arXiv:2301.01735v1 [math.MG] 4 Jan 2023

利用内在 Lipschitz 截面的赋范空间及内在 Hölder 截面的延拓定理

DANIELA DI DONATO

摘要。本文的目的有二：首先，我们希望利用内在 Lipschitz 截面空间定义两种范数。另一方面，我们希望将作者在以内禀 Hölder 截面为目标的拓扑空间背景下证明的一个延拓定理推广 Y. 此处我们的目标将是 $Y \times \mathbb{R}^s$，其中使用 $s \geq 1$ 而非 Y.

目录

1. 引言 1 2. 内在 Hölder 截面 3 2.1. 内在 Hölder 截面：当 Y 有界时 3 2.2. 内禀 Hölder 截面的等价定义 4 3. 内在 Lipschitz 截面的赋范空间 5 3.1. 赋范空间：版本 1 5 3.2. 赋范空间：版本 2 6 4. 水平集与延拓 7 参考文献 9

1. 引言

本文聚焦于一种针对度量空间中 Franchi-Serapioni-SerraCassano 意义下的内在 Lipschitz图的新视角 [FSSC01, FSSC03b, FSSC03a]（另见[SC16, FS16]）。

他们引入并分析了这一概念，旨在为一种特殊的度量空间——称为次黎曼 Carnot 群的空间——建立良好的可整流性概念 [ABB19, BLU07, CDPT07]。

按照通常的方式，Federer [Fed69] 称，如果集合 $\mathbb{R}^n$ 可以被适当的图的可数并覆盖，则称其为可数 d-可整流的。更确切地说，他考虑 Lipschitz 映射的图 $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n-d}$. 然而，Ambrosio 和 Kirchheim [AK00]（另见 [Mag04]）证明，这一定义在 Carnot 群中并不适用，因此许多数学家提出了其他的可整流性概念。读者可参见 [AM22a、AM22b、Bat21、DS91、DS93、CP06、Pau04、NY18]。正如我们所说，另一种可能的解决方案是 Franchi-Serapioni-SerraCassano 提出的所谓“内在 Lipschitz 映射”，其适用于 Carnot

日期：2023年1月5日。

群。其思想类似于欧几里得情形：首先，他们引入称为内在锥的适当锥，这些锥与欧几里得锥并不等价；然后，他们称映射 φ 为内在 Lipschitz 的，如果对于属于映射 φ的图的任意点 p，以 p 为顶点的某个适当内在锥与该映射的图的交集为空。

最近，Le Donne 与作者将这一概念推广到了度量空间中（参见 [DDLD22]）。

两种方法的一个基本区别如下：Franchi、Serapioni 和 Serra Cassano 的方法考虑内在利普希茨映射。另一方面，我们的方法考虑图；这一细微变化至关重要，因为：

- 研究框架更加一般：度量空间这一类比 Carnot 群这一类更广。
- 证明简洁优雅。
- 我们在证明中使用基本的数学工具。

作者以自然的方式在 [DD22c] 中引入了内在 Hölder 截面的概念，它推广了利普希茨截面的概念。这里，我们的研究框架如下：有一个度量空间X、一个拓扑空间 Y，以及一个商映射 $\pi\colon X \to Y$，也就是说，该映射连续、开且满射。对我们而言，标准例子是：X 是一个度量 Lie 群 G（即 Lie 群 G 配备了诱导流形拓扑的左不变距离），例如一个次黎曼 Carnot 群；而 Y 是左陪集空间 G/H，其中$H < G$ 是一个闭子群，且 $\pi : G \to G/H$ 是模 H, $g \mapsto gH$的投影。

定义 1.1（内禀 Hölder 截面）。设 (X, d) 是一个度量空间，Y 是一个拓扑空间。若映射 $\varphi\colon Y \to X$ 满足以下条件，我们称其为商映射 $\pi\colon X \to Y$ 的截面

$$\pi \circ \varphi = \mathrm{id}_Y.$$

此外，若 φ 还满足以下条件，则称其为常数为 $L > 0$ 且 $\alpha \in (0, 1)$ 的内禀 (L, α)-*Hölder* 截面

$$d(\varphi(y_1), \varphi(y_2)) \le L d(\varphi(y_1), \pi^{-1}(y_2))^\alpha + d(\varphi(y_1), \pi^{-1}(y_2)), \quad \text{for all } y_1, y_2 \in Y. \tag{1}$$

等价地，我们要求

$$d(x_1, x_2) \le L d(x_1, \pi^{-1}(\pi(x_2)))^\alpha + d(x_1, \pi^{-1}(\pi(x_2))), \quad \text{for all } x_1, x_2 \in \varphi(Y).$$

当 $\alpha = 1$ 时，截面 φ 按照 [DDLD22] 的意义是内禀 Lipschitz 的；此外，若 π 是 Lipschitz 商或满射等距映射 [BJL+99, VN88], ，则结论显而易见，因为此时内禀 Lipschitz 等价于双 Lipschitz 嵌入，参见 [DDLD22] 中的命题 2.4。沿着开创性论文 [AGS14a, LV09, Sav22]（另见 [AGS15, AGS14b, FSS22, Stu06, Vil09]）的思路，作者以自然的方式引入并研究了内禀截面／内禀 Lipschitz 截面与内蕴 Hopf-Lax 半群 [DD22b, DD22e] 之间的联系。

本文的目的有两个：首先，我们希望利用 Lipschitz 截面的概念定义两种范数。其次，我们希望推广一个延拓定理，其目标为 Y（一个拓扑空间）；在本文中，我们将以 $Y \times \mathbb{R}^s$ 代替 Y.

