arXiv:2301.01736v2 [math.DS] 2 Jan 2024

无限维群的非奇异作用与多态

Yury A.Neretin[1]

设 Z 是一个概率测度空间，其测度为 ζ， $\mathbb{R}^\times$ 是正实数乘法群，令 t 为 $\mathbb{R}^\times$上的坐标。 Z 的一个多态是 $Z\times Z\times\mathbb{R}^\times$ 上的测度 π，满足对于任意可测的 A、 $B\subset Z$，有 $\pi(A\times Z\times\mathbb{R}^\times)=\zeta(A)$，且在 $Z\times B\times\mathbb{R}^\times$ 上对 $\int t\,d\pi(z,u,t)$ 的积分为 $\zeta(B)$。所有多态的集合具有自然的半群结构，所有非奇异变换组成的群在该半群中稠密。我们讨论某些类型的无限维（“大型”）群在多态中的闭包问题，并证明无限维群的非奇异作用生成其列车（双陪集范畴）由多态构成的表示。

1. Polymorphisms

1.1. 引言。设 $Z=(Z,\zeta)$ 是一个带有无原子测度的勒贝格概率测度空间。众所周知， Z 上所有保测变换构成的群具有自然的紧化，它是一个乘法分别连续的可度量化半群（这一主题可追溯至 E. Hopf, [10], 1954）。其点（我们采用 [52] 提出的术语“多态”）是 $Z\times Z$ 上的博雷尔测度 π，这些测度在 $Z\times Z$ 到第一和第二个因子的投影下的推前测度均为 ζ；详情参见例如 [16], [52], [53], [21], 第 VIII.4 节。这类对象在遍历理论中扮演着不同角色。它们是一种测度空间之间的多值变换，与通常的保测变换享有同等地位，参见例如 [16], [52]。另一方面，它们也可以是动力系统之间的交织算子（联结），参见例如 [47], [15], [8],[48]。

多态中的群闭包是一个有趣且不简单的课题，可追溯至群 $\mathbb{Z}$，例如参见 [15], [9]。本文研究的是无限维群作用的闭包。此类研究的首个结果由 Nelson [19], 获得，他考察了正交群 $\mathrm{O}(\infty)$ 在带有高斯测度的无限维空间上的作用之闭包。

与测度空间的非奇异变换相关的类似构造也曾用于遍历理论，例如参见 [16], [6]。

作者感兴趣的是与非奇异作用相关的酉表示；标准定义与这一课题无关。 q 在 Z 上的一个非奇异变换会在 $L^2(Z)$中产生一参数算子族，即 $f(z)\mapsto f(q(z))q'(z)^{1/2+is}$。因此，群 G的一个非奇异作用会产生 G的一参数酉表示族。因此，多态必须在 $L^2(Z)$中产生一参数算子族。恰当的对象已在 [20]中引入。

1.2. 多态。我们仅考虑勒贝格测度空间，参见 [46]，即与由若干区间 $\mathbb{R}$ 及至多可数个非零测度原子组成的并集等价的空间。

对于带有连续（无原子）测度 ζ 的空间 $Z=(Z,\zeta)$，我们用 $\mathrm{Ams}(Z)$ 或 $\mathrm{Ams}(Z,\zeta)$ 表示「测度空间自同构」（automorphisms of a measure space）的缩写，

[1]由 FWF P31591 项目资助。

即所有保测变换构成的群。它有两种形式。如果测度 ζ 有限，那么不失一般性，我们可以认为 Z 是线段 $[0,1]$。如果测度是 σ-有限的，那么我们可以假设 $Z = \mathbb{R}$。在 σ-有限的情形下，我们用 $\mathsf{Aut}_\infty(Z)$ 表示这个群。我们用 $\mathsf{Gms}(Z)$（或 $\mathsf{Gms}(Z,\zeta)$）表示所有非奇异变换构成的群；在所有情形中，变换都定义到零测集为止。回顾一下，变换 $g\colon Z \to Z$ 是非奇异的，是指 g 和 g^{-1} 将零测集映为零测集。对于非奇异变换 g，由恒等式可确定一个定义良好的拉东–尼科迪姆导数 $g'(z)$

$$\zeta(g(A)) = \int_A g'(x)\, d\zeta(z) \qquad \text{for all measurable } A \subset Z.$$

我们按 $g_1 \diamond g_2 = g_2(g_1)$ 的顺序书写该群中的乘积；等价地，我们将 $\mathsf{Gms}(Z)$ 对 Z 的作用视为右作用。

记 $\mathbb{R}^\times$ 为正实数乘法群，记 $t > 0$ 为其上的坐标。

定义 1.1.（[20]）设 (X,ξ)、(Y,υ) 为概率勒贝格空间。多态 $\mathfrak{p}\colon X \twoheadrightarrow Y$ 是 $X \times Y \times \mathbb{R}^\times$ 上的一个测度，满足：

1. $\mathfrak{p}$ 在投影 $X \times Y \times \mathbb{R}^\times \to X$ 下的推前测度为测度 ξ；2. 测度 $t \cdot \mathfrak{p}$ 在投影到 Y 下的推前测度与测度 υ 相同。

我们用 $\mathsf{Pol}(X,Y)$ 表示所有多态 $X \twoheadrightarrow Y$ 构成的空间。

若多态 $\pi \in \mathsf{Pol}(X,Y)$ 的测度 π 支持于子集 $X \times Y \times 1 \subset X \times Y \times \mathbb{R}^\times$，则称其为保测的。上一小节中的对象都是保测多态。

Example. 设 $q \in \mathsf{Gms}(X,\xi)$。考虑由下式定义的映射 $X \to X \times X \times \mathbb{R}^\times$

$$x \mapsto \big(x, q(x), q'(x)\big).$$

测度 ξ 在此映射下的推前测度是一个多态 $X \twoheadrightarrow X$。若 $q \in \mathsf{Ams}(X,\xi)$，则 $q' = 1$，从而得到一个保测多态。 ⊠

The topology. 设 (M,μ) 是一个测度空间，$S \subset M$ 是一个可测子集；设 ψ 是从 M 到空间 N 的映射，它将 S 映至 T。我们用 $\mu\downarrow_T^S$ 表示测度 μ 在映射 ψ 下对其在 S 上的限制所取的推前测度（在下文使用此记号时，ψ 是一个投影映射，因此我们从记号中省略 ψ 和 N）。

用此记号表示的多态定义中的条件 1-2 为：

$$\mathfrak{p}\downarrow_X^{X\times Y\times\mathbb{R}^\times} = \xi, \qquad \big(t\cdot\mathfrak{p}\big)\downarrow_Y^{X\times Y\times\mathbb{R}^\times} = \upsilon.$$

我们称序列 $\mathfrak{p}_j \in \mathsf{Pol}(X,Y)$ 收敛到 $\mathfrak{p}$，如果对于任意可测子集 $A \subset M$，$B \subset N$，我们有以下关于 $\mathbb{R}^\times$ 上的测度[2] 的弱收敛：

$$\mathfrak{p}_j\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{A\times B\times\mathbb{R}^\times} \to \mathfrak{p}\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{A\times B\times\mathbb{R}^\times}; \tag{1.1}$$

$$\big(t\cdot\mathfrak{p}_j\big)\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{A\times B\times\mathbb{R}^\times} \to \big(t\cdot\mathfrak{p}\big)\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{A\times B\times\mathbb{R}^\times}. \tag{1.2}$$

[2]关于 $\mathbb{R}$ 上测度的弱收敛，参见例如 [49], 第III.1-2节。回顾一下，群 $\mathbb{R}^\times$ 与 $\mathbb{R}$ 的加法群同构。

容易证明（参见 [27], 定理 5.3），群 $\mathsf{Gms}(X)$ 在 $\mathsf{Pol}(X,X)$ 中稠密。

Remark. 空间 $\mathsf{Pol}(X,Y)$ 并非紧空间（因为在取弱极限时，测度可能消失）。我不知道，将 $\mathsf{Pol}(X,Y)$ 紧化是否合理。⊠

Continuous polymorphisms. 参见 [20]。记 $\mathfrak{M}^\triangledown(\mathbb{R}^\times)$ 为 $\mathbb{R}^\times$ 上的所有正有限博雷尔测度 σ 的集合，且满足 $t\cdot\sigma$ 有限。该集合关于群 $\mathbb{R}^\times$上的测度卷积 $*$ 构成一个半群。事实上，

$$\int_{\mathbb{R}^\times} t\,d\sigma_1(t)*\sigma_2(t)=\int_{\mathbb{R}^\times}\int_{\mathbb{R}^\times} pq\,d\sigma_1(p)\,\sigma_2(q)=\int_{\mathbb{R}^\times} p\,d\sigma_1(p)\cdot\int_{\mathbb{R}^\times} q\,d\sigma_2(q).$$

