P \sin(\theta_i)}]^\top$表示对应于方向 θ_i 的导向矢量；L 表示时间快拍总数；$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^S$ 是源信号向量的第 t^{th} 个时间快拍，而 $\mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^P$是加性噪声项。我们将归一化空间频率（本文称为归一化到达方向）定义为$\omega_i = \sin(\theta_i)/2$。本文对源信号和噪声作出以下统计假设:

[A1] 不相关高斯源：假设源信号$\mathbf{x}(t)$ 是互不相关的白色圆对称高斯 $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{P})$，其中 $\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \ldots, p_S)$ 表示源功率的对角协方差矩阵。

[A2]高斯噪声：噪声 $\mathbf{n}(t)$ 服从零均值圆对称复高斯分布 $\mathbf{n}(t) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$，且与 $\mathbf{x}(t)$ 不相关。

在假设 [**A1-A2**]，下，测量值满足 $\mathbf{y}(t) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_y)$，其中 $\mathbf{R}_y$ 由下式给出:

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{A}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_{\mathbb{S}}^H(\boldsymbol{\theta}) + \sigma^2\mathbf{I}_P \in \mathbb{C}^{P\times P}. \tag{2}$$

将 $\mathbf{R}_y$ 向量化后，我们得到“虚拟测量值”：$\mathbf{r}_y = (\mathbf{A}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})^* \odot \mathbf{A}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta}))\mathbf{p} + \sigma^2\mathbf{i}$, 其中 $\mathbf{i} = \text{vec}(\mathbf{I}_P)$，且$\mathbf{p} = [p_1, \ldots, p_S]^T$。矩阵 $\mathbf{A}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})^* \odot \mathbf{A}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})$ 可视为一个“虚拟阵列”，其传感器位置由 SLA 的差集给出。

定义 II.1（差集）。给定一个 SLA $\mathbb{S} = \{d_1, d_2, \cdots, d_P\}$，其差集 $\mathbb{D}_{\mathbb{S}}$ 定义如下：$\mathbb{D}_{\mathbb{S}} = \{d_m - d_n | d_m, d_n \in \mathbb{S}\}$。

差集 $\mathbb{D}_{\mathbb{S}}$ 也称为 $\mathbb{S}$ 的虚拟差分共阵。令 $M_{ca} > 0$ 为满足 $\mathbb{U}_{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{D}_{\mathbb{S}}$的最大整数，使得集合 $\mathbb{U}_{\mathbb{S}} := \{0, 1, \ldots, M_{ca}\}$ 满足条件。该集合$\mathbb{U}_{\mathbb{S}}$ 表示差集中的最大连续非负区段，本质上是一个包含 $M_{ca} + 1$个传感器的均匀线性阵列。通过利用 $\mathbb{U}_{\mathbb{S}}$的结构，稀疏阵列相比物理稀疏线性阵列具有更高的自由度。如果一个阵列的差集是均匀线性阵列，即 $\mathbb{D}_{\mathbb{S}} = \{-M_{ca}, \cdots, M_{ca}\}$，则称其为无孔阵列。现在我们引入“广义嵌套阵列”的记号，它是一种特殊的无孔阵列。

定义 II.2（嵌套阵列）。广义嵌套阵列$\mathbb{S}^{(N_1,N_2)}$，其中 $N_1 \geq N_2 > 0$，定义如下：$\mathbb{S}^{(N_1,N_2)} = \{n\}_{n=1}^{N_1} \cup \{m(N_1+1)\}_{m=1}^{N_2}$。

可以证明，任何嵌套阵列 $\mathbb{S}^{(N_1,N_2)}$ 都是无孔的，即 $\mathbb{U}_{\mathbb{S}} = \{0,1,\cdots,M_{\text{ca}}\}$ 其中 $M_{\text{ca}} = N_2(N_1+1) - 1$。此外，$\mathbb{S}_{\text{ula}} = \mathbb{S}^{(P-1,1)}$，即选择 $N_1 = P-1$ 和 $N_2 = 1$，可得到一个包含 P 个传感器的均匀线性阵列。对于给定的 P，如果 $N_1 = \lceil \frac{P}{2} \rceil$, $N_2 = \lfloor \frac{P}{2} \rfloor$，则 $M_{\text{ca}} + 1 = \lfloor \frac{P}{2} \rfloor (\lceil \frac{P}{2} \rceil + 1)$。可以验证，对于 $P \geqq 3$，我们有：

$$P^2/5 \leq M_{\text{ca}} + 1 \leq P^2. \tag{3}$$

因此，$M_{ca} = \Theta(P^2)$确实是可以实现的。接下来，我们介绍一个对于描述基于相关的处理至关重要的重要量。

定义 II.3（权重函数）。考虑一个无孔阵列$\mathbb{S}$。对于每个 $i \in \mathbb{D}_{\mathbb{S}}$，其权重函数定义为 $|\Omega_i|$：$\Omega_i = \{(m,n) | d_m - d_n = i, 1 \leq m,n \leq P\}$ 其中，集合 Ω_i本质上涵盖了所有能够生成 $i = d_m - d_n$ 差值的传感器位置对 (d_m, d_n)。

由于对称性，可以验证 $|\Omega_i| = |\Omega_{-i}|$。接下来，我们回顾相关域处理中广泛使用的“冗余平均”技术。根据 [1], [5], [26], ，虚拟均匀线性阵列测量为：

$$\mathbf{t} = \mathbf{F}_{\text{av}} \mathbf{r}_y, \tag{4}$$

其中 $\mathbf{t} = [t_{-M_{\text{ca}}}, \cdots, t_{-1}, t_0, t_1, \cdots, t_{M_{\text{ca}}}]^\top$，而 $\mathbf{F}_{\text{av}}$ 是冗余平均矩阵，定义为：

$$[\mathbf{F}_{\text{av}}]_{i+M_{ca}+1, m+P(n-1)} = \begin{cases} \frac{1}{|\Omega_i|} & \text{If } d_m - d_n = i \\ 0 & \text{Otherwise,} \end{cases} \tag{5}$$

其中 $-M_{ca} \leq i \leq M_{ca}$ 且 $1 \leq m,n \leq P$。元素t_i 通过对所有满足索引 (m,n) 生成 i 差值的条目 $[\mathbf{R}_{\mathbf{y}}]_{m,n}$ 取平均得到，即 $d_m - d_n = i$。定义托普利兹算子 $\mathcal{T}_{M_{ca}}$：$\mathbb{C}^{2M_{ca}+1} \to \mathbb{C}^{M_{ca}+1 \times M_{ca}+1}$ 如下：$[\mathcal{T}_{M_{ca}}(\mathbf{z})]_{m,n} = z_{M_{ca}+1+m-n}, 1 \leq m,n \leq M_{ca}+1$。如果向量 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2M_{ca}+1}$ 是共轭对称的，即 $z_{M_{ca}+1+i} = z^*_{M_{ca}+1-i}, 1, \ldots, M_{ca}$，那么 $\mathcal{T}_{M_{ca}}(\mathbf{z})$ 是厄米矩阵。利用虚拟测量 $\mathbf{t}$，增广虚拟共阵协方差矩阵 $\mathbf{T}_{ca} \in \mathbb{C}^{(M_{ca}+1)\times(M_{ca}+1)}$ 构造如下：

$$\mathbf{T}_{ca} := \mathcal{T}_{M_{ca}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{P} \mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\theta})^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{M_{ca}+1}. \tag{6}$$

一旦获得该虚拟差分协方阵，就可以对$\mathbf{T}_{ca}$ 应用任意基于子空间的算法 [9], [10] ，只要满足 $M_{ca} \geq S$，即可精确恢复信源到达角。因此，这也表明，通过高效设计稀疏阵列，仅使用 P 个传感器就能分辨多达 $\Theta(P^2)$个信源。下一节将介绍在有限快拍情形下如何修改相关处理。

A. 有限快拍差分协方阵估计

令$\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$ 为如下给出的样本协方差矩阵：

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} := \frac{1}{L} \sum_{t=1}^{L} \mathbf{y}(t) \mathbf{y}(t)^H. \tag{7}$$

在有限的 L下，所有针对真实协方差矩阵的运算都由针对样本协方差矩阵的运算取代。首先，我们对$\hat{}\mathbf{r}_{\mathbf{y}}$进行冗余平均：

$$\hat{\mathbf{t}} := \mathbf{F}_{\text{av}} \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{y}}, \text{ where } \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{y}} := \text{vec}(\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}). \tag{8}$$

这里，$\hat{}\mathbf{t} = [t_{-M_{\text{ca}}} \cdots t_{-1}\ t_0\ t_1 \cdots t_{M_{\text{ca}}}]^\top$ $t_i = \hat{},$, $\frac{1}{|\ _i|} \sum_{d_m - d_n = i} [\widehat{\ \mathbf{y}}]_{m\ n}$. $\hat{},\hat{},\hat{},,\hat{}$，其中 $\hat{}\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}$,接下来，通过从$\hat{}\mathbf{t}$ 构造托普利兹厄米矩阵，可得到估计的差分协阵协方差矩阵，如下所示：

$$\widehat{\mathbf{T}}_{ca} = \mathcal{T}_{M_{ca}}(\hat{\mathbf{t}}). \tag{9}$$

对于无孔稀疏阵列 $\mathbb{S}$，由 (4) 可知，矩阵$\mathbf{R}_{\mathbf{y}}$ 的元素为：

$$[\mathbf{R}_{\mathbf{y}}]_{m,n} = t_{d_m - d_n}\ 1 \leq m,n \leq P. \tag{10}$$

$\hat{}$类似地，利用估计得到的差分协阵协方差矩阵 $\mathbf{T}_{ca}$，我们定义矩阵 $\mathbf{R}_{\text{av}} \in \mathbb{C}^{P \times P}$ 如下：

$$[\mathbf{R}_{\text{av}}]_{m,n} := \hat{t}_{d_m - d_n},\ 1 \leq m,n \leq P. \tag{11}$$

这实质上是按照阵列 $\curvearrowright\mathbb{S}$的差集所指定的赋值方式，将条目 $\hat{}\ t_i$ 映射到一个 $P \times P$ 矩阵中。由于样本协方差矩阵 $\mathbf{R}_{\mathbf{y}}$ 并不完美，有限快拍数也会导致$\hat{}$估计值 $\mathbf{T}_{ca}$ 产生误差。我们将协方差估计误差表示为：

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{T}_{ca} - \widehat{\mathbf{T}}_{ca}. \tag{12}$$

差分协阵协方差矩阵的估计误差自然也会导致到达方向估计误差。由于通常会对估计得到的协方差$\hat{}$矩阵 $\mathbf{T}_{ca}$应用基于子空间的算法，因此，对估计误差 $\mathbf{E}_L$ 进行概率表征，并分析其对到达方向估计误差的影响，至关重要。本文针对有限快拍下的到达方向估计误差，提供了严格的理论表征。

B. 基于差分协方阵的角度估计现有性能分析综述

现有针对基于互质阵列的算法的性能分析大多属于渐近分析。具体而言，这些分析依赖于 [13],提出的一阶扰动分析框架，并以此推导出互质阵列多重信号分类（MUSIC） [5], 和协阵列 ESPRIT [12]的均方误差（MSE）表达式。考虑特征值分解 $\mathbf{T}_{ca} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Gamma}_s\mathbf{U} + \mathbf{U}_\perp \boldsymbol{\Gamma}_n \mathbf{U}_\perp^H$，其中 $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{M_{ca}+1 \times S}$ 和 $\mathbf{U}_\perp \in \mathbb{C}^{M_{ca}+1 \times M_{ca}+1-S}$ 分别对应于信号子空间和噪声子空间的特征向量。相应的扰动矩阵记为 $\mathbf{T}_{ca} = \mathbf{T}_{ca} + \Delta\mathbf{T}_{ca}$, $\hat{}\qquad\qquad\hat{}$ $\mathbf{U}_\perp = \mathbf{U}_\perp + \Delta\mathbf{U}_\perp$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_n = \boldsymbol{\Gamma}_n + \Delta\boldsymbol{\Gamma}_n$。扰动矩阵满足：$(\mathbf{T}_{ca} + \Delta\mathbf{T}_{ca})(\mathbf{U}_\perp + \Delta\mathbf{U}_\perp) = (\mathbf{U}_\perp + \Delta\mathbf{U}_\perp)(\boldsymbol{\Gamma}_n + \Delta\boldsymbol{\Gamma}_n)$。

[5] 中的扰动分析依赖于：(i) 扰动“足够小”；(ii) 忽略高阶扰动项，例如 $\Delta\mathbf{T}_{ca}\Delta\mathbf{U}_\perp$ 等。这种分析的一个主要缺点是，并未明确给出对“足够小的扰动” $\|\Delta\mathbf{T}_{ca}\|_2 \leq \epsilon_1$ 上界的严格刻画。其次，[5,定理 1] 作出了一个关键假设，即“信号子空间与噪声子空间充分分离”。

这一假设留下了存在问题（不可辨识）信源配置的可能性，而这些配置并未在其分析中得到明确讨论。我们通过采用一种无需任何近似的非渐近分析框架，解决了上述两个问题。我们的分析还明确刻画了能够确保所谓信号子空间与噪声子空间分离的信源配置。在[18],中，首次针对基于网格的模型，为支撑集恢复提供了严格的非渐近概率保证。尽管其分析对 $S > P$有效，但样本复杂度 $L = \Omega(P^2)$ 较为保守，这一点将在第四节的分析中说明。

