arXiv:2301.01742v1 [cs.GT] 4 Jan 2023

直线上的分布式单赢家度量投票的紧确失真界

Alexandros A. Voudouris

埃塞克斯大学计算机科学与电子工程学院

摘要

我们研究直线上的分布式单赢家度量投票问题，其中代理人和候选项均表示为实数轴上的点，代理人被划分到互不相交的选区中，目标是以去中心化的方式选出一个获胜候选项。具体而言，选择过程由一种分布式投票机制完成：该机制首先为每个代理人选区选出一个代表候选项，然后从这些代表候选项中选出一位获胜者。本文设计了简单的分布式机制，使其在最大值的平均和最大平均值这两种社会成本目标下的失真至多为 $2+\sqrt{5}$，达到先前研究针对这两种目标所证明的相应下界。

1 引言与模型

我们考虑以下投票问题。一个实例 I 由一个 N n 代理人集合和一个 A m 候选项集合组成，所有代理人和候选项都表示为实数轴上的点。对于任意代理人$i \in N$ 和候选项 $x \in A$，令 $\delta(i,x)$ 表示 i 与 x 在线上的距离（等于它们位置之差的绝对值）。代理人还被划分为 D 个k 选区，每个选区至少包含一名代理人。我们将 $d \in D$选区中的代理人集合记为 N_d，并将 d的大小记为 $n_d = |N_d|$。我们的目标是使用一种分布式机制选择一个具有良好社会效率保证的候选项，该机制以关于实例的序数信息作为输入，例如代理人和候选项在线上的排序，以及代理人对候选项的序数偏好。具体而言，代理人 i 对候选项的偏好是候选项的一个线性排序：若 $\delta(i,x) \leq \delta(i,y)$，则候选项 x 的排名高于另一个候选项 y；若距离相同，则以任意但一致的方式打破平局。

一般而言，分布式机制 M 的运作方式如下：

- 步骤 1：对于每个选区 $d \in D$，根据该选区内代理人对备选项的偏好以及这些备选项在直线上的相对顺序，M 为 d选出一个代表候选项 $y_d \in A$。
- 步骤 2：根据所有选区代表在直线上的相对顺序，M 从中选出一个作为总体获胜者 $M(I) \in \bigcup_{d \in D}\{y_d\}$。

显然，通过改变选出各选区代表候选项的方法，或改变从代表中选出总体获胜者的方法，可以设计出不同的分布式机制。

将距离 $\delta(i,x)$ 解释为代理人 i 对候选项 x 的个体成本，我们通过所有代理人到 x 的距离的某种函数来衡量 x 的社会效率。在各种社会选择问题中，人们研究过许多广为人知的社会效率目标，例如社会

成本 （所有代理人的总距离或平均距离）和 最大成本 （所有代理人中的最大距离）。在度量型分布式投票的背景下，Anshelevich 等人 [2022] 考虑了由两类函数复合而成的社会目标：一类函数作用于选区，另一类函数作用于选区内部。具体而言，他们重点研究了以下四种目标。

- x 的平均值的平均值成本，是各选区中代理人个体成本平均值的平均：

$$(\text{AVG} \circ \text{AVG})(x) = \frac{1}{k} \sum_{d \in D} \left(\frac{1}{n_d} \sum_{i \in N_d} \delta(i, x) \right).$$

- x 的最大成本，是所有代理人中的最大个体成本：

$$(\text{MAX} \circ \text{MAX})(x) = \max_{d \in D} \max_{i \in N_d} \delta(i, x) = \max_{i \in N} \delta(i, x).$$

- 这 最大值的平均成本，是 x 在各选区中最大个体成本的平均值 n:

$$(\text{AVG} \circ \text{MAX})(x) = \frac{1}{k} \sum_{d \in D} \max_{i \in N_d} \delta(i, x).$$

- x 的最大平均值成本，是各选区个体成本平均值中的最大值：

$$(\text{MAX} \circ \text{AVG})(x) = \max_{d \in D} \left\{ \frac{1}{n_d} \sum_{i \in N_d} \delta(i, x) \right\}.$$