更准确地说，在第3节中，主要结果是定理 3.1 和定理 3.4。在这里，我们利用以下要素定义了两个可能的赋范空间：

• 我们知道，存在一大类内在 Hölder 截面，因此也存在一大类 Lipschitz 截面，它们构成了一个关于 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 的向量空间（见定理 2.7）；

•注意到以下简单事实，我们可以定义两种不同的范数：在通常情形下，对于任意点 $x, y \in X$，有 $d(x, y) = d(y, x)$；另一方面，在我们的内在情形中，一般而言，对于每个 $x, y \in X$.，有 $d(f(x)\ \pi^{-1}(y)) \neq d(f(y)\ \pi^{-1}(x))$

• 由于 π 的线性性，特别是借助引理 3.2，我们得到了定义于 (5) 和 (9) 中的范数的齐次性。

最后，在第 4 节中，主要结果是定理 4.1，它推广了 [DD22c, 定理 1.3] 中证明的内在 Hölder 截面的延拓定理。其主要区别在于，在本文中，目标空间是一个拓扑空间 $Y \times \mathbb{R}^s$，带有 $s \geq 1$，而不是 Y。与 Vittone 的情形一样，我们分别构造每个分量 f_i（$i = 1$, ..., s），然后在不作任何额外假设的情况下将它们拼接起来。然而，当目标空间仅为 Y 时，最后一步无法提供一个 Lipschitz映射 $f = (f_1, ..., f_s)$。

2. 内在 Hölder 截面

2.1. 内在 Hölder 截面：当 Y 有界时。 定义 1.1 如果我们认为所研究的是适当映射的图，这样想是很自然的。不过，在下述命题中，当 Y 是有界集时，我们引入条件 (1) 的一个等价条件。

命题 2.1。设 $\pi: X \to Y$ 是度量空间 X 到拓扑有界空间 Y 之间的商映射，且 $\alpha \in (0,1)$。以下条件等价:

(1) 存在 $L > 0$ 使得

$$d(\varphi(y_1), \varphi(y_2)) \leq L d(\varphi(y_1), \pi^{-1}(y_2))^\alpha + d(\varphi(y_1), \pi^{-1}(y_2)), \quad \textit{for all } y_1, y_2 \in Y.$$

(2) 存在 $K \geq 1$ 使得

$$d(\varphi(y_1), \varphi(y_2)) \leq K d(\varphi(y_1), \pi^{-1}(y_2))^\alpha, \quad \textit{for all } y_1, y_2 \in Y. \tag{2}$$

我们还可以将定义重新表述为: $\varphi(Y)$，即我们称为 φ的图，避开某些特定集合（这些集合取决于 α、L 以及 φ 本身）:

命题 2.2. 设 $\pi: X \to Y$ 是度量空间到拓扑空间之间的商映射，$\varphi: Y \to X$ 是 π 的截面，$\alpha \in (0, 1)$ 且 $L > 0$。那么 φ 是内蕴 (L, α)-***Hölder*** 的，当且仅当

$$\varphi(Y) \cap R_{x,L} = \emptyset, \quad \textit{for all } x \in \varphi(Y),$$

其中

$$R_{x,L} := \left\{ x' \in X \mid L d(x', \pi^{-1}(\pi(x)))^\alpha + d(x', \pi^{-1}(\pi(x))) < d(x', x) \right\}.$$

命题 2.2 显而易见，但其目的是强调它与 [DDLD22] 中引入的内在 Lipschitz 截面理论之间的类比，其中 $\alpha = 1$。特别地，当 X 是次黎曼 Carnot 群且 $\alpha = 1$. 时，集合 $R_{x,\ L}$ 是 Franchi、Serapioni 和 Serra Cassano 意义下的内在锥。关于度量群中内在锥的一个恰当定义，读者可参见 [DD22d] 。

2.2. **内禀 Hölder 截面的等价定义。**

定义 2.3（相对于一个截面的内在 Hölder 连续性）。给定 π 的截面 $\varphi,\psi\colon Y\to X$。若满足以下条件，则称 φ 在点 $\hat{x}$ 处相对于 ψ 是内在 (L,α)-*Hölder* 连续的，其中 $L>0,\alpha\in(0,1]$ 且 $\hat{x}\in X$：

(1) $\hat{x}\in\psi(Y)\cap\varphi(Y)$;
(2) $\varphi(Y)\cap C^{\psi}_{\hat{x},L}=\emptyset$,

其中

$$C^{\psi}_{\hat{x},L}:=\{x\in X\,:\,d(x,\psi(\pi(x)))>Ld(\hat{x},\psi(\pi(x)))^{\alpha}+d(\hat{x},\psi(\pi(x)))\}.$$