III. 有限快拍下协阵列 ESPRIT 的性能分析

协阵列 ESPRIT 算法是在协阵域中对 ESPRIT 的一种改编，于 [12] 中提出。该算法将 ESPRIT ˆ应用于估计得到的差分协阵协方差矩阵 $\mathbf{T}_{ca}$ ，而非ˆ物理测量值的协方差矩阵 $\mathbf{R}_y$ 。为便于完整理解，我们回顾协阵列 ESPRIT 算法，并指出协阵列 ESPRIT 的若干不变性。我们介绍针对理想差分协阵协方差矩阵 $\mathbf{T}_{ca}$的协阵列 ESPRIT。将其扩展到样本协方差估计是直接的。

A. 协阵列 *ESPRIT* 算法

协阵信号子空间定义为导向矢量张成的空间： $\mathcal{S}_{\text{ca}} := \mathcal{R}(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta}))$。 矩阵 $\mathbf{T}_0 := \mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})^H$ 为半正定矩阵，且可进行如下特征值分解： $\mathbf{T}_0 = \mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B}^H$，其中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的对角元素为按非递增顺序排列的特征值，且 $\mathbf{B}$ 为酉矩阵。我们可将$\mathbf{B}$ 分块为$\mathbf{B} = [\mathbf{U}, \mathbf{U}_\perp]$，其中$\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{(M_{ca}+1)\times S}$的列表示$\mathbf{T}_0$ 对应于其非零特征值的特征向量。根据这一分解，我们将$\mathbf{T}_{ca}$ 写为：

$$\mathbf{T}_{ca} = \mathbf{T}_0 + \sigma^2\mathbf{I}_{M_{ca}+1} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\Gamma} + \sigma^2\mathbf{I}_{M_{ca}+1})\mathbf{B}^H. \quad (13)$$

如果 $M_{ca} \geq S$， $\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})$ 的范德蒙结构使我们能够得出 $\text{rank}(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})^H) = S$，因此：

$$\mathcal{S}_{\text{ca}} = \mathcal{R}(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})) = \mathcal{R}(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})^H) = \mathcal{R}(\mathbf{U}). \quad (14)$$

由式 (14) 可知，存在一个可逆的 $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{S\times S}$ ，使得

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{Q}. \quad (15)$$

令 $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{C}^{M_{\text{ca}}\times S}$ 和 $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{C}^{M_{\text{ca}}\times S}$ 分别表示 $\mathbf{U}$ 的前 M_{ca} 行和后 M_{ca} 行所对应的子矩阵。类似地，令 $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1 \in \mathbb{C}^{M_{\text{ca}}\times S}$ 表示 $\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})$ 的前 M_{ca} 行和后 M_{ca} 行所对应的子矩阵。由于 $\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})$ 具有范德蒙结构，以下关系成立： $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0\mathbf{D}$，其中$\mathbf{D} = \text{diag}(e^{j\pi\sin(\theta_1)}\ e^{j\pi\sin(\theta_2)}\ldots, e^{j\pi\sin(\theta_S)})$. 根据式 (15)，矩阵 $\mathbf{U}_0$ 和 $\mathbf{U}_1$ 满足：

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{V}_0\mathbf{Q}, \quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_0\mathbf{D}\mathbf{Q}. \quad (16)$$

现在，考虑矩阵

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{U}_0^\dagger\mathbf{U}_1 \in \mathbb{C}^{S\times S}. \quad (17)$$

由于 $\mathbf{U}_0$ 满列秩，(17) 推出 $\mathbf{U}_0^\dagger = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{V}_0^\dagger$ 。将其代入 (17)，并结合 (16)，可得：

$\boldsymbol{\Psi} = \text{Q}^{-1}\text{DQ}$。因此，可以根据 $\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值推断到达方向。由于 L 是有限的，我们无法获得 T_{ca} ，因此改为对其在 (9) 中定义的估计值 ˆT_{ca} 应用协阵列 ESPRIT。如果能够确保误差 E_L 足够小（我们将使用 Weyl 的 ˆ ˆ 不等式严格给出具体条件），那么 T_{ca} 的秩至少为 S。令 U 为与 ˆ ˆT^{ca} 中最大 S 个特征值对应的特征向量所组成的矩阵（该矩阵定义良好）。我们可以将 U 视为受扰动的协阵列信号空间 $\mathcal{S}_{\text{ca}}$ 的一组基ˆˆ。根据 U，按照与 U_0, U_1 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 相同的构造，计算矩阵 U_0, U1 $\boldsymbol{\Psi}$。令 ˆ$\lambda_i = r_i e^{j\widehat{\phi}_i}$ 为矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值的极坐标表示ˆ。则估计的归一化频率 ˆ$\Omega = \{\widehat{\omega}_i\}_{i=1}^S$ 为 $\widehat{\omega}_i = \frac{\phi_i}{2\pi}$. —

B. ESPRIT 的基不变性

在上一节中，ESPRIT 使用由奇异向量 U (U) 给出的基 ˆ ˆ来实现，其中奇异向量对应于 $\mathbf{T}_{\text{ca}}$ ($\mathbf{T}_{\text{ca}}$)。然而，下面的引理表明，ESPRIT 的输出不受子空间基的选择影响。

引理 1. </style}设 U $\in \mathbb{C}^{(M_{ca}+1)\times S}$ 是 $\mathcal{R}$(ˆU) 的另一个基。那么，矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} := \widetilde{\text{U}}_0^\dagger\widetilde{\text{U}}_1$ 与矩阵 $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}$ 相似，即 ∼ ∼$\boldsymbol{\Psi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 具有相同的特征值。

˜ ˆ证明。由于 $\mathcal{R}$(U) = $\mathcal{R}$(U)，存在可逆矩阵 W $\in \mathbb{C}^{S\times S}$，使得 ˜U := ˆUW。因此，以下关系成立：$\text{U}_0 = \text{U}_0\text{W}$，$\text{U}_1 = \text{U}_1\text{W}$。由于 W 是可逆矩阵， $\widetilde{\text{U}}_0^\dagger = \text{W}^{-1}\widehat{\text{U}}_0^\dagger$ 且 $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \widetilde{\text{U}}_0^\dagger\widetilde{\text{U}}_1 = \text{W}^{-1}\widehat{\text{U}}_0^\dagger\widehat{\text{U}}_1\text{W} = \text{W}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Psi}}\text{W}$。证明完毕。 □

C. 协方差估计误差

在本节中，我们在有限快拍情形下，根据 $\|\mathbf{E}_L\|_2$ 的阵列参数，推导其尾部界。这样的界揭示了阵列几何结构对估计误差的影响。我们的分析利用了 [27]中推导的最新结果，并将其专门应用于复厄米托普利兹矩阵。我们的一些中间步骤通过调用 [28]中关于某个谱函数上确界的界的结果，偏离了 [27] 。我们首先介绍关键量，以及 [28], [29]中关于托普利兹厄米矩阵谱范数界的中间结果。

设$\mathbf{M}$ $\in$ $\mathbb{C}^{N\times N}$ 为任意厄米对称托普利兹矩阵。这样的矩阵仅由其第一列即可完全描述。考虑与$\mathbf{m}$ $= [m_{-(N-1)}, \ldots, m_{-1}, m_0, m_1, \ldots, m_{N-1}]^\top$ [29]相关联的“谱函数”： $f_{\mathbf{m}}(\theta) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} m_k \exp(-jk\theta)$，其中 $m_k = M_{k+1,1}$ 以及 $m_{-k} = m_k^*$，这是厄米托普利兹结构的结果。显然，该谱函数是阶数为 $N-1$ [28] 的三角多项式，其系数由向量$\mathbf{m}$确定。如下所示，该谱函数 $f_{\mathbf{m}}(\theta)$可用于界定$\|\mathbf{M}\|_2$ ，这是 [27]–[29]中的以下引理：

引理2. 设$\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N\times N}$为厄米对称托普利兹矩阵， $f_{\mathbf{m}}$ 为其对应的谱函数。则，$\|\mathbf{M}\|_2 \leq \sup_{\theta\in[-\pi,\pi]} |f_{\mathbf{m}}(\theta)|$。

引理2表明，厄米对称托普利兹矩阵的谱范数可由其对应谱函数的上确界界定。注意，协方差估计误差$\mathbf{E}_L = \mathbf{T}_{ca} - \mathbf{T}_{ca}$是一个托普利兹厄米矩阵，满足$\mathbf{E}_L = \mathcal{T}(\mathbf{e})$，其中$\mathbf{e} = [e_{-M_{ca}}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_{M_{ca}}]^T$是共轭对称的，且$e_i = t_i - \hat{t}_i$。因此，要利用引理2界定$\|\mathbf{E}_L\|_2$，我们需要考察谱函数$f_{\mathbf{e}}(\theta)$:

$$f_{\mathbf{e}}(\theta) := \sum_{k=-M_{ca}}^{M_{ca}} e_k \exp(-j\theta k). \tag{18}$$

为此，定义$\mathbf{\Lambda}(\theta)$，其中$1 \le m, n \le P$,

$$[\mathbf{\Lambda}(\theta)]_{m,n} = \frac{1}{|\Omega_{d_m - d_n}|} \exp(j(d_m - d_n)\theta), \tag{19}$$

以及$\mathbf{E}_{\mathbf{y}} := \mathbf{R}_{\mathbf{y}} - \mathbf{R}_{\text{av}}$，其中$\mathbf{R}_{\mathbf{y}}$和$\mathbf{R}_{\text{av}}$分别在式(10)和(11)中定义。$\mathbf{E}_{\mathbf{y}}$的元素为:

$$[\mathbf{E}_{\mathbf{y}}]_{m,n} = t_{d_m - d_n} - \widehat{t}_{d_m - d_n} = e_{d_m - d_n}, \ 1 \le m, n \le P. \tag{20}$$

命题1给出了$f_{\mathbf{e}}(\theta)$的紧凑表示。

命题1。设$f_{\mathbf{e}}(\theta)$为式(18)中定义的谱函数。则下列等式成立：$f_{\mathbf{e}}(\theta) = \text{tr}(\mathbf{E}_{\mathbf{y}}\mathbf{\Lambda}(\theta))$，其中$\mathbf{\Lambda}(\theta)$和$\mathbf{E}_{\mathbf{y}}$分别在式(19)和(20)中定义。证明。

$$\text{tr}\left(\mathbf{E}_{\mathbf{y}}\mathbf{\Lambda}(\theta)\right) = \sum_{m,n=1}^{P} [\mathbf{E}_{\mathbf{y}}]_{m,n}[\mathbf{\Lambda}(\theta)]_{n,m} = \sum_{m,n=1}^{P} e_{d_m - d_n} \frac{e^{-j(d_m - d_n)\theta}}{|\Omega_{d_m - d_n}|}$$
$$= \sum_{s=-M_{ca}}^{M_{ca}} \sum_{\substack{m,n \\ d_m - d_n = s}} e_s \frac{\exp(-js\theta)}{|\Omega_s|} = \sum_{s=-M_{ca}}^{M_{ca}} e_s \exp(-js\theta).$$

□

我们引入一个称为"冗余系数"的量，它将在界定$\|\mathbf{E}_L\|_2$时发挥重要作用。

定义 III.1（冗余系数）。给定一个无孔稀疏阵列$\mathbb{S}$，设M_{ca}为其差集$\mathbb{D}_{\mathbb{S}}$中的最大元素。冗余系数$\Delta(\mathbb{S})$定义为:$\Delta(\mathbb{S}) := \sum_{i=0}^{M_{ca}} |\frac{1}{\Omega_i}|$，其中集合$\Omega_i$在定义II.3中定义。

数量$\Delta(\mathbb{S})$受稀疏阵列$\mathbb{S}$的冗余模式控制，也就是说，它表示差集中某个元素重复出现的次数。我们通过一个示例说明数量$\Delta(\mathbb{S})$如何随P增长。

引理 3. 给定一个具有$P = N_1 + N_2 \ge 3$个传感器的广义嵌套阵列$\mathbb{S}^{(N_1,N_2)}$嵌套阵列，以下结论成立：若$N_2 = 1$，则$\Delta(\mathbb{S}^{(N_1,N_2)}$嵌套阵列$) \ge \ln(P)$，若且$\Delta(\mathbb{S}^{(N_1,N_2)}$嵌套阵列$) \le 2$；若且$N_1 = \lceil P/2 \rceil$，$N_2 = \lfloor P/2 \rfloor \ge 2$，则$\Delta(\mathbb{S}^{(N_1,N_2)}$嵌套阵列$) \le P^2$。

证明。**情形 I** ($N_2 = 1$): 取值$N_2 = 1$对应于一个均匀线性阵列，其中有$P = N_1 + 1$个传感器，且$|\Omega_i| = P - i$，$i \ge 0$。因此，$\Delta(\mathbb{S}^{(P-1,1)}$嵌套阵列$) = \sum_{i=0}^{P-1} \frac{1}{P-i}$。该调和和可以界定为$\ln(P) \le \sum_{i=0}^{P-1} \frac{1}{P-i} \le 1 + \ln(P)$ [30]。对于$P \ge 3$，由于$1 + \ln(P) \le 2\ln(P)$，我们得到所需的界。