从 $X\times Y$到 $\mathfrak{M}^\triangledown$ 的可测函数 $(x,y)\to s_{x,\ y}$ 按如下方式确定 $X\times Y\times\mathbb{R}^\times$ 上的测度 $\mathfrak{s}$。对于可测集 $A\subset X$, $B\subset Y$, $C\subset\mathbb{R}^\times$，我们假设

$$\mathfrak{s}(A\times B\times C)=\int_{A\times B} s_{x,y}(C)\,d\xi(x)\,d\upsilon(y).$$

我们还必须要求

$$\int_Y s_{x,y}(\mathbb{R}^\times)\,d\upsilon(y)=1,\qquad \int_X\int_{\mathbb{R}^\times} t\,ds_{x,y}(t)\,d\xi(x)=1,$$

在此条件下，我们得到 $\mathsf{Pol}(X,Y)$ 的一个元素。我们称这类多态为连续多态。

设连续多态 $\mathfrak{u}\in\mathsf{Pol}(X,Y)$、 $\mathfrak{v}\in\mathsf{Pol}(Y,Z)$ 分别由函数 $(x,y)\mapsto u_{x,\ y}$ 和 $(y,z)\mapsto v_{y,\ z}$ 确定。则它们的乘积

$$\mathfrak{w}=\mathfrak{v}\diamond\mathfrak{u}\in\mathrm{Pol}(X,Z)$$

由函数确定

$$w_{x,z}=\int_Y u_{x,y}*v_{y,z}\,d\upsilon(y).$$

这是积分算子乘积的公式，其中通常的乘法被卷积[3]取代。

Product of polymorphisms. 容易看出，连续多态在 $\mathsf{Pol}(X,Y)$ 中稠密。可以证明，乘法 $\diamond$ 可扩展为一个分别连续的映射

$$\mathrm{Pol}(X,Y)\times\mathrm{Pol}(Y,Z)\to\mathrm{Pol}(X,Z).$$

该运算是结合的（见 [27], 定理 5.5、定理 5.9），也就是说，对于任意勒贝格空间 X、Y、 Z、 U 以及任意

$$\mathfrak{p}\in\mathrm{Pol}(X,Y),\quad \mathfrak{q}\in\mathrm{Pol}(Y,Z),\quad \mathfrak{r}\in\mathrm{Pol}(Z,U),$$

我们有 $(\mathfrak{r}\diamond\mathfrak{q})\diamond\mathfrak{p}=\mathfrak{r}\diamond(\mathfrak{q}\diamond\mathfrak{p})$。

因此，我们得到一个范畴，其对象是勒贝格概率测度空间，态射是多态。

Remarks. a) 关于多态乘法的其他定义方式，参见[27], ；不过，下面给出的连续性定义和对偶性定义（3.2）最为灵活。

[3]如果我们只考虑有限或可数测度空间，那么所有多态都是连续的。它们的乘积可归结为在 $\mathbb{R}^\times$ 上的测度环（或者更准确地说，在半环 $\mathfrak{M}^\triangledown$）上的矩阵乘积，参见 [27], 第 5.4 小节。

b) 通俗地说，多态是“映射” $X \to Y$，它们将 X中的点沿着 Y展开；拉东–尼科迪姆导数也会展开。⊠

The involution. 最后，我们在多态范畴上定义一个对合。对于 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pol}(X,Y)$，我们考虑它在映射 $(x,y,t) \mapsto (y,x,t^{-1})$ 下的推前测度 $\mathfrak{p}'$，并将 $\mathfrak{p}^\star \in \mathrm{Pol}(Y,X)$ 定义为测度 $t\cdot\mathfrak{p}'$。那么（见 [27],引理 5.8），对于 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Pol}(X,Y)$、 $\mathfrak{q}\in\mathrm{Pol}(Y,Z)$，有

$$(\mathfrak{q}\diamond\mathfrak{p})^\star = \mathfrak{p}^\star \diamond \mathfrak{q}^\star.$$

1.3. 本文的目的。关于某些无限维（大[4]）群在多态中的闭包的描述，见 [23], [26], [30], 前两篇论文，得到了不同寻常的显式公式。

大群常常生成双陪集范畴（“列车”）。本文旨在就此主题提出两个一般性论述。在定理 3.1 中，我们证明，大群的非奇异作用 G 可扩展为从双陪集范畴到多态范畴的函子。该定理很简单（其证明已在 [27]中准备好），但它是一个统合了截然不同类型大群的一般性论断（见第 2.4 小节）；这类论述相对少见。在定理 3.2 中，我们提出一种半构造性方法，用于描述大群在多态中的闭包。

2. $\mathcal{M}$-families of subgroups and trains of large groups

2.1. 乘法性。设 G 是可分拓扑群[5]。设 ρ 是 G 在可分希尔伯特空间 H上的酉表示。对于任意闭子群$K\subset G$，记 H^K 为 K-不动向量构成的子空间，记 P^K 为到 H^K的正交投影。对于两个子群 K、 $L\subset G$，我们定义算子

$$\widehat{\rho}_{K,L}(g) : H^L \to H^K$$

by

$$\widehat{\rho}_{K,L}(g) := P^K\rho(g)\Big|_{H^L}. \tag{2.1}$$

容易看出

$$p\in K,\, q\in L \quad\Longrightarrow\quad \widehat{\rho}_{K,L}(pgq) = \widehat{\rho}_{K,L}(g).$$

因此，算子 $\widehat{\rho}_{K,\,L}(\cdot)$ 实际上取决于双陪集 $\mathfrak{g} := K\cdot g\cdot L$。用 $K\backslash G/L$ 表示所有双陪集构成的空间。接下来，我们在 G 上定义一种较弱的等价关系。

定义2.1。 G 中相对于子群 K、 L 的约化双陪集，是以下等价关系所确定的等价类:

$$g\sim g' \;\Leftrightarrow\; \widehat{\rho}_{K,L}(g) = \widehat{\rho}_{K,L}(g') \textit{ for all unitary representations } \rho \textit{ of } G.$$

记 $[K\backslash G/L]$为所有约化双陪集的集合。根据定义，$[K\backslash G/L]$是 $K\backslash G/L$的一个商空间。

[4]“大群”这一非正式术语由 A. M. Vershik 提出。第 2.4 小节中列举了一些例子；只有 A 型和 C 型群在形式意义上是无限维的，其他类型的群都是全不连续的。[5]我们允许非度量化拓扑，参见第 2.4 小节中的例 A_1 。

定义 2.2. 若子群 $K \subset G$ 是 G 中的一个 $\mathcal{M}$-子群（或称有序对（G, K）满足乘法性），则对于每个 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \in [K\backslash G/K]$ 都存在一个元素 $\mathfrak{g}\circledcirc\mathfrak{h} \in [K\backslash G/K]$, 使得对于 G 的任意酉表示 ρ，我们有

$$\widehat{\rho}_{K,K}(\mathfrak{g})\,\widehat{\rho}_{K,K}(\mathfrak{h}) = \widehat{\rho}_{K,K}(\mathfrak{g}\circledcirc\mathfrak{h}).$$

由于算子的乘积是结合的，因此 $[K\backslash G/K]$ 中的 $\circledcirc$-乘积也是结合的。

2.2. 关于 $\mathcal{M}$-子群定义的备注。具有 $\mathcal{M}$ 子群的群种类繁多，见下文第 2.4 小节。但首先，我们将说明乘法性在哪些情况下无法出现。

A) Hecke–Iwahori algebras $\mathfrak{M}(K\backslash G/K)$。设 G 为一个局部紧群， K 为一个紧子群。那么， $K\backslash G/K$ 上的测度可以视为 G 上的测度，并且对于 K中元素的左平移和右平移保持不变。因此， $K\backslash G/K$ 上所有有界变差复值博雷尔测度构成的空间 $\mathfrak{M}(K\backslash G/K)$具有结合代数的结构。该代数中的乘积是 G上测度的卷积 $*$ 。

自 Gelfand 关于球表示的定理（1950 年）以来，此类代数已被广泛用于表示论。一方面，它们被用作抽象工具；另一方面，某些此类代数具有良好的结构，并以自身的方式发展（例如众所周知的 Hecke 代数、仿射 Hecke 代数和 Yokonuma 代数）。除少数示例集合外，对此类代数进行显式描述都是困难的课题。

对于 $\mathfrak{p} \in K\backslash G/K$，我们赋予由点 $\mathfrak{p}$支撑的单位测度 $\delta_{\mathfrak{p}}$ 。卷积 $\delta_{\mathfrak{p}} * \delta_{\mathfrak{q}}$ 确定了一种运算

$$K\backslash G/K \times K\backslash G/K \to \mathfrak{M}(K\backslash G/K),$$

但 $\delta_{\mathfrak{p}} * \delta_{\mathfrak{q}}$ 不是狄拉克测度，而且我们没有自然的运算 $K\backslash G/K \times K\backslash G/K \to K\backslash G/K$ （除了一个平凡情形：当 K 是正规子群时，$\mathfrak{M}(K\backslash G/K)$ 就是商群 G/K上的测度卷积代数）。

B) Our definition does not exclude trivial situations[6]. 例如，可能出现这样的情况： G 没有非平凡的酉表示[7]。那么任意 $K \subset G$都是一个 $\mathcal{M}$-子群，并且存在一个只含一个元素的半群 $[K\backslash G/K]$ 。