备注 2.4. 定义 2.3 可以改述如下。截面 φ 关于 ψ 在点 $\hat{x}$ 处是内在（L,α）- Hölder 的，当且仅当存在 $\hat{y}\in Y$，使得 $\hat{x}=\varphi(\hat{y})=\psi(\hat{y})$，并且

$$d(x,\psi(\pi(x)))\le Ld(\hat{x},\psi(\pi(x)))^{\alpha}+d(\hat{x},\psi(\pi(x))),\quad\forall x\in\varphi(Y),\tag{3}$$

这等价于

$$d(\varphi(y),\psi(y))\le Ld(\psi(\hat{y}),\psi(y))^{\alpha}+d(\psi(\hat{y}),\psi(y)),\qquad\forall y\in Y.\tag{4}$$

注意，由于式 (4) 右侧缺乏对称性，定义 2.3 并未导出一个等价关系。然而，按照 Cheeger 理论 [Che99]（另见[Kei04, KM16]），在 [DD22c, 定理 4.2] 中，我们给出了 Hölder 截面的一个等价性质。

正如 [DD22c, 命题 1.5] 所证明的，内在Lipschitz截面与最后一个定义等价。

命题 2.5. 设 X 为度量空间，Y 为拓扑有界空间，$\pi:X\to Y$为商映射，$L\ge 1$ 且 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,1)$。假设每个点 $x\in X$ 都包含在一个从 π到 ψ_x 的内禀 (L,α)-*Hölder* 截面的像中。那么，对于 π 的任意截面 $\varphi\colon Y\to X$，以下条件等价：

(1) 对于所有 $x\in\varphi(Y)$，截面 φ 相对于 ψ_x 在 x处是内在 (L_1,β)-*Hölder* 的；(2) 截面 φ 是内在 (L_2,γ)-*Hölder* 的。

We c本节结束时，回顾一个我们稍后会用到的重要概念。

定义 2.6（相对于 ψ 的内禀 Hölder 集）. 设 $\alpha\in(0,1]$ 且 $\psi\colon Y\to X$ 为 π 的一个截面。我们将 π 中相对于 ψ 在点 $\hat{x}$ 处的所有内在 Hölder 截面构成的集合定义为

$$\tilde{H}_{\psi,\,\hat{x},\,\alpha}:=\{\varphi\colon Y\to X\ \pi\text{ 的一个截面：}\ \varphi\text{ 在点 }\tilde{\hat{x}}\text{处相对于 }\psi\text{ 是内禀（}L,\alpha\text{）- Hölder 的，其中某个 }L>0\}.$$

特别地，在 [DD22c] 中，我们有以下关于集合 $H_{\psi,\,\hat{x},\,\alpha}$ 的论述。

定理 2.7（定理 3.5 [DD22c]）。设 $\pi\colon X\to Y$ 是从赋范空间 X 到拓扑空间 Y. 的线性商映射。另设 $\psi\colon Y\to X$ 是 π 的一个截面，且$\{\lambda\hat{x}\colon\lambda\in\mathbb{R}^{+}\}\subset X$，其中 $\hat{x}\in\psi(Y)$。

那么，对于任意 $\alpha\in(0,1],$，集合$\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}^{+}}H_{\lambda\psi,\,\lambda\hat{x},\,\alpha}\cup\{0\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，或者 $\mathbb{C}$.

注意，无法得到关于 $H_{\psi,\hat{x},\alpha}$ 的结论，因为只需观察到，若 $\psi(\hat{y})=\hat{x}$，则 $\psi(\hat{y})+\psi(\hat{y})\neq\hat{x}$.

3. 内在 Lipschitz 截面的赋范空间

3.1.赋范空间：版本 1。本节讨论内在 Lipschitz 截面的情形，即 $\alpha = 1$.

设 $\pi: \mathbb{R}^\kappa \to Y$ 是一个商映射，满足 $Y \subset \mathbb{R}^\kappa$。此外，假设 $K \subset Y$ 是一个紧集，且 $\psi_{|K}: K \to \mathbb{R}$ 是 π 的一个内在 L-Lipschitz 截面，满足 $L \geq 1$ 且 $\hat{x} = \psi(\bar{y}) \in \psi(Y)$。我们将使用以下记号

$$ILS_{\lambda\psi_{|K},\lambda\hat{x}} := H_{\lambda\psi_{|K},\lambda\hat{x},1}.$$

这里，我们证明

$$(\mathbb{L}, \|.\|) := \left(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}^+} ILS_{\lambda\psi_{|K},\lambda\hat{x}} \cup \{0\}, \|.\| \right)$$

对于适当的范数 $\|.\| = \|.\|_{ILS_{\lambda\psi,\lambda\hat{x}}}$: $\mathbb{L} \to \mathbb{R}^+$，可将其定义为对任意 $\varphi \in \mathbb{L}$,

$$\|\varphi\|_{ILS_{\lambda\psi,\lambda\hat{x}}} := \|\varphi\|_\infty + [\varphi]_{\lambda\psi,\lambda\hat{x}}, \tag{5}$$

