arXiv:2301.01793v1 [math.CV] 4 Jan 2023

¨线性化复 Monge-Ampère 方程的内部霍尔德估计

YULUN XU

Abstract. 设 w_0 是定义在 $B_1 \subset \mathbb{C}^n$上的有界、 C^3、严格多重次调和函数。那么 w_0 在 $L^\infty(B_1)$ 中有一个邻域。假设我们在此邻域内有一个函数 ϕ，满足 $1-\varepsilon \leq MA(u) \leq 1+\varepsilon$，并且存在一个函数 u，它满足线性化复蒙日-安培方程： $det(\phi_{k\bar{l}})\phi^{i\bar{j}}u_{i\bar{j}} = 0$。那么，对于某个依赖于 n 的 $\alpha > 0$，只要 ϵ 足够小（其大小取决于 n），就有关于 $|u|_{C^\alpha(B_{\frac{1}{2}})}$ 的估计。这在一定程度上将 Caffarelli 对线性化实蒙日-安培方程的估计推广到了复数情形。

1. introduction

蒙日-安培方程是二阶偏微分方程，其主项是实值未知函数的海森矩阵的行列式。海森矩阵必须为正或至少非负，因此这些方程是椭圆或退化椭圆的。根据所考虑的是实海森矩阵还是复海森矩阵，蒙日-安培方程可分为实型或复型。在实数情形下，海森矩阵为 ϕ_{ij}，因此海森矩阵的正定性是凸性条件。在复数情形下，海森矩阵为 $\phi_{i\bar{j}}$，其正定性是多重次调和性条件。

设 ϕ 是实Monge–Ampère方程的一个凸解：

$$detD^2\phi = g. \tag{1.1}$$

定义 1.2. 设 $E \subset \mathbb{C}^n$ 为一个集合，且 $x_0 \in E$。我们有时将 E 记作 $E(x_0)$，以表明它是一个“带基点集合”。设 $c > 0$，定义：

$$cE(x_0) = \{x_0 + c(y - x_0) : y \in E(x_0)\}.$$

也就是说， $cE(x_0)$ 是以 x_0 为中心、因子为 c 的膨胀映射的像。

定义 1.3。设 μ 是 ϕ 的 Monge–Ampère测度，（在 $\phi \in C^2$ 的情况下，对于任意集合 A， $\mu(A) = \int_A det(D^2\phi)$）我们称 μ 满足倍增性质，如果存在常数 $C > 0$ 和 $0 < \alpha < 1$，使得：

$$\mu(S_t(x)) \leq C\mu(\alpha S_t(x)),$$

Date: 2022年12月。

对于任意截面

$$S_t(x) = \{y \in R^n : \phi(y) < l(y) + t\},$$

其中， l 是 ϕ 在 x处的支撑超平面。

注意，若对于某些正常数 λ 和Λ，有 $\lambda < g < \Lambda$ ，则倍增性质成立。

接下来我们考虑以下线性化 Monge–Ampère 方程：

$$L_\phi = det(D^2\phi)\phi^{ij}u_{ij} = f.$$

对 ϕ求一阶导数后，可以看出 $\phi_j = D_j\phi$、 $j = 1$、.....、 n满足线性化 Monge–Ampère 方程：

$$L_\phi(\phi_j) = g_j.$$

由于 ϕ 是凸的，线性化 Monge–Ampère 方程是椭圆的。然而，除非我们能够得到关于 ϕ的二阶导数的估计，否则该方程并非一致椭圆。线性二阶椭圆方程解的标准 Hölder 估计通常要求一致椭圆性。然而，Caffarelli 在关于 g 的一个弱条件下，证明了线性化 Monge–Ampère 方程解的 Hölder 估计；该条件并不意味着线性化 Monge–Ampère 方程一致椭圆，参见[4]:

定理1.4。假设 Monge-Ampère 测度 μ 满足倍增性质。设 u 是方程的一个非负解：

$$L_\phi u = 0$$

在截面 $S_R(x_0)$ 中。那么存在常数 $C_0 > 0$ 和 $\alpha > 0$ ，它们取决于 n、 $|u|_\infty$ 以及倍增性质中的常数，使得：

$$||u||_{C^\alpha(S_{\frac{R}{2}}(x_0))} \leq C_0.$$

线性化实蒙日-安培方程的边界 Harnack 不等式在 [11] 中得出。关于线性化实蒙日-安培方程解的高阶导数，也有相应的估计。当 g 连续时， $C^{1,\alpha}$ 估计在 [8] 中得出，而 $W^{2,p}$ 估计在 [7] 中得出。边界 H¨older 梯度估计在 [12] 中得出。如果 g 不连续，但属于某个 VMO型空间，则内部 $W^{2,p}$ 估计在 [10] 中得出，而整体 $W^{2,p}$ 估计在 [13] 中得出。 $C^{1,\alpha}$ 估计在 [14] 中得出。

实线性化蒙日-安培方程在复几何中有一些应用。它可用于证明托里克曲面上 Calabi 流的内部正则性，见 [5]。它也可应用于托里克曲面上的极值度量，见 [15]。然而，据我所知，实线性化蒙日-安培方程的理论只能应用于托里克情形，即复蒙日-安培方程可以化为实Monge–Ampère方程的情形。此外，复线性化蒙日-安培方程也出现在复几何中，例如

对 CSCK问题 [2]的研究。因此，一个自然的问题是：如何将实线性化蒙日-安培方程的方法直接用于复线性化蒙日-安培方程？感谢 [6], ，我们可以对这个问题给出一个部分答案：

