arXiv:2301.01781v2 [quant-ph] 6 Oct 2023

最优单次纠缠共享

Vikesh Siddhu 和 John Smolin

IBM Quantum，*IBM T.J. Watson* 研究中心，约克镇高地，纽约州 *10598*，美国

2023年10月6日

摘要

通过量子互连共享纠缠是量子信息处理的基础。我们探讨一种实用场景：将这一互连建模为量子信道，并使用一次以共享高保真纠缠。对于任意量子信道，我们都提供了能够轻松求得最大保真度及实现该保真度的最优输入的方法。与大多数衡量纠缠共享的指标不同，可以证明这一最大保真度具有可乘性。这意味着我们能够获得完整的理解：在单次设置中找到的最大保真度和最优输入，即使在多次使用量子信道（可能还同时使用其他量子信道）时仍然适用。最优输入不一定是完全纠缠态。我们发现，这些最优输入中的最小纠缠甚至可能随信道噪声而不连续变化。一般来说，噪声参数很难确定，并且对大多数量子信道来说仍然未知。然而，对于所有具有量子比特环境的量子比特信道，我们给出了一种严格的噪声参数化，并从不可克隆的角度加以解释。这种噪声参数化以及一种我们称为标准克劳斯分解的量子信道表示具有良好的性质，因此在更广泛的场景中都很有用。

目录

1 引言 2

2 预备知识 32.1 算子-矢量对偶.5

3 量子信道 5
3.1 标准克劳斯分解.63.2 对偶信道.73.3 极端量子比特信道.7

4 最优纠缠共享 9
4.1 高保真度纠缠.94.2 可乘性.11

5 应用 12
5.1 极端量子比特信道.125.2 量子比特泡利信道.145.3 一些量子三能级系统信道.16

6 讨论 16

7 致谢 17

1 引言

量子计算和通信需要在彼此分离的各方之间忠实地传输量子信息。这些参与方可能是相距较近的量子计算节点，也可能是相距遥远的量子态接收方和发送方。前者出现在量子内联网模型中 [1]，而后者则出现在量子互联网的讨论中 [2,3]。噪声会阻碍这些及其他类似设置的使用。噪声的一个主要来源是承载各方之间量子信息的量子互连。这种互连在数学上由量子信道，即完全正迹保持映射来建模。通过该量子信道发送和处理的量子信息，等价于使用该量子信道共享和处理的纠缠 [4]。如果不研究跨量子信道共享纠缠的方法、度量、协议和特性，我们对量子计算与通信的理解，以及控制并扩展其规模的能力，仍将是不完整的。

研究最为广泛的纠缠共享情形允许渐近多个量子信道使用次数 [5,6]。在所有联合使用的量子信道中，允许对纠缠进行局部前处理和后处理，并允许从量子信道输入端到输出端进行经典通信。利用这些允许的操作，每次量子信道使用所能共享的完全纠缠态数量的最大值（误差渐近趋于零时）定义了该量子信道的量子容量。对这一度量的研究表明，尽管理论上十分优美 [7–11]，一般而言，量子信道的量子容量难以计算，也不易理解 [12,13]。这两个特点都源于超可加性。量子容量的超可加性意味着，多个量子信道联合使用时的量子容量，无法仅由各个量子信道的量子容量完全确定 [14,15]。

渐近信道容量带来了丰富的概念性和实践性难题。因此，研究如何以尽可能少的编码和解码进行纠缠传输是可取的。这里最简单的情形是单次使用量子信道（量子信道本身可以是多个量子信道的联合使用），且不进行后处理。这种情形未必允许共享无噪声纠缠。因此，可以定义一种度量，用于衡量在可接受的噪声水平下共享纠缠的能力。这类度量之一称为单次量子容量，大致是指能够通过量子信道共享的最大完全纠缠态数量，其

误差至多为一个固定但任意的值 [16]。最近，研究者探讨了这种单次容量、它与渐近容量的联系，以及理解和实现这些容量的方法 [17–27]。然而，我们尚未充分理解这种容量的可加性概念；如何计算单次容量，以及实现该容量的显式协议，也尚不完全清楚。

单次设置中的一个关键指标是通过量子信道共享的量子态与最大纠缠态之间的最高保真度 [5,28]。这一保真度刻画了各种基于量子隐形传态的任务的最优性能 [29]。已知通过量子信道共享的纯纠缠态与最大纠缠态之间的最优保真度 [30,31]。令人惊讶的是，最优纯态输入不一定是最大纠缠态，这与保真度并非纠缠单调量这一点相符。

单次设置还可加入后处理，即进行一轮局部操作和双向经典通信（双向局部操作与经典通信）[31–34]。然而，在这种设置下，最优保真度是否具有乘性（相当于该设置下的可加性）尚不清楚。目前也没有已知方法能够计算一般情况下的这种最优保真度，或实现它的显式协议。唯一的例外是量子比特信道，在这种情况下，最优协议使用纯态输入，且不需要双向局部操作与经典通信 [32,34]。令人惊讶的是，对于最简单的量子比特信道，这类最优协议的行为尚未得到充分了解。

理解特定量子信道上共享纠缠度量的一种方法，是研究该度量如何随信道中的噪声量而变化。令人惊讶的是，即使对于最简单的量子比特信道，其噪声参数也仅得到部分理解。

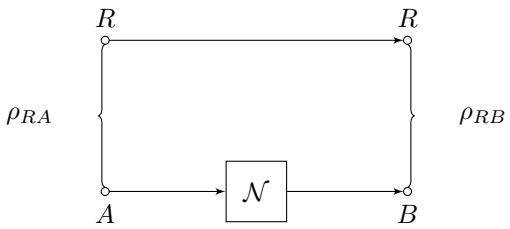

图 1：单次纠缠传递示意图。

研究结果。本文提出并解决了单次设置下的纠缠共享问题：在参考系统 R 与信道输入 A上制备任意混合态 ρ_{RA}。该输入经由固定量子信道 N： $A \mapsto B$ （见图 1）发送，从而实现信道输出 ρ_{RB} 与跨越 R 和 B的最大纠缠态之间的最大保真度 O(N)。我们通过半定规划 [35]重新表述 O(N)。我们的首个主要结果是以两种实用方式表示 O(N)（见第 4.1 节及定理 1）： 第一，使用我们在第 3.1 节中定义的量子信道标准 Kraus分解；第二，使用量子信道 Choi–Jamiołkowski 算子的算子范数。接下来，我们证明最大保真度 O 具有可乘性（见定理 2）。O(N)不仅可以通过纯态实现，在某些情况下，也可以通过多种混合态实现。我们给出构造这些纯态和混合态的方法。对于所有极端的（定义见式 (40) 下方）量子比特信道，我们计算最优输入以及制备这些输入所需的最小纠缠量 E。有些出人意料的是，最小纠缠量 E 关于这些噪声参数呈现不连续性。通常，E 小于其最大值 1，但 O 足够高，使该量子信道可用于量子隐形传态，即使该信道不具有量子容量（见第 5.1 节）。对于噪声很大的量子比特泡利信道，我们发现可分输入能够达到此前发现的最大纠缠输入所实现的相同保真度（见第 5.2 节）。我们还发现，量子三能级信道的最优输入结构比量子比特信道丰富得多（见第 5.3 节）。一般量子信道的噪声参数仍未明了。我们为所有极端量子比特信道找到了严格的噪声参数（见第 3.3 节），这一结果本身或许也具有研究价值。

与纠缠共享场景中的其他度量不同，$\mathcal{O}$ 具有乘法性。因此，即使量子信道$\mathcal{N}$ 被多次使用（也可能与其他量子信道一起使用），其最大保真度$\mathcal{O}(\mathcal{N})$也能充分表征其在不进行后处理的情况下共享高保真纠缠的能力。我们的结果还为允许进行多轮双向局部操作与经典通信时能够实现的纠缠保真度给出了严格的下界。对于使用量子比特信道进行一轮双向局部操作与经典通信的情形，这些下界是紧的。本文给出的所有极端量子比特信道的噪声参数刻画，为深入理解量子信道及跨信道量子协议铺平了道路。

2 预备知识

令 x 表示 n 维实空间中的一个向量， $\mathbb{R}^n$， $\mathbf{x}_i$ 表示 x 的第 $i+1^{\text{th}}$ 个坐标， $|\mathbf{x}_i|$表示其绝对值。将 x 的坐标按降序重新排列，得到 $\mathbf{x}^{\downarrow}$，这是一个满足 $\mathbf{x}_0^{\downarrow} \geq \mathbf{x}_1^{\downarrow} \underline{\geq \cdots} \geq \mathbf{x}_{n-1}^{\downarrow}$ 的向量。x 的欧几里得范数为 $|\mathbf{x}|$: $= \sqrt{\sum_i \mathbf{x}_i^2}$。令 $|\psi$ 表示有限维希尔伯特空间 H 中的一个右矢，维数为 d，且 $||\psi| := \sqrt{\psi|\psi}$ 表示其范数。纯量子态由单位范数右矢表示。令 L(H) 表示 H 上线性算子的空间。对于任意两个量子态 $|\psi$ 和 $|\phi$，外积算子 $|\psi\phi| \in$ 属于 L(H)，而投影到 $|\psi$ 上的投影算子 $|\psi\psi| \in$ 属于 L(H)。两个算子 N 和 O 在 L(H) 中的弗罗贝尼乌斯内积，

$$\langle N, O\rangle := \mathrm{Tr}(N^\dagger O), \tag{1}$$

其中 $N_\dagger$表示 N 的伴随（共轭转置）。满足条件$H = H^\dagger$的厄米算子 $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 表示一个可观测量。该算子具有如下特征分解，

$$H = \sum_i \mathbf{x}_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \tag{2}$$

其中 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}$ 是 H 对应于特征向量 $|\psi_i\rangle$ 的特征值，而特征向量集合$\{|\psi_i\rangle\}$ 构成 $\mathcal{H}$ 的标准正交基，$\langle\psi_i|\psi_j\rangle$ $= \delta_{ij}$，其中 δ_{ij} 是克罗内克δ函数。 的支撑是由其非零特征值对应的特征向量张成的子空间。在（2）中，如果 $\mathbf{x}_i \geq 0$ 对所有 i都成立，则称 H 为半正定（PSD）， $H \succeq 0$。对半正定矩阵进行如下形式的优化

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \mathrm{Tr}(A_0 H) \\ &\text{subject to } \mathrm{Tr}(A_i H) = c_i, \quad \forall\, 1 \leq i \leq n, \\ &\qquad \text{and } H \succeq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 A_i 为厄米算子，称为半定规划（参见 [49] 第 1.2.3 节及 [35]中的相关引文）。半正定算子 H $\sqrt{H}$的平方根可通过将式（$\mathbf{x}_i$ 2）中的 $\sqrt{\mathbf{x}_i}$替换为

任意算子 $O \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,

$$||O|| := \max_{||\psi\rangle|\leq 1} |O|\psi\rangle|, \quad ||O||_1 := \mathrm{Tr}(\sqrt{OO^\dagger}), \quad \text{and} \quad ||O||_2 := \sqrt{\mathrm{Tr}(OO^\dagger)}, \tag{4}$$

表示 分别表示谱范数、迹范数和弗罗贝尼乌斯范数。对于 H 属于（2） ，

$$||H|| = |\mathbf{x}_0^{\downarrow}|, \quad ||H||_1 = \sum_i |\mathbf{x}_i|, \quad \text{and} \quad ||H||_2 = |\mathbf{x}|. \tag{5}$$