其中 $\|\varphi\|_\infty := \sup_{y\in K}|\varphi(y)|$，并且

$$[\varphi]_{\lambda\psi,\lambda\hat{x}} := \sup_{y\in K} d(\lambda\varphi(y), (1/\lambda\pi)^{-1}(\pi(\hat{x}))).$$

于是，我们可以给出本节的主要结果。

定理 3.1. 设 $\pi: \mathbb{R}^\kappa \to Y$ 是一个线性商映射，且 $Y \subset \mathbb{R}^\kappa$。另假设 $\psi: K \to \mathbb{R}^\kappa$ 是 π 的内在 L-利普希茨截面，其中 $K \subset Y$ 紧致，$L \geq 1$ 且 $\hat{x} \in X.$。那么，赋予 $\|\cdot\|_{ILS_{\psi,\hat{x}}}$ 的集合 $\mathbb{L}$ 是一个赋范空间。

我们需要以下引理。

引理 3.2 (引理 4.7 [DD22a]). 设 X 是一个赋范空间，Y 是一个拓扑空间，且 $\pi: X \to Y$ 是一个线性商映射。那么

$$|\lambda| d(x_1, \pi^{-1}(y_2)) = d(\lambda x_1, (1/\lambda\pi)^{-1}(y_2)), \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^\kappa, y_2 \in Y, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}. \tag{6}$$

注 3.3. 当 $Y \subset \mathbb{R}$ 且 $X = \mathbb{R}^\kappa$ 时，引理 3.2 的一个直接推论是

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{d(h\varphi(t+h), (1/h\pi)^{-1}(t)))}{h} = 0,$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{d(h\varphi(t), (1/h\pi)^{-1}(t+h)))}{h} = 0,$$

对于 $t \in Y.$。事实上，对于 $h > 0$

$$\frac{d(h\varphi(t+h), (1/h\pi)^{-1}(t))}{h} = d(\varphi(t+h), \pi^{-1}(t)) \leq d(\varphi(t+h), \varphi(t)),$$

因此，对 $h \to 0$ 取极限，由于 φ 的连续性，我们得到第一个极限。类似地，可以证明第二个极限。

现在，我们给出定理 3.1 的证明。

定理 *3.1* 的证明。 $\|\varphi\|\equiv 0$ 当且仅当 $\varphi\equiv 0$ 这一事实成立，是因为 $\|.\|_\infty$ 是一个范数。另一方面，由于 π 是线性映射，并根据引理 3.2，我们有

$$\sup_{y\in K} d(\delta\varphi(y),(1/\delta\pi)^{-1}(\pi(\hat{x}))) = \sup_{y\in K}|\delta| d(\varphi(y),\pi^{-1}(\pi(\hat{x})))$$

对于任意 $\delta\in\mathbb{R}-\{0\}$，因此

$$\|\delta\varphi\|_\infty+[\delta\varphi]_{\psi,\hat{x}} = |\delta|(\|\varphi\|_\infty+[\varphi]_{\psi,\hat{x}}), \tag{7}$$

对于任意 $\varphi\in\mathbb{L}$.

最后，再次利用 π. 的线性性即可得到三角不等式。事实上，若 $\varphi,\eta\in\mathbb{L}-\{0\}$，特别地，$\varphi,\eta\in ILS_{(\lambda_1+\lambda_2)\psi_{|K},\ (\lambda_1+\lambda_2)\hat{x}}$，则对于满足以下条件的 $x_\varphi, x_\eta\in\mathbb{R}^\kappa$

$$[\varphi]_{(\lambda_1+\lambda_2)\psi,(\lambda_1+\lambda_2)\hat{x}} = \sup_{y\in K} d((\lambda_1+\lambda_2)\varphi(y),(1/(\lambda_1+\lambda_2)\pi)^{-1}(\pi(\hat{x}))) = d((\lambda_1+\lambda_2)\varphi(y),x_\varphi)$$

$$[\eta]_{(\lambda_1+\lambda_2)\psi,(\lambda_1+\lambda_2)\hat{x}} = \sup_{y\in K} d((\lambda_1+\lambda_2)\eta(y),(1/(\lambda_1+\lambda_2)\pi)^{-1}(\pi(\hat{x}))) = d((\lambda_1+\lambda_2)\eta(y),x_\eta)$$

可得

$$\begin{aligned}
[\varphi+\eta]_{(\lambda_1+\lambda_2)\psi,(\lambda_1+\lambda_2)\hat{x}} &= \sup_{y\in K} d((\lambda_1+\lambda_2)(\varphi(y)+\eta(y)),(2/(\lambda_1+\lambda_2)\pi)^{-1}(\pi(\hat{x})))\\
&\le \|(\lambda_1+\lambda_2)\varphi(y)+(\lambda_1+\lambda_2)\eta(y)-(x_\varphi+x_\eta)\|\\
&\le \|(\lambda_1+\lambda_2)\varphi(y)-x_\varphi\|+\|(\lambda_1+\lambda_2)\eta(y)-x_\eta\|,\\
&[\varphi]_{(\lambda_1+\lambda_2)\psi,(\lambda_1+\lambda_2)\hat{x}}+[\eta]_{(\lambda_1+\lambda_2)\psi,(\lambda_1+\lambda_2)\hat{x}},
\end{aligned}$$