定理 1.5. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界区域，且 $B_{1-\gamma_0} \subset \Omega \subset B_{1+\gamma_0}$。设 $\phi \in C^2(\Omega) \cap PSH(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足 $1-\varepsilon \leq \det \phi_{i\bar{j}} \leq 1+\varepsilon$ 在 Ω 内成立，且 $\phi = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立。假设 γ_0 和 ϵ 是依赖于n的小常数。设 $S_t(z_0)$ 在 [6]中定义。则存在依赖于 n的常数 $\beta > 1$、 μ_0 和 C_0。假设 $u \in C^2(S_t(z_0))$ 是$L_\phi u = 0$ 在 $S_t(z_0)$ 上的一个非负解，且满足 $t \leq \frac{\mu_0^5}{C_0}$和 $z_0 \in B_{\frac{1}{2}}(0)$。那么我们有：

$$\sup_{S_t(z_0)} u \leq \beta \inf_{S_t(z_0)} u.$$

推论 1.6. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界区域，且满足 $B_{1-\gamma_0} \subset \Omega \subset B_{1+\gamma_0}$。设 $\phi \in C^2(\Omega) \cap PSH(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足 $1-\varepsilon \leq \det \phi_{i\bar{j}} \leq 1+\varepsilon$ 在 Ω 内成立，且 $\phi = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立。假设 γ_0 和 ϵ 是依赖于 n的小常数。设 $S_t(z_0)$ 在 [6]中定义。假设 $u \in C^2(\Omega)$ 是满足$L_\phi u = 0$ （在 Ω 上）的解。那么我们有：

$$||u||_{C^\alpha(B_{\frac{1}{2}})} \leq C,$$

这里， $\alpha > 0$ 是依赖于 n 的常数，而 C 是依赖于n和 $|u|_{L^\infty(\Omega)}$ 的常数。

更一般地，我们有：

定理 1.7. 设 w_0 是单位球中的一个光滑函数，且对某个 $C_0 > 1$ 有：

$$\frac{1}{C_0} I \leq (w_0)_{z_i \bar{z}_j} \leq C_0 I, \ |D^3 w_0| \leq C_0 \ in \ B_1.$$

那么，存在一个足够小的 $\delta_0 > 0$ ，其大小仅取决于 C_0 和 n，使得对于所有满足 $|\phi - w_0| \leq \delta_0$ 于 B_1 上、求解 $1-\varepsilon \leq MA(\phi) \leq 1+\varepsilon$ 的 $\phi \in C^2(B_1) \cap PSH(B_1) \cap C(B_1)$，以及任意求解 $u \in C^2(B_1)$ 的解，

$$L_\phi u = det(\phi_{k\bar{l}}) \phi^{i\bar{j}} u_{i\bar{j}} = 0,$$

我们有：

$$||u||_{C^\alpha(B_{\frac{1}{2}})} \leq C.$$

这里， $\alpha > 0$ 是一个取决于 n 的常数。这里， C 是一个取决于 C_0、$|u|_{L^\infty(B_1)}$ 和 n 的常数。 ε 足够小，其大小仅取决于 n。

上文中， $MA(\phi)$ 是按照 Bedford-Taylor 的意义，为连续多重次调和函数定义的复 Monge–Ampère 算子（见 [1]），因此当 $\phi \in C^2$ 时， $MA(\phi) = \det \phi_{i\bar{j}}$。从现在起，我们用 L_ϕ 表示复 Monge–Ampère 线性化方程。

对于流形情形，我们有以下推论：

推论 1.8. 设 (M,ω_0) 是一个紧致 K¨ahler 流形。设 $\phi \in C^2(M)\cap PSH(M,\omega_0)$ 是下列方程的解：

$$(\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi)^n = f\omega_0^n,\ \omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi>0,$$

其中 $|f-1|<\varepsilon$ 和 $\int_M f\omega_0^n = \int_M \omega_0^n$。设 $u\in C^2(M)$ 是该方程的解：

$$\Delta_\phi u = g_\phi^{i\bar{j}}u_{i\bar{j}} = n - tr_{g_\phi}g$$

假设 ϵ 足够小，具体取决于 n、ω_0。那么我们有

$$||u||_{C^\alpha}\le C,$$

这里，$\alpha>0$ 是一个依赖于 n 的常数，而 C 是一个依赖于 n、ω_0 和 $||u||_{L^\infty}$ 的常数。

在第 3 节中，我们将定理 1.7 归约为推论 1.6。接着，我们先证明 Calderón–Zygmund 分解的一个版本（定理 4.1），再由此证明推论 1.6。随后，我们在第 5 节中证明，解的水平集具有一致的临界密度（定理 5.1）。然后，我们在第 6 节中证明，在一个截面上较大的解，在更大的截面上也一致地较大（定理 6.2）。在第 7 节中，我们先证明解的分布函数具有幂次衰减，再证明 Harnack 不等式（定理 7.7）以及解的 H¨older 估计（推论 1.6）。在第 8 节中，我们证明主定理的一些推论。

2. PRELIMINARY

我们希望证明，主定理中的方程在仿射变换下保持不变。设 z 为原坐标。对于任意仿射变换 T 和任意正常数 λ，我们可以通过 $z=\sqrt{\lambda}Tw$ 定义新坐标 w。设 h 为二次多重调和多项式。于是，我们可以将 ϕ 和 u 归一化为：

$$\widetilde{\phi}(w) = \frac{\phi(\sqrt{\lambda}Tw)}{\lambda|det(T)|^{\frac{2}{n}}}+h$$
$$\widetilde{u}(w) = u(\sqrt{\lambda}Tw).$$

经计算可得：

$$L_{\widetilde{\phi}}\widetilde{u}(w) = \lambda|det(T)|^{\frac{2}{n}}L_\phi u(z).$$

因此，如果 $L_\phi u=0$，我们可以得到 $L_{\widetilde{\phi}}\widetilde{u}=0$。回顾一下，我们将复 Monge–Ampère 测度记为 $\mu = MA(\phi)$。将勒贝格测度记为 m。