情形 II ($N_2 = \lfloor P/2 \rfloor \ge 2$): 外部和内部均匀线性阵列的元素之差具有$k = i(\lceil P/2 \rceil + 1) - j$, $2 \le i \le \lfloor P/2 \rfloor$和$1 \le j \le \lceil P/2 \rceil$，满足$|\Omega_k| = 1$。因此，我们有$\Delta(\mathbb{S}^{(N_1,N_2)}$嵌套$) \ge \lceil P/2 \rceil \lfloor P/2 \rfloor / 2 \ge (P^2/8 - P/8) \ge P^2/16$，其中第一个不等式由$\lfloor P/2 \rfloor - 1 \ge \lfloor P/2 \rfloor / 2$得出，最后一个不等式则对$P \ge 2$使用了$P \le P^2/2$。由于$\mathbb{S}^{(N_1,N_2)}$嵌套无孔，这意味着对所有$0 \le i \le M_{\text{ca}}$，均有$1/|\Omega_i| \le 1$。因此，我们可以界定$\Delta(\mathbb{S}^{(N_1,N_2)}$嵌套$) \le M_{\text{ca}} + 1 \le P^2$。□

如下定理将表明，$\Delta(\mathbb{S})$决定了控制协方差估计误差所需的样本复杂度。因此，在传感器数量相同的情况下，为了以高概率确保协方差估计误差不超过相同的量，不同的阵列几何结构可能需要截然不同的样本复杂度。

定理 1. 考虑满足假设 [**A1-A2**],的测量模型(1)，其中$\mathbb{S}$是冗余系数为$\Delta(\mathbb{S})$的无孔稀疏阵列。令$\mathbf{T}_{ca} \in \mathbb{C}^{M_{ca}+1 \times M_{ca}+1}$为式(6)中定义的差分协阵协方差矩阵，令$\mathbf{T}^{ca}$为式(9)给出的其估计值。对于任意$\epsilon \ge 0$，有

$$P\left(\|\mathbf{T}_{ca} - \widehat{\mathbf{T}}_{ca}\|_2 \ge \epsilon\right)$$
$$\le 8M_{ca} \exp\left[-c_1 L \min\left(\frac{c_2\epsilon^2}{\|\mathbf{R}_{\mathbf{y}}\|_2^2 \Delta(\mathbb{S})}, \frac{\epsilon}{\|\mathbf{R}_{\mathbf{y}}\|_2 \sqrt{\Delta(\mathbb{S})}}\right)\right],$$

其中c_1和c_2是正的通用常数。

证明. 证明见附录A-B。□

D. 协阵列 *ESPRIT* 的频率/角度估计误差

接下来，我们将根据协方差估计误差$\mathbf{E}_L$界定到达方向估计误差。最后，我们将结合定理1中关于$\|\mathbf{E}_L\|_2$的概率界，得到主要的样本复杂度结果（见定理3）。我们将使用如下定义的匹配距离度量[20]:

$$\text{md}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) := \min_{\Pi \in \mathcal{P}} \max_j \min_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\omega}_{\Pi(j)} - \omega_j + k| \tag{21}$$

其中，ω_i ($\hat{\omega}_i$)为归一化到达方向，$\mathcal{P}$表示$\{1, 2, \cdots, S\}$上所有可能排列的集合。

在分析中，我们还将采用一个额外假设，并在适当时使用:

[A3] 信源数量$S = O(1)$，即S保持不变，不随P增长。

特征值间隙条件：定义:

$$\beta := p_{\min}\sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\theta})) - \sigma^2. \tag{22}$$

下文将条件$\beta > 0$称为"特征值间隙条件"，它将在我们的分析中发挥重要作用。回顾$\mathbf{T}_{ca} = \mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\theta})^H + \sigma^2$的定义可知，$\beta > 0$确保$\mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\theta})^H$的最小奇异值与$\mathbf{T}_{ca}$的（由噪声$\sigma$决定的）$(S+1)^{\text{th}}$奇异值之间存在间隔，因为$\mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\theta})$是$\mathbf{T}_{ca}$的下界。下述定理将以匹配距离表示的到达方向估计误差与协方差估计误差$\mathbf{E}_L$联系起来，前提是后者有一个合适的上界。

定理 2. 设$\mathbb{S}$为一个包含P个传感器的无孔稀疏线性阵列。设$\mathbf{T}_{ca} \in \mathbb{C}^{M_{ca}+1 \times M_{ca}+1}$为差分协阵协方差

$\widehat{\ }$矩阵，其定义见式 (6)；$\mathbf{T}_{ca}$ 为其根据式 (9) 得到的估计值。若假设 [**A3**] 成立，且满足以下条件：

$$\beta > 0 \quad \text{and } \|\mathbf{E}_L\|_2 \le C_S\beta \tag{23}$$

那么，ESPRIT算法的匹配距离误差满足

$$\mathrm{md}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \le q\|\mathbf{E}_L\|_2 \tag{24}$$

其中，$\mathbf{E}_L$，β 在式 (12)、(22) 中定义，$q = (C_S'\sqrt{M_{ca}}+1)/(\beta\sigma_S(\mathbf{A}^{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})))$。量 C_S, C_S' 仅取决于 S，假设其为 $O(1)$。

证明。 参见附录B-A。 □

以下引理给出了谱范数 $\|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2$ 的上下界，且无论阵列几何结构如何，这些界均成立。

引理4。 考虑式 (2) 给出的协方差矩阵 $\mathbf{R}_\mathbf{y}$，其中 $\mathbb{S}$ 是任意（稀疏）阵列。给定固定的 S、信号功率$\mathbf{p}$ 和噪声功率 σ^2，对于所有 $\boldsymbol{\theta}$，以下结论成立：

$$p_{\min}P \le \|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2 \le p_{\max}PS + \sigma^2. \tag{25}$$

证明。 对于任意 $\mathbb{S}$，谱范数 $\|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2$ 可界定为：

$$\begin{aligned}\|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2 &= \sigma_1(\mathbf{A}_\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta})^H) + \sigma^2 \le p_{\max}\sigma_1(\mathbf{A}_\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta}))^2 + \sigma^2 \\ &\le p_{\max}PS + \sigma^2\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由以下事实得出：$\sigma_1(\mathbf{A}_\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta}))^2 \le \|\mathbf{A}_\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta})\|_F^2 = PS$。类似地，我们可以对范数 $\|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2 \ge \sigma_1(\mathbf{A}_\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta})^H) \ge p_{\min}\sigma_1^2(\mathbf{A}_\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta})) \ge p_{\min}\|\mathbf{A}_\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta})\|_F^2/S = p_{\min}P$给出下界。 □

结合定理 1 和定理 2，接下来我们将给出关于快拍数量 (L) 的一个充分条件，该条件以模型参数（阵列几何结构、信噪比和信源配置）表示，使得匹配距离误差能够以至少 $1-\delta$ 的概率被限制在预先指定的 ϵ 以内。

定理 3. 考虑测量模型 (1)，其中 $\mathbb{S}$ 是无孔稀疏阵列。假设 $\beta > 0$ 且统计假设 [**A1-A3**] 成立。那么对于任意 $0 < \delta < 1$ 和 $\epsilon > 0$，匹配距离误差满足 $\mathrm{md}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) \le \min(\epsilon, C_S\beta q)$，其成立概率至少为 $1-\delta$，前提是

$$L \ge c_3 \ln\left(\frac{8M_{ca}}{\delta}\right) \max\left(\frac{q_1^2\Delta(\mathbb{S})}{c_2\epsilon^2}, \frac{q_1\sqrt{\Delta(\mathbb{S})}}{\epsilon}, \frac{L_0^2}{c_2}, L_0\right). \tag{26}$$

其中 $q_1 = q\|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2, L_0 = \|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2\sqrt{\Delta(\mathbb{S})/(C_S\beta)}$ 和 c_2, c_3均为通用常数。

证明。 见附录B-C □

推论 1. 考虑测量模型 (1)，其中$\mathbb{S}$ 是无孔稀疏阵列。假设 $\beta > 0$ 和统计假设 [**A1-A3**] 成立。那么对于任意 $0 < \delta < 1$和 $0 < \epsilon \le q\min(C_S\beta, p_{\min}P\sqrt{\Delta(\mathbb{S})/c_2})$，匹配$\widehat{\ }$距离误差满足 $\mathrm{md}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) \le \epsilon$，且其成立概率至少为 $1-\delta$，前提是

$$L \ge c_3 \ln(8M_{ca}/\delta)\, q_1^2\Delta(\mathbb{S})/(c_2\epsilon^2), \tag{27}$$

其中 q_1, L_0, c_2, c_3 由定理 3 给出。

证明。利用引理4中关于 $\|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2$ 的下界，可得 $\epsilon \le \min(C_S\beta q, q_1\sqrt{\Delta(\mathbb{S})/c_2})$。由于 $\beta \ge \epsilon/(C_S q)$，这意味着 $L_0 \le q_1\sqrt{\Delta(\mathbb{S})}/\epsilon$。该不等式还意味着 $L_0^2/c_2 \le q_1^2\Delta(\mathbb{S})/(c_2\epsilon^2)$。利用 $\epsilon \le q_1\sqrt{\Delta(\mathbb{S})/c_2}$，可得 $L_0 \le (q_1\sqrt{\Delta(\mathbb{S})}/\epsilon^2)(q_1\sqrt{\Delta(\mathbb{S})/c_2}) = q_1^2\Delta(\mathbb{S})\, c_2\epsilon^2$。因此，(27) 蕴含 (26)，因为 $\max(q_1^2\Delta(\mathbb{S})\, c_2\epsilon^2, \frac{q_1\sqrt{\Delta(\mathbb{S})}}{\epsilon}, \frac{L_0^2}{c_2}, L_0) = q_1^2\Delta(\mathbb{S})\, c_2\epsilon^2$，证明完毕。 □

冗余系数在确定时间样本复杂度中的作用： 推论 1 表明，如果快拍数量与冗余系数$\Delta(\mathbb{S})$成正比增长，那么就可以将匹配距离误差限制在任意小的 ϵ以内。回想一下，$\Delta(\mathbb{S})$ 是 $\mathbb{S}$ 的冗余模式的函数，根据引理 3，我们有$\Delta(\mathbb{S}_{\text{ula}}) = \Theta(\ln(P))$，且 $\Delta(\mathbb{S}_{\text{nest}}) = \Theta(P^2)$。基于此，乍看之下，人们可能会根据 (27) 得出结论：对于相同数量的传感器，嵌套阵列所需的快拍数远多于均匀线性阵列。这也与一种现有的误解相符，即基于互质阵列的处理需要大量快拍。然而，实际上，样本复杂度还受 $\Delta(\mathbb{S})$与 (27) 中其他几何相关项（例如 $q_1 = q\|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2$）之间相互作用的控制，而这些项又取决于物理阵列和互阵列尺寸。在下一节中，我们将在 $S = O(1)$的设定下澄清这一关于嵌套阵列看似需要更多快拍的误解。

时空权衡： 推论 1 中对快拍数量的要求与 β 成反比（因为 $q \propto \frac{1}{\beta}$）。如果阵列几何结构和信源配置保持不变，并提高信噪比（通过提高 $p_{\min}$ 或降低噪声功率 σ），推论 1 表明，我们可以用更少的快拍达到相同的错误概率。我们的仿真结果也与这一理论预测一致。这种依赖于信噪比和阵列几何结构的快拍特性描述，是我们工作的另一项创新贡献。

IV. 深入探讨稀疏阵列超分辨率的分离条件

为了理解最小非零奇异值 $\sigma_S(\mathbf{A}^{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta}))$ 的行为，我们考虑最小间隔 [20] 的概念：

$$\Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta}) = \min_{\substack{i,j\in\Omega \\ i\neq j}} \min_{k\in\mathbb{Z}} \left|\omega_i - \omega_j + k\right| \tag{28}$$

其中，ω_i 是与方向 θ_i相对应的归一化空间频率。根据定义，对于所有 $\boldsymbol{\theta}$，我们有 $0 \le \Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta}) \le 1/2$。与其分析任意的源配置 $\boldsymbol{\theta}$，不如将其表示为

最小间隔的函数，从而可将(23)转化为更易解释的条件。当 $\Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta})$大于某个与 $M_{ca}+1$成反比的阈值时，即 $\Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta}) > \frac{\gamma}{M_{ca}+1}$，$\gamma > 1$，这类源配置将被称为“良好分离”状态。我们将考察这对于特定阵列几何结构（例如均匀线性阵列和嵌套阵列）意味着什么，并获得关于 L的紧界。

A. “良好分离”情形

本节将探讨如何利用特征值间隙条件，在“良好分离”区域内为不同的阵列几何结构推导出关于信噪比的充分条件。设$\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K\times S}$ 是一个范德蒙德矩阵，其中$[\mathbf{V}]_{m,n} = z_n^{m-1}$其中 $\{z_n\}_{n=1}^{S}$ 是该矩阵所谓的“节点”。我们首先总结 [21],[24], [31], [32]中的结果，该结果刻画了良好分离区域内范德蒙德矩阵的最小奇异值。以下引理由 [32,式（32）] 推出，它是 [32, 定理 1]中的一个中间结果。

引理 5. 设$\mathbf{V}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{C}^{K\times S}$ 是一个范德蒙德矩阵，其中 $z_n = e^{j2\pi\alpha_n}$ 对 $1 \le n \le S$ 和 $S \le K$。若 $\alpha_i \in [0,1)$ 彼此不同且满足:

$$\min_{\substack{i,j\in\Omega\\ i\neq j}} \min_{k\in\mathbb{Z}} \left|\alpha_i - \alpha_j + k\right| \ge \frac{\gamma}{K} \tag{29}$$

对于某个常数 $\gamma > 1$，则有:

$$\sigma_S(\mathbf{V}(\boldsymbol{\alpha}))^2 \ge K/C', \text{ where } C' := \gamma/(\gamma-1). \tag{30}$$