其中，在第一个等式中，利用 π 的线性性，我们用到了这一事实:

$$\begin{aligned}
\pi((\lambda_1+\lambda_2)(\varphi(y)+\eta(y))) &= \pi((\lambda_1+\lambda_2)\varphi(y))+\pi((\lambda_1+\lambda_2)\eta(y))\\
&= (\lambda_1+\lambda_2)(\pi(\varphi(y))+(\pi(\eta(y)))\\
&= 2(\lambda_1+\lambda_2)y.
\end{aligned}$$

因此,

$$[\varphi+\eta]_{(\lambda_1+\lambda_2)\psi,(\lambda_1+\lambda_2)\hat{x}} \le [\varphi]_{(\lambda_1+\lambda_2)\psi,(\lambda_1+\lambda_2)\hat{x}}+[\eta]_{(\lambda_1+\lambda_2)\psi,(\lambda_1+\lambda_2)\hat{x}},$$

至此，命题得证。

□

3.2. 赋范空间：版本 2。 在通常情形下，对于任意点 $x,y\in X$，都有 $d(x,y)=d(y,x)$；另一方面，在我们的内在情形下，一般而言，有

$$d(f(x),\pi^{-1}(y))\neq d(f(y),\pi^{-1}(x)),$$

对于每个 $x,y\in X$. 。特别地，有

$$\begin{aligned}
&d(f(y),\pi^{-1}(x))-d(f(z),\pi^{-1}(x))\le d(f(y),f(z)), \quad \forall x,y,z\in Y\\
&d(f(x),\pi^{-1}(y))-d(f(x),\pi^{-1}(z))\not\le d(f(y),f(z)), \quad \text{for some } x,y,z\in Y.
\end{aligned} \tag{8}$$

事实上，对于任意固定的 x、y、$z\in Y$，若我们选取 $a\in\pi^{-1}(x)$ 使得

$$d(f(z),\pi^{-1}(x)) = d(f(z),a),$$

我们可以推得

$$\begin{aligned} d(f(y),\pi^{-1}(x)) - d(f(z),\pi^{-1}(x)) &\le d(f(y),a) - d(f(z),\pi^{-1}(x)) \\ &\le d(f(y),f(z)) + d(f(z),a) - d(f(z),\pi^{-1}(x)) \\ &= d(f(y),f(z)), \end{aligned}$$

也就是说，(8) 中的第一个不等式成立。另一方面，对于 (8) 中的第二个不等式，我们给出以下例子。令 $X \subset \mathbb{R}^2$ 为由三条线段构成的集合，其端点分别为 (0, 8)、(8, 8)；(1, 4)、(8, 6)；以及 (0, 3)、(8, 7)，并令 Y 为 $\mathbb{R}^2$ 的子集，该子集由端点为 (0, 0) 和 (8, 0) 的线段构成。在 X 上考虑 $\mathbb{R}^2$. 上的通常距离。于是，若考虑投影到第一分量 $\pi: X \to Y$ 的连续截面 $f: Y \to X$，满足 $f(x) = f((1, 0)) = (1, 4)$ $f(y) = f((7, 0)) = (8, 7)$ 且 $f(z) = f((6, 0)) = (8, 6)$，很容易看出

$$\begin{aligned} d(f(x),\pi^{-1}(y)) - d(f(x),\pi^{-1}(z)) &= \sqrt{\frac{5}{4}}, \\ d(f(y),f(z)) &= 1, \end{aligned}$$

因此

$$d(f(x),\pi^{-1}(y)) - d(f(x),\pi^{-1}(z)) \not\le d(f(y),f(z)).$$

那么，考虑如下定义的范数 $|||.|||$并非易事:

$$|||\varphi|||_{ILS_{\psi,\hat{x}}} := \|\varphi\|_\infty + \{\varphi\}_{\lambda\psi,\lambda\hat{x}}, \tag{9}$$

其中 $\|\varphi\|_\infty := \sup_{y\in K}|\varphi(y)|$ 且

$$\{\varphi\}_{\lambda\psi,\lambda\hat{x}} := \sup_{y\in K} d(\lambda\hat{x},(1/\lambda\pi)^{-1}(y)).$$

并且可以像上面那样证明以下结论。

定理 3.4. 设 $\pi : \mathbb{R}^\kappa \to Y$ 是一个线性商映射，Y 是一个度量空间。另设 $\psi: K \to \mathbb{R}^\kappa$ 是 π 的一个内禀 L-利普希茨截面，其中 $K \subset Y$ 紧致，$L \ge 1$ 且 $\hat{}x \in X.$。那么，赋予如 (9) 中的 $|||\cdot|||_{ILS_{\psi,\hat{x}}}$ 后，集合 $\mathbb{L}$ 是一个赋范空间。