3. Reduction of Theorem 1.7 to Corollary 1.6

我们首先需要 [6] 中的以下引理：

引理 3.1. 设 w_0 如定理 1.7 所述。记 $a_{x_0,ij} = (w_0)_{i\bar{j}}(x_0)$ 和 $h_{x_0} = Re(\Sigma_i 2(w_0)_{iz_i}) + Re(\Sigma_{i,j}(w_0)_{ij}z_iz_j)$。也就是说，我们假设$w_0 \in C^3(B_1)$，且$\frac{1}{C_0}I \le (w_0)_{i\bar{j}} \le C_0 I$, $|D^3 w_0| \le C_0$ 在 $B_{0.99}$上。设 $\delta \ge 0$和 ϕ_0 是定义在 B_1 上的函数，且在 $B_{0.95}$上满足 $|\phi_0 - w_0| \le \delta$。那么存在仅依赖于 C_0的充分大的$C_1 > 0$ 和充分小的 $\mu_0 > 0$，使得对所有满足 $4C_1\delta \le \mu \le \mu_0$的 μ，都有：

$$(1-C_1\gamma)E_\mu(x_0) \subset \{z \in B_{\frac{1}{2C_0^2}}(x_0) : (\phi_0 - h_{x_0})(z) \le \phi_0(x_0) + \mu\} \subset (1+C_1\gamma)E_\mu(x_0).$$

此外，$(\phi_0 - h_{x_0})(z) = \phi_0(x_0) + \mu$ 在 $\partial\{z \in B_{\frac{1}{2C_0^2}}(x_0)$ 上：$(\phi_0 - h_{x_0})(z) \le \phi_0(x_0) + \mu\}$。

这里 $\gamma = \frac{\delta}{\mu} + \mu^{\frac{1}{2}}$和 $E_\mu(x_0) = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i,j=1}^n a_{x_0,ij}(z - x_0)_i\overline{(z - x_0)}_j \le \mu\}$。

设 ϕ 和 w_0 如定理 1.7 所述。设 $\mu > 0$ 和 $x_0 \in B_{0.8}$。设 T_{μ,x_0} 是一个 $\mathbb{C}$-线性变换，使得 $T_{\mu,x_0}0 = 0$ 和$x_0 + T_{\mu,x_0}(B_{\sqrt{\mu}}(0)) = E_\mu(x_0)$。定义

$$\phi_{\mu,x_0}(\zeta) = \frac{1}{\mu|\det T_{\mu,x_0}|^{\frac{2}{n}}}(\phi - h_{x_0} - \mu)(x_0 + T_{\mu,x_0}(\sqrt{\mu}\zeta)). \tag{3.2}$$

由于 $E_\mu(x_0)$ 是根据 $a_{x_0,ij}$ 定义的，其中$\frac{1}{C_0} \le a_{x_0,ij} = (w_0)_{i\bar{j}}(x_0) \le C_0 I$，很容易看出：

$$||T_{\mu,x_0}|| \le C_2, \ ||T_{\mu,x_0}^{-1}|| \le C_2, \ \frac{1}{C_2} \le |\det T_{\mu,x_0}|^2 \le C_2.$$

这里的 C_2 是一个足够大的常数，仅依赖于 C_0 和 n。定义 $\Omega_\mu = T_{\mu,x_0}^{-1}(\{z \in B_{\frac{1}{2C_0^2}} : (\phi - h_{x_0})(z) \le \phi(x_0) + \mu\} - x_0)$。通过直接计算并利用引理 3.1，可得：

引理 3.3。存在一个足够小的 $\mu_0 > 0$，仅依赖于 C_0，使得对于所有 $4C_1\delta_0 \le \mu \le \mu_0$（其中 $C_1 > 0$ 是引理 3.1 给出的常数），均有

(1) $B_{1-C_1\gamma} \subset \Omega_\mu \subset B_{1+C_1\gamma}$, *with* $\gamma = \frac{\delta_0}{\mu} + \mu^{\frac{1}{2}}$.
(2) $\det(\phi_{\mu,x_0})_{\zeta_i\bar{\zeta}_j} = f(x_0 + T_{\mu,x_0}(\sqrt{\mu}\zeta))$ *in* Ω_μ, $u_{\mu,x_0} = 0$ *on* $\partial\Omega_\mu$.

经过适当选择参数后，重新归一化函数 u_{μ,x_0} 满足定理 1.6 的假设，因此定理 1.7 可直接推出：

推论 3.4。如果假设推论 1.6，则定理 1.7 成立。

证明。我们希望将推论 1.6 应用于每个 $u_\mu,\ x_0$。为此，我们只需要：

$$C_1\gamma = C_1(\frac{\delta_0}{\mu} + \mu^{\frac{1}{2}}) \le \gamma_0(n),\ \ |f(x_0 + T_{\mu,x_0}(\sqrt{\mu}\zeta)) - 1| \le \varepsilon(n).$$

这里， $\gamma_0(n)$ 和 $\varepsilon(n)$ 是定理 1.6 给出的常数。

因此，我们只需取 μ，使得 $2C_1\mu^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}\gamma_0(n)$，并且 $\mu \le \mu_0$（由引理 3.3 给出）。有了这个 μ，我们可以取 δ_0，使得 $C_1\frac{\delta_0}{\mu} \le \frac{1}{2}\gamma_0(n)$，并且 $4C_1\delta_0 \le \mu$。从现在起，我们固定这一选择。

由于我们假设推论 1.6 成立，因此可以得出：

$$||u_{\mu,x_0}||_{C^\alpha}(B_{\frac{1}{2}}) \le C,$$

其中， C 是仅依赖于 n 和 $|u|_{L^\infty(B_1)}$ 的常数。然后利用 (3.2)，我们可以回到 u，并得到

$$||u||_{C^\alpha(E_{\frac{1}{2}\mu}(x_0))} \le C',$$

对于任意 $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}(0)$，其中 C' 是仅依赖于 n、C_0（在定理 1.7 的陈述中定义）和 $|u|_{L^\infty(B_1)}$ 的常数。由于存在一个依赖于 C_0 的常数 C_1，使得

$$B_{\frac{\sqrt{\mu}}{C}} \subset E_{\frac{1}{2}\mu}(x_0) \subset B_{C\sqrt{\mu}}(x_0).$$

我们可以使用一个初等覆盖论证得到：

$$||u||_{C^\alpha(B_{\frac{1}{2}}(0))} \le C''.$$

C'' 是一个仅依赖于 n、C_0 和 $|u|_{L^\infty(B_1)}$ 的常数。 □

4. Calderon-Zygmund decomposition

从现在起，我们聚焦于推论 1.6。本节要证明以下定理，它是利用 [6] 中定义的截面 $S_t(x)$ 所作的 Calderón–Zygmund 分解的一个版本。

定理 4.1。设 $0 < \sigma < 1$ 和 $0 < \delta < 1$ 已给定。设 μ_0（这是我们在 $W^{2,p}$ 论文中用于定义截面的常数）和 ϵ（这是定理 1.6 中的同一个常数）足够小，且仅依赖于 σ、δ 和 n。设 A 是 $B_{\frac{1}{2}}(0)$ 的一个有界子集。假设对几乎处处的 $x \in A$,

(1) $\lim_{t\to 0}\frac{\mu(S_t(x)\cap A)}{\mu(S_t(x))} = 1.$

(2) $\mu(S_t(x)\cap A) \le \delta\mu(S_t(x))$ *for any* $\mu_0^4 < t \le \mu_0^3$.