密度算子 $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是迹为单位的半正定算符，$\mathbf{Tr}(\rho) = 1$，它表示一个混合量子态。其冯诺依曼熵,

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log \rho), \tag{6}$$

其中 log 以 2 为底。两个密度算子 ρ和 σ之间的保真度,

$$F(\rho, \sigma) := ||\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}||_1. \tag{7}$$

设 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$ 是维数分别为 d_A 和 d_B的两个希尔伯特空间，并令 $\mathcal{H}_{AB}$ 表示张量积空间 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$。给定一个纯态 $|\psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_{AB}$，密度算子

$$\psi_A = \mathrm{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \quad \text{and} \quad \psi_B = \mathrm{Tr}_A(|\psi\rangle\langle\psi|) \tag{8}$$

分别表示对 $|\psi\rangle\langle\psi|$ 关于 $\mathcal{H}_B$ 和 $\mathcal{H}_A$取偏迹。纯态 $|\psi\rangle_{AB}$的形成纠缠,

$$E_f(|\psi\rangle_{AB}) = S(\psi_A), \tag{9}$$

对于混合态 ρ_{AB},

$$E_f(\rho_{AB}) = \min \sum_i p_i E_f(|\psi_i\rangle_{AB}), \tag{10}$$

是对所有纯态分解取最小值所得的平均纠缠 $E_f \rangle\langle\psi_i|$, $p_i \geq 0$以及 $\sum_i p_i = 1$。

设 $\mathcal{A} = \{|a_i\rangle\}$和 $\mathcal{B} = \{|b_j\rangle\}$分别是 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$的标准正交基，即

$$\langle a_i|a_j\rangle = \langle b_i|b_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{11}$$

Usi利用这些基 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$，我们可以将任意线性算子 $L : \mathcal{H}_A \mapsto \mathcal{H}_B$ 表示为一个矩阵 ，

$$L = \sum_{ij} [L]_{ij} |b_i\rangle\langle a_j|, \tag{12}$$

其元素为 $[L]_{ij}$。我们可以定义两个依赖于基的线性映射,

$$L^* = \sum_{ij} [L]_{ij}^* |b_i\rangle\langle a_j|, \quad \text{and} \quad L^T = \sum_{ij} [L]_{ij} |a_j\rangle\langle b_i|, \tag{13}$$

分别表示复共轭和转置。与 L^* 和 L^T不同，伴随 $L^\dagger = (L^*)^T = (L^T)^*$ 是基无关的。如果 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$ 的维数相同，均为 d，那么可以令 $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$ 相同，例如取标准基 $\{|i\rangle\}$，并构造恒等映射 $I_{A\leftarrow B} : \mathcal{H}_B \mapsto \mathcal{H}_A$,

$$I_{A\leftarrow B}|i\rangle_B = |i\rangle_A. \tag{14}$$

定义上述恒等映射如何将右矢 $|\phi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$、算符 $O_B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ 以及算符的一部分 $L_{AB} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$ 映射到.....后不久，便省略该下标记法 $A \leftarrow B$

$$|\phi\rangle_A = I_{A\leftarrow B}|\psi\rangle_B, \quad O_A = I_{A\leftarrow B} O_B I_{B\leftarrow A}, \quad \text{and} \quad L_{AA} = (I_{A\leftarrow B} \otimes I_A) L_{BA} (I_{B\leftarrow A} \otimes I_A), \tag{15}$$

分别地，此处 I_A 是作用于$\mathcal{H}_A$ 空间上的恒等算符。之后，这些映射都通过显而易见地替换下标来隐式完成。

2.1 算子-矢量对偶

算符-右矢对偶是指固定$\mathcal{H}_A$ 的一组标准正交基$\mathcal{A} = \{|a_i\rangle\}$，并在$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A$上使用一个未归一化的最大纠缠态,

$$|\gamma\rangle_{AA} = \sum_i |a_i\rangle \otimes |a_i\rangle, \tag{16}$$

将任意线性算子 $K: \mathcal{H}_A \mapsto \mathcal{H}_B$ 与一个右矢相关联，$|\psi\rangle_{AB} = (I_A \otimes K)|\gamma\rangle$，该右矢由对$\rangle$ K其中一半 $|\gamma$ 进行作用而得。反过来，对于固定的标准正交基 $\mathcal{A}$，可将任意右矢 $|\psi\rangle_{AB}$与一个线性算子相关联

$$K = \sum_i |\chi_i\rangle\langle a_i|, \quad \text{where} \quad |\chi_i\rangle_B = (\langle a_i|_A \otimes I_B)|\psi\rangle_{AB}. \tag{17}$$

与上文的讨论类似，固定一个标准正交基 $\mathcal{B} = \{|b_j\rangle\}$ of $\mathcal{H}_B$ 即可将右矢 $|\psi\rangle_{AB}$ 与一个算符 $L: \mathcal{H}_B \mapsto \mathcal{H}_A$相关联。该算符 $L = K^T$ 其中转置运算采用基 $\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$，如（13）所述。

下文中，若算子 $K: \mathcal{H}_A \mapsto \mathcal{H}_B$通过上述算子-矢量对偶对应于一个右矢，我们将其记作 $|K\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$，其中基 $\mathcal{A}$固定。这一右矢与算子对满足

$$|K\rangle_{AB} = (I \otimes K)|\gamma\rangle_{AA}. \tag{18}$$

对于任意两个映射 K以及 K' 从 $\mathcal{H}_A$ 到 $\mathcal{H}_B$ 以及相应的右矢 $|K\rangle_{AB}$ 和 $|K'\rangle_{AB}$，分别可以
证明

$$\langle K, K'\rangle = \langle K|K'\rangle. \tag{19}$$

利用标准正交基 $\mathcal{B}$ 的 $\mathcal{H}_B$，可以将 $K^\dagger : \mathcal{H}_B \mapsto \mathcal{H}_A$ 与右矢 $|K^\dagger\rangle_{BA}$关联。在这个右矢中，交换空间 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$ （见下文（14）的讨论）得到 $|K^\dagger\rangle_{AB}$，它进而满足

$$|K^\dagger\rangle_{AB} = |K\rangle^*_{AB} \tag{20}$$

其中，任意右矢 $|\chi\rangle_{AB} = \sum_{ij} c_{ij}|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$的复共轭是根据基 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 定义的，即$|\chi\rangle^*_{AB} = \sum_{ij} c^*_{ij}|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$。

3 量子信道

设 $\mathcal{H}_A$,$\mathcal{H}_B$, 和 $\mathcal{H}_C$ 是三个希尔伯特空间，且 V: $\mathcal{H}_A \mapsto \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$ 是一个等距映射，即 $V^\dagger V = I_A$。该等距映射定义了一对量子信道 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}^c$，即一对具有超算子的完全正保迹（CPTP）映射

$$\mathcal{N}(O) = \mathrm{Tr}_C(VOV^\dagger) \quad \text{and} \quad \mathcal{N}^c(O) = \mathrm{Tr}_B(VOV^\dagger), \tag{21}$$

将 $O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ 映射到 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ 和 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_C)$，分别如此。量子信道 $\mathcal{N}$称为可降级的，而 $\mathcal{N}^c$称为反可降解的，如果存在一个量子信道 $\mathcal{D}$ 使得 $\mathcal{D} \circ \mathcal{N} = \mathcal{N}^c$ [11]。

设 $\mathcal{I}_A$ 是从 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ 到其自身的恒等映射。利用一个未归一化的最大纠缠态$|\gamma\rangle_{AA}$ (16)，我们将线性映射 [36,37] N 的 Choi–Jamiołkowski 算符定义为

$$J^{\mathcal{N}}_{AB} = \mathcal{I}_A \otimes \mathcal{N}(|\gamma\rangle\langle\gamma|) = \sum_{ij} |a_i\rangle\langle a_j| \otimes \mathcal{N}(|a_i\rangle\langle a_j|). \tag{22}$$

该算符包含有关$\mathcal{N}$的所有信息。例如,

$$\mathcal{N}(|a_i\rangle\langle a_j|) = (\langle a_i| \otimes I_B) J^{\mathcal{N}}_{AB} (|a_j\rangle \otimes I_B), \tag{23}$$

$\mathcal{N}$是完全正（CP）的，当且仅当 $J^{\mathcal{N}}_{AB}$ 是半正定的，并且

$$\mathrm{Tr}_B(J^{\mathcal{N}}_{AB}) = I_A \tag{24}$$

当且仅当 $\mathcal{N}$ 是保迹的，对所有 O，$\mathrm{Tr}\big(\mathcal{N}(O)\big) = \mathrm{Tr}(O)$。等价地，线性映射 $\mathcal{N}\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ 是完全正的，当且仅当它可以写成如下形式

$$\mathcal{N}(O) = \sum_i K_i O K_i^\dagger, \tag{25}$$

其中 $K_i:\ \mathcal{H}_A \mapsto \mathcal{H}_B$ 是一个线性算子，而集合 $\{K_i\}$ 称为 Kraus 算子。当这些 Kraus 算子满足 $\sum_i K_i^\dagger K_i = I_A$时，式（25）中的映射是保迹的。当 $\mathcal{N}$是幺正的，即N($= I_B$) $\sum_i K_i K_i^\dagger = I_B$时，Kraus 算子满足 $_A$。如果 $\mathcal{H}_B$ 和 $\mathcal{H}$维数相同，那么它们彼此同构，可记作 H。如果作用在 H 上的这些 Kraus 算子是厄米算子（或正规算子），那么该量子信道自动为幺正。

3.1 标准 Kraus分解

对于给定的量子信道 $\mathcal{N}\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$，Kraus 算子的集合并非唯一。不过，我们可以构造一种称为标准克劳斯分解 的分解，它具有一些令人满意的性质。

考虑式（22）中 Choi–Jamiołkowski 算子的特征分解，

$$J_{AB}^{\mathcal{N}} = \sum_i \mathbf{e}_i^{\downarrow} |L_i\rangle\langle L_i|, \tag{26}$$

其中，特征值 $\mathbf{e}$ $_0^{\downarrow} \geq \mathbf{e}_1^{\downarrow} \geq \cdots \geq \mathbf{e}_{d_A d_B - 1}^{\downarrow} \geq 0$ 且特征向量 $\{|L_i\rangle\}$ 构成 $\mathcal{H}_{AB}$ 的标准正交基 ，

$$\langle L_i | L_j \rangle = \delta_{ij}. \tag{27}$$

利用标准正交基 $\mathcal{A} = \{|a_i\rangle\}$ 对右矢 $\{|L_i\rangle\}$ 应用算子-矢量对偶，可得到一组标准正交算子 $\{L_i\}$，它们将 $\mathcal{H}_A$ 映射到 $\mathcal{H}_B$（见第 2.1 节）。利用这些算子定义 $K_i : \mathcal{H}_A \mapsto \mathcal{H}_B$,

$$K_i := \sqrt{\mathbf{e}_i^{\downarrow}} L_i, \tag{28}$$

并注意到，根据算子-矢量对偶，我们得到

$$|K_i\rangle := \sqrt{\mathbf{e}_i^{\downarrow}} |L_i\rangle. \tag{29}$$

引理 1. 算子 $\{K_i\}$ 构成 $\mathcal{N}$ 的 Kraus分解,

$$\mathcal{N}(O) = \sum_i K_i O K_i^\dagger. \tag{30}$$

证明。 在（26）中使用（18）可得

$$J_{AB}^{\mathcal{N}} = \sum_i \mathbf{e}_i^{\downarrow} (I_A \otimes L_i)|\gamma\rangle\langle\gamma|(I_A \otimes L_i)^\dagger \tag{31}$$

$$= \sum_i (I_A \otimes K_i)|\gamma\rangle\langle\gamma|(I_A \otimes K_i)^\dagger, \tag{32}$$