证明。 证明过程与定理 3.1 类似。 □

4. 水平集与延拓

本节证明以下定理。

定理 4.1 (作为水平集的延拓)。 设 $\pi: X \to Y \times \mathbb{R}^s$ 是度量空间 X 到拓扑空间 $Y \times \mathbb{R}^s$之间的商映射。

假设 X 是测地的，并且存在 $k \ge 1$，$\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ 与 X的距离 k-双利普希茨等价，以及 $\tau = (\tau_1, \ldots\ldots, \tau_s): X \to \mathbb{R}^s$ 是 k-利普希茨的，且在纤维上是 k-双利普希茨的，使得对所有 $\tau_0 \in \mathbb{R}^s$

(1) 集合 $\tau_1^{-1}(\tau_0)$ 是一个内在 k-利普希茨截面图 $\varphi_{1,\ \tau_0}: Y \times \mathbb{R} \times\{0\}^{s-1} \to X$; 集合 $\tau_2^{-1}(\tau_0)$ 是一个内在 k-利普希茨截面图 $\varphi_{2,\ \tau_0}: Y \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}^{s-2} \to X; \ldots,$ 集合 $\tau_s^{-1}(\tau_0)$ 是一个内在 k-利普希茨截面图 $\varphi_{s,\ \tau_0}: Y \times \{0\}^{s-1} \times \mathbb{R} \to X;$

(2) 对于所有 $x_0 \in \tau_i^{-1}(\tau_0)$ 映射 $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \delta_{i,\ \tau_0}(x) := \rho(x_0,\ \varphi_{i,\ \tau_0}(\pi(x)))$ 在集合 $\{|\tau_i| \leq \delta_{i,\tau_0}\}$ 上是 k-利普希茨的。

设 $Y' \times \mathbb{R}^s \subset Y \times \mathbb{R}^s$ 为一个集合，且 $L \geq 1$。那么对于每个内在 L-利普希茨截面 $\varphi : Y' \times \mathbb{R}^s \to \pi^{-1}(Y' \times \mathbb{R}^s)\ \pi|_{\pi^{-1}(Y' \times \mathbb{R}^s)} :\ \pi^{-1}(Y' \times \mathbb{R}^s) \to Y' \times \mathbb{R}^s$，都存在一个映射 $f :\ X \to \mathbb{R}^s$，它是 K-利普希茨的，并且在纤维上是 K-双*Lipschitz*的，且满足 $K = 2k(Lk+2)$，使得

$$\varphi(Y' \times \mathbb{R}^s) \subseteq f^{-1}(0). \tag{10}$$

特别地，每个“部分定义的”内在*Lipschitz*图 $\varphi(Y' \times \mathbb{R}^s)$ 都是一个“全局定义的”内在*Lipschitz*图 $f^{-1}(0)$的子集。

需要指出的是，关于 Lipschitz 图的延拓，已有若干早期的部分结果，例如：[FSSC06], [Vit，定理 1.5], [Mon14，命题 4.8]，针对余维数大于一的 Heisenberg 群；[Vit12，命题 3.4]，针对 Heisenberg 群中余维数为一的情形；[FS16，定理 4.1]，，针对 Carnot 群中余维数为一的情形。最后，关于一般度量空间，读者可参见 [AP20, LN05, Oht09]。

定理 *4.1* 的证明 (4.1.i)。证明见 [DDLD22]。 □

定理 4.1 (4.1.ii)。 **步骤 1**。 固定 $i = 1, \ldots, s$，为简便起见，我们用 τ^{-1}, f_{x_0}代替 τ_i^{-1}和 $f_{x_0,\ i}$.固定 $x_0 \in \tau^{-1}(\tau_0)$。考虑如下定义的映射 $f_{x_0} :\ X \to \mathbb{R}$

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} 2(\tau(x) - \tau(x_0) - \alpha\delta_{\tau_0}(x)) & \text{if } |\tau(x) - \tau(x_0)| \leq 2\alpha\delta_{\tau_0}(x) \\ \tau(x) - \tau(x_0) & \text{if } \tau(x) - \tau(x_0) > 2\alpha\delta_{\tau_0}(x) \\ 3(\tau(x) - \tau(x_0)) & \text{if } \tau(x) - \tau(x_0) < -2\alpha\delta_{\tau_0}(x) \end{cases} \tag{11}$$

其中 $\alpha := kL + 1.$。我们证明 f_{x_0} 满足以下性质：

(i)： f_{x_0} 是 K-利普希茨；(ii)： $f_{x_0}($ $x_0) = 0$；(iii)： f_{x_0} 在纤维上是双 Lipschitz。

其中 $K = \max\{3k, 2k + 2\alpha k\} = 2k + 2\alpha k$，因为 $\alpha > 1.$。性质 (i) 可由以下事实推出：τ, δ_{τ_0} 均为利普希茨映射，且 X 是测地空间。另一方面，注意到 $\delta_{\tau_0}(x_0) = \rho(x_0, \varphi_{\tau_0}(\pi(x_0))) = 0$，因为 $x_0 \in \varphi_{\tau_0}(Y)$，可知 ($ii$) 成立。