我们通过机制 M 相对于某个社会目标 f （例如上文定义的目标）的失真来衡量其效率。失真是指在所有可能的实例中，机制所选候选项的 f值与所有候选项中可能达到的最小 f值之比的最坏情况：

$$\sup_{I=(N,A,D)} \frac{f(M(I))}{\min_{x \in A} f(x)}$$

根据定义，任何机制的失真至少为 1。我们的目标是设计失真尽可能低的分布式机制。

1.1 我们的贡献

在先前的工作中，Anshelevich 等人 [2022] 研究了分布式度量投票问题，其中代理人和候选项位于某个任意度量空间中。他们通过精心组合用于选区内部和选区之间决策的集中式投票机制，为一般度量空间设计了分布式机制，并针对上述目标以及更一般的目标给出了失真保证。对于直线度量这一特殊情形（也是本文的重点），他们证明，使用序数信息的分布式机制的失真相对于7 平均值的平均成本恰为3 最大成本恰为 $[2+\sqrt{5}, 5]$ 而对于平均值的最大成本或最大平均值成本目标，则位于该区间内。

受到近期研究的启发，Filos-Ratsikas 等人 [2023] 设计了用于连续分布式设施选址问题的紧致失真界分布式机制（其中，实数轴上的每个点都可以视为一个候选项）。我们针对最大值的平均成本和平均值的最大成本，确定了直线上的投票所用分布式机制的失真。在

具体而言，我们设计了两种基本对称的分布式机制，在最大值的平均成本和平均值的最大成本下均能达到紧致的畸变界 $2+\sqrt{5}$。对于最大值的平均成本，我们的分布式机制将每个选区中最右侧代理人最偏好的备选方案选为选区代表，然后将第（$\alpha \cdot k$）个最左侧候选项选为总体获胜者。对于平均值的最大成本，我们的分布式机制将每个选区中第（$\alpha \cdot n_d$）个代理人最偏好的备选方案 d 选为选区代表，然后将最右侧候选项选为总体获胜者。我们证明，对于相应的目标，两种机制的失真至多为 $\max\left\{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}, \frac{2}{\alpha}-1\right\}$；对于 $\alpha=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，界中的两项相抵，结果为 $2+\sqrt{5}$。

1.2 其他相关工作

自 Procaccia 和 Rosenschein 定义投票机制的失真以来，研究者已在多种设定下，基于代理人偏好的不同假设，对其进行了广泛研究。研究最充分的设定是单获胜者投票，相关研究基于归一化代理人估值 [2006], Boutilier 等人，2015 年；Ebadian 等人，2022 年；Amanatidis 等人，2021] 以及度量偏好 [Anshelevich 等人，2018 年；Gkatzelis 等人，2020 年；Kizilkaya 和 Kempe, 2022]。此外，研究者还考虑了其他多种模型，例如多获胜者投票 [Caragiannis 等人，2017, 2022], 参与式预算 [Benad`e 等人， 2021], 以及匹配 [Filos-Ratsikas 等人，2014 年；Amanatidis 等人, 2022]。

分布式投票的失真最早由 [Filos-Ratsikas 等人提出研究， 2020] 他们关注在代理人对备选项的估值经过归一化时，最大权重机制相对于社会福利的失真界。Filos-Ratsikas 和 Voudouris [2021] 随后研究了分布式设施选址场景下机制的失真：代理人位于一条直线上，目标是从一组备选位置中选出一个单一位置，这些位置可以是离散的（有限个）或连续的（无限个）。Anshelevich 等人 [2022], 进一步研究了离散版本，并将其推广到任意度量空间；他们还首次提出并研究了最大值的平均和最大平均值成本。最近，Filos-Ratsikas 等人 [2023]解决了直线上连续版本的分布式机制失真问题。有关不同模型中投票机制失真的更多详情，请参阅 Anshelevich 等人 [2021] 近期的综述；有关相关设施选址模型的详情，请参阅Chan 等人 [2021] 的综述。

2 最大值的平均成本

设 $\alpha \in [0,1]$ 为一个参数。我们考虑 α-最左侧—最右侧机制，其运作方式如下。对于每个选区 $d \in D$，该机制选择 d 中最右侧代理人最偏好的备选方案，作为代表 y_d。随后，它选择 $(\alpha \cdot k)$ 个最左侧候选项作为总体获胜者。见机制 1。