其中第二个不等式用到了（28）。这个第二个不等式结合（23）可得 ，

$$\mathcal{N}(|a_k\rangle\langle a_l|) = \sum_i K_i(|a_k\rangle\langle a_l|)K_i^\dagger \tag{33}$$

这个等式结合$\mathcal{N}$的线性性，证明了该引理。 ■

利用（26）、（27）、（28）和（29）可以证明 Kraus 算子 $\{K_i\}$ 满足

$$\langle K_i, K_j \rangle = \langle K_i, K_i \rangle \delta_{ij} \quad \text{and} \quad \langle K_i, K_i \rangle \geq \langle K_j, K_j \rangle, \tag{34}$$

其中 $i \le j$，我们使用 $K_i, K_i = \mathrm{e}_i^{\downarrow}$。除了满足上述公式所描述的正交性和排列顺序外，Kraus 算子 $\{K_i\}$ 还具有其他一些有用的性质。非零算子 $\{K_i\}$ 的总数等于 Choi-Jamiołkowski 算子 J N_{AB} 的秩。该秩是表示量子信道 N 所需的最少 Kraus 算子数量。当 $J_{AB}^{\mathcal{N}}$的特征值互不相同时，每个 Kraus 算子的范数 K_i, K_i 就是 J N_{AB} 的 $(i+1)^{\text{th}}$最大特征值。利用这些 Kraus 算子，可以得到 Choi-Jamiołkowski 算子 (22),

$$\mathcal{J}_{AB}^{\mathcal{N}} = \sum_i |K_i\rangle\langle K_i|, \tag{35}$$

其中我们应用了算子-矢量对偶（参见第2.1节），将算子 K_i： $\mathcal{H}_A \mapsto \mathcal{H}_B$ 转换为右矢$|K_i\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$，所用基为$\mathcal{A} = \{|a_i\rangle\}$。注意，$|K_i\rangle$ 是$\mathcal{J}_{AB}^{\mathcal{N}}$ 的未归一化特征向量，其特征值为$\langle K_i, K_i\rangle$。我们将引理（$\{K_i\}$ 中的1）称为标准 Kraus 分解。

3.2 对偶信道

给定映射$\mathcal{N}$： $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$，其对偶$\mathcal{N}^{\dagger}$： $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ 通过*

$$\mathrm{Tr}\big(\mathcal{N}^{\dagger}(O)\rho\big) = \mathrm{Tr}\big(O\mathcal{N}(\rho)\big), \tag{36}$$

其中 $\rho \in \mathrm{L}(\mathrm{H}_A)$ 和 $O \in \mathrm{L}(\mathrm{H}_B)$。量子信道 N 演化量子态 ρ，其对偶信道 $\mathrm{N}^{\dagger}$ 演化可观测量 O。上述等式的右侧表示演化后的量子态 N (ρ) 相对于固定可观测量 O 的期望值，而等式左侧则给出固定量子态 ρ 相对于演化后的可观测量 $\mathrm{N}^{\dagger}(O)$ 的期望值。如果 N 是完全正映射且具有 Kraus 分解 (25)，那么 $\mathrm{N}^{\dagger}$也是完全正映射，其 Kraus 算子为 $\{K_i^{\dagger}\}$；如果 N 是保迹的，那么 $\mathrm{N}^{\dagger}$是幺正的（参见 [38] 第 6 章）。具有标准 Kraus 算子 $\{K_i\}$ 的完全正映射 N 的对偶映射 $\mathrm{N}^{\dagger}$ 具有标准 Kraus 算子 $\{K_i^{\dagger}\}$，因为

$$\langle K_i^{\dagger}, K_j^{\dagger}\rangle = (\langle K_i, K_j\rangle)^*. \tag{37}$$

对偶信道的 Choi-Jamiołkowski 算子（22），

$$J_{BA}^{\mathcal{N}^{\dagger}} = \sum_i |K_i^{\dagger}\rangle\langle K_i^{\dagger}|, \tag{38}$$

其中 $\{|K_i^{\dagger}\rangle\}$ 在 $\mathcal{H}_{BA}$ 中通过算子-右矢对偶，利用基 $\mathcal{B} = \{|b_j\rangle\}$定义。我们旨在比较$J_{BA}^{\mathcal{N}^{\dagger}}$（作用在 $\mathcal{H}_{BA}$ 上的算符）与 $J_{AB}^{\mathcal{N}}$（作用在另一个空间 $\mathcal{H}_{AB}$上的算符）。为进行比较，在（38）中交换 B 与 A，并使用（20）、（35），得到

$$J_{AB}^{\mathcal{N}} = (J_{AB}^{\mathcal{N}^{\dagger}})^*. \tag{39}$$

一个量子信道及其对偶信道的 Choi-Jamiołkowski 算子可以互为复共轭。

3.3 极端量子比特信道

从 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ 到 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ 的量子信道集合是凸的，即若 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 都是量子信道，则

$$\mathcal{K} = \lambda\mathcal{N} + (1-\lambda)\mathcal{M}, \tag{40}$$

对于任意 $0 \le \lambda \le 1$，都是一个量子信道。任意量子信道 $\mathcal{K}$ 是极端的，即它是量子信道集合的一个极点，当且仅当只有在 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$时，等式（40）才成立；或者满足该等式的唯一量子信道 $\mathcal{N}$和$\mathcal{M}$ 均等于 $\mathcal{K}$。

*这种对偶映射的定义（36）在量子信息领域很常见（见 [38]中的定义（6.2），或 [39]中的式（1.44）下方），但它不同于数学文献中采用的另一种定义：$\langle \mathcal{N}\dagger(O)\ \rho\rangle = \langle O,\ \mathcal{N}(\rho)\rangle$。对于满足 $\mathcal{N}(\rho^{\dagger}) = \big(\mathcal{N}(\rho)\big)^{\dagger}$ 的映射，这两种定义是一致的；但当不满足这一性质时，两者可能不同。例如，若 $\mathcal{N}(\rho) = c\rho$，且 c为复数，则这两种定义给出的对偶映射不同。

若量子信道 $\mathcal{N}:\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)\ \mapsto\ \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ 中，$\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$ 均为二维空间，则称其为量子比特信道。对于这两个二维空间，我们可以使用标准基 $\{|i\rangle\}$，其中 $i\in\{0,1\}$，来定义泡利算子，

$$X=|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|,\quad Y=-i|0\rangle\langle 1|+i|1\rangle\langle 0|,\quad \text{and}\quad Z=|0\rangle\langle 0|-|1\rangle\langle 1|. \tag{41}$$

量子比特信道的极端点已在多项研究中得到探讨 [40–44]。若量子比特信道只有一个由酉算子给出的 Kraus算子，或者有两个均不与酉算子成比例的 Kraus 算子，则该信道是极端的（参见 [44]中的推论 15）。在信道输入端和输出端施加局部酉变换后，具有两个 Kraus 算子的量子比特信道$\mathcal{N}$可写为 [42]

$$\mathcal{N}(O)=K_0OK_0^\dagger+K_1OK_1^\dagger, \tag{42}$$

其中，

$$K_0=\begin{pmatrix}\cos(\frac{v-u}{2}) & 0\\ 0 & \cos(\frac{v+u}{2})\end{pmatrix},\quad K_1=\begin{pmatrix}0 & \sin(\frac{v+u}{2})\\ \sin(\frac{v-u}{2}) & 0\end{pmatrix}, \tag{43}$$

在$\{|i\rangle\}$处的$\mathcal{H}_A$以及$\mathcal{H}_B$, $u\in[0,2\pi]$和 $v\in[0,\pi)$的标准基下表示。

虽然 u和 v可用于参数化该量子信道（42），但它们不一定代表与量子信道引入的噪声量呈单调关系的噪声参数。在某些特殊情况下，可以直观地得到噪声参数。例如，当 $u=0$时，

$$\mathcal{N}(O)=\cos^2(\frac{v}{2})O+\sin^2(\frac{v}{2})XOX, \tag{44}$$

是一个退相位概率为 $\sin^2(v/2)$ [†]的量子比特退相干信道。通过在信道输入端 X处施加酉变换 $\mathcal{H}_A$，可以将该退相位信道（44）转换为另一个退相位概率为 $1-\sin^2(v/2)$的退相位信道。因此，退相位概率为二分之一时，退相位达到最大。这个退相位概率是一种直观的噪声参数，因为当该概率从零增至二分之一时，量子信道的噪声会越来越大。

另一个特殊情形是 $u+v=2\pi$。此时，如果在信道输入端和输出端互换右矢 $|0\rangle$ 与 $|1\rangle$，$\mathcal{N}$就会变成量子比特振幅阻尼信道。量子比特振幅阻尼信道保持 $|0\rangle\langle 0|$ 不变，但 $|1\rangle\langle 1|$ 会以 $\sin^2 v$ 的概率衰变为 $|0\rangle\langle 0|$。直观地说，这个阻尼概率是一种噪声参数：随着阻尼概率从零增至一，量子信道会变得越来越嘈杂。除了退相位和振幅阻尼这两种特殊情形外，合适的噪声参数未必容易猜出。

如上所述，当 $\mathcal{N}$表示振幅阻尼噪声时，噪声参数就是阻尼概率。在其他所有情形下，这个量子比特信道 $\mathcal{N}$都可以由一种特殊形式的等距映射生成（参见第 3节的讨论）。这种 *pcubed* 形式的等距映射 [45]，

$$V|\alpha_i\rangle=|\beta_i\rangle\otimes|\gamma_i\rangle, \tag{45}$$

其中，$i\in\{0,1\}$将一些特殊的输入纯量子态$\{|\alpha_i\rangle\}$ 映射为$\mathcal{H}_B$ 输出端的纯态乘积$\{|\beta_i\rangle\}$ 和$\mathcal{H}_C$ 输出端的$\{|\gamma_i\rangle\}$。这些输入态不一定彼此正交，但构成$\mathcal{H}_A$的一组基。G_A格拉姆矩阵, G_B，以及 G_C 分别对应$\{|\alpha_i\rangle\}$,$\{|\beta_j\rangle\}$ 和$\{|\gamma_k\rangle\}$，并满足

$$[G_A]_{ij}=\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle=\langle\beta_i|\beta_j\rangle\langle\gamma_i|\gamma_j\rangle=[G_B]_{ij}[G_C]_{ij} \tag{46}$$

当且仅当 V是一个等距映射，即 $V^\dagger V=I_A$ [45]。这些矩阵的形式为

$$G_A=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix},\quad G_B=\begin{pmatrix}1 & b\\ b & 1\end{pmatrix},\quad \text{and}\quad G_C=\begin{pmatrix}1 & c\\ c & 1\end{pmatrix}, \tag{47}$$

其中 $-1<a<1,-1\le b\le 1,-1\le c\le 1$，以及 $a=bc$。参数 b和 c完全确定了等距映射 V（45）中的等距映射，进而确定量子信道$\mathcal{N}$。可以使用标准基将 $|\alpha_i\rangle$ 表示为

$$|\alpha_i\rangle=\sqrt{\frac{1+a}{2}}|0\rangle+(-1)^i\sqrt{\frac{1-a}{2}}|1\rangle. \tag{48}$$

[†]注意，退相位信道不是极端的，因为它的每个 Kraus 算子都与一个酉算子成比例（参见上文式（42）的讨论）。

在这种参数化中，将 a 替换为 b 得到 $|\beta_i\rangle$，将 a 替换为 c 得到 $|\gamma_i\rangle$。参数 b 和c与式（ u 和 v 中的参数对应关系43）如下：

$$\sin^2 v = \frac{1-c^2}{1-(bc)^2}, \quad \text{and} \quad \cos^2 u = \frac{1-b^2}{1-(bc)^2}, \tag{49}$$