根据引理 5，如果源配置 $\boldsymbol{\theta}$满足 $\Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta}) \ge \frac{\gamma}{P}$，其中 $\gamma > 1$ 和 $S \le P$，则有以下下界:

$$\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta}))^2 \ge P/C' \tag{31}$$

在以下命题中，我们将引理 5 应用于刻画嵌套阵列的 $\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S})$ 的下界。

命题2 （充分分离）。设 $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{(N_1,N_2)}$ 嵌套阵列 为一个嵌套阵列，具有 $N_1 = \lceil P/2\rceil$ 和 $N_2 = \lfloor P/2\rfloor$，且满足 $P \ge 3$。假设 $\Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta}) \ge \frac{5\gamma}{P^2}$，其中 $\gamma > 1$ 和 $S \le P^2/5$。则有以下下界:

$$\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta}))^2 \ge P^2/C_n', \text{ where } C_n' = 5\gamma/(\gamma-1). \tag{32}$$

证明。对于具有 $N_1 = \lceil P/2\rceil$ $N_2 = \lfloor P/2\rfloor$ 和 的嵌套阵列，由（）可得 $M_{ca}+1 \ge \frac{P^2}{5}$。因此，（） $\Delta_{\min}\boldsymbol{\theta} \ge \frac{3}{M_{ca}+1} \ge \frac{5\gamma}{P^2}$ 意味着（）。所以，引理 5 中关于 $\Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta})$ 的条件成立，从而得到所需的下界：$\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta}))^2 \ge \frac{M_{ca}+1}{C'} \ge (\frac{\gamma-1}{\gamma})\frac{P^2}{5} = \frac{P^2}{C_n'}$. □

命题2表明，对于嵌套阵列，若 $\Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta}) \ge 5\gamma/P^2$，则信源之间分离良好；此时，$\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta}))$ 以 $\Omega(P)$ 的速率增长，这是由于嵌套阵列具有更大的差分互质阵列。

为了突出样本复杂度仅取决于关键模型参数这一点，我们定义一些量，将保持固定的参数组合起来（例如 S，$p_{\min}$，$p_{\max}$，σ）：

$$C_{\text{ula}}(S,\sigma,p_{\max}) := 8C_S'^2C'^3\frac{c_3}{c_2}(S+\frac{\sigma^2}{p_{\max}})^2 \tag{33}$$

$$C_{\text{nest}}(S,\sigma,p_{\max}) := 4C_S'^2C_n'^3\frac{c_3}{c_2}(S+\frac{\sigma^2}{p_{\max}})^2 \tag{34}$$

其中 C', C_n' 为通用常数，而定理 2 中定义的 C_S 仅依赖于 S。利用命题2，我们现在针对均匀线性阵列和嵌套阵列具体化推论 1。

定理 4。设 $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{\text{ula}}$ 为具有 P 个传感器的均匀线性阵列。假设信源之间的最小角间隔以及信噪比满足以下条件，其中 $\gamma > 1$为某个:

$$\Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta}) \ge \gamma/P, \quad p_{\min}/\sigma^2 > 2C'/P, \text{ where } C' = \frac{\gamma}{\gamma-1}.$$

在假设 [**A1-A_3**], $0 < \delta < 1$ $0 < \epsilon \le$ 下，对于任意和 $C_1(S)$: $= C_SC_S'$，$\text{md}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}) \le \epsilon$ 以至少 $1-\delta$的概率成立，条件是 $P \ge 3$ 并且

$$L \ge \frac{C_{\text{ula}}(S,\sigma,p_{\max})}{\epsilon^2}\left(\frac{p_{\max}}{p_{\min}}\right)^2\left(\ln\left(\frac{8P}{\delta}\right)\right)^2. \tag{35}$$

证明。根据引理 5，如果 $\Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta}) \ge \gamma/P$，则有$\sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta})) \ge \frac{P}{C'}$。在信噪比的假设下，有 $p_{\min}\sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta})) \ge p_{\min}\frac{P}{C'} > 2\sigma^2$ $\beta >$ (**A**( ))，$p_{\min}\sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta}))/2 > 0$ $M_{ca}+1 = P$ 这保证了 (**A**( ))。注意，对于均匀线性阵列，根据 $\sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta})) \ge \frac{P}{C'}$这一事实，我们可以得到以下界:

$$q = \frac{C_S'\sqrt{P}}{\beta\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta}))} \le \frac{2C_S'\sqrt{P}}{p_{\min}\sigma_S^3(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta}))} \le \frac{C_S''}{p_{\min}P} \tag{36}$$

其中 $C_S'' = 2C_S'C'^{1.5}$。注意:

$$C_S\beta q = \frac{C_SC_S'\sqrt{M_{ca}+1}}{\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta}))} \ge C_1(S)\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P}} = C_1(S) \tag{37}$$

其中该不等式由 $\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}) \le \|\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}\|_F/\sqrt{S} = \sqrt{P}$ 得出。利用 $\beta \le p_{\min}\sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta}))$ 这一事实，以及上述关于 $\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta}))$ 的下界，可得

$$q \ge \frac{C_S'\sqrt{P}}{p_{\min}\sigma_S^3(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S}(\boldsymbol{\theta}))} \ge \frac{C_S'}{p_{\min}P}. \tag{38}$$

因此，$qp_{\min}P\sqrt{\Delta(\mathbb{S}_{\text{ula}})/c_2} \ge C_S'\sqrt{\Delta(\mathbb{S}_{\text{ula}})/c_2} \ge C_S'\sqrt{\ln(P)}/c_2$，其中最后一个不等式由引理 3 中 $\Delta(\mathbb{S}_{\text{ula}})$ 的下界推出。回顾 $c_2 < 1$[2]，因此对于 $P \ge 3$，$\sqrt{\ln P}/c_2 > 1$。这意味着 $\min(C_1(S)\ C_S'\sqrt{\ln(P)}/c_2) = C_1(S)$。结合式 (37)，可得 $\epsilon \le C_1(S) = \min(C_1(S)\ C_S'\sqrt{\ln(P)}/c_2) \le \min(C_S\beta q,\ qp_{\min}P\sqrt{\Delta}\mathbb{S}_{\text{ula}}/c_2)$，这确保了该假

[2]常数 $c_2 = 3/16\sqrt{2}$ 在附录 A 中定理 1 的证明里给出。

设 ϵ 满足推论 1 中的条件。由引理4，得到$\|\mathbf{R}_{\mathbf{y}}\|_2 \le p_{\max}PS+\sigma^2$。利用这个界和式 (36)，可得：

$$\begin{aligned} q_1\sqrt{\Delta(\mathbb{S}_{\text{ula}})} &\le \frac{C''_S}{p_{\min}P}(PSp_{\max}+\sigma^2)\sqrt{2\ln(P)} \\ &= C''_S(S+\frac{\sigma^2}{p_{\max}P})\left(\frac{p_{\max}}{p_{\min}}\right)\sqrt{2\ln(P)} \\ &\le \widetilde{C}_1(S,\sigma,p_{\max})\left(\frac{p_{\max}}{p_{\min}}\right)\sqrt{\ln(8P/\delta)} \quad (39)\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{C}_1(S,\sigma,p_{\max}) := (S+\frac{\sigma^2}{p_{\max}})\sqrt{2}C''_S$。上界由以下观察可得：对所有 $P\ge 1$，$(S+\frac{\sigma^2}{p_{\max}P}) \le (S+\frac{\sigma^2}{p_{\max}})$；对任意 $\delta<1$，$\ln(P)\le\ln(8P/\delta)$。注意，由式 (33) 可知，$C_{\text{ula}}(S,\sigma,p_{\max}) = c_3/c_2\widetilde{C}_1^2(S,\sigma,p_{\max})$。由式 (39)，我们有

$$\begin{aligned} c_3\ln(\frac{8P}{\delta})\frac{q_1^2\Delta(\mathbb{S}_{\text{ula}})}{c_2\epsilon^2} &\le \frac{c_3}{c_2\epsilon^2}\widetilde{C}_1^2(S,\sigma,p_{\max})(\frac{p_{\max}}{p_{\min}}\ln(8P/\delta))^2 \\ &= \frac{C_{\text{ula}}(S,\sigma,p_{\max})}{\epsilon^2}\left(\frac{p_{\max}}{p_{\min}}\right)^2(\ln(8P/\delta))^2.\end{aligned}$$

因此，(35) 蕴含 (27)。由于 $\beta>0$，且满足应用该推论所需的关于 ϵ 和 L 的条件，应用推论 1 即可完成证明。□

定理5。 设 $\mathbb{S}=\mathbb{S}^{(N_1,N_2)}$ 嵌套阵列为一个嵌套阵列，且具有$N_1=\lceil P/2\rceil$ 和 $N_2=\lfloor P/2\rfloor$。假设信源之间的最小角间隔以及信噪比满足以下条件，其中某个 $\gamma>1$:

$$\Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta})\ge\frac{5\gamma}{P^2},\quad \frac{p_{\min}}{\sigma^2}>\frac{2C'_n}{P^2},\ \text{where } C'_n=5\gamma/(\gamma-1).$$

在假设 [**1** **3**], $\delta>0$ $0<$ **A-A**对任意 $\epsilon\le C_2$ S $=\sqrt{1/5}C_SC'_S$ $\boldsymbol{\theta}$ $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ $\le\epsilon$ 和 ( ) : 均成立的条件下，md(,) 以至少 $1-\delta$ 的概率成立，前提是 $P\ge 3$ 且

$$L\ge\frac{C_{\text{nest}}(S,\sigma,p_{\max})}{\epsilon^2}\left(\frac{p_{\max}}{p_{\min}}\right)^2\ln\left(\frac{8P^2}{\delta}\right). \quad (40)$$

证明。根据命题2，若 $\Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta})\ge 5\gamma/P^2$，则有 $\sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\theta}))\ge\frac{P^2}{C'_n}$。沿用定理 4 中的相同论证，可得 $\beta>0$。利用 $M_{\text{ca}}+1\le P^2$（由 (3) 得出）这一事实以及 $\sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\theta}))$ 的下界，可得

$$q\le\frac{C'_SP}{\beta\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\theta}))}\le\frac{2C'_SP}{p_{\min}\sigma_S^3(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}(\boldsymbol{\theta}))}\le\frac{\bar{C}''_S}{p_{\min}P^2} \quad (41)$$

其中 $\bar{C}''_S = 2C'_SC_n'^{1.5}$ σ_S $_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}$ ( ) $\le$ ($\boldsymbol{\theta}$ 。注意到 $\|\mathbf{A}_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}\|_F/\sqrt{S}=\sqrt{M_{\text{ca}}+1}\le P$ 37。因此，类似于 ( )，我们可以证明 $C_S\beta q\ge C_2(S)$。利用 ( ) 中的事实 $P^2/5\le M_{\text{ca}}+1$ 3 38 $q\ge$，类似于 ( )，可得 $\frac{C'_SP}{\sqrt{5}p_{\min}\sigma_S^3}\ge\frac{C'_S}{\sqrt{5}p_{\min}P^2}$ 3 Δ $\mathbb{S}_{\text{nest}}$ $_{\mathbb{U}_{\mathbb{S}}}$ $\boldsymbol{\theta}$ $\ge$ (A())。由引理，( ) $P^2/16$ $qp_{\min}P\sqrt{\Delta}$ $\mathbb{S}_{\text{nest}}$ $\sqrt{c_2}\ge\frac{C'_S}{4c_2\sqrt{5}}$ 。因此 ( ) 。

由于$4c_2<1$，可知 $\min(C_2(S)\ C'_S/(4c_2\sqrt{5}))=C_2(S)$，因此 $\epsilon\preceq C_2(S)$ $=\min(C_2(S)\ C'_S/(5c_2\sqrt{5}))$ 确保关于 ϵ 的假设满足推论 1 的条件。利用$\Delta(\mathbb{S}_{\text{nest}})\le P^2$ (由引理 3 得出)、引理4 以及 (41)，得到：

$$q_1\sqrt{\Delta(\mathbb{S}_{\text{nest}})}\le\widehat{C}_1(S,\sigma,p_{\max})(p_{\max}/p_{\min}), \quad (42)$$

其中 $\widehat{C}_1(S,\sigma,p_{\max})=(S+\frac{\sigma^2}{p_{\max}})\bar{C}''_S$。由 (42)，可得

$$\begin{aligned}\ln(\frac{8M_{ca}}{\delta})\frac{c_3q_1^2\Delta(\mathbb{S}_{\text{nst}})}{c_2\epsilon^2} &\le \frac{c_3}{c_2\epsilon^2}\widehat{C}_1^2(S,\sigma,p_{\max})\ln(8P^2/\delta)(\frac{p_{\max}}{p_{\min}})^2 \\ &= \frac{C_{\text{nest}}(S,\sigma,p_{\max})}{\epsilon^2}\left(\frac{p_{\max}}{p_{\min}}\right)^2\left(\ln(8P^2/\delta)\right).\end{aligned}$$

因此，由于 $\beta>0$，且应用该推论所需的关于 ϵ 和 L 的条件均已满足，(40) 蕴含 (27)，再应用推论 1 即可完成证明。□

请注意，ϵ 定理 4 和定理 5 适用的取值范围略有不同。然而，在 $\epsilon\le\min(C_1(S)\ C_2(S))=C_2(S)$ 和 $P\ge 3$ 的情况下，我们可以公平地比较这两种阵列几何结构。