那么，对于这样的 x，我们可以定义 $t_x = \sup\{t \le \mu_0^4 :\ \mu(S_t(x)\cap A) \ge \delta\mu(S_t(x))\}$。

于是存在一个可数的截面族 $\{S_k = S_{t_k}(x_k)\}$，其中 $x_k \in A$ 且 $t_k \le \mu_0^3$，并具有以下性质：

(a) $(1 - C\sigma^{\frac{1}{2}})\delta \le \frac{\mu(S_k\cap A)}{\mu(S_k)} \le \delta$。(b) 对几乎处处的 $x \in A$, $x \in \cup_k S_k$。(c) $\mu(A) \le \delta_0\mu(\cup_1^\infty S_k)$，其中 $\delta_0 = \delta_0(\delta) < 1$。

注 4.2. 正如从证明中所见， t_k 可能不等于 t_{x_k}。

首先，我们需要用到 [6] 论文中的以下命题。

命题 4.3。设 Ω 和 u 如推论 1.6 中所述，其中 γ_0 足够小，且其大小仅取决于 n。设 $0 < \sigma < 1$ 已给定。则存在$\varepsilon > 0$，其仅取决于 σ 和 n，使得若 $|f-1| \le \varepsilon$，则有以下结论：

（1）存在 $\mu_0 > 0$，其足够小且仅取决于 n 和 σ，使得对于所有 $x_0 \in B_{0,\ 8}$ 以及所有 $\mu \le \mu_0$，存在一个二次多重调和多项式 $h_{\mu,\ x_0}(z)$，满足 $h_{\mu,\ x_0}(x_0) = 0$，使得

$(1-0.1\sigma)E_\mu(x_0) \subset S_\mu(x_0) := \{z \in \Omega : (u - h_{\mu,\ x_0})(z) \le u(x_0) + \mu\} \subset (1+0.1\sigma)E_\mu(x_0)$。

在上述内容中，$E_\mu(x_0) = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i,j=1}^n a_{\mu,x_0,ij}(z-x_0)_i\overline{(z-x_0)}_j \le \mu\}$，其中 $a_{\mu,x_0,ij}$ 为正厄米矩阵，且 $\det a_{\mu,x_0,ij} = 1$。

(2) 存在一个函数 $c(\sigma) : \sigma \in (0,1) \to \mathbb{R}_{>0}$，使得对于任意 $x_0 \in B_{0.8}$ 以及任意 $0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \frac{\mu_0}{1+c(\sigma)}$，都有 $S_{\mu_1}(x_0) \subset S_{(1+c(\sigma))\mu_2}(x_0)$。此外，$0 < c(\sigma) \le C_{2,n}\sigma^{\frac{1}{2}}$，其中某个维数常数为 $C_{2,n}$。

(3) 存在一个维数常数 $C_{3,n} > 0$，使得对于所有 $0 < \mu \le \mu_0$以及任意 $x_0 \in B_{0.8}$，都存在一个 $\mathbb{C}$-线性变换 T_{μ,x_0}，使得 $|\det T_{\mu,x_0}| = 1$, $T_{\mu,x_0}0 = 0$, $x_0 + T_{\mu,x_0}(B_{\sqrt{\mu}}(0)) = E_\mu(x_0)$。此外，对于任意 $0 < \mu_1 < \mu_2 \le \mu_0$ 以及任意 $x_0 \in B_{0.8}$：

$$||T_{\mu_1,x_0} \circ T^{-1}_{\mu_2,x_0}|| \le C_{3,n}(\frac{\mu_2}{\mu_1})^{\frac{C_{3,n}\sigma^{\frac{1}{2}}}{-\log(0.1\sigma)}}, \quad ||T_{\mu_2,x_0} \circ T^{-1}_{\mu_1,x_0}|| \le C_{3,n}(\frac{\mu_2}{\mu_1})^{\frac{C_{3,n}\sigma^{\frac{1}{2}}}{-\log(0.1\sigma)}}.$$

以下结论在该 [6] 论文的“归纳假设”部分得到了证明。

引理 4.4. 对任意 $\mu_0^{k+1} < t \le \mu_0^k$，我们可以写成

$$T_{\mu,x_0} = T_{x_0,k} = \widetilde{T}_{x_0,1} \circ \widetilde{T}_{x_0,2} \circ ... \circ \widetilde{T}_{x_0,k},$$

其中 $T_{\mu,\ x_0}$ 在命题 4.3 的陈述中使用。我们有

$$|\widetilde{T}_{x_0,1}| \le C, \ |\widetilde{T}^{-1}_{x_0,1}| \le C$$

$$|\widetilde{T}_{x_0,k} - I| \le C\sigma^{\frac{1}{2}} \ for \ k \ge 2.$$

我们需要以下关于截面的包含性质，该性质在该 [6] 论文中得到了证明。

命题 4.5. 设 $x_1, x_2 \in B_{0.8}$, $0 < \mu_1, \mu_2 \le \mu_0$ 和 $\mu_1 \le 4\mu_2$。令 $\sigma > 0$ 足够小（仅取决于维数）。再设 $S_{\mu_1}(x_1) \cap S_{\mu_2}(x_2) \ne \emptyset$，则 $S_{\mu_1}(x_1) \subset 10S_{\mu_2}(x_2)$。