其中 $|bc| \neq 1$。式（43）中的 Kraus 算子可写为

$$K_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(1+b)(1+c)}{2(1+bc)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{(1-b)(1+c)}{2(1-bc)}} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{(1+b)(1-c)}{2(1-bc)}} \\ \sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{2(1+bc)}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

虽然这些 Kraus 算子看起来比式（43）中的更复杂，但使用参数 b 和 c时，其他一些量子信道性质会变得简单。例如，具有参数 b 和 c 的量子信道 $\mathcal{N}$ 在 $|b/c| < 1$时是可降级的，否则 $|b/c| \geq 1$ 且该量子信道是反可降解的 [45]。

一般来说，$-1 \leq b \leq 1$ 和 $-1 \leq c \leq 1$，但可以简化参数空间。在上述讨论中，将 b 替换为 $-b$，同时保持 c 不变，会得到一个新的量子信道 $\tilde{\mathcal{N}}$；该量子信道与 $\mathcal{N}$等价，差别仅在于信道输入和输出处的局部酉变换。为说明这一点，请注意，这种替换定义了一个新的 pcubed 形式的等距映射 $\tilde{V}$，

$$\tilde{V}|\tilde{\alpha}_i\rangle = |\tilde{\beta}_i\rangle \otimes |\gamma_i\rangle, \tag{51}$$

其中 $|\tilde{\alpha}_i\rangle$ 和 $|\tilde{\beta}_i\rangle$ 是由 $|\alpha_i\rangle$ 和 $|\beta_i\rangle$ 分别将 and 替换为 $-a$ 和 $-b$得到的右矢。这个新的等距映射 $\tilde{V}$与式（45）中的 V通过局部酉变换相关，如下所示：

$$(I_C \otimes X_B)\tilde{V} = VX_A, \tag{52}$$

其中 X 由式（41）定义。类似地，参数为 b 和 c 的量子信道，在局部酉变换意义下等价于参数为 b 和 $-c$的量子信道。这些等价关系使我们可以将参数空间$-1 \leq b \leq 1$ 和 $-1 \leq c \leq 1$ 限制在正象限 $0 \leq b \leq 1$ 和 $0 \leq c \leq 1$。

我们证明，任意参数为 b 和 c 的量子信道$\mathcal{N}$都可以模拟另一个参数为b和 $c' \leq c$的量子信道$\mathcal{N}'$，其含义是：

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N} \circ \mathcal{M}, \tag{53}$$

其中 M 是一个量子信道。从 pcubed 视角来看，很容易看出上述等式成立。令 $\mathrm{N} : \mathrm{L}(\mathrm{H}_A) \mapsto \mathrm{L}(\mathrm{H}_B)$ 由式（45）中的等距映射生成，$\mathrm{N}' : \mathrm{L}(\mathrm{H}_A) \mapsto \mathrm{L}(\mathrm{H}_B)$ 由等距映射 $V' : \mathrm{H}_A \mapsto \mathrm{H}_B \otimes \mathrm{H}_{C'}$ 生成，其形式与式（45）中的 V相同，不过

$$V'|\alpha_i'\rangle = |\beta_i\rangle \otimes |\gamma_i'\rangle \tag{54}$$

其中 $c' = \langle\gamma_0'|\gamma_1'\rangle$ 和 $a' = \langle\alpha_0'|\alpha_1'\rangle = bc'$。该 $\mathcal{M} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ 量子信道 (53) 由如下形式的等距映射生成 $W : \mathcal{H}_A \mapsto \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_D$，形式如 (45)，其中

$$W|\alpha_i'\rangle = |\alpha_i\rangle \otimes |\delta_i\rangle, \tag{55}$$

其中 $d := \langle\delta_0|\delta_1\rangle = c'/c$ 的取值范围为 0 到 1，因为 $0 \leq c' \leq c$。式 (53) 中的关系保证 $\mathcal{N}'$ 比 $\mathcal{N}$噪声更大。因此，对于固定的 b，若减小 c，则量子信道 $\mathcal{N}$的噪声会增大。

参数 c 刻画了到达环境的纯态之间缺乏可区分性的程度。如果 c 减小，流向环境的信息会增多。不可克隆定理 [46–48]指出，流向环境的信息必然以牺牲流向输出的信息为代价。因此，$\mathcal{N}$会随着 c的减小而变得更嘈杂。我们将关注在 c 作为噪声参数且 b 固定时的情形。在极限 $b = 0$情况下，$\mathcal{N}$会变成量子比特退相干信道 (44)，其退相位概率为 $(1-c)/2$。此处，c从 1 降至 0 会使退相位概率从 0 增至一半。

4 最优纠缠共享

4.1 高保真纠缠

考虑两方 Alice 和 Bob，他们通过某个量子信道 $\mathcal{N}$ 相连：$\mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$，其中$\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$ 的维度相同，为 d。假设 Alice 可以访问一个维度为 d 的第二个系统，其

希尔伯特空间 $\mathcal{H}_R$。Alice 应准备什么双部态 ρ_{RA}，使得将该态的一半通过量子信道 $\mathcal{N}$ 与 Bob 分享后，得到的量子态 ρ_{RB} 与最大纠缠态之间具有最高保真度 $F(\rho_{RB}, \phi_{RB})$,

$$|\phi\rangle_{RB} = \frac{1}{\sqrt{d}}|\gamma\rangle_{RB}, \tag{56}$$

参考系 $\mathcal{H}_R$ 与输出 $\mathcal{H}_B$ 之间？Alice制备的最优量子态（记为 Λ_{RA}）以及最大保真度,

$$\mathcal{O}(\mathcal{N}) := F(\Lambda_{RB}, \phi_{RB}), \tag{57}$$

此前已根据量子信道的 Choi-Jamiołkowski算子 [30,31,34] 在 ρ_{RA} 为纯态时进行了刻画。对于可能为混合态的 ρ_{RA}，我们将这些结果重新表述为量子信道的标准 Kraus 分解以及其 Choi-Jamiołkowski算子的算子范数，所得结果与此前的刻画一致。我们通过找出能够达到 的混合输入态族，对这些结果作了拓展 $\mathcal{O}(\mathcal{N})$。这一重新表述及拓展将在后续研究中使用。我们首先借助一个半定规划来重新表述

$$\begin{aligned} &\text{maximize } F(\rho_{RB}, \phi_{RB}) \\ &\text{subject to } \rho_{RB} = \mathcal{I}_R \otimes \mathcal{N}(\rho_{RA}), \\ &\qquad\qquad \rho_{RA} \succeq 0, \\ &\qquad\qquad \mathrm{Tr}(\rho_{RA}) = 1. \end{aligned} \tag{58}$$

上述规划的最优值给出 $\mathcal{O}(\mathcal{N})$，而达到该最优值的密度算子给出 Λ_{RA}。以下定理概述了上述问题的解。

定理 1. 给定一个量子信道 $\mathcal{N}$，其标准 Kraus 算子为 $\{K_i\}$,

$$\mathcal{O}(\mathcal{N}) = \frac{1}{d}\langle K_0, K_0\rangle = \frac{1}{d}||J^{\mathcal{N}}_{RB}|| = F(\Lambda_{RB}, \phi_{RB}), \tag{59}$$

wh此处输入 Λ_{RA} 的支撑位于 $\{|K_i^\dagger\rangle_{RA}\}$ 张成的空间中，并满足 $\langle K_i, K_i\rangle = \langle K_0, K_0\rangle$.

证明。利用公式 (7) 以及 ϕ_{RB} 是纯态这一事实，可以将 $F(\rho_{RB}, \phi_{RB})$ 写成内积 ρ_{RB}, ϕ_{RB}。利用 (58) 中的第一个等式约束，可以将该内积重写为 $\mathrm{I}_R \otimes \mathrm{N}$ (ρ_{RA}) ϕ_{RB}。根据对偶信道的定义 (36)，这一重写可以化简为 $\rho_{RA}, (\mathrm{I}_R \otimes \mathrm{N})^\dagger(\phi_{RB})$。利用 (36) 下方的讨论，或者通过其他方式，可以证明两个量子信道的张量积的对偶等于各个量子信道对偶的张量积。因此，$\rho_{RA}, (\mathrm{I}_R \otimes \mathrm{N})^\dagger(\phi_{RB}) = \rho_{RA}, \mathrm{I}_R \otimes \mathrm{N}^\dagger(\phi_{RB})$，其中使用了 $\mathrm{I}_R^\dagger$ 是 I_R 这一事实。接下来注意到，$(\mathrm{I}_R \otimes \mathrm{N}\dagger)\phi_{RB}$ 恰好是 $\mathrm{J}\,\mathrm{N}_{RA}{}^\dagger/d$ (22)。利用这些观察，将 (58) 重写为

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \frac{1}{d}\langle \rho_{RA}, \mathcal{J}^{\mathcal{N}^\dagger}_{RA}\rangle \\ &\text{subject to } \rho_{RA} \succeq 0, \\ &\qquad\qquad \mathrm{Tr}(\rho_{RA}) = 1. \end{aligned} \tag{60}$$

该半定规划的解为 $(1/d)$ 乘以 $J^{\mathcal{N}^\dagger}_{RA}$ 的最大特征值，其中通过设定 $\rho_{RA} = \Lambda_{RA}$ 得到；这里，Λ_{RA} 是任意一个支撑于该最大特征值对应特征子空间上的密度算子。利用 (34) 和 (37)，该最大特征值可写为 $K_0^\dagger, K_0^\dagger = K_0, K_0$。根据定义 (5)，该最大特征值也可写为谱范数 $||J^{\mathcal{N}}_{RB}||$。$J^{\mathcal{N}^\dagger}_{RA}$ 的最大特征值 K_0, K_0 对应的支撑，是与该值对应的特征向量所张成的空间。这些特征向量中包含 $J^{\mathcal{N}^\dagger}_{RA}$ 的特征向量 $|K_i^\dagger$（见 (38)），其特征值 $K_i^\dagger$，$K_i^\dagger$ 等于最大特征值 $K_0^\dagger, K_0^\dagger$。利用 (39) 可以证明，$J^{\mathcal{N}^\dagger}_{RA}$ 的特征值等于 $J^{\mathcal{N}}_{RA}$ 的对应特征值，即可以证明 $K_i^\dagger, K_i^\dagger = K_i, K_i$。■

固定态 ρ_{AB} 与完全纠缠态之间的保真度，在所有可能的完全纠缠态中取最大值，称为完全纠缠分数 [5,29]

$$F_e(\rho_{AB}) = \max_{U_A} F\big(\rho_{AB}, (U_A \otimes I_B)\phi_{AB}(U_A \otimes I_B)^\dagger\big), \tag{61}$$

其中 U_A 是$\mathcal{H}_A$上的酉算子。

引理 2. 通过将混合态 ρ_{RA} 经由量子信道 $\mathcal{N}$传送一半后，在所有 ρ_{RA} 上取最大值，所得最大完全纠缠分数等于 $\mathcal{O}(\mathcal{N})$ (57)。