C) For Lie connected groups, vectors fixed by noncompact subgroups are rare. 设 $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, 且 $K \subset G$ 是一个非紧闭子群。那么，对于希尔伯特空间 H中任意非平凡的不可约酉表示 ρ，我们有[8] $H^K = 0$。我们再次得到一个单点半群 $[K\backslash G/K]$。

[6]我们的目的是提出证明定理 3.1 所需的最小条件。[7]例如：——无限维希尔伯特空间中由满足 $g - 1$ 为紧算子这一条件的算子构成的群 g，见 [35]（更直观的证明见 [45], 命题 5.1.b 和 7.1）。——线段 $[0, 1]$, 的所有同态构成的群，见 [18]; 考察这些群的超群，可以构造出许多没有酉表示的群。[8]证明。 G 的中心 $\mathfrak{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 由满足 $\theta^n = 1$的标量矩阵 θ 组成。考虑由所有算子 $\rho(g)$ 构成的集合 $\rho(G)$, 其中 $g \in G$。记 $\rho(G)$ 在赋予弱拓扑的算子空间中的闭包为 $\rho(G)$。根据 Howe、Moore [11], $\rho(G)$ 是 G 对子群 $U \subset \mathfrak{Z}$ 取商后所得空间的一点紧化。添加的点是 0。由于K 不是紧的， $\rho(K) = \rho(K) \cup 0$。如果 K 有不动向量 v，那么它也被$\rho(K)$的所有元素固定。因此， K 没有不动向量。

对于任意连通李群，任何酉表示中向量的稳定子都是紧的，这种说法并不正确。不过，例外情况有些人为（关于这个问题的详细讨论见 [54]），对我们的目的而言并无意义。

对于离散群，情况尚未得到充分理解。一个广为人知且令人感兴趣的例子是第 2.4 小节中的例 $\mathsf{B}_1(2)$。（此外还有例 $\mathsf{B}_1(n)$、$\mathsf{D}_1(1)$。）事实上，这些群都“很大”。

2.3. $\mathfrak{M}$-族与列车。如上所述，设 G 是一个可分拓扑群，ρ 是它在希尔伯特空间 H 中的酉表示。设有一个子群$K = K_0 \subset G$ 和一个子群族 $K_\alpha \subset K$，其中 α 取遍某个集合 $\mathcal{A}$。假设对于任意一对 K_α、$K_{\alpha'}$，都存在 $K_{\alpha''} \subset K_\alpha \cap K_{\alpha'}$。记

$$H_\alpha := H^{K_\alpha}, \qquad P_\alpha := P^{K_\alpha}, \qquad \widehat{\rho}_{\alpha,\beta}(\cdot) := \widehat{\rho}_{K_\alpha,K_\beta}(\cdot).$$

显然，

$$K_\alpha \supset K_{\alpha'} \implies H_\alpha \subset H_{\alpha'},\ P_\alpha P_{\alpha'} = P_\alpha.$$

定义 2.3. 若一个族 $\{K_\alpha\}$ 是 $\mathcal{M}$-族（或满足乘法性条件的族），则称其为 $\mathcal{M}$-族；具体而言，对于每个 α、β、$\gamma \in \mathcal{A}$，对于任意 $\mathfrak{g} \in [K_\alpha\backslash G/K_\beta]$、$\mathfrak{h} \in [K_\beta\backslash G/K_\gamma]$，都存在一个元素 $\mathfrak{g}\circledcirc\mathfrak{h}$，使得对于 G 的任意酉表示 ρ，都有

$$\widehat{\rho}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{g})\,\widehat{\rho}_{\beta,\gamma}(\mathfrak{h}) = \widehat{\rho}_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{g}\circledcirc\mathfrak{h}).$$

由于算子的乘积具有结合性，$\circledcirc$-乘积也具有结合性。

定义 2.4。（列车 $\mathsf{Tr}(G,\{K_\alpha\})$ 是一个范畴，其对象为 $\alpha \in \mathcal{A}$，态射集为

$$\mathrm{Mor}(\beta,\alpha) = [K_\alpha\backslash G/K_\beta],$$

且乘积为 $\circledcirc$-乘积。

2.4. $\mathfrak{M}$-族的例子。我们列举了种类繁多的 $\mathcal{M}$-族 $\{K_\alpha\} \subset G$，不提供证明，且仅作简要说明。

A. Infinite-dimensional real classical groups. 参见，例如，[38], [42], [45]–[43], [21], 第 IX.3-4, [24], [25] 节。

— A_1. 令

$$G = \mathrm{GL}(\infty,\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$

为由可逆实无限矩阵 g 构成的群，其中 $g-1$ 只有有限个非零元素。我们赋予该群归纳极限拓扑。令 $K = \mathsf{O}(\infty)$ 为由正交矩阵构成的子群。令$K_\alpha \subset K$ 为稳定基的前 α 个元素的稳定子。那么 $\{K\}_\alpha \subset G$ 是一个$\mathcal{M}$-族。下面解释 $K_\alpha\backslash G/K_\alpha$ 中的乘积。考虑序列

$$\theta_N^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_N & 0 \\ 0 & 1_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_\infty \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

其中，1_j 表示大小为 j的单位矩阵。于是，对于任意 g、$h \in G$，双陪集序列

$$\mathfrak{q}_N := K_\alpha \cdot g\theta_N^{(\alpha)} h \cdot K_\alpha \in K_\alpha\backslash G/K_\alpha$$

最终保持不变，其极限值就是乘积 $\mathfrak{g}\circledcirc\mathfrak{h}$。这是 Olshanski 意义下“无限维经典群表示论”中的一般现象[9] [42]。

— A_2。令 G 为实数 ℓ^2 上可逆算子构成的群，这些算子可表示为 $U(1+T)$ 的形式，其中 U 是正交算子， T 是希尔伯特 – 施密特算子 [10]。令 K 为所有正交算子构成的群 $\overline{O}(\infty)$。子群 K_α 的定义方式相同。关于 A_2 与 A_1，的关系，见下一小节。

— A_3。令 G、 K 如前例所述。令 ω 为奇数集的一个子集， K_ω 为 $\mathrm{O}(\infty)$ 中逐点固定 ℓ^2 中编号为 $j\in\omega$ 的基向量的子群。

B. Infinite symmetric groups. 参见，例如， [40], [41], [43], [29]。

— $\mathsf{B}_1(n)$。记 S_∞ 为 $\mathbb{N}$ 上有限支撑置换构成的群，记 $\overline{S}_\infty$ 为所有置换构成的群。固定 $n=1$、2、.....。令 G 为 S_∞ 的 n 个副本的乘积，其中 $n\geqslant 1$。令 K 为对角子群，因此 $K\simeq S_\infty$。令 $\{K_\alpha\}$ 为集合 $\{1,\dots,\alpha\}$ 的逐点稳定子群。

— $\mathsf{B}_2(n)$. 考虑 $\overline{S}_\infty$ 的 n 个副本的乘积。令 G 由满足以下条件的元组 $(g_1,\dots,g_n)$ 构成：对所有 i， $g_ig_j^{-1}\in S_\infty$ j。令 $K\simeq\overline{S}_\infty$ 为对角子群，子群 $\{K_\alpha\}$ 是上述集合 $\{1,\dots,\alpha\}$ 的逐点稳定子群。对于 $n=1$ 的情形，即群 $\overline{S}_\infty$，Lieberman 得到了酉表示的分类 [17], ，参见 Olshanski 在 [40] 中的评论。 $n=2$ 的情形则对应于丰富的“无限对称群的表示论”，该理论由 E. Thoma 开创（A. M. Vershik、S. V. Kerov、A. Wassermann、G. I. Olshanski、A. Yu. Okounkov、A. M. Borodin 等），相关说明见 [41], [29]）。

C. Groups of transformations of measure spaces. 参见 [20], [21],第八章第4节、第十章， [23]。

— C_1。设 Z 是一个概率非原子测度空间（因此，我们可以令$Z=[0,1]$）。令 $G=\mathrm{Gms}(Z)$、 $K=\mathrm{Ams}(Z)$。对于 Z的任意有限可测划分$\mathfrak{h}$，我们考虑由保持该划分的变换组成的子群 $K_\mathfrak{h}\subset K$。在这种情况下，我们得到有限测度空间上所有多态构成的范畴（我们对多态的定义正是由此而来[20]）。

— C_2。设 Z 是一个带有 σ-有限测度的无原子测度空间（因此，我们可以令 $Z=\mathbb{R}$）。显然， $\mathrm{Gms}([0,1])\simeq\mathrm{Gms}(\mathbb{R})$。但我们选择另一个 $K=\mathrm{Ams}_\infty(Z)\simeq\mathrm{Ams}_\infty(\mathbb{R})$。设 $\mathfrak{h}$ 是 Z中一族两两不相交的有限测度可测子集 H_1、.....、 H_k。我们用 $K_\mathfrak{h}$ 表示 K 中保持所有子集 H_j的子群。与这一 $\mathcal{M}$-族相关的多态将在第3.6小节讨论。