包含性质还有另一种形式：

引理 4.6. 设 σ 足够小且 ϵ 足够小。存在一个常数 $\theta > 0$，使得若 $S_t(z)$ 是满足 $y \in S_t(z)$ 的截面，则对于 $t \le \frac{\mu_0}{\theta}$，有 $S_t(z) \subset S_{\theta t}(y)$。

证明. 利用命题 4.3，我们可以得到

$$\begin{aligned}(1-\sigma)\sqrt{t}E_1 \subset S_t(y) \subset (1+\sigma)\sqrt{t}E_1\\ (1-\sigma)\sqrt{t_2}E_2 \subset S_{t_2}(y) \subset (1+\sigma)\sqrt{t_2}E_2,\end{aligned} \tag{4.7}$$

其中， E_1 和 E_2 是以 z为中心的椭球。设 k_1 和 k_2 为满足以下条件的整数:

$$\mu_0^{k_1+1} < t \le \mu_0^{k_1},\ \mu_0^{k_2+1} < t_2 \le \mu_0^{k_2}.$$

如果 t 和 t_2 属于同一代或相邻代，即 $k_1 - 1 \le k_2 \le k_1 + 1$。因此，根据引理 4.4，我们有:

$$|T_{y,k_2} \circ T_{y,k_1}^{-1} - I| \le C\sigma^{\frac{1}{2}},\ \ |T_{y,k_1} \circ T_{y,k_2}^{-1} - I| \le C\sigma^{\frac{1}{2}}.$$

于是我们可以定义$T = T_{y,k_1} \circ T_y^{-1}{}_{,k_2}$，使得 $|T - I| \le C\sigma^{\frac{1}{2}}$且 $TE_2 = E_1$。因此我们有:

$$10S_t(y) \subset 10\sqrt{t}(1+\sigma)E_1 \subset 10\sqrt{t}(1+\sigma)(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})E_2$$

$$= (1-\sigma)\sqrt{100(1+\sigma)^2(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})^2\frac{1}{(1-\sigma)^2}tE_2} \subset S_{100(1+\sigma)^2(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})^2\frac{1}{(1-\sigma)^2}t}(y)$$

接着，我们利用命题 4.5 得到:

$$S_t(z) \subset 10S_t(y).$$

因此我们有:

$$S_t(z) \subset S_{100(1+\sigma)^2(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})^2\frac{1}{(1-\sigma)^2}t}(y).$$

我们可以假设 $\sigma \le \frac{1}{2}$，并取足够小的 μ_0，使得 t 和 $100(1+\sigma)^2(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})^2\ {}^1{}_{(1-\sigma)^2}t$ 属于同一代或相邻代。总之，我们可以取 $\theta = 100(1+\sigma)^2(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})^2\ {}^1{}_{(1-\sigma)^2}$。于是引理的证明完成。□

我们还需要以下引理，它估计了原坐标下截面的形状。特别地，我们可以得到截面直径的一个估计。

引理 4.8. 假设 μ_0 足够小且 ϵ 足够小。则有:

$$B_{\frac{1}{C}\mu^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(x_0) \subset S_\mu(x_0) \subset B_{C\mu^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(x_0),$$

对任意 $\mu \le \mu_0^2$。

证明。我们可以假设 $\mu \le \mu_0^2$。对任意 μ，存在一个整数 k 使得

$$\mu_0^{k+1} < \mu \le \mu_0^k.$$

与命题 4.3 和引理 4.4 的证明中一样，我们有

$$\begin{aligned}x_0 + (1-\sigma)\widetilde{T}_{x_0,1} \circ \widetilde{T}_{x_0,2} \circ ... \circ \widetilde{T}_{x_0,k}(B_{\sqrt{\mu}}(0)) \subset S_\mu(x_0)\\ \subset x_0 + (1+\sigma)\widetilde{T}_{x_0,1} \circ \widetilde{T}_{x_0,2} \circ ... \circ \widetilde{T}_{x_0,k}(B_{\sqrt{\mu}}(0)).\end{aligned} \tag{4.9}$$

利用引理 4.4，我们有

$$|\widetilde{T}_{x_0,1}| \le C,\ |\widetilde{T}^{-1}_{x_0,1}| \le C$$
$$|\widetilde{T}_{x_0,k} - I| \le C\sigma^{\frac{1}{2}} \text{ for } k \ge 2.$$

因此，公式 4.9 变为:

$$B_{\frac{1}{C}\mu^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(x_0) \subset \frac{1}{C}(1-\sigma)(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})^{k-2}B_{\sqrt{\mu}}(x_0) \subset S_\mu(x_0)$$
$$\subset C(1+\sigma)(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})^{k-2}B_{\sqrt{\mu}}(x_0) \subset B_{C\mu^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(x_0).$$

至此，引理的证明完成。 □

下面的引理刻画了截面。该引理可直接由截面的构造得出。

引理 4.10. 对于任意 $x_0 \in B_{0.8}$ 和 $\mu \le \mu_0$，存在一个二次多重调和多项式 $h_{x_0,\,\mu}$ 使得 $h_{x_0,\,\mu}(x_0) = 0$ 并且

$$S_\mu(x_0) = \{x : \phi(x) \le h_{x_0,\mu}(x) + \phi(x_0) + \mu\}.$$

以下是 [6] 中的关键引理。它基本上意味着，对于两个相差一个多重次调和函数的函数，它们高度相同的两个截面彼此接近。

引理 4.11. 设 ϕ 是定义在开集 $U \subset \mathbb{C}^n$ 上的函数，且 $h(z)$ 是定义在 U 上的多重调和函数。设 $0 < \mu < 1$ 和 $\sigma > 0$ 满足:

$$(1-\gamma)\widetilde{E}_{\sqrt{\sigma}} \subset \{\phi \le \sigma\} \subset (1+\gamma)\widetilde{E}_{\sqrt{\sigma}} \subset U,$$
$$(1-\gamma)E_{\sqrt{\sigma}} \subset \{\phi \le h + \sigma\} \subset (1+\gamma)E_{\sqrt{\sigma}} \subset U.$$