机制 1： α-最左侧—最右侧

对于每个选区 $d \in D$ **执行**

  $y_d :=$ N_d中最右侧代理人最偏好的备选方案;

返回 $w :=$ 第 $\alpha \cdot k$ 个最左侧代表;

定理 2.1。 对于最大值的平均， α-最左侧—最右侧 机制的失真至多为 $\max\left\{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}, \frac{2}{\alpha}-1\right\}$。

证明。给定任意实例作为输入时，设 w 为该机制选出的候选项， o 为最优备选项。对于每个选区 d，设 i_d 为距离 w最远的代理人,o i_d^*为距离 ∘ w – w ∘ o = $\frac{1}{k}\sum_{d\in D}\delta$ i_d^* o ℓ_d r_d d 最远的代理人。因此，(最大值的平均)( ) $=$ $\frac{1}{k}\sum_{d\in D}\delta(i_d,$)，且(最大值的平均)( ) (,)。另外，设和分别表示中的最左侧和最右侧代理人。注意， $i_d, i_{d^*} \in \{\ell_d, r_d\}$。根据 w和 o的相对位置，我们考虑以下两种情况。

情况 1： $o < w$。根据三角不等式，并且由于 $\delta(i_d, o) \le \delta(i_d^*, o)$，我们有

$$\begin{aligned}(\text{AVG}\circ\text{MAX})(w) &= \frac{1}{k}\sum_{d\in D}\delta(i_d, w)\\ &\le \frac{1}{k}\sum_{d\in D}\Big(\delta(i_d, o) + \delta(w, o)\Big)\\ &\le (\text{AVG}\circ\text{MAX})(o) + \delta(w, o). \end{aligned} \tag{1}$$

现在，令 S为位于 w右侧的代表集合。由于根据定义， w是第（$\alpha\cdot k$）个最左侧代表，因此我们有 $|S| \ge (1-\alpha)\cdot k$。对于满足 $y_d \in S$ 的任意 d，由于 $o < w \le y_d$，代理人 r_d到 w的距离比到 o的距离更近，因此 $\delta(r_d, o) \ge \frac{1}{2}\delta(w, o)$。因此，

$$\begin{aligned}(\text{AVG}\circ\text{MAX})(o) &\ge \frac{1}{k}\sum_{d\in S}\delta(r_d, o)\\ &\ge \frac{1}{k}\cdot|S|\cdot\frac{\delta(w,o)}{2}\\ &\ge \frac{1-\alpha}{2}\cdot\delta(w,o),\end{aligned}$$

或者，等价地，

$$\delta(w,o) \le \frac{2}{1-\alpha}\cdot(\text{AVG}\circ\text{MAX})(o). \tag{2}$$

因此，由（1）和（2），我们得到

$$(\text{AVG}\circ\text{MAX})(w) \le \left(1+\frac{2}{1-\alpha}\right)\cdot\text{cost}(o) = \frac{3-\alpha}{1-\alpha}\cdot(\text{AVG}\circ\text{MAX})(o).$$

情况 2： $w < o$。令 L为从具有最左侧代表的选区到具有第（$\alpha\cdot k$）个代表的选区（即 w）之间的 $\alpha\cdot k$个选区组成的集合；将剩余的（$1-\alpha$）个 $\cdot k$选区组成的集合记为 R。注意：

- 对于每个 $d \in L$，由于 y_d是距离 r_d和 $y_d \le w < o$最近的候选项，因此 r_d和 ℓ_d都比起 o更接近 w。所以， $\delta(i_d, w) \le \delta(i_d^*, o)$。
- 对于每个 $d \in R$，根据 i_d^*的定义， $\delta(i_d, o) \le \delta(i_d^*, o)$；利用三角不等式，我们得到 $\delta(i_d, w) \le \delta(i_d, o) + \delta(w, o) \le \delta(i_d^*, o) + \delta(w, o)$。

因此，

$$(\text{AVG}\circ\text{MAX})(w) = \frac{1}{k}\sum_{d\in D}\delta(i_d, w)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{k}\sum_{d\in L}\delta(i_d, w) + \frac{1}{k}\sum_{d\in R}\delta(i_d, w) \\
&\le \frac{1}{k}\sum_{d\in L}\delta(i_d^*, o) + \frac{1}{k}\sum_{d\in R}\Big(\delta(i_d^*, o) + \delta(w, o)\Big) \\
&= (\text{AVG}\circ\text{MAX})(o) + \frac{|R|}{k}\cdot\delta(w, o). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