以相同快拍数实现更高分辨率： 定理 4 表明，对于均匀线性阵列，若满足以下条件，则协阵列 ESPRIT 的匹配距离误差可以被 ϵ 所界定：(i) 快拍数仅随差分协阵协方差矩阵的维度呈（多项式）对数增长；(ii) 最小间隔为 $\Delta_{\min}\ge\gamma/P$。另一方面，定理5保证，对于具有 P 个传感器的嵌套阵列，可以用相同的 ϵ 界定匹配距离误差，同时所需快拍数的数量级大致相同（$L=\Omega(P^2)$），但其分离条件更加宽松，允许 $\Delta_{\min}$ 达到 $\Delta_{\min}=\Omega(1/P^2)$。这验证了，与具有相同时间快拍预算的均匀线性阵列相比，嵌套阵列具有更优越的分辨率特性。这一点在相关文献中已有实证观察，但直到现在才得到理论上的确立。

嵌套阵列的抗噪性： 如果我们考虑适用于均匀线性阵列和嵌套阵列的间隔范围 $\Delta_{\min}=\Omega(1/P)$，定理 4 和定理 5 表明，为了以数量级相同的快拍数（$L=\Omega(\ln\ P)$）达到相同的到达角误差界，嵌套阵列所需的信噪比（$p_{\min}/\sigma^2$）可以比均匀线性阵列低P 倍。这体现了嵌套阵列在抗噪鲁棒性方面的另一项优势，尤其是在低信噪比范围 [8]内。

动态范围的影响： 我们的分析还揭示了动态范围较大的信源带来的挑战 $p_{\max}/p_{\min}$，这也在 [22]中有所体现。定理5表明，在信噪比相同（以最弱信源为基准定义 $p_{\min}$）时，要分辨功率差异悬殊的信源，可能需要更多快拍（其 $p_{\max}$ 较固定的 $p_{\min}$更高）。正如后文将展示的，数值结果确实与我们的分析预测一致。

B. 大量快拍之谜：相关误差与角度估计误差

由于嵌套阵列（以及其他）稀疏阵列通过相关处理实现虚拟差分共阵，人们普遍认为，要估计传感器对之间的 $\Theta(P^2)$（交叉）相关值，需要大量时间快拍（$L=\Omega(P^2)$）。这种关于快拍数量庞大的“误解”（其数量随传感器数量 P 呈二次增长）部分而言是正确的：如果我们的目标是估计差分协阵协方差矩阵 $\mathbf{T}_{ca}$。若只允许 L 按 $L=\Theta(\log\ P)$ 的速度增长

（即所谓的样本匮乏区间），那么协方差估计确实可能产生较大误差。然而，定理5表明，只要 L 按 $\Omega(\frac{1}{\epsilon^2}\ln(8P^2/\delta))$ 的速度增长，即使嵌套阵列的差分共阵协方差误差在这一快拍匮乏区间内可能随 P 增大，角度估计误差仍可在高概率下任意小（ϵ）（$1-\delta$）。这一令人意外的现象源于：潜在较大的协方差估计误差（在此区间内甚至可能随 P 增大）实际上可由嵌套阵列增大的孔径/差集所带来的较大受限最小奇异值 $\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S})$ 加以缓解或抵消。只要 $\Delta_{\min}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{5\gamma}{P^2}, \sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_S})$ 按 cP^2 的速度增长（其中 c 为某个常数），我们就能实现可靠的角度估计，尽管协方差估计可能并不可靠。

V. 仿真

我们通过数值方法研究差分共阵处理适用的信噪比范围（第 V-A 节）、信噪比和快拍数量对到达方向估计误差的影响（第 V-B 和 V-C 节）、到达方向估计误差与协方差估计误差之间的关系（第 V-D 节），以及信源功率动态范围对分辨两个间距很近的信源的影响（第 V-E 节）。

A. 何时适合采用基于差分协阵的到达方向估计？

我们首先考察在什么情况下，基于差分协阵的算法相较于更传统的到达方向估计方法具有优势。具体而言，对于均匀线性阵列，我们可以直接对式（7）中的样本 $\widehat{}$协方差矩阵$\mathbf{R}_{\boldsymbol{y}}$ 应用 MUSIC 或 ESPRIT ，而不必对式（9）中的平均差分协阵 $\widehat{}$协方差矩阵 $\mathbf{T}_{ca}$ 进行处理。图 1 展示了均匀线性阵列下，差分协阵 ESPRIT 和直接 ESPRIT 的匹配距离误差（取 10^3 次蒙特卡洛试验的平均值）；同时，为作比较，还展示了传感器数量相同的嵌套阵列（$P=20$）下差分协阵 ESPRIT 的结果。我们考虑 $L=100$ 个快拍，以及间隔为 $\Delta=2/P$、功率相等的 $S=4$ 个信源。在中低信噪比下，基于差分协阵处理的优势显而易见。在高信噪比下，情况则相反：直接 ESPRIT 的误差随信噪比增加而持续下降，而差分协阵 ESPRIT 的误差则趋于饱和[3]。然而，在信噪比受限或快拍受限的条件下，基于差分协阵的处理——包括冗余平均（8）——显然能带来显著优势。由于许多应用主要关注这类具有挑战性的场景，本文将重点讨论差分协阵 ESPRIT。

B. 通过提高信噪比或增加快拍数来提升分辨率

接下来，我们比较具有相同传感器数量 $P=20$ 的嵌套阵列和均匀线性阵列的分辨概率随最小间隔变化的情况。两种阵列几何结构均采用协阵列 ESPRIT。我们考虑两个功率相等的信源（$p_1=p_2$），其（归一化）角度为 $\boldsymbol{\omega}=\{0.1, 0.1+\Delta\}$。当估计的到达方向满足 $\max_i \lceil\omega_i-\omega_i\rceil \leq \Delta/10$ 时，即判定信源已成功分辨。图 2 展示了间隔变化时的经验分辨概率（对 1000 次蒙特卡洛试验取平均）

[3]这一众所周知且根本的现象源于差分协阵协方差矩阵的有限快拍误差，参见[5]–[7]。

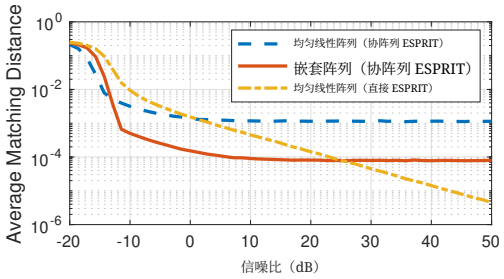


图 1：ESPRIT 应用于样本协方差矩阵 (7)（直接 ESPRIT）和估计得到的差分协阵协方差矩阵 (9)（协阵列 ESPRIT）的比较。在中低信噪比下，协阵列 ESPRIT 的角度估计误差低于直接 ESPRIT。

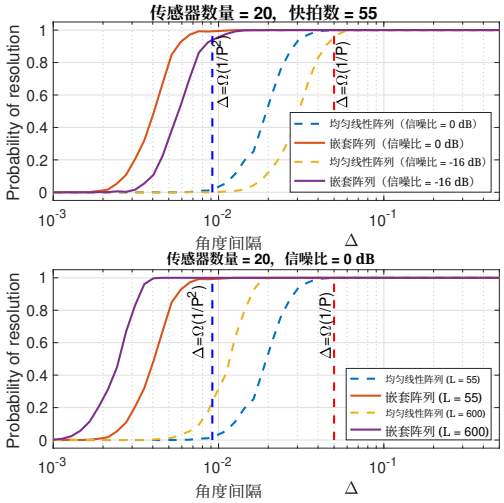


图 2：不同信噪比水平（上）和快拍数（下）下的分辨概率与信源间隔的关系。增加任一参数都能提高两种阵列的分辨率。

Δ 以及固定的快拍数 $L=55$ 和信噪比 $=0$ 和-16 dB。我们观察到，两种阵列几何结构在信噪比更高时都能在更小的间隔下工作，即 $\sigma/p_{\min}$比值更小。事实上，正如定理 4 和定理 5 所预测的那样，分辨概率由低转高的过渡分别出现在均匀线性阵列的 $\Delta \propto 1/P$ 附近和嵌套阵列的 $\Delta \propto 1/P^2$ 附近。图 2 还表明，增加快拍数也可以提高分辨率。此处信噪比固定为 0 dB，快拍数分别为 $L=55$ 和 $L=600$。

C. 快拍数与信噪比的权衡

V-B 节表明，提高信噪比和增加时间快拍数可以相互替代，从而提升分辨率。现在我们进一步研究这一权衡。我们考虑位于 $\boldsymbol{\omega}=\{0.1, 0.1+\Delta\}$ 的 $S=2$ 等功率信源，其中 $\Delta \in \{2/P, 2/P^2\}$ 且 $P=20$。图 3 展示了分离度为 $\widehat{}$ 时，相对匹配距离误差 $\mathrm{md}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})/\Delta$ （对10^3 次蒙特卡洛试验取平均）随快拍数和信噪比变化的情况。首先，无论是均匀线性阵列（左列）还是嵌套阵列（右列），要获得相同的恢复误差，信噪比越高所需的快拍数越少（反之亦然）。这与定理 3 相符，该定理指出匹配距离分别通过式 (22) 和式 (26) 取决于快拍数和信噪比，而匹配距

离取决于快拍数和信噪比。其次，与均匀线性阵列相比，对于信源间隔 $2/P$（上排）和 $2/P^2$ （下排），嵌套阵列在快拍数与信噪比之间呈现出更有利的权衡。对于 $\Delta = 2/P^2$，这一优势尤为明显：正如定理5所预测的，嵌套阵列在更大范围的工作点上都能实现较低的相对匹配距离。请注意，灰色像素对应的相对误差约为分离度的 10 %，而白色对应 $\leq 1\%$ 的误差。

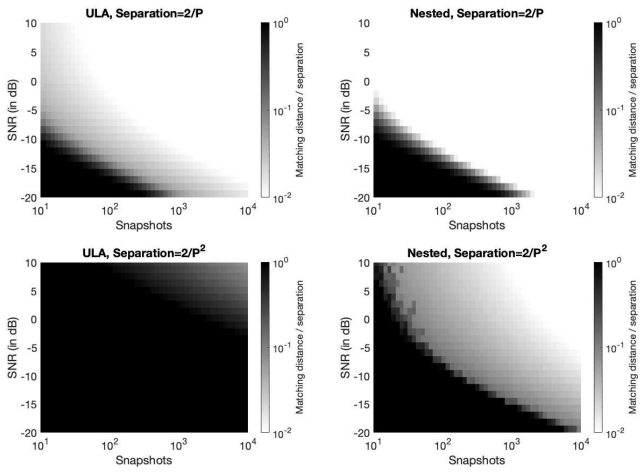


图 3：相对匹配距离误差 $\mathrm{md}(\boldsymbol{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})/\Delta$ 随快拍数和信噪比的变化。对于信源间隔 $\Delta = 2/P$（上排）和 $\Delta = 2/P^2$（下排），嵌套阵列（右列）的误差均低于均匀线性阵列（左列）。

D. 到达方向与协方差估计误差

接下来，我们说明嵌套阵列中基于差分协阵的到达方向估计的一项有趣优势。我们考察平均到达方向匹配距离和平均协方差估计$\widehat{}$误差，其定义为 $\|\mathbf{T}_{ca} - \mathbf{T}_{ca}\|_2$ ，并令传感器数量 P变化， $S = 4$等功率信源以间隔 $\Delta \in \{1/P^{1.5}, 1/P^2\}$均匀排列。快拍数为 $L = 50$，信噪比为 $= 0$ dB。图 4 显示，与传感器数量相同的均匀线性阵列相比，嵌套阵列的协方差估计误差更大。然而，尽管协方差矩阵 $\mathbf{T}_{ca}$的估计$\widehat{}$较差，应用差分协阵$\widehat{}$ESPRIT 对 $\mathbf{T}_{ca}$进行处理时，嵌套阵列仍能获得更优的到达方向估计性能。事实上，当间隔为$\Delta = 1/P^2$时，均匀线性阵列的平均匹配距离不再随 P 减小，而嵌套阵列的平均匹配距离则继续减小。这得益于嵌套阵列较大的差分协阵孔径，它抵消了有限快拍协方差估计误差的影响，正如第四节-B 所述。请注意，当快拍数固定而传感器数量 P增加时，差分协阵协方差矩阵 $\mathbf{T}_{ca}$的各元素会变得越来越难以估计，因为$\mathbf{T}_{ca}$的大小与差分协阵阵元数量 M_{ca}成正比；对于均匀线性阵列，该数量为 $\propto P$，对于嵌套阵列则为 $\propto P^2$ 。

E. 信源功率动态范围的影响

在最后一项实验中，我们考察协阵列 ESPRIT 分辨功率不等的两个信源的能力。我们将

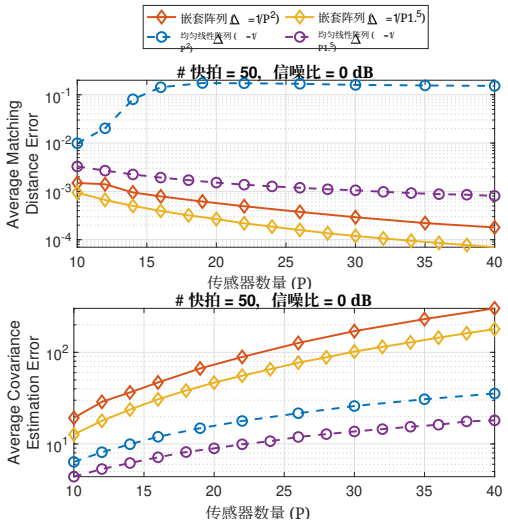


图 4：平均匹配距离（上）和协方差估计误差（下）随传感器数量 P 的变化。尽管快拍数量较大，嵌套阵列的到达方向估计误差仍在下降

与均匀线性阵列相比的协方差估计误差。

动态范围设为 $p_{\max}/p_{\min} \in \{1, 10\}$，具体做法是将较弱信源的功率固定为 $p_{\min} = 0.2$，并改变 $p_{\max}$。图 5 显示，当 $p_{\max}/p_{\min} = 10$ 与 $p_{\max}/p_{\min} = 1$相比时，区分两个信源所需的快拍数明显更多（两者间隔为 $\Delta = 1/P$）。这与定理 4 和定理 5 一致：定理表明，若固定 $p_{\min}$ 和 σ ，则以高概率分辨两个信源所需的快拍数会随 $p_{\max}$ 增加，而与阵列几何结构无关。这揭示了动态范围 $p_{\max}/p_{\min}$ 对样本复杂度存在非平凡的影响。因此，与功率相等的情况相比，区分功率相差很大的两个信源更具挑战性，所需快拍数也更多。