证明。注意，最大完全纠缠分数可通过如下方式修改优化问题（58）来求得：将 ϕ_{RB} 替换为 $\chi_{RB} = (U_R \otimes I_B)\phi_{RB}(U_R \otimes I_B)^\dagger$，并对两个酉矩阵 U_R 和密度算子 ρ_{RA}进行优化。注意，在这个更大的优化问题中，可以简化目标函数 $F(\rho_{RB}, \chi_{RB}) = F(\rho'_{RB}, \phi_{RB})$，其中 $\rho'_{RB} = (U_R \otimes I_B)^\dagger \rho_{RB}(U_R \otimes I_B)$。由于 $\rho'_{RB} = \mathrm{I} \otimes \mathrm{N}(\rho'_{RA})$，其中 $\rho'_{RA} = (U_R \otimes I_A)^\dagger \rho_{RA}(U_R \otimes I_A)$，因此可以将当前的优化改写为仅用一个新的变量 ρ'_{RA}表示，并满足 $\rho'_{RA} \succeq 0$ 且 $\mathrm{Tr}(\rho'_{RA}) = 1$。在这种改写中，变量 U_R 不再参与。然而，以 ρ'_{RA} 表示的新问题与（57）完全相同。■

上述结果将推广到混合态，而引理2的证明中对纯态隐含得到的结果则是 [31]。

设 Λ_{RA} 为定理 1 中的量子态。我们关注所有此类量子态中的最小纠缠量。为描述这一最小值，我们使用形成纠缠（10）。当 Λ_{RA} 是唯一的纯态时，我们将其记为 输入纠缠

$$\mathcal{E}(\mathcal{N}) = S(\sigma_A), \tag{62}$$

当 Λ_{RA} 可以取为混合态时，我们记为

$$\mathcal{E}(\mathcal{N}) = \min_{\Lambda_{RA}} E_f(\Lambda_{RA}), \tag{63}$$

其中 Λ_{RA} 是定理 1 中的量子态。当 Λ_{RA} 可以取为可分态时，$\mathcal{E}(\mathcal{N}) = 0$。

4.2 可乘性

假设 Alice 和 Bob 通过两个独立信道相连，这两个信道可以相同，也可以不同。Alice 应准备什么样的量子态，使得将其一半通过联合信道发送后，Alice 和 Bob 共享的联合量子态与完全纠缠态具有最大保真度？这个最大保真度是多少？能否利用连接 Alice 和 Bob 的两个信道之间的关联，获得高于不利用信道间任何关联时所能达到的保真度？关于通过渐近数量次使用量子信道传输信息，上述自然问题的变体已经有人提出。这些问题一直难以回答。在这里，我们对上述问题进行数学表述并给出答案。

设连接 Alice 和 Bob 的两个量子信道分别为 $\mathrm{N}_1 : \mathrm{L}(\mathrm{H}_{A1}) \mapsto \mathrm{L}(\mathrm{H}_{B1})$ 和 $\mathrm{N}_2 : \mathrm{L}(\mathrm{H}_{A2}) \mapsto \mathrm{L}(\mathrm{H}_{B2})$，其中 $d_{A1} = d_{B1}$ 和 $d_{A2} = d_{B2}$。对于每个信道输入 H_{A1} 和 H_{A2}，定义辅助空间 H_{R1}和 H_{R2}。设 I_{R1} 和 I_{R2} 分别为这些辅助空间 $\mathrm{L}(\mathrm{H}_{R1})$ 和 $\mathrm{L}(\mathrm{H}_{R2})$ 上的恒等映射，$\mathrm{H}_A := \mathrm{H}_{A1} \otimes \mathrm{H}_{A2}$，$\mathrm{H}_B := \mathrm{H}_{B1} \otimes \mathrm{H}_{B2}$，$\mathrm{H}_R = \mathrm{H}_{R1} \otimes \mathrm{H}_{R2}$，$\mathrm{N} = \mathrm{N}_1 \otimes \mathrm{N}_2$，和 $\mathrm{I}_R = \mathrm{I}_{R1} \otimes \mathrm{I}_{R2}$。如果 Alice 制备的量子态不会使两个量子信道的输入 $\mathrm{I}_{R1} \otimes \mathrm{N}_1$ 和 $\mathrm{I}_{R2} \otimes \mathrm{N}_2$ 相关联，那么辅助空间 H_R 与信道输出 H_B 之间的最大完全纠缠态保真度可如下求得：

$$\begin{aligned} &\text{maximize } F(\rho_{RB}, \phi_{RB}) \\ &\text{subject to } \rho_{RB} = (\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{N})\rho_{RA}, \\ &\qquad \rho_{RA} = \rho_{R1A1} \otimes \rho_{R2A2} \\ &\qquad \rho_{RA} \succeq 0, \\ &\qquad \mathrm{Tr}(\rho_{RA}) = 1. \end{aligned} \tag{64}$$

上述问题的最优值简单地为 $O(\mathrm{N}_1)O(\mathrm{N}_2)$。它在 $\Lambda_{RA} = \Lambda_{R1A1} \otimes \Lambda_{R2A2}$ 处取得，其中Λ_{R1A1} 和 Λ_{R2A2} 分别是针对 N_1 和 N_2, 进行式 (58) 形式优化所得的最优值。另一方面，如果 Alice 制备的量子态可能使输入与 $\mathrm{I}_{R1} \otimes \mathrm{N}_1$ 和 $\mathrm{I}_{R2} \otimes \mathrm{N}_2$ 相关，那么最大保真度 $\mathrm{O}(\mathrm{N}_1 \otimes \mathrm{N}_2)$ 可通过求解不带乘积约束的式 (64) 得到，$\rho_{RA} = \rho_{R1A1} \otimes \rho_{R2A2}$。这一最大保真度 $O(\mathrm{N}_1 \otimes \mathrm{N}_2)$ 可能更高

$$O(\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2) \geq O(\mathcal{N}_1)O(\mathcal{N}_2), \tag{65}$$

因为最优值 $O(\mathcal{N}_1)O(\mathcal{N}_2)$ 的下界是式 (64) 的最优值，而式 (64) 不含乘积约束，$\rho_{RA} = \rho_{R1A1} \otimes \rho_{R2A2}$。

*The*定理 2. 最大保真度 $O(\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2)$ 具有乘法性，即（65 ）

$$O(\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2) = O(\mathcal{N}_1)O(\mathcal{N}_2), \tag{66}$$

证明。 设 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 的标准克劳斯分解分别为 $\{J_q\}$ 和 $\{K_r\}$。利用定理 1，可写为

$$\mathcal{O}(\mathcal{N}_1) = \frac{1}{d_{A1}}\langle J_0, J_0\rangle \quad \text{and} \quad \mathcal{O}(\mathcal{N}_2) = \frac{1}{d_{A1}}\langle K_0, K_0\rangle. \tag{67}$$

对于 $\{L_p\}$，可以选取其标准 Kraus 分解，使得 $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2$ 中的每个 L_p 都具有形式 $J_q \otimes K_r$，其中 q 且 r。当 $q = r = 0$时，可以令 p 为 0,

$$L_0 = J_0 \otimes K_0 \tag{68}$$

因为

$$\langle L_0, L_0\rangle = \langle J_0, J_0\rangle\langle K_0, K_0\rangle \geq \langle J_q, J_q\rangle\langle K_r, K_r\rangle = \langle L_p, L_p\rangle \tag{69}$$

对所有 q， r 以及相应的 p，利用（68）和定理 1 作用于 $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2$ 可得

$$\mathcal{O}(\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2) = \frac{1}{d_{A1}d_{A2}}\langle L_0, L_0\rangle. \tag{70}$$

上述等式结合（67）和（69）即可证明结论。

或者，注意到

$$J^{\mathcal{N}}_{RB} = \sum_p |L_p\rangle\langle L_p| = \sum_{qr} |J_q\rangle\langle J_q| \otimes |K_r\rangle\langle K_r| = J^{\mathcal{N}_1}_{R1B1} \otimes J^{\mathcal{N}_2}_{R2B2}. \tag{71}$$

其中第一个等号由式（35）得出。利用定理 1，可写为

$$\mathcal{O}(\mathcal{N}_1) = \frac{1}{d_{A1}}||J^{\mathcal{N}_1}_{R1B1}||, \quad \mathcal{O}(\mathcal{N}_2) = \frac{1}{d_{A2}}||J^{\mathcal{N}_2}_{R2B2}||, \quad \text{and} \quad \mathcal{O}(\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2) = \frac{1}{d_A}||J^{\mathcal{N}}_{RB}||, \tag{72}$$

其中 $d_A = d_{A1}d_{A2}$。算子范数具有次乘性（参见 [49]第 1.1.3 节），

$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||, \tag{73}$$

这意味着

$$||A \otimes B|| \leq ||A|| \cdot ||B||. \tag{74}$$

结合上述方程以及式（65）和式（72），也可证明该结果。 ■

5 应用

5.1 极端量子比特信道

量子比特信道$\mathcal{N}$为 $d_A = d_B = 2$。如果该量子信道只有一个 Kraus 算子，那么它就是与酉矩阵共轭的变换，且$\mathcal{O}(\mathcal{N}) = 1$。下一个最简单的量子比特信道有两个 Kraus 算子，如式（42）所示。该信道的一个特殊情形是量子比特振幅阻尼信道。这个振幅信道的 Kraus 算子可写为:

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{75}$$

其中 $0 \leq p \leq 1$ 是量子态 $|1\rangle\langle 1|$ 衰减为 $|0\rangle\langle 0|$的概率。简单计算可知，这些 Kraus 算子构成了$\mathcal{N}$的标准克劳斯分解。将此分解代入定理1，得到

$$\mathcal{O}(\mathcal{N}) = 1 - p/2 \quad \text{and} \quad \Lambda_{RA} = \frac{|K_0\rangle\langle K_0|}{\langle K_0, K_0\rangle}, \tag{76}$$

一个与 [33]一致的结果。一般来说，输入端产生的纠缠量（定义见（62））,

$$E(\mathcal{N}) = h(\frac{1}{2-p}), \tag{77}$$

其中 $h(x)$: $= -x\log\, x - (1-x)\log(1-x)$ 是二元熵函数，其中log 以2为底。除非 $p = 1$ 其中 $E(\mathcal{N}) = 0$ 以及 Λ_{RA} 在（76）中是乘积态，否则该值非零。

当具有两个 Kraus 算子的量子比特信道$\mathcal{N}$不是振幅阻尼信道时，其量子信道 Kraus 算子具有（50）所示形式。这些 Kraus 算子$\{K_0, K_1\}$ 有两个参数 $0 \leq b \leq 1$和 $0 \leq c \leq 1$。若 b 固定，而 c 从 1 开始减小，量子信道会变得更加嘈杂（参见包含（53）的讨论）。算子$\{K_0, K_1\}$ 构成标准克劳斯分解。将它们用于定理1，可得

$$\mathcal{O}(\mathcal{N}) = \frac{(1+c)(1-b^2c)}{2(1-b^2c^2)} \quad \text{and} \quad \Lambda_{RA} = \begin{cases} \frac{|K_0^\dagger\rangle\langle K_0^\dagger|}{\langle K_0^\dagger, K_0^\dagger\rangle} & \text{if} \quad b \neq 1 \text{ and } c \neq 0 \\ \sum_{ij} f_{ij}|K_i^\dagger\rangle\langle K_j^\dagger| & \text{if} \quad b = 1 \text{ or } c = 0 \end{cases}. \tag{78}$$

复数 f_{ij} 任意取值，只需保证它们生成有效的密度算子 Λ_{RA}。在 $b = 1$ 或$c = 0$时， Λ_{RA} 其支撑位于由$\{|K_0^\dagger\rangle_{RA}, |K_1^\dagger\rangle_{RA}\}$张成的二维空间内。这个二维空间是双量子比特空间$\mathcal{H}_{RA}$的一个子空间。一般来说，这样的子空间至少包含一个乘积态（引理见 [50]），但通常有两个 [42,45]。在 $c = 0$ 情形下，这些乘积态具有简单形式

$$|+\rangle_R \otimes |\psi_+\rangle_A \quad \text{and} \quad |-\rangle_R \otimes |\psi_-\rangle_A, \tag{79}$$