由于对于每个 $d \in L$， r_d 都比 o 更接近 w，因此我们还有

$$
(\text{AVG}\circ\text{MAX})(o) \ge \frac{1}{k}\sum_{d\in L}\delta(r_d, o) \ge \frac{|L|}{2k}\delta(w, o),
$$

或者，等价地，

$$
\delta(w, o) \le \frac{2k}{|L|}\cdot(\text{AVG}\circ\text{MAX})(o). \qquad (4)
$$

因此，根据（3）和（4），我们得到

$$
(\text{AVG}\circ\text{MAX})(w) \le (\text{AVG}\circ\text{MAX})(o) + 2\frac{|R|}{|L|}\cdot(\text{AVG}\circ\text{MAX})(o) = \left(\frac{2}{\alpha} - 1\right)\cdot(\text{AVG}\circ\text{MAX})(o).
$$

综合以上结果，我们得到上界 $\max\left\{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}, \frac{2}{\alpha} - 1\right\}$。

□

注意，上界 $\max\left\{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}, \frac{2}{\alpha} - 1\right\}$ 由关于 α 的两个函数构成，其中一个关于 α 单调不减，另一个单调不增。为了使这两个函数的最大值最小，我们需要找到使两个函数相交的 α 值。因此，我们需要解方程

$$
\frac{3-\alpha}{1-\alpha} = \frac{2}{\alpha} - 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0.
$$

由于 $\alpha < 1$，其解为 $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$。对于这个 α 值，两个函数的值均为 $\frac{2}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} - 1 = 2 + \sqrt{5}$，₂由此得到以下推论。

推论 2.2. 对于最大值的平均，$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$-最左侧的最右点机制的失真至多为 $2 + \sqrt{5}$。

3 最大平均值的最大成本

令 $\alpha \in [0, 1]$ 为一个参数。我们考虑最右侧的α最左侧机制，其运作方式如下。对于每个选区 $d \in D$，机制选择$(\alpha \cdot n_d)$位代理人在 d 中最偏好的候选项作为代表 y_d。随后，选择最右侧的候选项作为总体获胜者。参见机制2。

定理 3.1。对于最大平均值，最右侧的α最左侧机制的失真至多为最大值 $\left\{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}, \frac{2}{\alpha} - 1\right\}$。

证明。设 w 为机制在输入任意实例时选出的候选项，o 为最优备选项。对于任意选区 d 和候选项 x，令 $\text{AVG}_d(x) = \frac{1}{n_d}\sum_{i\in N_d}\delta(i, x)$ 表示 d 中代理人对候选项 x的总平均距离。因此，对于每个选区 d，$\text{AVG}_d(o) \le (\text{MAX}\circ\text{AVG})(o)$。设 d^* 为使 w的平均成本最大的选区，则 $(\text{MAX}\circ\text{AVG})(w) = \text{AVG}_{d^*}(w)$。此外，设 d_w 为由 w代表的选区。另外，设 i^* 和 i_w 分别为选区 d^* 和 d_w中从左数第 $\alpha \cdot n_d$ 个代理人。现在我们分两种情况讨论。

机制 2： 最右侧的α最左侧

对于每个选区 $d \in D$ **执行**$y_d := N_d$中从左数第 $\alpha \cdot n_d$ 个代理人

返回 $w :=$ 最右侧代表；

情况 1： $o < w$。 根据 d^* 的定义和三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}(\text{MAX} \circ \text{AVG})(w) &= \frac{1}{n_d} \sum_{i \in N_{d^*}} \delta(i, w) \\ &\le \frac{1}{n_d} \sum_{i \in N_{d^*}} \Big(\delta(i, o) + \delta(o, w) \Big) \\ &\le (\text{MAX} \circ \text{AVG})(o) + \delta(o, w). \end{aligned} \tag{5}$$