— C_3。设 Z 是一个具有 σ-有限测度的无原子测度空间。设 G 为 Z 上的非奇异变换群 g， 满足[11] $(g'(z)-1)\in L^1(Z)$。子群 K 和子群 $K_\mathfrak{h}$ 的定义与 C_2 中相同。参见 [21], 第 X 节4, [23]。

---

[9]在非自伴算子的谱理论中（例如，参见 [3], ）以及系统理论中（例如，参见 [7],第 19 章），人们早已研究过类似的运算。[10]这个群是无穷维空间上高斯测度的自然对称群。[11]这个群是泊松点过程的自然变换群，参见 [21], 第 X.4 节。

D. Infinite-dimensional matrix groups over finite fields. 参见 [43], [31]{51]。设 $\mathbb{F}_q$ 是一个有限域。

— $\mathsf{D}_{1\circ}$ 令 G 为由 $\mathbb{F}_q$ 上的无限矩阵 g 构成的群，其中 $g-1$ 只有有限个非零矩阵元素。令 K_α 由形如 $\begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ 的矩阵组成。

— $\mathsf{D}_{2\circ}$ 令 V 为由序列 $(x_1, x_2, \dots)$ 构成的空间，其中 $x_j \in \mathbb{F}$，且除有限个元素外，其余元素均为零。令 G 为 V 的所有线性变换构成的群。令 $K = G$ 和 K_α 为基的前 α 个元素的稳定子群。

— $\mathsf{D}_{3\circ}$ 考虑由 $\mathbb{F}_q$ 上的可逆矩阵构成的群 G，其中每一列和每一行都只有有限个非零元素。用 e_j 表示列向量空间中的标准基，用 f_i 表示行向量空间中的标准基。令 A、B 为 $\mathbb{N}$ 的有限子集。用 $K_{A,\,B} \subset G$ 表示固定所有向量 e_a 的子群，其中 $a \in A$，且 f_b，其中 $b \in B$。

— $\mathsf{D}_{4\circ}$ 令 W 为双边序列 $\{x_j\}$ 所成的空间，其中 $j \in \mathbb{Z}$、$x_j \in \mathbb{F}_q$，并且当 j 足够大时满足 $x_j = 0$。W 是在 $\mathbb{F}_q$ 上唯一的、不可离散且不紧的可分局部紧线性空间。记 W_α 为由满足 $x_j = 0$（$j > \alpha$）的序列组成的子空间。记 G 为 W 的所有线性变换组成的群。对于两个子空间 $W_\alpha \supset W_\beta$，记 $K_{\alpha,\,\beta} \subset G$ 为保持旗 $W_\alpha \supset W_\beta$ 且在商空间 W_α / W_β 上诱导平凡线性变换的子群。

E. Infinite-dimensional matrix groups over p-adic fields. 参见，例如，[32]。

— $\mathsf{E}_{1\circ}$ 令 G 为 p-进整数上的可逆无限矩阵群，其中每一行只有有限个元素。令 K_α 为固定前 α 个基元素的子群。

F. Groups of automorphisms and spheromorphisms of non-locally finite trees and $\mathbb{R}$-trees. 例如，参见 [39], [21], 第 VIII.6 节（注），[33]。

— $\mathsf{F}_{1\circ}$ 考虑一棵单纯树 T，其中每个顶点都属于一个可数的边族。令 G 为其自同构群，K 为某个顶点的稳定子，譬如 w。子群 K_α 是包含 w的有限子树的稳定子。

G. Oligomorphic groups[12]. 事实上，参见 [34], ，这是 Tsankov[51]的推论。

— $\mathsf{G}_{0\circ}$ 参见例 D_2, D_3, $\mathsf{F}_{1\circ}$

— $\mathsf{G}_{1\circ}$ 令 G 为 Rado 图的自同构群（例如，参见 [4]）。子群 K_I 是有限子图 I的稳定子。

— $\mathsf{G}_{2\circ}$ 令 G 为 $\mathbb{Q}$的所有保序双射构成的群。子群K_A 是 $\mathbb{Q}$中有限子集的稳定子。

2.5. 关于 $\mathfrak{M}$-族示例的说明。

Examples of Ismagilov. 最早的 $\mathcal{M}$子群示例由 Ismagilov [12]（1967年）、[13]（1973年）发现。具体而言，他考察了以下情形:

[12] $\overline{S}_\infty$ 中的闭子群若对每个 m 在 $\mathbb{N}^m$ 上都有有限多个轨道，则称其为 *oligomorphic* 。

— F_2。设 $\mathbb{K}_1$ 为一个具有可数剩余域的完备非阿基米德离散赋值域 $\mathbb{K}_1$，设 $\mathbb{O}_1$ 为 $\mathbb{K}_1$的整数环。记 G_1 =SL(2, $\mathbb{K}_1$)， $K_1 = \mathsf{SL}(2, \mathbb{O}_1)$。

— F_3。设 $\mathbb{K}_2$ 是一个完备的非阿基米德赋值域，其赋值群是非离散的。记 $\mathbb{O}_2$ 为整数环。我们令 $G_2 = \mathsf{SL}(2, \mathbb{K}_2)$， $K_2 = \mathsf{SL}(2, \mathbb{O}_2)$。

群 $G_1 = \mathsf{SL}(2, \mathbb{K}_1)$ 作用在一棵非局部有限单纯树上，而 G_2 =SL(2, $\mathbb{K}_2$) 作用在一棵 $\mathbb{R}$-树上；子群 $K_j = \mathsf{SL}(2, \mathbb{O}_j)$ 是顶点稳定子，参见例如 [5]。奇怪的是，Ismagilov 曾研究树、 $\mathbb{R}$-树以及树上的球函数，却没有看到树。论文 [12] 对 Olshanski 而言是一个重要的立足点，参见 [38], [39]。

On the reduction of double coset spaces. 在许多情况下，酉表示能够区分双陪集，因此 $[K\backslash G/L] = K\backslash G/L$。当 $K\backslash G/L$ 不是豪斯多夫拓扑空间时，情况也很常见（例如 C_1–C_3, ，见 [28]）。这是进行约化的原因之一。然而，Olshanski [43] 观察到，即使对于带有离散拓扑的有限空间 $K\backslash G/K$，也可能出现约化，即情形 D_1。

Admissible representations. 对于下面的定理 3.2，我们需要更多细节和更多定义。

定义 2.5。设 ρ 是 H 中 G 的一个酉表示。记

$$H^\circ := \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} H_\alpha.$$

我们称 ρ 为:

— 若 H° 在 H 中稠密，则称其为可容许;

— 若 H 中不含包含 H° 的真子表示，则称其为本质容许的。

设 ρ 是 G 的任意酉表示。我们考虑其包含 H° 的最小子表示 H_{adm} 及其正交补 $H_{\mathrm{adm}}^\perp$。于是得到 H_{adm} 中 G 的一个本质容许表示，以及 $H_{\mathrm{adm}}^\perp$ 中一个没有 K_α-不动向量的表示。显然，列车构造只有对本质容许直和项才有意义。

接下来，例 A_1 中的群不是 I 型，其不可约酉表示的集合极其庞杂，几乎无法理解。例 A_2 中的群是 I 型，其不可约表示的分类由 Olshanski 在 [42] 中提出了猜想（另见 [21], 第 IX.5 节的论述）；这个猜想无疑是正确的（但至今尚未得到证明）。无论如何，群 A_1 和 A_2 的可容许表示是一致的（例如参见 Pickrell [45], 命题 5.1.c，这也可由 [36]推出）。B_1 与 B_2, 、D_1与 D_3也同样如此。

在例 A_2, B_2（n）、C_1–C_3, 、D_2–D_4, 、E_1, 、F_1, 、G_1–G_2, 中，所有连续表示都是可容许的[13]。

定义 2.6。我们称一个 $\mathcal{M}$-族是穷尽的，如果:

1) G 的任何本质可容许表示都是可容许的;

[13]事实上，可容许性是子群 K 的性质（而非其上群 G 的性质。

2) 对于每个 K_α，都存在一个序列 $\theta_j^{(\alpha)} \in K_\alpha$，使得对于任意酉表示 ρ，序列 $\rho\big(\theta_j^{(\alpha)}\big)$ 在弱算子拓扑下收敛到 P_α。

3) 存在一个子群序列 $K_{\gamma_1} \supset K_{\gamma_2} \supset \dots$，使得对于 G 的任意酉可容许表示，子空间 $\cup_j H_{\gamma_j}$ 都是稠密的[14]。

在作者所知的所有例子中，条件 2) 和 3) 都自动成立。在我们列表中的例子 A_3 中，条件 1) 不成立。不过，这个 $\mathcal{M}$ 子群族可以很容易地扩展为一个穷尽的 $\mathcal{M}$ 族（我们称 ω 是 $\mathbb{N}$ 的一个子集，且具有无限补集；新的 $\mathcal{M}$ 族包含来自 A_2 的 $\mathcal{M}$ 族）。