其中 $|\psi_+\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+b}|0\rangle + \sqrt{1-b}|1\rangle)$、 $|\psi_-\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+b}|0\rangle - \sqrt{1-b}|1\rangle)$、 $|+\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, 以及$|-\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$。

在 $b = 1$ 或 $c = 0$ 可以选择 Λ_{RA} 为投影到某个乘积态上的投影算子。因此，在 $b = 1$ 或 $c = 0$处，式（9）中定义的输入纠缠为零。一般而言，

$$E(\mathcal{N}) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad b = 1 \text{ or } c = 0 \\ h(\frac{(1+b)(1-bc)}{2(1-b^2c)}) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{80}$$

其中， $b \neq 1$ 和 $c \neq 0$ 处 E(N) 的表达式来自于在（78）中使用 Λ_{RA} 的形式。图 2 中，我们固定 b，并绘制 E (N) 随 c 变化的曲线；增大 c 会使 N 的噪声减小（参见包含式（53）的讨论）。在这些图中，随着 c 从零开始增大，E(N) 的值会在 $c = 0$ 处从 0 不连续地增大，随后持续单调上升，直到 $c = 1$，此时 N 成为完美信道。在各个固定 b 的图中，我们注意到增大 b 会使 E(N) 减小；当 $b \mapsto 1$ 时，对于所有 $bc \neq 1$，E(N) 最终趋于零。

上述所有特征都令人着迷。在参数范围 $0 < c < 1$内，可以得到一个预期结果 [34]：要使完全纠缠输出达到最大保真度，输入端所需的最小纠缠量严格小于 1。具体而言，如果输入端产生的纠缠超过 $\mathcal{E}(\mathcal{N}) < 1$，则其与最大纠缠输出的保真度会严格降低。这里的关键补充是对纠缠量进行量化，并对量子信道进行参数化，使纠缠量随量子信道的噪声参数单调变化。

接下来，在 $c = 0$处，$\mathcal{E}(\mathcal{N})$ 发生不连续变化：其值从零开始，随后跃升至一个较大的有限值 $\simeq h\big((1+b)/2\big)$。从数学角度看，这种不连续性源于优化问题（58）的解变为简并，而这种简并性使得选择最优输入态时有了更大的自由度。由于量子比特信道的结构，如（79）相关讨论中所述，这个输入态可以选择为可分态。

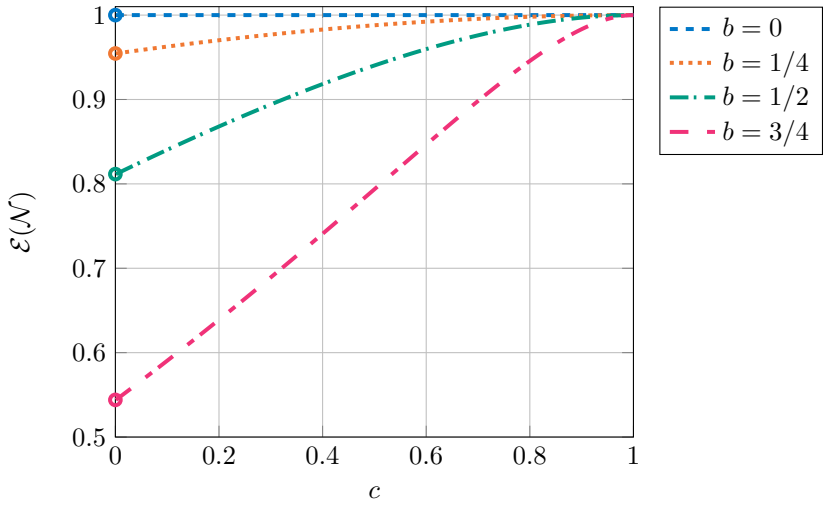

图 2：$\mathcal{E}($ $\mathcal{M})$ 随 c 变化的曲线，不同 b 取值对应不同曲线。空心圆表示该值为零 .

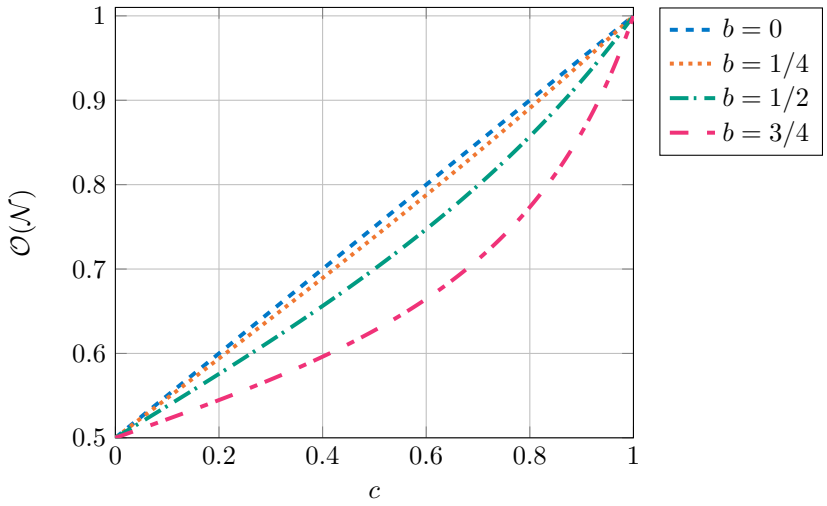

图 3：$\mathcal{O}(\mathcal{M})$ 随 c 变化的曲线，不同 b取值对应不同曲线。

5.2 量子比特 Pauli 量子信道

量子比特泡利信道$\mathcal{N}$：$\mathcal{H}_A \mapsto \mathcal{H}_B$ 可写为

$$\mathcal{N}(\rho) = \sum_i p_i \sigma_i \rho \sigma_i^\dagger, \tag{81}$$

其中 $p_i \geq 0$、 $\sum_i p_i = 1$，以及 Kraus 算子 $\{\sqrt{p_i}\sigma_i\}$、 σ_i ： $\mathcal{H}_A \mapsto \mathcal{H}_B$，均与 Pauli 矩阵成正比。这些矩阵可在$\{|0\rangle\ |1\rangle\}$ 基底下表示为，其中基底由$\mathcal{H}_A$ 和$\mathcal{H}_B$ 构成

$$\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \sigma_3 = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{82}$$

不失一般性，我们可以假设对于所有 $i \in \{1, 2, 3\}$， $p_0 \geq p_i$。这一假设基于以下论证。假设对于某个 $i \neq 0$ 以及所有 $j \in \{0, 1, 2, 3\}$， $p_i \geq p_j$ ，那么用 σ_i 对输入 ρ 进行共轭，仍会得到一个泡利信道 (81)。然而，对于这个得到的信道，所有 $i \in \{1, 2,3\}$ 都有 $p_0 \geq p_i$ 。

对于量子比特泡利信道，$\mathcal{O}(\mathcal{N})$ 的取值以及通过最大纠缠输入态可以达到该取值这一事实 Λ_{RA} 在以下文献中得到了论证： [34], 不过，我们稍后会指出，当$\mathcal{O}(\mathcal{N})$ 很嘈杂时，也可以使用可分纯态达到$\mathcal{N}$ 。由于 Pauli 矩阵彼此正交，在$\{K_i\}$这一$\mathcal{N}$的标准克劳斯分解中，我们总可以选择每个 K_i 为 $\sqrt{p_j}\sigma_j$，其中某个 j。由于 $p_0 \geq p_i$，$K_0 = \sqrt{p_0}\sigma_0$ 并且根据定理1 可得

$$\mathcal{O}(\mathcal{N}) = p_0. \tag{83}$$

当 $p_0 > p_j$ 对所有 $j, \Lambda_{RA} = |\sigma_0^\dagger \sigma_0^\dagger|/2$ 都成立时，也就是说， Λ_{RA} 是投影到最大纠缠态上的投影算子，因此 E(N) = 1。然而，如果对于某个 $i, p_0 = p_i$，那么 Λ_{RA} 是一个密度算子，其支撑位于由 $\{|\sigma_0^\dagger{}_{RA}, |\sigma_i^\dagger{}_{RA}\}$ 张成的空间中。这个空间是双量子比特空间 H_{RA}的一个二维子空间。根据包含式 (79) 的讨论，该子空间至少包含一个乘积态。因此，对于任意 i，如果 $p_0 = p_i$，我们可以选择令 Λ_{RA} 为乘积态，从而 E(N) = 0。因此，

$$\mathcal{E}(\mathcal{N}) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad p_0 > p_i \ \forall i, \\ 0 & \text{if} \quad p_0 = p_i \text{ for some } i. \end{cases} . \tag{84}$$

当 $p_0 = p_i$ 时，在输出端与最大纠缠态的保真度可通过发送可分输入 Λ_{RA}达到最佳。因此，输出 Λ_{RB} 也是可分的。预计这个可分输出与完全纠缠态的保真度较低。事实确实如此，条件 $p_0 = p_i$ 与 $\sum_i p_i = 1$ 共同迫使 $p_0 \leq 1/2$成立，因此 $\mathcal{O}(\mathcal{N}) \leq 1/2$。与最大纠缠态的保真度为二分之一 $|\phi\rangle_{AB}$，被认为较低，因为简单的可分态 $\rho_{RB} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$ 就能达到这个二分之一的值。

人们可能会想知道，哪些量子比特泡利信道满足 $p_0 = p_i \geq p_j$。任何属于此类的量子比特泡利信道都是反可降解的。一般而言，$\mathcal{N}$在（81）中满足 $p_0 \geq p_i$ 是反可降解的 [50–52] 当且仅当

$$p_1 + p_2 + p_3 + \sqrt{p_1 p_2} + \sqrt{p_1 p_3} + \sqrt{p_2 p_3} \geq 1/2. \tag{85}$$

我们关注 $p_0 = p_i$ 对某个 i成立的情形。对 p_i和 p_j进行置换不会改变上述条件，因此令 $p_0 = p_1 = p$，将 p_2 记为 q，则 $p_3 = 1 - 2p - q$。将这些替换代入（85）的左侧，并结合 $1 \geq p \geq q \geq 0$ 和 $p \geq 1 - 2p - q$，我们发现上述不等式（85）始终成立。因此， $p_0 = p_i \geq p_j$ 意味着量子比特泡利信道 $\mathcal{N}$是反可降解的。

泡利信道（81）具有一项关键性质：在信道输入和输出处进行局部酉变换后，任意幺正量子比特信道始终都可以写成泡利信道 [42]。关于量子比特信道，一个有趣的观察是， Λ_{RA} 在定理 1 中可以选为最大纠缠态，当且仅当 $\mathcal{N}$ 是幺正的 [34]。正因如此，探讨这一结果是否适用于更高维度是很有意思的。在下一节中，我们将发现事实并非如此。

对于量子比特泡利信道以及极端量子比特信道，我们发现，可以找到可分输入态 Λ_{RA} ，使其在信道输出端与完全纠缠态达到最高保真度。当量子比特信道 $\mathcal{N}$的标准克劳斯分解 $\{K_i\}$满足条件 $\langle K_0, K_0\rangle = \langle K_j, K_j\rangle$时，就会出现这种可分态，其中至少有一个 $j \neq 0$。利用式（35）， 该条件可化简为：量子信道的 Choi-Jamiołkowski 算子 $J_{RB}^{\mathcal{N}}$ 的最大特征值是简并的。一般而言，我们有以下引理。