~在上述条件中，$E_{\sqrt{\sigma}} = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i,\,j=1}^n \widetilde{a}_{i\bar{j}} z_i \bar{z}_j \le \sigma\}$ 和 $E_{\sqrt{\sigma}} = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i,\,j=1}^n a_{i\bar{j}} z_i \bar{z}_j \le \sigma\}$。那么存在一个通用的 $c_1(\gamma)$（仅取决于维数，且可以显式计算）以及 $c_1(\gamma)$，使得当 $\gamma \to 0$ 时，$\to 0$，

$$(1 - c_1(\gamma))\widetilde{E}_{\sqrt{\sigma}} \subset E_{\sqrt{\sigma}} \subset (1 + c_1(\gamma))\widetilde{E}_{\sqrt{\sigma}}$$

现在我们要证明以下引理，它说明如果两个截面有非空交集，那么它们彼此可比较:

引理 4.12. 设 $S_{t_0}(x_0)$ 和 $S_t(x)$ 是两个满足 $t \le t_0 \le \frac{\mu_0}{2}$and 的截面

$$S_{t_0}(x_0) \cap S_t(x) \ne \emptyset.$$

设 $T_{t_0,\,x_0}$ 为 $W^{2,\,p}$ 论文中定义的仿射变换，它将 $S_{t_0}(x_0)$ 归一化。则有

$$\frac{1}{C}B_{(\frac{t}{t_0})^{\frac{1}{2}+\epsilon_1}}(\frac{1}{\sqrt{t_0}}T^{-1}_{t_0,x_0}x) \subset \frac{1}{\sqrt{t_0}}T^{-1}_{t_0,x_0}S_t(x) \subset CB_{(\frac{t}{t_0})^{\frac{1}{2}-\epsilon_1}}(\frac{1}{\sqrt{t_0}}T^{-1}_{t_0,x_0}x).$$

ϵ_1 是一个正常数，只要令 μ_0 足够小，就可以使它任意小。常数 C 取决于 n。

证明。我们可以利用命题 4.3 的第 (3) 部分得到

$$S_{t_0}(x_0) \subset S_{2t_0}(x_0),\ \ S_t(x) \subset S_{2t_0}(x).$$

由于 $S_{t_0}(x_0) \cap S_t(x) \neq \emptyset$，我们有 $S_{2t_0}(x_0) \cap S_{2t_0}(x) \neq \emptyset$。根据命题 4.5，我们有：

$$S_{2t_0}(x_0) \subset 10S_{2t_0}(x),\ \ S_{2t_0}(x) \subset 10S_{2t_0}(x_0).$$

因此我们有：

$$\begin{aligned}
&(1-\sigma)(x_0 + T_{2t_0,x_0}B_{\sqrt{2t_0}}(0)) \subset (1-\sigma)E_{2t_0}(x_0) \subset S_{2t_0}(x_0)\\
&\subset 10S_{2t_0}(x) \subset 10(1+\sigma)E_{2t_0}(x) = 10(2+\sigma)(x + T_{2t_0,x}B_{\sqrt{2t_0}}(0)).\\
&(1-\sigma)(x + T_{2t_0,x}B_{\sqrt{2t_0}}(0)) \subset (1-\sigma)E_{2t_0}(x) \subset S_{2t_0}(x)\\
&\subset 10S_{2t_0}(x_0) \subset 10(1+\sigma)E_{2t_0}(x_0) = 10(2+\sigma)(x_0 + T_{2t_0,x_0}B_{\sqrt{2t_0}}(0)).
\end{aligned}$$

因此，$T_{2t_0,\ x_0}$ 与 $T_{2t_0,\ x}$ 彼此有界。即

$$|T^{-1}_{2t_0,x_0} \circ T_{2t_0,x}| \leq C, |T^{-1}_{2t_0,x} \circ T_{2t_0,x_0}| \leq C. \tag{4.13}$$

根据引理 4.4，$T_{2t_0,\ x}$ 与 $T_{t_0,\ x}$ 相差一个与 Id 十分接近的线性变换。因此我们有 $T_{2t_0,\ x}$ 与 $T_{t_0,\ x}$ 彼此有界。同理，$T_{2t_0,\ x_0}$ 与 $T_{t_0,\ x_0}$ 彼此有界。总之，$T_{t_0,\ x}$ 与 $T_{t_0,\ x_0}$ 彼此有界。我们考虑以下两种情况：

(1) $t \leq 2t_0{\mu_0}^2$。在一个坐标 w 中，$S_{2t_0}(x)$ 接近一个球，我们可以~像定义 $S_t(x)$ 那样定义 $S_t(x)$。在同一坐标中，利用引理 4.8，我们可以得到：

$$B_{\frac{1}{C}(\frac{t}{2t_0})^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(0) \subset \widetilde{S}_t(x) \subset B_{C(\frac{t}{2t_0})^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(0).$$

这里我们使用 $\frac{t}{2t_0}$，因为在坐标 w 中，$S_{2t_0}(x)$ 接近单位球。因此，截面 $\widetilde{S}_t(x)$ 的高度相应缩放为 $\frac{t}{2t_0}$。根据~引理 4.11，$S_t(x)$ 与 $S_t(x)$ 可比，即

$$\frac{1}{C}S_t(x) \subset \widetilde{S}_t(x) \subset CS_t(x).$$

因此我们有

$$B_{\frac{1}{C}(\frac{t}{2t_0})^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(0) \subset S_t(x) \subset B_{C(\frac{t}{2t_0})^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(0).$$

回到原坐标，我们有：

$$B_{\frac{1}{C}(\frac{t}{2t_0})^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(0) \subset \frac{1}{\sqrt{2t_0}}T^{-1}_{2t_0,x}(S_t(x)-x) \subset B_{C(\frac{t}{2t_0})^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(0).$$

我们已经证明，$T_{2t_0,\ x}$ 和 $T_{2t_0,\ x_0}$ 彼此有界。

$$B_{\frac{1}{C}(\frac{t}{2t_0})^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(0) \subset \frac{1}{\sqrt{2t_0}}T^{-1}_{2t_0,x_0}(S_t(x)-x) \subset B_{C(\frac{t}{2t_0})^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(0).$$