最后，对于任意的 $x, x' \in \pi^{-1}(y)$，我们有 $\rho(x_0, \varphi_{\tau_0}(\pi(x))) = \rho(x_0, \varphi_{\tau_0}(\pi(x')))$，因此 f在纤维上是双 Lipschitz的，因为 τ 也是如此。因此，(iii)成立。

此时，我们考虑映射 $f :\ X \to \mathbb{R}$，其定义如下：

$$f(x) := \sup_{x_0 \in \varphi(Y)} f_{x_0}(x), \quad \forall x \in X,$$

并且我们要证明它就是所求的映射。利普希茨性质成立；回想一下，函数 δ_{x_0} 在纤维上是常数。因此，唯一需要证明的非平凡事实是 (10)。固定 $\bar{x}_0 \in \varphi(Y')$。由 ($ii$) 可知 $f_{\bar{x}_0}(\bar{x}_0) = 0$，因此只需证明，对于 $x_0 \in \varphi(Y')$，$f_{x_0}(\bar{x}_0) \leq 0$。令 $x_0 \in \varphi(Y')$。此外，利用 τ是k-利普希茨的，以及 φ 是内在 L-利普希茨的，我们有

$$|\tau(\bar{x}_0) - \tau(x_0)| \leq kd(\bar{x}_0, x_0) \leq Lkd(x_0, \pi^{-1}(\pi(\bar{x}_0))) \leq Lkd(x_0, \varphi_{\tau_0}(\pi(\bar{x}_0))) < \alpha\delta_{\tau_0}(\bar{x}_0),$$

因此

$$f_{x_0}(\bar{x}_0) = 2(\tau(\bar{x}_0) - \tau(x_0) - \alpha\delta_{\tau_0}(\bar{x}_0)) < 0,$$

也就是说，(10) 成立。

步骤 2. 我们考虑 $f = (f_1, \dots, f_s)$，其中每个 f_i 都由 τ_i^{-1}. 给出。粗略地说，这里的问题在于，当我们使用 $\tau_1^{-1}, \dots, \tau_s^{-1}$ 将 $(f_1, \dots, f_s)$ 拼在一起时，f 可能不是利普希茨的。但现在，由于 $Y \times \mathbb{R}^s$ 的构造，尤其是 $\varphi_{1,\ \tau_0}\colon Y \times \mathbb{R} \times \{0\}^{s-1} \to X; \dots; \varphi_{s,\ \tau_0}\colon Y \times \{0\}^{s-1} \times \mathbb{R} \to X.$ □的构造，f 是利普希茨的。

参考文献

[ABB19] Andrei Agrachev、Davide Barilari 和 Ugo Boscain。《次黎曼几何综合导论》。剑桥高等数学研究丛书，剑桥大学出版社，181:762，2019年。[AGS14a] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savaré。度量测度空间中的微积分与热流，以及在具有下界里奇曲率的空间中的应用。《数学发明》，195(2):289–391，2014年。[AGS14b] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savaré。具有下界黎曼里奇曲率的度量测度空间。《杜克数学杂志》，163(7):1405–1490，2014年。[AGS15] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savaré。Bakry-Émery 曲率-维数条件与黎曼里奇曲率界。《概率年刊》，43(1):339–404，2015。[AK00] Luigi Ambrosio 和 Bernd Kirchheim。度量空间与巴拿赫空间中的可整流集。《数学年刊》，318(3):527–555，2000。[AM22a] G. Antonelli 和 A. Merlo。Carnot 群中的可整流测度：密度的存在性。已被《几何分析杂志》接收，2022年。[AM22b] G. Antonelli 和 A. Merlo。Carnot 群中的可整流测度：Marstrand–Mattila 可整流性判据。已被《泛函分析杂志》接收，2022年。[AP20] Luigi Ambrosio 和 Daniele Puglisi。Lipschitz 映射空间与最优传输之间的线性延拓算子。《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal），2020(764):1–21，2020年。[Bat21] D. Bate。利用切空间刻画可整流度量空间。已接收，《数学发明》，2021年。[BJL+99] S. Bates、W. B. Johnson、J. Lindenstrauss、D. Preiss 和 G. Schechtman。Lipschitz 函数的仿射逼近与非线性商。《几何与泛函分析》，9(6):1092–1127，1999。[BLU07] A. Bonfiglioli、E. Lanconelli 和 F. Uguzzoni。分层李群及其次拉普拉斯算子的位势理论。施普林格数学专著。Springer，柏林，2007年。[CDPT07] Luca Capogna、Donatella Danielli、Scott D. Pauls 和 Jeremy T. Tyson。《Heisenberg 群与次黎曼等周问题导论》，数学进展第259卷。Birkhäuser Verlag，巴塞尔，2007年。[Che99] J. Cheeger。度量测度空间上 Lipschitz 函数的可微性。《几何与泛函分析》，9(8):428–517，1999。[CP06] D.R. Cole 和 S.D. Pauls。C^1 Heisenberg 群中的超曲面是 N-可整流的。《休斯敦数学杂志》，32(3):713–724，2006年。[DD22a] Daniela Di Donato。内在 Lipschitz 常数的内蕴 Cheeger 能量。预印本，2022年。[DD22b] Daniela Di Donato。内蕴 Hopf-Lax 半群与内蕴斜率。预印本，2022年。[DD22c] Daniela Di Donato。度量空间中的内在 Hölder 截面。预印本，2022年。[DD22d] Daniela Di Donato。群的半直积上的内在 Lipschitz 图。预印本，2022年。[DD22e] Daniela Di Donato。非对称内蕴 Hopf-Lax 半群与内蕴拉格朗日量。预印本，2022年。