用 S 表示在 d_w中位置不偏左于 i_w 的代理人集合。根据i_w的定义， $|S| \ge (1-\alpha) n_{d_w}$。 由于 $o < w$ 且 w 是 i_w最偏好的备选方案， S 中的所有代理人到w 的距离都小于到 o的距离，因此对于任意 $i \in S$，$\delta(i, o) \ge \frac{1}{2}\delta(w, o)$。综合以上各式，我们得到：

$$\begin{aligned}\text{AVG}_{d_w}(o) &= \frac{1}{n_{d_w}} \sum_{i \in N_{d_w}} \delta(i, o) \\ &\ge \frac{1}{n_{d_w}} \sum_{i \in S} \delta(i, o) \\ &\ge \frac{1}{n_{d_w}} \cdot \frac{|S|}{2} \cdot \delta(w, o) \ge \frac{1-\alpha}{2} \cdot \delta(w, o), \end{aligned}$$

或者，等价地，

$$\delta(w, o) \le \frac{2}{1-\alpha} \cdot \text{AVG}_{d_w}(o) \le \frac{2}{1-\alpha} \cdot (\text{MAX} \circ \text{AVG})(o). \tag{6}$$

因此，由（5）和（6），我们得到

$$(\text{MAX} \circ \text{AVG})(w) \le (\text{MAX} \circ \text{AVG})(o) + \frac{2}{1-\alpha} \cdot (\text{MAX} \circ \text{AVG})(o) = \frac{3-\alpha}{1-\alpha} \cdot (\text{MAX} \circ \text{AVG})(o).$$

情况 2： $w < o$。 令 L 为 d^* 中最靠左的 $\alpha \cdot n_{d^*}$ 位代理人（从最左侧代理人到 i^*）组成的集合，R 为剩余的 $(1-\alpha)$ 位代理人组成的集合。由于 w 是最右侧代表，因此 $y_{d^*} \le w < o$。由于 y_{d^*}是 i^*最偏好的备选方案，每位代理人 $i \in L$ 都更偏好 w而非 o，因此 $\delta(i, w) = \delta(i, o)$。结合 R中每位代理人的三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned}(\text{MAX} \circ \text{AVG})(w) &= \frac{1}{n_{d^*}} \sum_{i \in N_{d^*}} \delta(i, w) \\ &= \frac{1}{n_{d^*}} \sum_{i \in L} \delta(i, w) + \frac{1}{n_{d^*}} \sum_{i \in R} \delta(i, w) \\ &\le \frac{1}{n_{d^*}} \sum_{i \in L} \delta(i, o) + \frac{1}{n_{d^*}} \sum_{i \in R} \Big(\delta(i, o) + \delta(w, o) \Big) \\ &= \frac{1}{n_{d^*}} \sum_{i \in N_{d^*}} \delta(i, o) + \frac{|R|}{n_{d^*}} \cdot \delta(w, o) \end{aligned}$$

$$\leq (\text{MAX} \circ \text{AVG})(o) + \frac{|R|}{n_{d^*}} \cdot \delta(w, o). \tag{7}$$

由于每位代理人 $i \in L$ 都更偏好 w 而非 o，我们还可得 $\delta(i, o) \geq \frac{1}{2}\delta(w, o)$，因此

$$\begin{aligned}(\text{MAX} \circ \text{AVG})(o) \geq \text{AVG}_{d^*}(o) &= \frac{1}{n_{d^*}} \sum_{i \in N_{d^*}} \delta(i, o) \\ &\geq \frac{1}{n_{d^*}} \sum_{i \in N_{d^*}} \delta(i, o) \\ &\geq \frac{|L|}{2n_{d^*}} \cdot \delta(w, o)\end{aligned}$$

或者，等价地，

$$\delta(w, o) \leq \frac{2n_{d^*}}{|L|} \cdot (\text{MAX} \circ \text{AVG})(o). \tag{8}$$

因此，由（7）和（8），可得

$$(\text{MAX} \circ \text{AVG})(w) \leq (\text{MAX} \circ \text{AVG})(o) + 2\frac{|R|}{|L|} \cdot (\text{MAX} \circ \text{AVG})(o) = \left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) \cdot (\text{MAX} \circ \text{AVG})(o).$$

综合以上结果，我们得到上界 $\max\left\{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}, \frac{2}{\alpha} - 1\right\}$。