Change of topologies and definitions of ⊚-products. 对于作者所知的所有 $\mathcal{M}$ 族的例子（G、$\{K_\alpha\}$），我们都可以将其完备化为 $G^\bullet$，使得 G

$$\Big\{\text{admissible representations of } G\Big\} \simeq \Big\{\text{continuous representations of } G^\bullet\Big\},$$

如 $\mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_2$, $\mathsf{B}_1 \to \mathsf{B}_2$, $\mathsf{D}_1 \to \mathsf{D}_3$。一般而言，这种完备化并不唯一；在作者所知的所有例子中，都存在一种（可能不唯一的）完备化，使其具有波兰拓扑[15]。

另一方面，在例 A_1 中，我们给出了双陪集乘积的一个简单构造性定义。通常，我们可以转向具有更强可分拓扑（也可能不是波兰拓扑）的群，同时保持可容许表示的集合不变；对于这类群，这种方法是有效的。

3. Actions of trains by polymorphisms

这里我们讨论以下情形。设 G 是一个可分拓扑群，$\{K_\alpha\}$ 是一个 $\mathcal{M}$ 子群族。考虑 G 在勒贝格概率空间 (Z,ζ) 上通过非奇异变换 $\sigma(g)$ 的作用，即从 $G \to$ 到 $\mathsf{Gms}(Z)$ 的连续同态[16]。假设 K 通过保测变换作用。

我们希望证明，这样的作用会自动产生列车 $\mathsf{Tr}(G,\{K_\alpha\})$ 通过多态的作用。

3.1. K_α**-不变集的** σ**-代数。**设群 H 在勒贝格空间 (Y,υ) 上通过保测变换作用。若可测集 $A \subset Y$ 对任意 $h \in H$ 都满足对称差 $A \triangle h(A)$ 的测度为零，则称其为 H-不变集。显然，H-不变集构成一个 σ-代数。

考虑如上所述的 G 作用。我们断言：

---

[14]只需假设，对于任意 K_α，存在 N 使得 $K_{\gamma_N} \subset K_\alpha$。除 C_1–C_3 外，所有例子都自动满足这一条件。[15]如果一个拓扑空间同胚于某个完备可分度量空间，则称其为 $Polish$。[16]我们可以在 $\mathsf{Gms}(Z)$ 上定义一种拓扑，即由 $\mathsf{Pol}(Z,Z) \subset \mathsf{Gms}(Z)$ 所诱导的拓扑。另一方面，我们可以固定 $1 < p < \infty$，并考虑由 $L^p(Z)$ 的所有等距变换组成的群 $\mathsf{Isom}(L^p)$，赋予其弱或强算子拓扑。接下来，固定 $s \in \mathbb{R}$，利用公式 (3)（其中 $r = 1/p$），将 $\mathsf{Gms}(Z)$ 嵌入群 $\mathsf{Isom}(L^p)$，再将 $\mathsf{Isom}(L^p)$ 的拓扑限制到 $\mathsf{Gms}(Z)$ 上。于是，所有这些诱导拓扑都与 $\mathsf{Pol}(Z,Z)$ 所诱导的拓扑一致。形式化证明见 [28],，不过这并无必要。“两个波兰群之间的任意同态都是连续的”这一结论与包含依赖选择公理的策梅洛–弗兰克尔系统 + 相容，参见例如 [55]。特别地，如果我们以构造性方式在同一个抽象群上定义两种波兰拓扑群结构，那么这两种拓扑必然一致。

— 对每个 α，都存在一个良定义的商空间，例如 (Z_α, ζ_α)，它是 (Z,ζ) 关于群 K_α 的作用的商空间。

也就是说，考虑由 K_α不变的Z中所有可测子集构成的σ-代数 Σ_α。再考虑空间 H_α，它由 $L^2(Z,\zeta)$中所有 K_α-不变函数组成。对于每个$A \in \Sigma_\alpha$，我们赋予其示性函数 $I_A(z) \in L^2(Z)^{K_\alpha}$。由于 L^2 是可分的，我们可以在所有函数 I_A组成的空间中选取一个稠密可数子集 I_{A_j}，其中 A取遍 Σ_α。考虑由 A_j生成的σ-代数 Σ'_α。根据 Rohlin[46], ，它决定了 Z 的一个可测划分。记 Z_α 为相对于此划分的商空间。我们有一个典范映射 $Z \to Z_\alpha$，因此得到 Z_α上的一个测度，记作 ζ_α。□

设(X,ξ)和(Y,υ)是概率测度空间，设 $\pi\colon X \to Y$是一个可测映射，使得对于每个可测 $B \subset Y$，都有 $\xi(\pi^{-1}(B)) = \upsilon(B)$。我们将多态 $\mathfrak{l}[\pi]\colon X \twoheadrightarrow Y$定义为 ξ 在映射 $X \to X \times Y \times \mathbb{R}^\times$下的像，该映射由 $x \mapsto (x, \pi(x), 1)$给出，参见 [27], 第 3.10 小节。

由于我们有一个典范映射 $Z \to Z_\alpha$，因此有一个典范多态$\mathfrak{l}_\alpha\colon Z \twoheadrightarrow Z_\alpha$。

3.2. 论文的陈述。

定理 3.1. 设 G 为可分拓扑群，$\{K_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 为一个 $\mathcal{M}$子群族。考虑 G通过勒贝格概率空间 Z的非奇异变换 $\sigma(g)$ 的作用。设 K 通过保测变换作用。对于任意 α、$\beta \in \mathcal{A}$，我们定义

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(g) = \mathfrak{l}_\alpha^\star \diamond \sigma(g) \diamond \mathfrak{l}_\beta \in \mathrm{Pol}(Z_\beta, Z_\alpha).$$

那么，$\mathcal{S}$ 是从列车 $\mathrm{Tr}(G, \{K_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}})$ 到多态范畴的函子。也就是说，$\mathcal{S}_{\alpha,\,\beta}(g)$ 仅取决于包含 g 的约化双陪集 $\in [K_\alpha\backslash G/K_\beta]$，并且对于任意 $\mathfrak{g} \in [K_\alpha\backslash G/K_\beta]$、$\mathfrak{h} \in [K_\beta\backslash G/K_\gamma]$，有

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{g}) \diamond \mathcal{S}_{\beta,\gamma}(\mathfrak{h}) = \mathcal{S}_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{g} \circledcirc \mathfrak{h}).$$

我们需要一些预备知识。

3.3. 多态的梅林–马尔可夫变换。对于一个勒贝格概率测度空间 Z，记 $L^{\infty-}(Z)$ 为 Z 上有界可测函数构成的空间，并赋予以下收敛方式：$\varphi_j \to \varphi$ 若 $|\varphi_j|$ 的本质上确界一致有界，且序列 φ_j 依测度收敛到 φ。

令 $r+is \in \mathbb{C}$ 取值于带状区域 $\Pi\colon\ 0 \leqslant r \leqslant 1$。对于 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pol}(X,Y)$ 和 $r+is \in \Pi$，我们定义双线性形式 $B_{r+is}\colon\ L^{\infty-}(X) \times L^{\infty-}(Y) \to \mathbb{C}$，如下：

$$B_{r+is}[\mathfrak{p}](\varphi,\psi) = \iint\limits_{X\times Y\times\mathbb{R}^\times} \varphi(x)\,\psi(y)\,t^{r+is}\,d\mathfrak{p}(x,y,t).$$

我们将 $\mathfrak{p}$ 的梅林–马尔可夫变换定义为算子值函数 $r+is \mapsto T_{r+is}(\mathfrak{p})$，

$$T_{r+is}(\mathfrak{p}) : L^{1/r}(Y) \to L^{1/r}(X)$$

由以下对偶性确定：

$$\int\limits_X \varphi(x)\cdot\big(T_{r+is}(\mathfrak{p})\psi(x)\big)\,d\xi(x) = B_{r+is}[\mathfrak{p}](\varphi,\psi) \tag{3.1}$$

对于任意 $\varphi \in L^{\infty-}(X)$，$\psi \in L^{\infty-}(Y)$。于是 $\|T_{r+is}(\mathfrak{p})\|_{L^{1/r}} \leqslant 1$ 对于 $o \leqslant r \leqslant 1$。此外，$T_{0+is}(\mathfrak{p})$ 是一个连续算子 $L^{\infty-}(Y) \to L^{\infty-}(X)$，参见 [27], 定理6.3。

EXAMPLE. 将 $g \in \mathsf{Gms}(Z)$ 视为一个多态。于是

$$T_{r+is}(g)\,\varphi(z) = \varphi(g(z))\,g'(z)^{r+is}. \qquad \boxtimes$$

多态 $\mathfrak{p}$ 由其梅林–马尔可夫变换唯一确定（[27],定理 6.12）。对于任意 $\mathfrak{p} \in \mathsf{Pol}(M,N)$、 $\mathfrak{q} \in \mathsf{Pol}(N,K)$，我们有（见 [27], 定理 6.14）

$$T_{r+is}(\mathfrak{q})\,T_{r+is}(\mathfrak{p}) = T_{r+is}(\mathfrak{q} \diamond \mathfrak{p}). \tag{3.2}$$