引理 3。若 $\mathcal{N}$是一个量子比特信道，且 $J_{RB}^{\mathcal{N}}$ 的最大特征值是简并的，则 Λ_{RA} 定理 1 中的量子态可以选为可分态。

证明。 令$\{K_i\}$ 为$\mathcal{N}$的标准克劳斯分解。由于 $J_{RB}^{\mathcal{N}}$ 是简并的，$\langle K_0, K_0\rangle = \langle K_1, K_1\rangle$ 且Λ_{RA} 的支撑位于$\{|K_0^\dagger\rangle\rangle, |K_1^\dagger\rangle\rangle\}$张成的空间中。该支撑是双量子比特空间的一个二维子空间，因此包含一个乘积态。因此， Λ_{RA} 可以选为投影到该乘积态上的投影算子。■

尽管人们可能会猜想上述结果在更高维度的量子信道中仍然成立，但我们将在下一节证明事实并非如此。

5.3 一些量子三能级信道

我们构造了两个量子三能级信道。第一个量子信道 $\mathcal{M}$不是幺正的，但其最优输入态 Λ_{RA}（定义见定理 1）是唯一的，且为最大纠缠态。第二个量子信道 $\mathcal{P}$是幺正的，但其最优输入态 Λ_{RA} 既不是最大纠缠态，也不是可分态。利用第二个量子信道，我们证明，当 $J_{RB}^{\mathcal{N}}$ 的最大特征值简并时， Λ_{RA} 仍然可以是纠缠态。这一证明与引理 3形成对照。

设$\mathcal{H}_A$ 和$\mathcal{H}_B$ 是三维希尔伯特空间。设$\mathcal{M}:\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)\mapsto\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$是一个量子信道，其 Kraus 算子为

$$K_0=\sqrt{\lambda}I,\quad K_1=\sqrt{1-\lambda}(|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|),\quad \text{and}\quad K_2=\sqrt{1-\lambda}|1\rangle\langle 2|, \tag{86}$$

其中 $0\le\lambda\le 1$。除非 $\lambda=1$，否则该量子信道 $\mathcal{M}$ 不是幺正的。当 $2/5<\lambda<1$，$\{K_i\}$ 是 $\mathcal{M}$ 的标准克劳斯分解，且 $\langle K_0,K_0\rangle>\langle K_i,K_i\rangle$ 对所有 $i\neq 0$均成立。由定理 1 可得

$$\mathcal{O}(\mathcal{M})=\lambda,\quad \Lambda_{RA}=\frac{1}{3}|I\rangle\langle I|,\quad \text{and}\quad \mathcal{E}(\mathcal{M})=\log_2 3. \tag{87}$$

因此，当 $2/5<\lambda<1$ 时，输入 Λ_{RA} 是唯一的，且是最大纠缠态；然而，量子信道$\mathcal{M}$ 并非幺正的。

设$\mathcal{P}:\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)\mapsto\mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$是一个量子三能级信道，其 Kraus 算子为

$$\begin{aligned}&L_0=\sqrt{\frac{z+2}{4}}\big(|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|\big),\quad L_1=\sqrt{\frac{1-z}{2}}\big(|1\rangle\langle 2|+|2\rangle\langle 1|\big),\\&L_2=\sqrt{\frac{1-z}{2}}\big(|0\rangle\langle 2|+|2\rangle\langle 0|\big),\quad \text{and}\quad L_3=\sqrt{\frac{z}{4}}\big(|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|-2|2\rangle\langle 2|\big),\end{aligned} \tag{88}$$

其中 $0\le z\le 1$。由于每个 Kraus 算子 L_i 都是厄米的，$\mathcal{P}$ 是幺正的（参见（25）下方的讨论）。Kraus 算子 $\{L_i\}$ 是标准的，因此定理 1 立即给出 $\mathcal{O}(\mathcal{M})=(z+2)/6$。当 $z\neq 0$,

$$\Lambda_{AR}=|L_0^\dagger\rangle\langle L_0^\dagger| \tag{89}$$

其中，$|L_0^\dagger\rangle_{RA}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|10\rangle)$不是两个三能级量子系统的最大纠缠态。当 $z=0$, $L_3=0$, $L_0|L_0\rangle=L_1|L_1\rangle=L_2|L_2\rangle$时，因此 $J_{RB}^{\mathcal{M}}$ 的最大特征值具有简并谱。此时，Λ_{RA} 的支撑位于由$\{|L_0^\dagger\rangle_{RA},|L_1^\dagger\rangle_{RA},|L_2^\dagger\rangle_{RA}\}$张成的子空间 S 中。该子空间只包含非乘积向量，也就是说，按照 Parthasarathy 的定义，它是完全纠缠的（参见 [53]中的定义 1.2）。因此，支撑在该子空间上的任何密度算子 Λ_{RA} 都是纠缠的。

6 讨论

在本文中，我们研究了这样一种单次设置：将任意双部混合态的一半通过固定量子信道的一次使用发送 $\mathcal{N}$。此设置的目标是以最大保真度$\mathcal{O}(\mathcal{N})$ 共享一个完全纠缠态。有趣的是，在单次设置中定义的最大保真度 $\mathcal{O}$ 完全刻画了任意量子信道在多次使用（可能与其他量子信道并行使用）时共享高保真纠缠的能力。这一推广源于 $\mathcal{O}$的乘法性，已在第 4.2 节证明。

我们利用半定规划，对此前针对纯态输入求得的最大保真度进行了重新表述 [30,31,34]。第一种重新表述见定理 1 及其证明；与此前采用 Choi-Jamiołkowski 算子不同，它更多地利用量子信道的 Kraus 算子。具体而言，实现 $\mathcal{O}(\mathcal{N})$ 的最优输入（可能不止一个），只是由范数最大的量子信道标准 Kraus 算子的展平形式构成的线性组合，而最优值 $\mathcal{O}(\mathcal{N})$ 本身就是这个最大范数。这两种量子信道表示在形式上等价（简要讨论见第 3 节），但 Kraus 分解有时更便于处理，也能在讨论最大保真度$\mathcal{O}(\mathcal{N})$时，或许在其他情况下，提供不同的见解。在本文所讨论的情形中，标准 Kraus 算子（定义见第 3.1 节）简化了搜索过程，并拓宽了能够实现 Λ_{RA} $\mathcal{O}$ 的量子信道输入类型。

我们拓展最优输入 Λ_{RA} 搜索范围的一种方式，是找出这样的量子信道$\mathcal{N}$，使得 Λ_{RA} 可以选为可分态。这种选择出现在两个值得注意的情形中。首先，当$\mathcal{N}$ 是

极端量子比特信道时，Λ_{RA} 的可分性会导致实现与完全纠缠态之间最大保真度所需的最小纠缠量 E(N) 出现不连续跃变（见图 2 的讨论）。第二种值得注意的情形是，对于含噪幺正量子比特信道，Λ_{RA} 可以选为可分态，而输入通常可以选为完全纠缠态（见包含式 (84) 的讨论）。这些发现促使我们对可能可分的量子信道 N 进行刻画，即 E(N) $= 0$。通常会预期，这类量子信道对于第 4.1 节所讨论类型的单次设置下共享纠缠并无用处。引理 3 给出了这类量子信道的一个例子。该引理可推广至 Choi-Jamiołkowski 算子为 $J_{AB}^{\mathcal{N}}$，且其最大特征值的简并度大于 $(d-1)^2$ 的量子信道。这个最大特征值对应子空间的支撑总是包含一个乘积态（其证明可利用 [53] 中的命题 1.4 构造），因此，Λ_{RA} 可以选为乘积态，且 E(N) $= 0$。另一方面，我们还发现一种量子信道，其 Choi-Jamiołkowski 算子的最大特征值存在简并性，但该信道的最优输入必须是纠缠态。

我们拓展最优输入搜索范围的另一种方式 Λ_{RA} 是考察此前结果的推广。对于量子比特信道，已知当且仅当信道是幺正时，完全纠缠输入才能达到$\mathcal{O}$ 。在高维情形下，我们发现这一结论不再成立。我们构造了一个幺正量子三能级信道，其最优输入必须是非完全纠缠的。我们还构造了一个非幺正量子三能级信道，而要获得最大的重叠度，则必须使用完全纠缠输入。

我们在定理 $\mathcal{O}(\mathcal{N})$ 1 中对 O(N) 作出的第二种改写指出，经过归一化后，它等于该量子信道 Choi-Jamiołkowski 算子的算子范数。这一观察不仅可以简化对 O(N) 的讨论（例如见定理 2的证明），还赋予了 Choi-Jamiołkowski 算子的算子范数一种简单的诠释。

这里讨论的单次量子信道使用情形，可以通过允许对参考系统和信道输出系统执行局部操作，并进行单向或双向经典通信来加以推广，分别记为单向局部操作与经典通信和双向局部操作与经典通信。基于 [32, 54], 中的思路，已有研究表明，对于量子比特信道，允许进行一轮双向局部操作与经典通信时所能达到的最大完全纠缠分数 $\mathcal{O}'$ 等于 $\mathcal{O}$ [34]。在研究最优协议和 $\mathcal{O}'$ 的可乘性的同时，理解高维量子信道中的 $\mathcal{O}'$，或可成为一项有趣的未来研究方向。将我们的工作推广到参考系统也受到噪声影响的情形，同样可能很有意义。此前关于这一情形的讨论 [56, 57] 与纠缠消除量子信道有关 [55]。另一个方向是推广第 5.2 节的结果：我们证明，一类满足 $\mathcal{E}(\mathcal{N}) = 0$ 的量子比特泡利信道也不具有量子容量 $\mathcal{Q}$。研究 $\mathcal{O}$ 和$\mathcal{E}$ 与 $\mathcal{Q}$之间的关系，或许会很有趣。

在分析最大保真度的过程中，我们发现研究极端量子比特信道很有帮助。这些简单的信道可视为最基本的量子比特信道。然而，据我们所知，这些信道的噪声参数尚未得到充分讨论。在第 3.3 节中，我们展示了 pcubed 视角如何帮助识别此类信道的噪声参数，使得随着某个参数单调变化，信道的噪声也能显著地随之增大。我们希望，这种识别方式能让人们更深入地理解这类信道，并使其成为探索量子信息科学思想的一个有意义的试验平台。我们还阐明了一般通道的两个有用性质。首先，在第 3.1 节中，我们证明存在一种标准克劳斯分解，其中的 Kraus 算子彼此正交，且其范数按序排列。其次，在第 3.2 节中，我们展示了一个量子信道的 Choi–Jamiołkowski 算子及其对偶总可以取为彼此的复共轭。

7 致谢

VS 感谢 Felix Leditzky 提供的有益讨论，感谢 Sergey Filippov 提请关注参考文献 [56,57]，感谢 Chloe Kim 和 Dina Abdelhadi 提供的宝贵意见。

参考文献

[1]Jerry M. Chow。量子内联网。*IET Quantum Communication*，2(1):26–27，2021年3月。doi:10.1049/qtc2.12002。

[2] H. J. Kimble. 量子互联网。《自然》, 453(7198):1023–1030, 2008年6月。 doi:10.1038/nature07127。