□

对 α 进行优化，类似于第 2 节，我们得到以下结果。

推论 3.2。对于最大平均值，最右端-$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$-最左端 机制的失真至多为 $2 + \sqrt{5}$。

4 开放问题

在本文中，我们证明了$2 + \sqrt{5}$ 对于单获胜者分布式单获胜者投票问题，最大值的平均和最大平均值成本函数对应的紧致失真界，从而补全了Anshelevich 等人[2022]针对直线度量所考虑的四种基本目标的失真图景。未来最有趣的研究方向是证明一般度量空间中的紧致失真界，并进一步考察单获胜者投票之外的其他社会目标或场景。

参考文献

Georgios Amanatidis、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A. Voudouris。《窥探序数帷幕之后：通过基数查询改进畸变》。人工智能，296：103488，2021年。

Georgios Amanatidis、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A. Voudouris。少量查询，收获颇丰：匹配中的信息—失真权衡。人工智能研究杂志，74，2022年。

Elliot Anshelevich、Onkar Bhardwaj、Edith Elkind、John Postl 和 Piotr Skowron。度量偏好下最优社会选择的近似。人工智能，264:27–51，2018年。

Elliot Anshelevich、Aris Filos-Ratsikas、Nisarg Shah 和 Alexandros A. Voudouris。社会选择问题中的失真：前15年及未来发展。在第*30*届人工智能国际联合会议（*IJCAI*）论文集，第4294–4301页，2021年。Elliot Anshelevich、Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A. Voudouris。分布式度量社会选择的失真。人工智能，308:103713，2022年。Gerdus Benad`e、Swaprava Nath、Ariel D. Procaccia 和 Nisarg Shah。参与式预算编制中的偏好引 elicitation。管理科学，67(5):2813–2827，2021年。Craig Boutilier、Ioannis Caragiannis、Simi Haber、Tyler Lu、Ariel D. Procaccia 和 Or Sheffet。最优社会选择函数：功利主义视角。人工智能，227:190–213，2015年。Ioannis Caragiannis、Swaprava Nath、Ariel D. Procaccia 和 Nisarg Shah。通过隐式功利主义投票进行子集选择。人工智能研究杂志，58:123–152，2017年。Ioannis Caragiannis、Nisarg Shah 和 Alexandros A. Voudouris。多获胜者投票的度量扭曲。人工智能，313:103802，2022年。Hau Chan、Aris Filos-Ratsikas、Bo Li、Minming Li 和 Chenhao Wang。设施选址问题的机制设计：综述。在第*30*届人工智能国际联合会议（*IJCAI*）论文集，第1–17页，2021年。Soroush Ebadian、Anson Kahng、Dominik Peters 和 Nisarg Shah。投票中的最优化失真与比例公平。在第*23*届*ACM*经济学与计算会议（*EC*）论文集，第523–600页，2022年。Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A. Voudouris。分布式设施选址的近似机制设计。在第*14*届算法博弈论国际研讨会（*SAGT*）论文集，第49–63页，2021年。Aris Filos-Ratsikas、Søren Kristoffer Stiil Frederiksen 和 Jie Zhang。单边匹配中的社会福利：随机优先级及其他方法。在第*7*届算法博弈论研讨会（*SAGT*）论文集，第1–12页，2014年。Aris Filos-Ratsikas、Evi Micha 和 Alexandros A. Voudouris。分布式投票的失真。人工智能，286:103343，2020年。Aris Filos-Ratsikas、Panagiotis Kanellopoulos、Alexandros A. Voudouris 和 Rongsen Zhang。解决分布式设施选址的失真问题。在第*22*届自主智能体与多智能体系统国际会议（*AAMAS*）论文集，2023年。Vasilis Gkatzelis、Daniel Halpern 和 Nisarg Shah。解决最优度量扭曲猜想。在第*61*届*IEEE*计算机科学基础研讨会（*FOCS*）年会论文集，第1427–1438页，2020年。Fatih Erdem Kizilkaya 和 David Kempe。多数否决：实现最优度量扭曲的简单投票规则。在第*31*届人工智能国际联合会议（*IJCAI*）论文集，第349–355页，2022年。Ariel D. Procaccia 和 Jeffrey S. Rosenschein。投票中基数偏好的失真。在合作信息智能体国际研讨会（*CIA*），第317–331页，2006年。