此变换关于变量 $r+is$ 全纯，具体而言：对于任意有界可测函数 φ、 ψ，矩阵元 $r+is \mapsto B_{r+is}(\varphi,\psi)$ 在带状区域 $0<r<1$ 内全纯，并在闭条带 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 上连续。因此， $T_{r+is}(\mathfrak{p})$ 是带状区域 Π 内的解析算子族，符合 Stein[50] 的意义。

双线性型的逐点收敛

$$B_{r+is}[\mathfrak{p}_j](\varphi,\psi) \to B_{r+is}[\mathfrak{p}](\varphi,\psi)$$

在闭条带 Π 上等价于多态 $\mathfrak{p}_j \to \mathfrak{p}$ 的收敛（[27], 定理6.14）。

3.4. 定理 3.1 的证明。对于 $\alpha \in \mathcal{A}$，我们用 $L^2(Z)_\alpha$ 表示由 K_α-不变函数构成的子空间，该子空间包含于 $L^2(Z)$。记

$$\mathfrak{m}_\alpha := \mathfrak{l}_\alpha^\star \diamond \mathfrak{l}_\alpha \in \mathrm{Pol}(Z,Z). \tag{3.3}$$

显然， $\mathfrak{m}_\alpha^\star = \mathfrak{m}_\alpha$。注意， $\mathfrak{l}_\alpha \diamond \mathfrak{l}_\alpha^\star$ 是 $\mathsf{Pol}(Z_\alpha, Z_\alpha)$ 中的单位元。因此， $\mathfrak{m}_\alpha^2 = \mathfrak{m}_\alpha$。

首先，我们来描述算子 $T_{1/2+is}[\mathfrak{l}_\alpha]$、 $T_{1/2+is}[\mathfrak{l}_\alpha^\star]$、 $T_{1/2+is}[\mathfrak{m}_\alpha]$ （参见例如 [27], 第 3.9 小节）。多态射 $\mathfrak{l}_\alpha$、 $\mathfrak{l}_\alpha^\star$、 $\mathfrak{m}_\alpha$ 是保测的，因此它们的梅林–马尔可夫变换不依赖于 s。

— 算子 $T_{1/2+is}[\mathfrak{m}_\alpha]$ 是正交投影算子 P_α： $L^2(Z) \to L^2(Z)_\alpha$，或者等价地说，是条件期望算子，参见 [27], 第 3.10 小节。

— 算子$T_{1/2+is}[\mathfrak{l}_\alpha^\star]$： $L^2(Z_\alpha) \to L^2(Z)$是等距嵌入，其像与 $L^2(Z)_\alpha$重合。

——该算子

$$T_{1/2+is}[\mathfrak{l}_\alpha]\Big|_{L^2(Z)_\alpha} : L^2(Z)_\alpha \to L^2(Z_\alpha)$$

是酉的，并且

$$T_{1/2+is}[\mathfrak{l}_\alpha]\Big|_{(L^2(Z)_\alpha)^\perp} = 0.$$

其次，我们对 $\mathcal{M}$-性质稍作改写。按照第 2.1 小节的记号，我们定义算子 $\widetilde{\rho}_{\alpha,\,\beta}(g)$，其取值于 H，定义如下：

$$\widetilde{\rho}_{\alpha,\beta}(g) = P_\alpha\,\rho(g)\,P_\beta.$$

这些算子具有以下分块形式：

$$\widetilde{\rho}_{\alpha,\beta}(g) = \begin{pmatrix} \widehat{\rho}_{\alpha,\beta}(g) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : H_\beta \oplus H_\beta^\perp \to H_\alpha \oplus H_\alpha^\perp,$$

其中，算子 $\widehat{\rho}(\cdot)$ 由（2.1）定义。显然，这些算子只取决于双陪集，而 $\mathcal{M}$-性质可以写成如下形式

$$\widetilde{\rho}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{g})\,\widetilde{\rho}_{\beta,\gamma}(\mathfrak{h}) = \widetilde{\rho}_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{g}\circledcirc\mathfrak{h}). \tag{3.4}$$

同样地，我们定义多态

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{\alpha,\beta}(g) := \mathfrak{m}_\alpha \diamond \sigma(g) \diamond \mathfrak{m}_\beta \in \mathrm{Pol}(Z,Z).$$

定理的结论可以改写为以下形式

$$[\,?\,] \qquad \widetilde{\mathcal{S}}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{g}) \diamond \widetilde{\mathcal{S}}_{\beta,\gamma}(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathcal{S}}_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{g}\circledcirc\mathfrak{h}). \tag{3.5}$$

对假设等式（3.5）的两边应用梅林–马尔可夫变换，我们得到一个等价的假设等式

$$[\,?\,] \qquad T_{r+is}\big(\widetilde{\mathcal{S}}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{g}) \diamond \widetilde{\mathcal{S}}_{\beta,\gamma}(\mathfrak{h})\big) = T_{r+is}\big(\widetilde{\mathcal{S}}_{\alpha,\gamma}(\mathfrak{g}\circledcirc\mathfrak{h})\big).$$

两边的表达式在 Stein 意义下都是全纯的。我们将其改写为以下形式

$$\begin{aligned} T_{r+is}(\mathfrak{m}_\alpha)\,T_{r+is}(g)\,T_{r+is}(\mathfrak{m}_\beta)\,T_{r+is}(h)T_{r+is}(\mathfrak{m}_\gamma) = \\ = T_{r+is}(\mathfrak{m}_\alpha)\,T_{r+is}(g\circledcirc h)\,T_{r+is}(\mathfrak{m}_\gamma), \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中，算子 $T_{r+is}(g)$ 由（3）给出，而 $g\circledcirc h$ 表示双陪集乘积的任意代表元。令 $r = 1/2$。注意到 $T_{r+is}(\mathfrak{m}_\alpha) = P_\alpha$，我们得到关于 $L^2(Z)$ 中算子的以下假设等式:

$$[\,?\,] \qquad P_\alpha\,T_{1/2+is}(g)\,P_\beta\,T_{1/2+is}(h)P_\gamma = P_\alpha\,T_{1/2+is}(g\circledcirc h)\,P_\gamma.$$

但这正是关于 G 的表示 $T_{1/2+is}\circledcirc\sigma$ 的恒等式 (3.4)。因此，(3.6) 在直线 $r = 1/2$ 上成立。由于 (3.6) 两边都是全纯函数，它在整个带状区域 Π 内成立。这就推出了 (3.5)。

3.5. 多态射中的群闭包。设 G 是一个可分拓扑群，$\{K_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 是一个穷尽的 $\mathcal{M}$ 子群族。考虑 G 在勒贝格概率空间 Z 上通过非奇异变换 $\sigma(g)$ 的作用。令 K 通过保测变换作用。设 K_{γ_k} 是定义 2.6 中所述的子群序列。

定理 3.2. 假设 G 在 $L^2(Z)$ 中的表示 $T_{1/2+is}$ 是容许的[17]。多态 $\mathfrak{r}\in\mathrm{Pol}(Z,Z)$ 包含于 G 的闭包中，当且仅当对于任意 γ_k，元素 $\mathfrak{m}_{\gamma_k}\diamond\mathfrak{r}\diamond\mathfrak{m}_{\gamma_k}$ 对所有 k 都包含于 G 的闭包中。

Proof. 陈述 $\Rightarrow$。对于固定的 γ_k，考虑如定义 2.6 中所述的序列 $\theta^{(\gamma_k)\,j}$。那么 $T_{1/2+is}\big(\theta^{(\gamma_k)\,j}\big)$ 收敛到 P_{γ_j}。等价地，$\theta^{(\gamma_k)\,j} \in \mathrm{Ams}(Z)$ 在（保测）多态空间中收敛到 $\mathfrak{m}_{\gamma_j}$。因此，$\mathfrak{m}_{\gamma_j}\diamond\mathfrak{r}\diamond\mathfrak{m}_{\gamma_j}$ 包含于闭包中。

命题 $\Leftarrow$。下面证明 $\mathfrak{r}$ 是$\mathfrak{m}_{\gamma_j}\diamond\mathfrak{r}\diamond\mathfrak{m}_{\gamma_j}$的极限。只需证明相应双线性型 B_{r+is}逐点收敛，即

$$B_{r+is}[\mathfrak{m}_{\gamma_k}\diamond\mathfrak{r}\diamond\mathfrak{m}_{\gamma_k}](\varphi,\psi) \to B_{r+is}[\mathfrak{r}](\varphi,\psi).$$