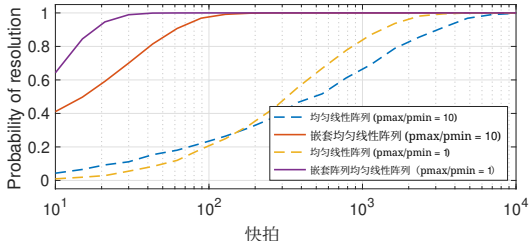


图 5：信源功率动态范围对分辨概率的影响。对于动态范围较大的两个信源，协阵列 ESPRIT 需要更多快拍才能检测到它们 $p_{\max}/p_{\min}$。

VI. 结论

本文研究了协阵列 ESPRIT 的角度估计误差。我们考虑了加性噪声和有限快拍协方差估计误差，并对托普利兹协方差矩阵情形下的误差进行了概率刻画。结果表明，当时间快拍数随传感器数量呈对数增长时，协阵列 ESPRIT 以高概率实现任意低的估计误差。这也表明，即使协方差估计误差可能较大，到达方向估计误差仍可能很小。

最后，我们的理论分析和仿真结果表明，与传感器数量和快拍数相同的均匀线性阵列相比，稀疏阵列能够提供更高的分辨率和更强的抗噪性。

附录 A

A. 中间结果

我们首先陈述 Hanson-Wright 不等式的复数扩展 [33], , 该扩展通过采用 [34, 第 3.1 节，第 9]页中描述的策略应用 [34,定理 1.1] 得到。

引理 6. 设$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$为一个固定的厄米矩阵。考虑随机向量$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^\top \in \mathbb{C}^n$，其独立的实部和虚部 Re($x_i$)、Im($x_i$) 满足 $\mathbb{E}(\text{Re}(x_i)) = \mathbb{E}(\text{Im}(x_i)) = 0$，且 $\|\text{Re}(x_i)\|_{\psi_2} \le K$、$\| x_i \|_{\psi_2} \le K$ $\epsilon > 0$ Im( )。那么，对于任意，有

$$\mathbb{P}(|\mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{x})| > \epsilon) \le 2\exp\left(-c\min\left(\frac{\epsilon^2}{2K^4\|\mathbf{A}\|_F^2}, \frac{\epsilon}{K^2\|\mathbf{A}\|_2}\right)\right)$$

其中 $c > 0$ 为一个通用常数。

证明。 令$\mathbf{z} = [$为 Re(x)$^\top$、Im(x)$^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2n}$，并定义：$= \tilde{\mathbf{A}}$ $\begin{bmatrix} - \end{bmatrix}$ Re(A) Im(A) Im(A) Re(A) 。容易验证，对于任意厄米$\mathbf{A}$，有以下等式$\mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{z}^T\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}$。此外，可以验证 $\|\tilde{\mathbf{A}}\|_F = \sqrt{2}\|\mathbf{A}\|_F$ 以及 $\|\tilde{\mathbf{A}}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2$。现在，我们可以应用 [34, 定理 1.1], , 得到所需的概率界。 □

引理 7. 设$\mathbf{w}_i \in \mathbb{C}^n$，$1 \le i \le T$ 为服从分布 $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$的独立同分布复圆对称高斯随机变量。设$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$为固定的厄米矩阵，则对于任意 $\epsilon > 0$及通用常数 c P $|\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}$ ^H_i $_i - \mathbb{E}[$ ^H_i $_i]|$ $\ge$ ϵ $\le$，有 2 (wAwwAw) exp $\left(-eL\min\left(\frac{\epsilon^2}{2K^4\|\mathbf{\Sigma}\|_2^2\|\mathbf{A}\|_F^2}, \frac{\epsilon}{K^2\|\mathbf{\Sigma}\|_2\|\mathbf{A}\|_2}\right)\right)$。

证明。由于 $\mathbf{w}_i$ 是服从 $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$的复圆对称高斯随机变量，我们定义一个新的变换变量 $\mathbf{u}_i = \mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{w}_i$，其中 $\mathbf{\Sigma}^{1/2}$ 是协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}$的平方根。可以验证，$\mathbf{u}_i \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$，即它也是一个实部和虚部独立的复圆对称高斯随机变量。定义分块对角矩阵$\tilde{}$A $=$ diag(A . . . , A) $\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{1/2} =$ diag($\mathbf{\Sigma}^{1/2}, \ldots, \mathbf{\Sigma}^{1/2}$) $\in \mathbb{C}^{nL\times nL}$ 以及 $\tilde{}$u $= [\mathbf{u}_1^T, \ldots, \mathbf{u}_L^T]^T \in \mathbb{C}^{nL}$。接下来可以观察到，$\sum_{i=1}^{L}\mathbf{w}_i^H\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{L}\mathbf{u}_i^H\mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{u}_i = \mathbf{u}^H\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{1/2}\tilde{}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{1/2}\tilde{}\mathbf{u}$。由于它是独立同分布随机变量之和，我们有$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{L}\mathbf{w}_i^H\mathbf{A}\mathbf{w}L\mathbb{E}($ ^H_i $)$ L) w Aw。所需概率可改写为：$P(|\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\text{Re}(\mathbf{w}_i^H\mathbf{A}\mathbf{w}$ $=$ P $^H\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{1/2}\tilde{}\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{1/2}\tilde{}$ $^H\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{1/2}\tilde{}\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{1/2}\tilde{}$) $-$ $\mathbb{E}[$ Re($\mathbf{w}_i^H\mathbf{A}\mathbf{w}$)$|$ $\ge$ ϵ) (|Re(u A u) $-\mathbb{E}$[Re(u A u)]| $\ge L\epsilon$)。回顾一下，Re($\tilde{u}_i$)、Im($\tilde{u}_i$)均独立同分布于$\mathcal{N}(0, 1/2)$，因此是具有 $K = 2/\sqrt{3}$ 的次高斯随机变量。注意，由于分块对角结构，我们有$\|\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{1/2}\tilde{}\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{1/2}\|_F^2 = L\|\mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}^{1/2}\|_F^2 \le L\|\mathbf{A}\|_F^2\|\mathbf{\Sigma}\|_2^2$ 以及$\|\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{1/2}\tilde{}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{\Sigma}}^{1/2}\|_2 = \|\mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}^{1/2}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|_2\|\mathbf{\Sigma}\|_2$。应用引理 6 并取 $\epsilon = \epsilon L$，即可完成证明。 □

B. 定理 1 的证明

根据引理2，我们有 $P(\|\mathbf{E}_L\|_2 \ge \epsilon) \le P(\sup|f_{\mathbf{e}}(\theta)| \ge \epsilon)$。一般而言，直接计算这个上确界并不简单；不过，我们利用以下 [28]中的结果，通过在少数网格点上计算函数值来对其进行界定。

引理 8. [28, 定理7.28，第10章，第2卷，第 33]页。设 $f(\theta)$ 为阶数为 N的三角多项式。那么，$\sup_{\theta\in[-\pi,\pi]}|f(\theta)| \le 2\max_{1\le k\le 4N}|f(\theta_k)|$，$\theta_k = \frac{k-2N}{4N}\pi$.

根据命题 1，我们有 $f_{\mathbf{e}}(\theta) = \text{tr}(\mathbf{E}_{\mathbf{y}}\mathbf{\Lambda}(\theta))$。然而，$\hat{}$我们希望将其与样本协方差矩阵 $\mathbf{R}_{\mathbf{y}}$联系起来。为此，我们证明 $\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{av}}\mathbf{\Lambda}(\theta)) = \text{tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{y}}\mathbf{\Lambda}(\theta))\hat{}$，其中回顾式 (7)，$\mathbf{R}_{\mathbf{y}}$ 是样本协方差矩阵：

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathbf{R}_{\text{av}}\mathbf{\Lambda}(\theta)) &= \sum_{m=1}^{P}\sum_{n=1}^{P}[\mathbf{R}_{\text{av}}]_{m,n}[\mathbf{\Lambda}(\theta)]_{n,m} \\ &= \sum_{s=-M_{ca}}^{M_{ca}}\sum_{\substack{m,n:\\ d_m-d_n=s}}\hat{t}_s\frac{\exp(-js\theta)}{|\Omega_s|} = \sum_{s=-M_{ca}}^{M_{ca}}\hat{t}_s|\Omega_s|\frac{\exp(-js\theta)}{|\Omega_s|} \\ &\overset{(a)}{=} \sum_{s=-M_{ca}}^{M_{ca}}\sum_{\substack{m,n:\\ d_m-d_n=s}}[\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}]_{m,n}[\mathbf{\Lambda}(\theta)]_{n,m} = \text{Tr}(\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\mathbf{\Lambda}(\theta)),\end{aligned}$$

其中，(a) 根据冗余平均估计量得出；对于所有满足 m n $d_m - d_n = s$ $|$ $_s|t_s =$ 的情形，我们有 Ω ˆ $\sum_{d_m-d_n=s}[\text{R}_{\mathbf{y}}]_{m,n}$。因此，我们有以下关系： $f_{\mathbf{e}}(\theta) =$tr (E$_{\mathbf{y}}$**Λ**(θ)) =tr ((R ˆ $_{\mathbf{y}} -$ $_{\text{av}}$ $_{\mathbf{y}} -$ R)**Λ**(θ)) =tr((R R$_{\mathbf{y}}$) ˆ **Λ**(θ)) $= \frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L}(\mathbb{E}[\mathbf{y}(t)^H\mathbf{\Lambda}(\theta)\mathbf{y}(t)] - \mathbf{y}(t)^H\mathbf{\Lambda}(\theta)\mathbf{y}(t))$。由于快拍是独立同分布的，我们可以将独立同分布随机变量 $\{Z_t(\theta)\}_{t=1}^{L}$ 定义为 $Z_t(\theta)$ $\triangleq$y(t)^H**Λ**(θ) y(t) $\mathbb{E}$ t ^{H}**Λ** θ t t $\sim \mathcal{CN}$ **0**, **Λ** θ (y( ) ( )y( ))，其中 y( ) (R$_{\mathbf{y}}$)。注意，( ) 是厄米特矩阵。因此，我们可以将引理 7 应用于 $\mathbf{\Sigma}$ =R$_{\mathbf{y}}$ 和 A $=$ **Λ**(θ)，从而得到 $\forall\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{L}|\sum_{t=1}^{L}Z_t(\theta)| \ge \epsilon\right) \le 2\exp\left[-cL\min\left(\frac{\epsilon^2}{2K^4\|\mathbf{R}_{\mathbf{y}}\|_2^2\|\mathbf{\Lambda}(\theta)\|_F^2}, \frac{\epsilon}{K^2\|\mathbf{R}_{\mathbf{y}}\|_2\|\mathbf{\Lambda}(\theta)\|_2}\right)\right]. \tag{43}$$

我们希望得到一个与 (43 θ $\|\Lambda\ \theta\ \|_F^2 =$ $^1_{\ 0|}$ +) 相 $\sum_{s=1}^{M_{ca}}$ $^2_{\ s|}$ $\le 2\Delta$ S $\|\Lambda\ \theta$ 似但不依赖于 的通用上界。注意，( )Ω( )。同样，我们也可以对 ( ) $\|\Lambda\ \theta\ \|_F \le \sqrt{2}\Delta$ S ( ) ( ) 进行界定。由此得到以下界:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{L}|\sum_{t=1}^{L}Z_t(\theta)| \ge \epsilon\right) \le 2\exp\left[-cL\min\left(\frac{\epsilon^2}{4K^4\|\mathbf{R}_{\mathbf{y}}\|_2^2\Delta(\mathbb{S})}, \frac{\epsilon}{K^2\|\mathbf{R}_{\mathbf{y}}\|_2\sqrt{2\Delta(\mathbb{S})}}\right)\right]. \tag{44}$$

注意， $f_{\mathbf{e}}$ 是一个阶数为 M_{ca} 的三角多项式。现在，我们将使用引理 8 来界定谱函数 $|f_{\mathbf{e}}(\theta)|$.