因此，我们可以取 $\epsilon_1 = \max\ \{-log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})\ log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})\}$，得到：

$$B_{\frac{1}{C}(\frac{t}{2t_0})^{\frac{1}{2}+\epsilon_1}}(0) \subset \frac{1}{\sqrt{2t_0}}T^{-1}_{2t_0,x_0}(S_t(x)-x) \subset B_{C(\frac{t}{2t_0})^{\frac{1}{2}-\epsilon_1}}(0).$$

回顾一下，$T_{2t_0,\ x_0}$ 和 $T_{t_0,\ x_0}$ 彼此有界。因此我们有

$$\frac{1}{C}B_{(\frac{t}{t_0})^{\frac{1}{2}+\epsilon_1}}(\frac{1}{\sqrt{t_0}}T^{-1}_{t_0,x_0}x) \subset \frac{1}{\sqrt{t_0}}T^{-1}_{t_0,x_0}S_t(x) \subset CB_{(\frac{t}{t_0})^{\frac{1}{2}-\epsilon_1}}(\frac{1}{\sqrt{t_0}}T^{-1}_{t_0,x_0}x).$$

(2) $t_0\mu_0^2 < t \le t_0$。由引理 4.3 可得：

$$(1-\gamma)B_{\sqrt{t}}(0) \subset T^{-1}_{t,x}(S_t(x)-x) \subset (1+\gamma)B_{\sqrt{t}}(0).$$

由引理 4.4 可得：$T_{2t_0,\ x_0}$ 和 $T_{t,\ x_0}$ 彼此有界。$T_{2t_0,\ x}$ 和 $T_{t,\ x}$ 彼此有界。结合这些事实和不等式 4.13，我们可得 $T_{t,\ x}$ 和 $T_{t_0,\ x_0}$ 彼此有界。因此我们有：

$$B_{\frac{1}{C}\sqrt{\frac{t}{t_0}}}(\frac{1}{\sqrt{t_0}}T^{-1}_{t_0,x_0}x) \subset \frac{1}{\sqrt{t_0}}T^{-1}_{t_0,x_0}S_t(x) \subset B_{C\sqrt{\frac{t}{t_0}}}(\frac{1}{\sqrt{t_0}}T^{-1}_{t_0,x_0}x).$$

□

考虑区域 Ω 上的以下狄利克雷问题。

$$\begin{aligned} &\det((v_0)_{i\bar{j}}) = 1 \text{ in } \Omega \\ &v_0 = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.14}$$

首先，我们需要 v_0 在内部光滑。这由 Ω 接近 B_1 这一事实保证。更确切地说，我们在 [6] 中证明了：

引理 4.15. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界区域，且 $B_{1-\gamma}(0) \subset \Omega \subset B_{1+\gamma}(0)$，其中 $0<\gamma<1$。设 v_0 是 (4.14) 中狄利克雷问题的解，则

$$|z|^2 - 1 - 3\gamma \le v_0 \le |z|^2 - 1 + 3\gamma.$$

此外，存在足够小的 $\gamma_n > 0$，使得若 $\gamma \le \gamma_n$，则有 $v_0 \in C^4(\bar{B}_{0.9})$，其中 $||v_0 - (|z|^2-1)||_{C^4,\ B_{0.9}} \le C$。这里 C 仅取决于 n。

以下引理也在 $W^{2,\ p}$ 一文中得到了证明：

引理 4.16。假设 $\det u_{i\bar{j}} = f$ in Ω 且 $u|_{\partial\Omega} = 0$。令 v_0 为狄利克雷问题 (4.14) 的解。假设 $1-\varepsilon \le f \le 1+\varepsilon$。那么我们有 $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}}v_0 \le u \le (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}v_0$。特别地

$$|v_0 - u| \le 4\varepsilon \ in\ \Omega.$$

于是我们可以证明以下引理:

引理 4.17。存在一个常数 $\delta > 0$。对于任意 $\bar{\epsilon} \in (0, e^{-1})$，我们可以选择 μ_0 和 ϵ，使其足够小，并且取决于 $\bar{\epsilon}$ 和 n；对于给定的截面$S_t(x)$，满足 $t \leq \mu_0^2$ 和 $y \notin S_t(x)$，我们有

$$B_{\epsilon_2^\delta}(T(y)) \cap T(S_{(1-\epsilon_2)t}(x)) = \emptyset.$$

对于任意 $\bar{\epsilon} < \epsilon_2 < e^{-1}$。其中 $T = \frac{1}{\sqrt{t}} T_{t\,x}^{-1}$，是一个仿射变换，使得

$$B_{(1-\sigma)}(0) \subset \frac{1}{\sqrt{t}} T_{t,x}^{-1}(S_t(x) - x) \subset B_{(1+\sigma)}(0).$$

证明。我们分两种情况证明该引理。

(1) $(1-\epsilon_2)t$和 t属于同一代，即存在 k，使得$\mu_0^{k+1} < (1-\epsilon_2)t \leq t \leq \mu_0^k$。定义新坐标 $w = \frac{1}{\sqrt{t}} T_{t\,x}^{-1}(z - x)$。在该坐标下，$S_t(x)$如引理 4.3 中所述，与单位球 $\sigma-$ 接近，并且根据引理 4.10，存在一个多重次调和函数 h，使得 $\phi - h = 0$在 $\partial S_t(x)$ 上成立。根据第 2 节的论证，我们可以假设$\phi = 0$ 在 $\partial S_t(x)$ 上成立，并在证明的其余部分使用坐标 w，因为线性化 Monge–Ampère 方程在归一化下具有不变性。利用引理 4.3、引理 4.15 和引理 4.16，我们可以得到:

$$|w|^2 - 1 - 3\epsilon - C\sigma \leq \phi \leq |w|^2 - 1 + 3\epsilon + C\sigma.$$