[17]可容许性是根据 K定义的，因此该条件不依赖于 s。

我们将此表达式变形为

$$B_{r+is}[\mathfrak{m}_{\gamma_k}\diamond\mathfrak{r}\diamond\mathfrak{m}_{\gamma_k}](\varphi,\psi)=\int_Z\varphi(z)\cdot T_{r+is}(\mathfrak{m}_{\gamma_k}\diamond\mathfrak{r}\diamond\mathfrak{m}_{\gamma_k})\psi(z)\,d\zeta(z)=$$
$$=\int_Z\varphi(z)\cdot(P_{\gamma_k}T_{r+is}(\mathfrak{r})P_{\gamma_k})\psi(z)\,d\zeta(z)=$$
$$=\int_Z(P_{\gamma_k}\varphi)(z)\cdot T_{r+is}(\mathfrak{r})(P_{\gamma_k}\psi(z))\,d\zeta(z)=B_{r+is}[\mathfrak{r}](P_{\gamma_j}\varphi,P_{\gamma_j}\psi).$$

因此，我们必须验证收敛性

$$B_{r+is}[\mathfrak{r}](P_{\gamma_k}\varphi,P_{\gamma_k}\psi)\to B_{r+is}[\mathfrak{r}](\varphi,\psi),\tag{3.7}$$

其中 φ、 ψ 是有界函数。

回忆一下， P_{γ_k} 是条件期望算子。因此，序列 $P_{\gamma_k}\varphi$、 $P_{\gamma_k}\psi$是有界鞅，故它们几乎处处收敛，并且在L^1意义下收敛（例如参见 [49], 定理 VIII.4.1-2）。由 $\cup L^2(Z)_{\gamma_k}$的稠密性，我们的序列在 L^2中收敛到 φ、 ψ，因此有几乎处处收敛 $P_{\gamma_k}\varphi\to\varphi$、$P_{\gamma_k}\psi\to\psi$。

接下来,

$$B_{r+is}[\mathfrak{r}](P_{\gamma_k}\varphi,P_{\gamma_k}\psi)=\int_{Z\times Z\times\mathbb{R}^\times}\Big(P_{\gamma_k}\varphi(z_1)\,P_{\gamma_k}\psi(z_2)\,t^{is}\Big)\cdot t^r\,d\mathfrak{r}(z_1,z_2,t).$$

根据多态的定义，测度 $t^r\mathfrak{r}(z_1,z_2,t)$是有限的（因为 $t^r\leqslant\max\{1,t\}$）。对于固定的 φ、ψ，大括号中的表达式一致有界。应用勒贝格控制收敛定理，我们得到（3.7）。□

3.6. 一些问题。1）主要问题是考察显式的非奇异作用（以及保测作用），并寻找列车的作用及作用闭包的显式公式。我们不打算综述大群在测度空间上的现有构造（而且我也不知道有这样的综述）；一些重要的例子包括对称群的逆极限 [14] 以及经典群和紧对称空间的逆极限 [44], [22]。本文采用抽象主义的观点，并补充一些抽象主义的评论。

2）显然，对于带有 σ-有限测度的空间 (X,ξ)，定理 3.1 也有一个相应的版本。具体而言，设我们有一个带有非原子 σ-有限测度的空间 (Z,ζ)，一个群 G 以及由子群 $\{K_\alpha\}$构成的一个 $\mathcal{M}$-族。再设 G 在 Z上有一个非奇异作用，且 K 通过保测变换作用。

在这种情况下，与酉表示相关的多态定义必须考虑到测度可以流向无穷远，也可以从无穷远而来。此外，测度可以带着不同的拉东–尼科迪姆导数离开和到达。[20] 的技术导出了以下定义。

定义 3.3。设 (X,ξ)、(Y,υ) 是具有 σ-有限勒贝格测度的空间。我们称 $\mathrm{Pol}_\infty(X,Y)$ 的一个元素为三元组 $(\mathfrak{r},\mathfrak{r}^-,\mathfrak{r}^+)$，其中 $\mathfrak{r}$是$X\times Y\times\mathbb{R}^\times$上的测度， $\mathfrak{r}_-$ 是 $X\times\mathbb{R}^\times$上的测度， $\mathfrak{r}_+$ 是 $Y\times\mathbb{R}^\times$上的测度。该三元组必须满足两个条件:

$$\mathfrak{r}\big\downarrow_X^{X\times Y\times\mathbb{R}^\times}+\mathfrak{r}^-\big\downarrow_X^{X\times\mathbb{R}^\times}=\xi,\qquad\big(t\cdot\mathfrak{r}\big)\big\downarrow_Y^{X\times Y\times\mathbb{R}^\times}+\big(t\cdot\mathfrak{r}^+\big)_Y^{Y\times\mathbb{R}^\times}=\upsilon.$$

如果对于任意具有有限测度的可测集 $A\subset X$, $B\subset Y$，以下测度弱收敛成立，我们就称序列 $(\mathfrak{r}_j,\mathfrak{r}_j^-,\mathfrak{r}_j^+)$ 收敛到 $(\mathfrak{r},\mathfrak{r}^-,\mathfrak{r}^+)$:

$\mathbb{R}^\times$ 上的测度（前两行对应条件 (1.1)–(1.2)）：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r}_j \downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{A\times B\times\mathbb{R}^\times} &\to \mathfrak{r}\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{A\times B\times\mathbb{R}^\times};\\
\big(t\cdot\mathfrak{r}_j\big)\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{A\times B\times\mathbb{R}^\times} &\to \big(t\cdot\mathfrak{r}\big)\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{A\times B\times\mathbb{R}^\times};\\
\mathfrak{r}_j\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{A\times Y\times\mathbb{R}^\times}+\mathfrak{r}_j^-\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{A\times\mathbb{R}^\times} &\to \mathfrak{r}\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{A\times Y\times\mathbb{R}^\times}+\mathfrak{r}^-\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{A\times\mathbb{R}^\times};\\
\big(t\cdot\mathfrak{r}_j\big)\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{X\times B\times\mathbb{R}^\times}+\big(t\cdot\mathfrak{r}_j^+\big)\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{B\times\mathbb{R}^\times} &\to \big(t\cdot\mathfrak{r}\big)\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{X\times B\times\mathbb{R}^\times}+\big(t\cdot\mathfrak{r}^+\big)\downarrow_{\mathbb{R}^\times}^{B\times\mathbb{R}^\times}.
\end{aligned}$$

接下来，设 (M,μ) 是一个带有连续 σ-有限测度的空间。我们将群 Gms(M) 嵌入 Pol$_\infty$ (M,M)，具体做法是把 $q\in$Gms(M) 映到 $m\mapsto(m,q(m)\ q'(m))$ 下 μ 的推前测度 $\mathfrak{r}_q$，并假设 $\mathfrak{r}^+=0,\mathfrak{r}^-=0$。

猜想3.4. a) Gms(M) 中的乘法可通过分别连续性延拓为 Pol$_\infty$(M,M) 中的乘法[18]。后者这个半群可延拓为一个范畴，其对象是 σ-有限勒贝格空间，态射集为 Pol$_\infty$(X,Y)。

b) 对于群在具有无限连续测度的空间上的作用，存在定理 3.1 的对应版本。

3) 根据 Nessonov [37], ， $\overline{S}_\infty$ 的任意非奇异作用都等价于一个保测作用（作用于测度有限且具有 σ-有限测度的空间上）。因此，对于 $K=\overline{S}_\infty$，我们可以在定理 3.1 中省略“K 通过保测变换作用”这一条件。显然，这种情况并非唯一。

猜想3.5. a) 对完备群[19] O(∞)、U(∞)、Sp(∞)（即实数、复数、四元数 ℓ^2上的所有酉算子组成的群），以及群 Ams$[0,1]$, Ams$_\infty$($\mathbb{R}$)，也有类似的陈述。

b) 对所有寡形群和寡形群的逆极限，也有类似的陈述。

这一猜想最强的变体是：

— 该陈述对所有 Roelcke预紧波兰群都成立。

关于 Roelcke预紧群的定义（拓扑群上有3种本质不同的一致结构，由 A. Weil、D. A. Raikov、W. Roelcke 引入），参见例如 [2], [1]；寡形群以及断言 a) 中提到的群都是 Roelcke预紧的；颇为奇怪的是，群 Gms(M) 也是 Roelcke预紧的，参见 Ben Yaacov [1], 定理2.4。

References

[1] Ben Yaacov I. *On a Roelcke-precompact Polish group that cannot act transitively on a complete metric space.* 224 2018 1, 105 132

《以色列数学杂志》（），第 期，- 页。[2] Ben Yaacov I., Ibarluc´ıa T., Tsankov T. *Eberlein oligomorphic groups.* 《美国数学会汇刊》370（2018），第3期，2181-2209页。[3] Brodskii V. M., *On operator nodes and their characteristic functions,* 《苏联数学文献》12（1971），696–700页。[4] Cameron P. J. *Oligomorphic groups and homogeneous graphs.* 载于 *Graph symmetry*（*Montreal, PQ* 1996 23 74, 497, 1997 ，）（G. Hahn、G. Sabidussi 编），- Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，。[5] Chiswell I. *Introduction to* Λ*-trees.* 世界科技出版社，里弗埃奇（新泽西州），2001年。[6] Danilenko A. I., SilvaC. E. *Ergodic Theory: Nonsingular Transformations.* 载于 *Ergodic theory*（编者：Silva C. E.、Danilenko A. I.），233-292页，施普林格，纽约，2023年。