[3] Stephanie Wehner、David Elkouss 和 Ronald Hanson。量子互联网：未来发展之愿景。《科学》，362(6412)，2018年。doi:10.1126/science.aam9288。[4] Charles H. Bennett、Gilles Brassard、Claude Crépeau、Richard Jozsa、Asher Peres 和 William K. Wootters。通过经典信道与爱因斯坦-波多尔斯基-罗森信道的对偶传输未知量子态。《物理评论快报》，70:1895–1899，1993年3月。doi:10.1103/PhysRevLett.70.1895。[5]Charles H. Bennett、David P. DiVincenzo、John A. Smolin 和 William K. Wootters。混合态纠缠与量子纠错。《物理评论A》，54:3824–3851，1996年11月。doi:10.1103/PhysRevA.54.3824。[6] Mark M. Wilde。从经典到量子香农理论。arXiv:1106.*1445 [*quant-ph*],* 2017。doi:10.1017/9781316809976.001。arXiv: 1106.1445。[7]Seth Lloyd。噪声量子信道的容量。《物理评论A》，55:1613–1622，1997年3月。doi:10.1103/PhysRevA.55.1613。[8]Peter W. Shor。量子纠错，2002年11月。http://www.msri.org/workshops/203/ schedules/1181。[9] N. Cai、A. Winter 和 R. W. Yeung。量子隐私与量子窃听信道。《信息传输问题》，40(4):318–336，2004年10月。doi:10.1007/s11122-005-0002-x。[10] I. Devetak。量子信道的私有经典容量与量子容量。《IEEE信息论汇刊》，51(1):44–55，2005年1月。doi:10.1109/TIT.2004.839515。[11] I. Devetak 和 P. W. Shor。量子信道同时传输经典信息与量子信息的容量。《数学物理通讯》，256(2):287–303，2005年。doi:10.1007/s00220-005-1317-6。[12]Graeme Smith 和 Jon Yard。利用零容量信道进行量子通信。《科学》，321(5897):1812–1815，2008年。doi:10.1126/science.1162242。[13] Toby Cubitt、David Elkouss、William Matthews、Maris Ozols、David Pérez-García 和 Sergii Strelchuk。检测量子容量可能需要无界次信道使用。《自然·通讯》，6:6739，2015年3月。doi:10.1038/ncomms7739。[14] Vikesh Siddhu。熵奇异性引发量子传输。《自然·通讯》，12(1):5750，2021年10月，arXiv: 2003.10367。doi:10.1038/s41467-021-25954-0。[15] Felix Leditzky、Debbie Leung、Vikesh Siddhu、Graeme Smith 和 John A. Smolin。简单信道中量子容量的普遍非可加性。arXiv预印本，2022年，arXiv: 2202.08377。[16]Francesco Buscemi 和 Nilanjana Datta。具有任意相关噪声的信道的量子容量。《IEEE信息论汇刊》，56(3):1447–1460，2010年3月。doi:10.1109/TIT.2009.2039166。[17] Nilanjana Datta 和 Min-Hsiu Hsieh。协议谱系树的顶端：最优速率与资源不等式。《新物理学杂志》，13(9):093042，2011年9月。doi:10.1088/1367-2630/13/9/093042。[18]Nilanjana Datta 和 Min-Hsiu Hsieh。一次性纠缠辅助量子通信与经典通信。《IEEE信息论汇刊》，59(3):1929–1939，2013年3月。doi:10.1109/TIT.2012.2228737。arXiv:1105.3321 [quant-ph]。[19]William Matthews 和 Stephanie Wehner。量子信道的有限块长逆界。《IEEE信息论汇刊》，60(11):7317–7329，2014年11月。doi:10.1109/TIT.2014.2353614。[20] Salman Beigi、Nilanjana Datta 和 Felix Leditzky。通过Petz恢复映射解码量子信息。《数学物理杂志》，57(8):082203，2016年8月。doi:10.1063/1.4961515。

[21] Marco Tomamichel、Mario Berta 和 Joseph M. Renes。《有限资源下的量子编码》。《自然·通讯》，7(1):11419，2016年9月。doi:10.1038/ncomms11419。[22] Corsin Pfister、M. Adriaan Rol、Atul Mantri、Marco Tomamichel 和 Stephanie Wehner。《具有任意相关误差的量子信道容量估计与验证》。《自然·通讯》，9(1):27，2018年1月。doi:10.1038/s41467-017-00961-2。[23] Anurag Anshu、Rahul Jain 和 Naqueeb Ahmad Warsi。《噪声量子网络通信的构建模块》。《IEEE信息论汇刊》，65(2):1287–1306，2019年2月。doi:10.1109/TIT.2018.2851297。[24] Xin Wang、Kun Fang 和 Runyao Duan。《量子通信的半正定规划逆界》。《IEEE信息论汇刊》，65(4):2583–2592，2018年，arXiv: 1709.00200。[25] Farzin Salek、Anurag Anshu、Min-Hsiu Hsieh、Rahul Jain 和 Javier Rodriguez Fonollosa。《经典信息与量子信息同时传输的单次容量界》。《IEEE信息论汇刊》，66(4):2141–2164，2020年4月。doi:10.1109/TIT.2019.2945800。[26]Yoshifumi Nakata、Eyuri Wakakuwa 和 Hayata Yamasaki。《经典信息与量子信息的单次量子纠错》。《物理评论A》，104(1):012408，2021年7月。doi:10.1103/PhysRevA.104.012408。[27] Sumeet Khatri 和 Mark M. Wilde。《量子通信理论原理：现代方法》，2020年。arXiv: 2011.04672。[28] Charles H. Bennett、Gilles Brassard、Sandu Popescu、Benjamin Schumacher、John A. Smolin 和 William K. Wootters。《通过噪声信道纯化噪声纠缠并实现保真隐形传态》。《物理评论快报》，76(5):722–725，1996年1月。doi:10.1103/PhysRevLett.76.722。arXiv:quant-ph/9511027。[29]Michał Horodecki、Paweł Horodecki 和 Ryszard Horodecki。《一般隐形传态信道、单态分数与准蒸馏》。《物理评论A》，60(3):1888–1898，1999年9月。doi:10.1103/PhysRevA.60.1888。[30] Frank Verstraete 和 Henri Verschelde。《关于量子信道》，2003年1月。http://arxiv.org/abs/quant-ph/0202124。arXiv:quant-ph/0202124。[31] Rajarshi Pal 和 Somshubhro Bandyopadhyay。《通过量子比特多能级系统信道共享纠缠：单次最优单态分数和负性可能需要非最大纠缠态》。《物理评论A》，97(3):032322，2018年3月。doi:10.1103/PhysRevA.97.032322。[32] Frank Verstraete 和 Henri Verschelde。《利用双量子比特混合态实现最优隐形传态》。《物理评论快报》，90(9):097901，2003年3月。doi:10.1103/PhysRevLett.90.097901。[33] Somshubhro Bandyopadhyay 和 Anindita Ghosh。《量子信道的最优保真度可能由非最大纠缠态实现》。《物理评论A》，86(2):020304，2012年8月。doi:10.1103/PhysRevA.86.020304。[34] Rajarshi Pal、Somshubhro Bandyopadhyay 和 Sibasish Ghosh。《通过噪声量子比特信道共享纠缠：单次最优单态分数》。《物理评论A》，90(5):052304，2014年11月。doi:10.1103/PhysRevA.90.052304。[35] Lieven Vandenberghe 和 Stephen Boyd。《半正定规划》。《SIAM评论》，38(1):49–95，1996年。doi:10.1137/1038003。[36] A. Jamiołkowski。《保持算子迹和半正定性的线性变换》。《数学物理报告》，3(4):275–278，1972年。doi:10.1016/0034-4877(72)90011-0。[37] Man-Duen Choi。《复矩阵上的完全正线性映射》。《线性代数及其应用》，10(3):285–290，1975年。doi:10.1016/0024-3795(75)90075-0。

[38]A. S. Holevo。《量子系统、信道与信息》。De Gruyter，2012年。doi:doi:10.1515/9783110273403.346。[39]Michael M. Wolf。《量子信道与操作——导览》。讲义，2012年，arXiv: http://www-m5.ma.tum.de/foswiki/pub/M5/Allgemeines/MichaelWolf/QChannelLecture.pdf。[40] A. Fujiwara 和 P. Algoet。《量子信道的仿射参数化》。载于《会议论文集：1998年IEEE国际信息论研讨会（目录号98CH36252）》，第87页，美国马萨诸塞州剑桥，1998年。IEEE。doi:10.1109/ISIT.1998.708673。[41] Chi-Sheng Niu 和 Robert B. Griffiths。《用于经济型量子窃听的双量子比特复制机》。《物理评论A》，60:2764–2776，1999年10月。doi:10.1103/PhysRevA.60.2764。[42] Mary Beth Ruskai、Stanislaw Szarek 和 Elisabeth Werner。《对m2上的完全正保迹映射的分析》。《线性代数及其应用》，347(1–3):159–187，2002年。doi:10.1016/S0024-3795(01)00547-X。[43] Michael M. Wolf 和 David Pérez-García。《小环境下量子信道的量子容量》。《物理评论A》，75:012303，2007年1月。doi:10.1103/PhysRevA.75.012303。[44] Shmuel Friedland 和 Raphael Loewy。《关于量子信道的极端点》，2014年10月。http://arxiv.org/abs/1309.5898。arXiv:1309。5898 [math-ph，physics:quant-ph][45] Vikesh Siddhu 和 Robert B. Griffiths。《利用纯态到纯态乘积等距映射构造可降解量子信道》。《物理评论A》，94:052331，2016年11月。doi:10.1103/PhysRevA.94.052331。[46] J. L. Park。《量子力学中的跃迁概念》。《物理学基础》，1:23–33，1970年3月。doi:10.1007/BF00708652。[47] D. Dieks。《通过EPR装置进行通信》。《物理快报A》，92:271–272，1982年11月。doi:10.1016/0375-9601(82)90084-6。[48] W. K. Wootters 和 W. H. Zurek。《单个量子不可克隆》。《自然》，299:802，1982年10月。doi:10.1038/299802a0。[49] John Watrous。《量子信息论》。剑桥大学出版社，第1版，2018年4月。doi:10.1017/9781316848142。[50] Chi-Sheng Niu 和 Robert B. Griffiths。《一个量子比特的最优复制》。《物理评论A》，58:4377–4393，1998年12月。doi:10.1103/PhysRevA.58.4377。[51]Nicolas J. Cerf。《量子比特的泡利克隆》。《物理评论快报》，84:4497–4500，2000年5月。doi:10.1103/PhysRevLett.84.4497。[52] Toby S. Cubitt、Mary Beth Ruskai 和 Graeme Smith。《可降解量子信道的结构》。《数学物理杂志》，49(10):–，2008年。doi:10.1063/1.2953685。[53] K. R. Parthasarathy。《有限能级量子系统中完全纠缠子空间的最大维数》。《数学科学学报》，114(4):365–374，2004年11月。doi:10.1007/BF02829441。[54] Frank Verstraete 和 Henri Verschelde。《双量子比特混合态的保真度》。《物理评论A》，66(2):022307，2002年8月。doi:10.1103/PhysRevA.66.022307。[55] Lenka Moravčíková 和 Mário Ziman。《纠缠消除信道与纠缠破坏信道》。《物理学杂志A：数学与理论》，43(27):275306，2010年7月。doi:10.1088/1751-8113/43/27/275306。[56] Sergey N. Filippov、Tomáš Rybár 和 Mário Ziman。《局域双量子比特纠缠消除信道》。《物理评论A》，85(1):012303，2012年1月。doi:10.1103/PhysRevA.85.012303。[57]Sergey N. Filippov、Vladimir V. Frizen 和 Daria V. Kolobova。《一般局域噪声下双量子比特态的终极纠缠鲁棒性》。《物理评论A》，97:01222，2018年1月。doi:10.1103/PhysRevA.97.012322。