$\mathbb{P}$ $_{\theta\in[-\pi,\pi]}|f_{\mathbf{e}}\ \theta\ | \ge \epsilon \le \mathbb{P}$ 2 $_{1\le k\le 4M_{ca}}|f_e\ \theta_k\ | \ge$(sup ( )) (ϵ $\le$ $\sum_{k=1}^{4M_{ca}}\mathbb{P}\left(|f_{\mathbf{e}}\ \theta_k\ | \ge \frac{\epsilon}{2}\right)$ $\le$ $8M_{ca}$ max ( )) ( ) exp c_1L $\left(\|$ $^{c_2\epsilon^2}_{\mathbf{y}\|_2^2\Delta}$ S $\|$ $^{\epsilon}_{\mathbf{y}\|_2\sqrt{\Delta(\mathbb{S})}}\right)]$ $[$ $-$ $c_1 = c/\ 2\sqrt{2}K^2$ $\min_{\mathbf{R}()\mathbf{R}}$，其中 ( ) ($c$ 已在引理 7 中给出)，且 $c_2 = 1/(4\sqrt{2}K^2)$ =3/$(16\sqrt{2}) < 1$。第一个不等式由引理 8 得出，第二个不等式由并集界得出。最后一个不等式是由 (44) 中计算出的界得到的。

附录 B

A. 定理 *2* 的证明

证明使用了 [20] 中的若干结果。然而，与 [20] 不同，这里关注的底层子空间是共阵子空间，而扰动则来自协方差估计误差和噪声。我们给出关键的中间步骤，以使结果能够自洽。

回顾一下，$\mathbf{U}$ 和 $\widehat{\mathbf{U}}$ 的列是子空间 $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ 和 $\mathcal{R}(\widehat{\mathbf{U}})$ 的正交归一基。子空间 $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ 和 $\mathcal{R}(\widehat{\mathbf{U}})$ 之间的主角记为 $\boldsymbol{\Theta}(\mathcal{R}(\mathbf{U}),\mathcal{R}(\widehat{\mathbf{U}})) := [\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_S]^T$ 其中 $0 \le \psi_1 \le \psi_2 \le \cdots \le \psi_S \le \pi/2$。于是，由 [35], 可得 $\cos(\psi_i) = \sigma_i(\mathbf{U}^H\widehat{\mathbf{U}})$ $i = 1,2,\cdots,S$。根据引理 1，(U, U), , , 。根据引理，ESPRIT 的输出与基的选择无关。为便于分析，我们将为 $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ 和 $\mathcal{R}(\widehat{\mathbf{U}})$ 选择一对基，它们也称为“典范基” [20]。设矩阵 $\mathbf{U}^H\widehat{\mathbf{U}}$ 的奇异值分解为 $\mathbf{U}^H\widehat{\mathbf{U}} := \mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}_c\mathbf{R}^H$，其中 $\mathbf{L}、\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{S\times S}$，且 $\boldsymbol{\Sigma}_c = \mathrm{diag}(\sigma_1^c,\sigma_2^c,\cdots,\sigma_S^c)$，其中 $\sigma_i^c = \sigma_i(\mathbf{U}^H\widehat{\mathbf{U}})$ 按降序排列。典范基 $\mathbf{U}^{(c)}$ 和 $\widehat{\mathbf{U}}^{(c)}$ 为：

$$\mathbf{U}^{(c)} := \mathbf{U}\mathbf{L}, \quad \widehat{\mathbf{U}}^{(c)} := \widehat{\mathbf{U}}\mathbf{R} \tag{45}$$

使用标准基，我们定义以下矩阵：$\boldsymbol{\Psi}^{(c)} := \mathbf{U}_0^{(c)\dagger}\mathbf{U}_1^{(c)}$，$\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{(c)} := \widehat{\mathbf{U}}_0^{(c)\dagger}\widehat{\mathbf{U}}_1^{(c)}$。由于 $\mathcal{R}(\mathbf{U}) = \mathcal{R}(\mathbf{U}^{(c)})$ 且 $\mathcal{R}(\widehat{\mathbf{U}}) = \mathcal{R}(\widehat{\mathbf{U}}^{(c)})$，因此有 $\boldsymbol{\Theta}(\mathcal{R}(\mathbf{U}^{(c)}),\mathcal{R}(\widehat{\mathbf{U}}^{(c)})) = \boldsymbol{\Theta}(\mathcal{R}(\mathbf{U}),\mathcal{R}(\widehat{\mathbf{U}}))$。请注意，标准基具有以下性质：$\cos(\psi_i) = \sigma_i(\mathbf{U}^{(c)H}\widehat{\mathbf{U}}^{(c)}) = \mathbf{u}_i^{(c)H}\widehat{\mathbf{u}}_i^{(c)}$。我们将使用 [20, 引理 2]，它将匹配距离误差与量 $\|\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{(c)} - \boldsymbol{\Psi}^{(c)}\|_2$ 联系起来，并且普遍成立：

$$\mathrm{md}(\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}}) \le \pi\frac{S^{3/2}\sqrt{M_{ca}+1}}{\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta}))}\|\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{(c)} - \boldsymbol{\Psi}^{(c)}\|_2. \tag{46}$$

B. 将 $\|\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{(c)} - \boldsymbol{\Psi}^{(c)}\|_2$ 与 $\|\mathbf{E}_L\|_2$ 联系起来

令 $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{N} \in \mathbb{C}^{M\times N}$，其中 $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) \ge L$。设 ψ_L 为由 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别的 L 个主奇异向量（对应于 L 个最大奇异值）所张成的子空间之间的最大主角。如果 $\sigma_{L+1}(\mathbf{A}) \le \alpha$ 且 $\sigma_L(\mathbf{B}) \ge \alpha+\delta$，其中 $\alpha \ge 0$ 和 $\delta > 0$ 为某些值，则 Wedin 定理 [36] 指出：

$$\sin(\psi_L) \le \|\mathbf{N}\|_2/\delta \tag{47}$$

引理 9。设 $\sigma_S(\mathbf{T}_{ca}) \ge 2\|\mathbf{E}_L\|_2$，且 $\beta = p_{\min}\sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})) - \sigma^2 > 0$。则

$$\sin(\psi_S) \le 2\|\mathbf{E}_L\|_2/\beta \tag{48}$$

证明。回忆一下，$\mathbf{T}_{ca} = \mathbf{T}_{ca} - \mathbf{E}_L$。为应用 Wedin 定理，我们需要刻画满足以下条件的量 α 和 δ：$\sigma_S(\mathbf{T}_{ca}) \ge \delta + \alpha$，$\sigma_{S+1}(\mathbf{T}_{ca}) \le \alpha$。由 (13) 可得，$\sigma_{S+1}(\mathbf{T}_{ca}) = \sigma^2$。我们取 $\alpha = \sigma^2$。根据 Weyl 不等式，$\sigma_S(\widehat{\mathbf{T}}_{ca}) \ge \sigma_S(\mathbf{T}_{ca}) - \|\mathbf{E}_L\|_2$ $(a)\ge \sigma_S(\mathbf{T}_{ca})/2$ $(b)= (\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})^H) + \sigma^2)/2$，其中，$(a)$ 由假设 $2\|\mathbf{E}_L\|_2 \le \sigma_S(\mathbf{T}_{ca})$ 得出，而 (b) 由 (13) 得出。结合前述不等式，我们得到 $\sigma_S(\widehat{\mathbf{T}}_{ca}) - \sigma^2 \ge (\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})^H) - \sigma^2)/2 \ge \beta/2 > 0$，其中最后一项由于给定条件而为正。因此，我们可以取 $\delta = \sigma_S(\widehat{\mathbf{T}}_{ca}) - \sigma^2$，使其满足 $\sigma_S(\mathbf{T}_{ca}) = \alpha + \delta$，其中 $\delta > 0$。利用 (47) 即可完成证明。 □

引理 10。如果 $p_{\min}\sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})) > \sigma^2$ 且

$$\|\mathbf{E}_L\|_2 \le \frac{\sigma_S(\mathbf{U}_0^{(c)})(\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})^H) - \sigma^2)}{4\sqrt{2}} \tag{49}$$

then $\|\boldsymbol{\Psi}^{(c)} - \hat{\boldsymbol{\Psi}}^{(c)}\|_2 \le \frac{14\sqrt{2}\|\mathbf{E}_L\|_2}{\sigma_S^2(\mathbf{U}_0^{(c)})(p_{\min}\sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})) - \sigma^2)}$.

证明。根据 $\mathbf{U}^{(c)}$，$\widehat{\mathbf{U}}^{(c)}$ 的定义，我们有：

$$\begin{aligned}\|\mathbf{U}^{(c)} - \widehat{\mathbf{U}}^{(c)}\|_2^2 &= \|(\mathbf{U}^{(c)} - \widehat{\mathbf{U}}^{(c)})^H(\mathbf{U}^{(c)} - \widehat{\mathbf{U}}^{(c)})\|_2 \\ &= 2(1-\cos(\psi_S)) \le 2(1-\cos^2(\psi_S)) = 2\sin^2(\psi_S).\end{aligned} \tag{50}$$

根据本引理的假设，$2\|\mathbf{E}_L\|_2 \le \sigma_S(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})^H) - \sigma^2 = \sigma_S(\mathbf{U}_0^{(c)})$ and (U), 我们有 $2\|\mathbf{E}_L\|_2 \le \sigma_S(\mathbf{T}_{ca})\sigma_S(\mathbf{U}_0^{(c)}) \le \sigma_S(\mathbf{T}_{ca})$。结合假设 $p_{\min}\sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})) > \sigma^2$，我们可以应用引理 9。结合 (48) 和 (50)，得到以下界：

$$\|\widehat{\mathbf{U}}^{(c)} - \mathbf{U}^{(c)}\|_2 \le \frac{2\sqrt{2}\|\mathbf{E}_L\|_2}{\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})^H) - \sigma^2}. \tag{51}$$

注意到

$$\begin{aligned}\|\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{(c)} - \boldsymbol{\Psi}^{(c)}\|_2 &= \|(\widehat{\mathbf{U}}_0^{(c)\dagger} - \mathbf{U}_0^{(c)\dagger})\widehat{\mathbf{U}}_1^{(c)} + \mathbf{U}_0^{(c)\dagger}(\widehat{\mathbf{U}}_1^{(c)} - \mathbf{U}_1^{(c)})\|_2 \\ &\le \|\widehat{\mathbf{U}}_0^{(c)\dagger} - \mathbf{U}_0^{(c)\dagger}\|_2\|\widehat{\mathbf{U}}_1^{(c)}\|_2 + \|\mathbf{U}_0^{(c)\dagger}\|_2\|\widehat{\mathbf{U}}_1^{(c)} - \mathbf{U}_1^{(c)}\|_2 \\ &\le \|\widehat{\mathbf{U}}_0^{(c)\dagger} - \mathbf{U}_0^{(c)\dagger}\|_2 + \|\mathbf{U}_0^{(c)\dagger}\|_2\|\widehat{\mathbf{U}}^{(c)} - \mathbf{U}^{(c)}\|_2\end{aligned} \tag{52}$$

其中，最后一个不等式是由以下事实得出的：$\widehat{\mathbf{U}}_1^{(c)}$，$\widehat{\mathbf{U}}_1^{(c)} - \mathbf{U}_1^{(c)}$ 分别是 $\widehat{\mathbf{U}}^{(c)}$ 和 $\widehat{\mathbf{U}}^{(c)} - \mathbf{U}^{(c)}$ 的子矩阵。因此，我们有 $\|\widehat{\mathbf{U}}_1^{(c)}\|_2 \le \|\widehat{\mathbf{U}}^{(c)}\|_2 = 1$，且 $\|\widehat{\mathbf{U}}_1^{(c)} - \mathbf{U}_1^{(c)}\|_2 \le \|\widehat{\mathbf{U}}^{(c)} - \mathbf{U}^{(c)}\|_2$。我们使用定理 3.2] 中的一个结果，该结果指出，秩为 S，$\widetilde{\mathbf{F}}$ 的矩阵 $\mathbf{F}$ 及其扰动矩阵 $\widetilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} + \mathbf{E}$ 满足以下不等式：$\|\mathbf{F}^\dagger - \widetilde{\mathbf{F}}^\dagger\|_2 \le 3\|\widetilde{\mathbf{E}}\|_2/(\sigma_S(\mathbf{F})(\sigma_S(\mathbf{F}) - \|\widetilde{\mathbf{E}}\|_2))$，条件是 $\|\mathbf{E}\|_2 < \sigma_S(\mathbf{F})$。由 (51)，并利用本引理的假设，我们得到：

$$\begin{aligned}\|\widehat{\mathbf{U}}_0^{(c)} - \mathbf{U}_0^{(c)}\|_2 \le \|\widehat{\mathbf{U}}^{(c)} - \mathbf{U}^{(c)}\|_2 &\le \frac{2\sqrt{2}\|\mathbf{E}_L\|_2}{\sigma_S(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta})^H) - \sigma^2} \\ &\le \sigma_S(\mathbf{U}_0^{(c)})/2.\end{aligned} \tag{53}$$

我们可以将 $\mathbf{F}$ 替换为 $\mathbf{U}_0^{(c)}$，并将 $\widetilde{\mathbf{F}}$ 替换为 $\widehat{\mathbf{U}}_0^{(c)}$，从而利用上述结果：$\|(\widehat{\mathbf{U}}_0^{(c)\dagger} - \mathbf{U}_0^{(c)\dagger})\|_2 \le 3\|(\widehat{\mathbf{U}}_0^{(c)} - \mathbf{U}_0^{(c)})\sigma_S(\mathbf{U}_0^{(c)}) - \|\widehat{\mathbf{U}}_0^{(c)} - \mathbf{U}_0^{(c)}\|_2$ (U)((U) U $\le 6\|\widehat{\mathbf{U}}_0^{(c)} - \mathbf{U}_0^{(c)}\|_2$ U) $\le 6\|\widehat{\mathbf{U}}_0^{(c)} - \mathbf{U}_0^{(c)}\|_2$ U(U) U $\sigma_S^2(\mathbf{U}_0^{(c)})$ (U)，其中第二个不等式由 (53) 得出。结合 (52)，可得最终界：

$$\begin{aligned}\|\widehat{\boldsymbol{\Psi}}^{(c)} - \boldsymbol{\Psi}^{(c)}\|_2 &\le 6\|\sigma_S^2(\mathbf{U}_0^{(c)})\|_2 + \sigma_S(\mathbf{U}_0^{(c)})\|\widehat{\mathbf{U}}^{(c)} - \mathbf{U}^{(c)}\|_2 \le (\widehat{\mathbf{U}}^{(c)} - \mathbf{U}^{(c)})(\\ &\text{U)(U)(U U)}\sigma_S^2(\mathbf{U}_0^{(c)})\text{(U)} \le 14\sqrt{2}\|\mathbf{E}\sigma_S^2(\mathbf{U}_0^{(c)})\sigma_S(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})^H - \sigma^2)\|_2\text{(U)} \\ &\le ()))\text{E(U)} \le 14\sqrt{2}\|\mathbf{E}_L\|_2/\sigma_S^2(\mathbf{U}_0^{(c)})\beta.\end{aligned}$$