[DDLD22] Daniela Di Donato 和 Enrico Le Donne。内在 Lipschitz 截面及其在度量群中的应用。预印本，2022年。[DS91] G. David 和 S. Semmes。 R^n中的奇异积分与可整流集：超越 Lipschitz 图，《Astérisque》。(193):171–279，1991年。[DS93] G. David 和 S. Semmes。一致可整流集的分析及其上的分析。《数学调查与专著》，38，1993年。[Fed69] Herbert Federer。几何测度论。《数学基础丛书》第153卷。Springer-Verlag New York Inc.，纽约，1969年。[FS16] Bruno Franchi 和 Raul Paolo Serapioni。Carnot 群中的内在 Lipschitz 图。《几何分析杂志》，26(3):1946–1994，2016年。[FSS22] M. Fornasier、G. Savaré 和 G.E. Sodini。度量 Sobolev 空间中 Lipschitz 函数子代数的稠密性及其在 Wasserstein Sobolev 空间中的应用。预印本，2022年。[FSSC01] B. Franchi、R. Serapioni 和 F. Serra Cassano。Heisenberg 群中的可整流性与周长。《数学年刊》，321(3):479–531，2001年。[FSSC03a] B. Franchi、R. Serapioni 和 F. Serra Cassano。Carnot 群中的正则超曲面、内在周长与隐函数定理。《分析与几何通讯》，11(5):909–944，2003年。[FSSC03b] Bruno Franchi、Raul Serapioni 和 Francesco Serra Cassano。二阶 Carnot 群中有限周长集的结构。《几何分析杂志》，13(3):421–466，2003年。[FSSC06] Bruno Franchi、Raul Serapioni 和 Francesco Serra Cassano。Heisenberg 群中的内在 Lipschitz 图。《非线性凸分析杂志》，7(3):423–441，2006年。[Kei04] S. Keith。度量测度空间的可微结构。《数学进展》183，271–315页，2004年。[KM16] B. Kleiner 和 J.M. Mackay。度量测度空间上的可微结构：入门。《比萨高等师范学院科学年刊》 (5) XVI 卷，41–64页，2016年。[LN05] J.R. Lee 和 A. Naor。通过随机度量划分延拓 Lipschitz 函数。《数学发明》，160(1):59–95，2005年。[LV09] John Lott 和 Cédric Villani。通过最优传输研究度量测度空间的里奇曲率。《数学年刊》(2)，169(3):903–991，2009年。[Mag04] V. Magnani。分层群中的不可整流性与刚性。《数学文献》，83(6):568–576，2004年。[Mon14] Roberto Monti。 $\mathbb{H}$-周长极小边界的 Lipschitz 逼近。《变分法与偏微分方程》，50(1-2):171–198，2014年。[NY18] Assaf Naor 和 Robert Young。垂直周长与水平周长。《数学年刊》(2) 188，(1):171–279，2018年。[Oht09] S.I. Ohta。度量空间之间 Lipschitz 映射与 Hölder 映射的延拓。《正性》13，2:407–425，2009年。[Pau04] S.D. Pauls。一种以 Carnot 群为模型的可整流性概念。《印第安纳大学数学杂志》，53(1):49–81，2004年。[Sav22] G. Savaré。扩展度量测度空间中的 Sobolev 空间。载于《度量空间分析与几何新趋势》，Springer，117–276页，2022年。[SC16] Francesco Serra Cassano。Carnot 群中几何测度论的一些主题。载于《次黎曼流形上的几何、分析与动力学》第1卷，EMS 数学讲义系列，1–121页。欧洲数学学会，苏黎世，2016年。[Stu06] K.T. Sturm。论度量测度空间的几何。I、II。《数学学报》，196(1):65–131 和 133–177，2006年。[Vil09] Cédric Villani。最优传输：古今，数学基础丛书第338卷， /数学科学基本原理/。Springer-Verlag，柏林，2009年。[Vit] Davide Vittone。Heisenberg 群中的 Lipschitz 图与流。《数学论坛：Sigma》，10，E6，2022年。[Vit12] Davide Vittone。Carnot-Carathéodory 空间中的 Lipschitz 曲面、周长与 BV 函数的迹定理。《比萨高等师范学院科学年刊》(5)，11(4):939–998，2012年。

[VN88] Berestovskii Valerii Nikolaevich. 具有内蕴度量的齐性流形。《西伯利亚数学杂志》，I(29):887–897, 1988年。

Daniela Di Donato：马尔凯理工大学工业工程与数学科学系，Via Brecce Bianche 12号，60131 安科纳。电子邮件地址：d.didonato@staff.univpm.it