[18]参见 [20],第3.7小节。[19]按照 [21],第八章中的定义，所有这些群都是“重群”。

[7] Dym H. *Linear algebra in action*。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2007年。[8] Glasner E. *Ergodic theory via joinings*. 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2003年[9] Janvresse ´E., Prikhod'ko A. A., de la Rue T., Ryzhikov V.V. *Weak limits of powers of Chacon's automorphism* 35 1 2015 128 141 ，《遍历理论与动力系统》，： （），- 页。[10] Hopf E. *The general temporally discrete Markoff process*, 《有理力学分析杂志》3（1954），13-45页。[11] Howe R. E., Moore C. C. *Asymptotic properties of unitary representations*.《泛函分析杂志》32（1979），第1期，72-96页。[12] Ismagilov R. S. *Linear representations of groups of matrices with elements from a normed field.* 3 6 1969 1219 1244 《数学汇刊》，：（），- 页。[13] Ismagilov R. S., *The representations* SL(2, *P*) *where P is not locally compact*, 《泛函分析及其应用》7:4（1973年），328-329页。[14] Kerov S., Olshanski G., Vershik A. *Harmonic analysis on the infinite symmetric group*.《数学发明》158（2004），第3期，551-642页。[15] King J. *The commutant is the weak closure of the powers, for rank-1 transformations*, 《遍历理论与动力系统》6:3（1986），363-384页。[16] Krengel U. *Ergodic theorems*. Walter de Gruyter，柏林，1985年。[17] Lieberman A. *The structure of certain unitary representations of infinite symmetric groups*.《美国数学会汇刊》164（1972），189-198页。[18] Megrelishvili M. G. *Every semitopological semigroup compactification of the group* $H_+[0,1]$ *is trivial* 63 2001 3, 357 370 ，《半群论坛》（），第 - 期。[19] Nelson E. *The free Markoff field*.《泛函分析杂志》12（1973），211-227页。[20] Neretin Yu. A. *Categories of bistochastic measures and representations of some infinite-dimensional groups.* 75 1993 1, 197 219 《俄罗斯科学院数学文集》（），第 - 期。[21] Neretin Yu.A. *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups*. 伦敦数学会专著，新系列第16卷。牛津：牛津大学出版社，1996年。[22] Neretin Yu. A. *Hua-type integrals over unitary groups and over projective limits of unitary groups.* 114 2002 2, 239 266 《杜克数学杂志》（），第 – 期。[23] Neretin Yu. A. *Spreading maps polymorphisms symmetries of Poisson processes and matching summation.* 292 2002 62 91 （），《彼得堡数学学会学报》（），-；重印于《数学科学杂志（纽约）》126（2005），第2期，1077-1094页。[24] Neretin Yu. A. *Multi-operator colligations and multivariate characteristic functions*.《数学物理分析》1（2011），第2-3期，121-138页。[25] Neretin Yu. A. *Sphericity and multiplication of double cosets for infinite-dimensional classical groups.* 45 2011 3, 225 239 《泛函分析及其应用》（），第 - 期。[26] Neretin Yu. *Symmetries of Gaussian measures and operator colligations*.《泛函分析杂志》263（2012），第3期，782-802页。[27] Neretin Yu. A. *On the boundary of the group of transformations that leave a measure quasi-invariant.* 204 2013 7 1194 《数学文集》（），第-8 期，1161- 页。[28] Neretin Yu. A. *Bi-invariant functions on the group of transformations leaving a measure quasi-invariant.* 205 9 2014 1357 1372 《数学文集》，：（），- 页。[29] Neretin Yu. A. *Infinite symmetric groups and combinatorial constructions of topological field theory type.* 70 2015 4, 715 773 《俄罗斯数学综述》（），第 - 期。[30] Neretin Yu. A. *Wishart-Pickrell distributions and closures of group actions*.《彼得堡数学学会学报》448 2, 328 2016 236 245 224 2017 334（），-；英文译本载于《数学科学杂志（纽约）》（），第 - 期。[31] Neretin, Yu. A. *Groups* GL(∞) *over finite fields and multiplications of double cosets*.《代数杂志》585（2021），370-421页。[32] Neretin Yu. A. *Description of unitary representations of the group of infinite p-adic integer matrices.* 25 2021 606 643 《表示论》（），- 页。[33] Neretin Yu. A. *Groups of isometries of ultrametric Urysohn spaces and their unitary representations.* 2212 02607 https://arxiv.org/abs/ 。[34] Neretin Yu. A. *Oligomorphic groups and ultrahomogeneous cubic spaces over finite fields.* 预印本 arxiv.org/abs/2308 13247 。N. I. Nessonov [35] *Description of representations of the group of invertible operators in a Hilbert space containing the identity representation of the unitary subgroup.* 17 1 ，《泛函分析及其应用》，：（1983），64-66 页。

[36] N. I. Nessonov *Complete classification of representations of* ∞ *containing the identity representation of the unitary subgroup.* GL( ) 《苏联数学文集》 ( ), 第 - 期, 58 1987 1, 127 147。[37] N. Nessonov *A nonsingular action of the full symmetric group admits an equivalent invariant measure.* 《数学、物理、分析与几何杂志》 ( ), 第 - 期, 16 2020 1, 46 54。[38] G. I. Olshanski *Unitary representations of the infinite-dimensional classical groups* U(p,∞), U(p,∞), Sp(p,∞) *and of the corresponding motion groups.* 《泛函分析及其应用》12 (1978), 第3期, 185-195 (1979)。[39] G. I. Olshanski *New "large" groups of type I.* 《苏联数学杂志》, 18:1 (1982), 22-39。[40] G. I. Olshansky *Unitary representations of the infinite symmetric group: a semigroup approach. Representations of Lie groups and Lie algebras Budapest* 1971 载于 (,) (A. A. Kir- illov 编), 181-197。Akad´emiai Kiad´o, 布达佩斯 , 1985。[41] G. I. Olshanskii, *Unitary representations of* G K *-pairs that are connected with the infinite symmetric group* S^{∞} (,) ( ), 《列宁格勒数学杂志》, : ( ), - 。 1 4 1990 983 1014。[42] G. I. Olshanski *Unitary representations of infinite-dimensional pairs* G K *and the formalism of R. Howe. Representation of Lie groups and related topics* (,) 载于 (A. M. Vershik、D. P. Zhelobenko 编), 269-463, 《当代数学高级研究》, 7, Gordon and Breach, 纽约, 1990。[43] G. I. Olshanski *On semigroups related to infinite-dimensional groups.* 载于 *Topics in representation theory* 67 101, 1991 (A. A. Kirillov 编), - 美国数学会 , 罗得岛州普罗维登斯 , 。[44] D. Pickrell *Measures on infinite-dimensional Grassmann manifolds.* 《泛函分析杂志》70 (1987), 第2期, 323-356。[45] D. Pickrell *Separable representations for automorphism groups of infinite symmetric spaces.* 《泛函分析杂志》90 (1990), 第1期, 1-26。[46] V. A. Rohlin *On the fundamental ideas of measure theory.* (俄文) 《数学文集》新系列 25(67), (1949), 107-150; 英文译本: 《美国数学会译丛》1952, (1952), 第71号。[47] D. J. Rudolph *Fundamentals of measurable dynamics. Ergodic theory on Lebesgue spaces.* 克拉伦登出版社、牛津大学出版社, 纽约, 1990年。[48] V. V. Ryzhikov *Self-joinings and generic extensions of ergodic systems.* 《泛函分析及其应用》, 2023; 数字对象标识符: https://doi.org/10.4213/faa4066; 预印本: https://arxiv.org/abs/2210.15276。[49] A. N. Shiryaev *Probability.* 施普林格出版社, 纽约, 1996年。[50] E. M. Stein *Interpolation of linear operators.* 《美国数学会汇刊》83 (1956), 482-492。[51] T. Tsankov *Unitary representations of oligomorphic groups.* 《几何与泛函分析》22 (2012), 第2期, 528-555。[52] A. M. Vershik *Multivalued measure-preserving mappings polymorphisms and Markov operators.* ( ), 《列宁格勒数学研究所科学研讨会论文集》 ( ), - ; 英文译本见《苏联数学杂志》, : (1983), 72 1977 26 61 23 3 2243-2266。[53] A. M. Vershik *Polymorphisms, Markov processes, and quasi-similarity.* 《离散与连续动力系统》13 (2005), 第5期, 1305-1324。[54] S. P. Wang *On the Mautner phenomenon and groups with property* (T). 《美国数学杂志》104 (1982), 第6期, 1191-1210。[55] J. D. M. Wright *All operators on a Hilbert space are bounded.* 《美国数学会通报》79(1973), 1247-1250。
维也纳大学数学系; 信息传输问题研究所; 莫斯科国立大学力学与数学系; yurii.neretin@univie.ac.at; 网址: http://mat.univie.ac.at/∼neretin/