□

接下来，我们陈述以下来自 [20] 的引理，可用于获得 $\sigma_S^2(\mathbf{U}_0^{(c)})$ 的下界。

引理 11 (引理 3, [20])。令 $\mathbf{U}^{(a)}$ 为 $\mathcal{R}(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta}))$ 的任意标准正交基。则有：$\sigma_S^2(\mathbf{U}_0^{(a)}) \ge \max(1 - \sigma_S^2(\mathbf{A}_{\mathbb{U}_\mathbb{S}}(\boldsymbol{\theta}))4^{-S})$

定理的证明 2 $C_S = \frac{2^{-S}}{4\sqrt{2}}$ $C'_S = \frac{2^{-S}}{14\pi\sqrt{2}S^{3/2}4^S}$。

定义 和 。在假设 **A**下，这些量是常数，因为 S 保持不变。如果 $\beta > 0$，且假设 $\|\mathbf{E}_L\|_2 \le C_S\beta$ 确保条件 (49) 成立，因为根据引理 11，$\sigma_S(\mathbf{U}_0^{(c)}) \ge 2^{-S}$。现在，我们可以应用引理 10 来界定 $\|\mathbf{\Psi}^{(c)} - \hat{\mathbf{\Psi}}^{(c)}\|_2$。我们将此界代入 ( ) 中的

$$\|\mathbf{\Psi}^{(c)} - \mathbf{\Psi}^{(c)}\|_2 \quad 46 \quad \boldsymbol{\theta}\ \widehat{\boldsymbol{\theta}} \le 14\sqrt{2}\pi \frac{S^{3/2}q\|\ _L\|_2}{\sigma_S^2\ {}_0^{(c)}\ C'_S} \le \hat{}: \ \mathrm{md}(,\ )$$

$q\|\ _L\|_2$

$\mathbf{E}(\mathbf{U})\mathbf{E}$，其中最后一个不等式由引理 11 中的界 $\sigma_S^2(\mathbf{U}_0^{(c)}) \ge 4^{-S}$ 得出。

□

C. 定理 3 的证明

我们将利用定理 1 和定理 2 来证明定理 3。由定理 2 可知，在假设 $\beta > 0$ 和 $\|\mathbf{E}_L\|_2 \le C_S\beta$ 成立时，我们可以对 $\mathrm{md}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) \le q\|\mathbf{E}_L\|_2$ 给出界。对于给定的 $\epsilon > 0$，有两种情况：

情形 I（$\epsilon \le C_S\beta q$）： 在这种情况下，$\min(C_S\beta, \frac{\epsilon}{q}) = \epsilon/q$。因此，$\|\mathbf{E}_L\|_2 \le \frac{\epsilon}{q} \Rightarrow \|\mathbf{E}_L\|_2 \le C_S\beta$，并且由定理 2 可知，$\hat{}$ 匹配距离误差小于 $\mathrm{md}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) \le \epsilon$。这意味着 $P(\mathrm{md}(\boldsymbol{\theta}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}) \le \epsilon) \ge P\big(\|\mathbf{E}_L\|_2 \le \frac{\epsilon}{q}\big)$。由定理 1，我们可以得到以下尾界：

$$P(\|\mathbf{E}_L\|_2 \le \tfrac{\epsilon}{q}) \ge 1 - 8M_{ca}\exp\left[-c_1 L \min\left(\frac{c_2\epsilon^2}{q^2\|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2^2\Delta(\mathbb{S})}, \frac{\epsilon}{q\|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2\sqrt{\Delta(\mathbb{S})}}\right)\right]. \quad (54)$$

情形 II ($\epsilon > C_S\beta q$)： 对于满足 $\epsilon > C_s\beta q$ 的 ϵ 值，我们有 $\min(C_S\beta,\ \epsilon/q) = C_S\beta$。因此，若 $\|\mathbf{E}_L\|_2 \le C_S\beta$，$\hat{}$ 则由定理 2 可得 $\mathrm{md}(\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\theta}) \le C_S\beta q$。根据定理 1，我们得到如下尾概率界：

$$P(\|\mathbf{E}_L\|_2 \le C_S\beta) \ge 1 - 8M_{ca}\exp\left[-c_1 L \min\left(\frac{c_2 C_S^2\beta^2}{\|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2^2\Delta(\mathbb{S})}, \frac{C_S\beta}{\|\mathbf{R}_\mathbf{y}\|_2\sqrt{\Delta(\mathbb{S})}}\right)\right]. \quad (55)$$

如果快拍数量 L 满足以下界：$L \ge c_3 \ln\left(\frac{8M_{ca}}{\delta}\right)\max\left(\frac{q_1^2\Delta}{\|\ _\mathbf{y}\|_2\sqrt{\Delta(\mathbb{S})}}\right)$，$q_1 = q\|\ _\mathbf{y}\|_2$ $c_3 = 1/c_1$ $L_0 = \frac{C_S\beta}{}$ ，

$\frac{q_1\sqrt{\Delta(\mathbb{S})}}{\epsilon}$，$\frac{L_0^2}{c_2}$，$L_0\big)$，其中 $\mathbf{R}$，且 $\mathbf{R}$，那么结合 (54) 和 (55)，我们得到以下界 $P\big(\mathrm{md}(\boldsymbol{\theta},\ \widehat{\boldsymbol{\theta}}) \le \min(\epsilon,\ C_S\beta q)\big) \ge 1 - \delta$。

参考文献

[1] P. Pal 和 P. P. Vaidyanathan，“嵌套阵列：一种提升自由度的阵列处理新方法”，*IEEE*信号处理汇刊，第58卷，第8期，第4167–4181页，2010年。[2] P. P. Vaidyanathan 和 P. Pal，“利用互素采样器和阵列进行稀疏感知”，*IEEE*信号处理汇刊，第59卷，第2期，第573–586页，2011年2月。[3] S. Haghighatshoar 和 G. Caire，“基于低维投影的低复杂度大规模MIMO子空间估计与跟踪”，*IEEE*信号处理汇刊，第66卷，第7期，第1832–1844页，2018年。[4] Y. I. Abramovich、D. A. Gray、A. Y. Gorokhov 和 N. K. Spencer，“非均匀线性天线阵列到达方向估计中的正定Toeplitz补全。I. 完全可扩展阵列”，*IEEE*信号处理汇刊，第46卷，第9期，第2458–2471页，1998年9月。[5] M. Wang 和 A. Nehorai，“ 协阵列、 MUSIC 与 Cram´er–Rao 界 ”，*IEEE* 信号处理汇刊，第65卷，第4期，第933–946页，2017年2月。[6] A. Koochakzadeh 和 P. Pal，“欠定源定位的Cram´er-Rao界”，*IEEE*信号处理快报，第23卷，第7期，第919–923页，2016年7月。

[7] C.-L. Liu和 P. P. Vaidyanathan，“互质阵列及其他稀疏阵列，可检测到比传感器更多的信源，” 数字信号处理，第61卷，第43–61页，2017年2月。[8] S. Shahsavari、J. Millhiser和P. Pal，“合成孔径含噪超分辨率中的基本权衡”，载于*ICASSP 2021-2021 IEEE*声学、语音与信号处理国际会议（*ICASSP*）。IEEE，2021年，第4620–4624页。[9] R. Schmidt，“多发射源定位与信号参数估计”，*IEEE*天线与传播汇刊，第34卷，第3期，第276–280页，1986年。[10] R. Roy和T. Kailath，“通过旋转不变性技术实现信号参数的ESPRIT估计”，*IEEE*声学、语音与信号处理汇刊，第37卷，第7期，第984–995页，1989年。[11] Y. Hua和T. K. Sarkar，“噪声环境下估计指数衰减/非衰减正弦信号参数的矩阵铅笔法”，*IEEE*声学、语音与信号处理汇刊，第38卷，第5期，第814–824页，1990年。[12] J. Steinwandt、F. Roemer和M. Haardt，“协阵列结构的ESPRIT类算法性能分析”，载于*2017 IEEE*第*7*届多传感器自适应处理计算进展国际研讨会（*CAMSAP*）。IEEE，2017年，第1–5页。[13] F. Li、H. Liu和R. Vaccaro，“到达方向估计算法的性能分析：统一、简化与观察”，*IEEE*航空与电子系统汇刊，第29卷，第4期，第1170–1184页，1993年。[14] S. Sun和Y. D. Zhang，“面向自动驾驶车辆的4D汽车雷达感知：一种面向稀疏性的方案”，*IEEE*信号处理精选主题期刊，第15卷，第4期，第879–891页，2021年。[15] Z. Tan、Y. C. Eldar和A. Nehorai，“利用互质阵列进行到达方向估计：超分辨率视角”，*IEEE*信号处理汇刊，第62卷，第21期，第5565–5576页，2014年。[16] E. J. Cand`es和C. Fernandez-Granda，“含噪数据的超分辨率”，傅里叶分析与应用杂志，第19卷，第6期，第1229–1254页，2013年。[17] ——，“迈向超分辨率的数学理论”，纯粹与应用数学通讯，第67卷，第6期，第906–956页，2014年。[18] H. Qiao和P. Pal，“利用差分协阵列，在多测量向量模型中通过有限快拍保证定位多于传感器数量的信源”，*IEEE*信号处理汇刊，第67卷，第22期，第5715–5729页，2019年。[19] C. Zhou、Y. Gu、X. Fan、Z. Shi、G. Mao和Y. D. Zhang，“通过虚拟阵列插值实现互质阵列的到达方向估计”，*IEEE*信号处理汇刊，第66卷，第22期，第5956–5971页，2018年。[20] W. Li、W. Liao和A. Fannjiang，“ESPRIT算法的超分辨率极限”，2019年。[21] W. Li和W. Liao，“受限傅里叶矩阵的稳定超分辨率极限与最小奇异值”，《应用与计算谐波分析》，第51卷，第118–156页，2021年。[22] W. Liao和A. Fannjiang，“单快拍谱估计中的MUSIC：稳定性与超分辨率”，《应用与计算谐波分析》，第40卷，第1期，第33–67页，2016年。[23] W. Liao，“多维谱估计中的MUSIC：稳定性与超分辨率”，*IEEE*信号处理汇刊，第63卷，第23期，第6395–6406页，2015年。[24] A. Moitra，“超分辨率、极值函数与范德蒙德矩阵的条件数”，载于第*47*届*ACM*计算理论年度研讨会论文集。ACM，2015年，第821–830页。[25] W. Li、Z. Zhu、W. Gao和W. Liao，“多快拍谱估计中MUSIC与ESPRIT的稳定性和超分辨率”，*IEEE*信号处理汇刊，第70卷，第4555–4570页，2022年。[26] C.-L. Liu和P. P. Vaidyanathan，“关于互质阵列MUSIC中空间平滑步骤的评论”，*IEEE*信号处理快报，第22卷，第9期，第1438–1442页，2015年。

[27] Y. C. Eldar、J. Li、C. Musco和C. Musco，“样本高效的托普利茨协方差估计”，载于第*14*届*ACM-SIAM*离散算法年度研讨会论文集。SIAM，2020年，第378–397页。[28] A. Zygmund，三角级数。剑桥大学出版社，2002年。[29] R. M. Gray 等，“托普利茨矩阵和循环矩阵：综述”，《通信与信息理论基础与趋势》，第2卷，第3期，第155–239页，2006年。[30] R. O’Donnell，“第1讲：渐近性”，《理论家的工具箱》，2016年。[31] D. Batenkov、L. Demanet、G. Goldman和Y. Yomdin，“具有聚簇节点的部分非均匀傅里叶矩阵的条件数”，《*SIAM*矩阵分析与应用期刊》，第41卷，第1期，第199–220页，2020年。[32] C. Aubel和H. B¨olcskei，“单位圆盘内节点对应的范德蒙德矩阵与大筛法”，《应用与计算谐波分析》，第47卷，第1期，第53–86页，2019年。[33] D. L. Hanson和F. T. Wright，“独立随机变量二次型尾概率的一个界”，《数学统计年刊》，第42卷，第3期，第1079–1083页，1971年。[34] M. Rudelson、R. Vershynin 等，“Hanson-Wright不等式与次高斯集中”，《概率电子通信》，第18卷，2013年。[35] G. W. Stewart，“矩阵扰动理论”，1990年。[36] P.-˚A. Wedin，“与奇异值分解相关的扰动界”，《*BIT*数值数学》，第12卷，第1期，第99–111页，1972年。[37] P. C. Hansen，“截断奇异值分解作为正则化方法”，《*BIT*数值数学》，第27卷，第4期，第534–553页，1987年。