归一化后，$\phi(0) = -1$。这是因为截面的高度由 ϕ 在 0 处的值决定，并且归一化后高度被缩放为 1（详情可参见 $W^{2,p}$ 论文中截面的构造）。因此，对于任意 $w \in \partial S_{(1-\epsilon_2)t}(x)$，我们有 $\phi = -\epsilon_2$，且:

$$|w|^2 - 1 - 3\epsilon - C\sigma \leq -\epsilon_2 \leq |w|^2 - 1 + 3\epsilon + C\sigma$$

这意味着:

$$1 - 3\epsilon - C\sigma - \epsilon_2 \leq |w|^2 \leq 1 + 3\epsilon + C\sigma - \epsilon_2.$$

由于 $y \notin S_t(x)$ 且 $(1-\sigma)B_1(0) \subset T(S_t(x) - x)$，我们有:

$$T(y - x) \notin (1-\sigma)B_1(0).$$

这意味着

$$B_{\epsilon_2^\delta}(T(y-x)) \subset B^c_{1-\sigma-\epsilon_2^\delta}(0),$$

这里 $B^c_{1-\sigma-\epsilon_2^\delta}(0) = \mathbb{C}^n \setminus B_{1-\sigma-\epsilon_2^\delta}(0)$ 为了确保

$$B_{\epsilon_2^\delta}(T(y-x)) \cap B_{\sqrt{1+3\epsilon+C\sigma-\epsilon_2}}(0) = \emptyset,$$

只需满足

$$\sqrt{1 + 3\epsilon + C\sigma - \epsilon_2} \leq 1 - \sigma - \epsilon_2^\delta.$$

这等价于

$$3\epsilon + (C+2)\sigma \leq \epsilon_2 + \epsilon_2^{2\delta} - 2\epsilon_2^\delta - 2\sigma\epsilon_2^\delta.$$

若令 δ 足够大（这与 $\bar{\epsilon}$ 无关），则 $\epsilon_2+\epsilon_2^{2\delta}-2\epsilon_2^{\delta}-2\sigma\epsilon_2^{\delta}$ 在满足 $\bar{\epsilon}\le\epsilon_2\le\frac{1}{2}$ 的条件下的最小值为 $\bar{\epsilon}+\bar{\epsilon}^{2\delta}-2\bar{\epsilon}^{\delta}-2\sigma\bar{\epsilon}^{\delta}$。因此我们只需要求

$$3\epsilon+(C+2)\sigma\le\bar{\epsilon}+\bar{\epsilon}^{2\delta}-2\bar{\epsilon}^{\delta}-2\sigma\bar{\epsilon}^{\delta}.$$

注意到 $\bar{\epsilon}\le e^{-1}$。当 δ 很大时，我们有：

$$\bar{\epsilon}+\bar{\epsilon}^{2\delta}-2\bar{\epsilon}^{\delta}-2\sigma\bar{\epsilon}^{\delta}\ge\frac{1}{2}\bar{\epsilon}.$$

因此我们只需满足：

$$3\epsilon+(C+2)\sigma\le\frac{1}{2}\bar{\epsilon}.$$

(2) $(1-\epsilon_2)t$ 与 t 不在同一层，即存在整数 k使得：

$$\mu_0^{k+1}<(1-\epsilon_2)t\le\mu_0^{k+1}<t\le\mu_0^k.$$

回想一下，对于 ${\mu_0}^+<t\le\mu_0^k$，截面 $S_t(x)$可以写成

$$S_t(x)=\{z:\phi-h(z)\le\phi(x)+t\},$$

~根据引理 4.10，我们可以定义 $S_t(x)$：

$$\widetilde{S}_t(x)=\{z:\phi-h(z)\le\phi(x)+t\},\tag{4.18}$$

对于 $t\le\mu_0^{k+1}$。注意，当我们为 $t\le\mu_0^{k+1}$ 定义 $S_t(x)$时，会从 ϕ 中减去一个不同于 h 的多重调和函数，然后取次水平集。因此，对于 $t\le\mu_0^{k+1}$，$\widetilde{S}_t(x)$ 与 $S_t(x)$ 不同。与命题 4.3 类似，我们可以证明

$$S_{(1-\epsilon_2)t}(x)\subset\widetilde{S}_{(1+c(\sigma))(1-\epsilon_2)t}(x).$$

当我们令 μ_0 和 ϵ 都足够小时，σ 可以任意小。于是$c(\sigma)$可以任意小。与情形 **(1)** 中的定义一样，我们使用坐标 w，使 $S_t(x)$归一化后接近单位球。因此，根据方程 4.18，对于任意 $w\in\partial S_{(1+c(\sigma))(1-\epsilon_2)t}(x)$，我们有$\phi=(1+c(\sigma))(1-\epsilon_2)-1=c(\sigma)-\epsilon_2-\epsilon_2c(\sigma)$。由于在这个坐标中

$$|w|^2-1-3\epsilon-C\sigma\le\phi\le|w|^2-1+3\epsilon+C\sigma,$$

我们得到：

$$|w|^2-1-3\epsilon-C\sigma\le c(\sigma)-\epsilon_2-\epsilon_1c(\sigma)\le|w|^2-1+3\epsilon+C\sigma.$$

这等价于：

$$1-3\epsilon-C\sigma+c(\sigma)-\epsilon_2-\epsilon_2c(\sigma)\le|w|^2\le1+3\epsilon+C\sigma+c(\sigma)-\epsilon_2-\epsilon_2c(\sigma).$$

由于 $y\notin S_t(x)$，且

$$(1-\sigma)B_1(0)\subset T(S_t(x)-x).$$

因此我们得到

$$T(y-x)\notin(1-\sigma)B_1(0).$$

因此我们有

$$B_{\epsilon_2^{\delta}}(T(y-x))\subset B^c_{1-\sigma-\epsilon_2^{\delta}}(0).$$

因此，如果我们想要

$$B_{\epsilon_2^\delta}(T(y-x)) \cap B_{\sqrt{1+3\epsilon+C\sigma-\epsilon_2+c(\sigma)-\epsilon_2 c(\sigma)}}(0) = \emptyset,$$

我们只需满足

$$B^c_{1-\sigma-\epsilon_2^\delta}(0) \cap B_{\sqrt{1+3\epsilon+C\sigma-\epsilon_2+c(\sigma)-\epsilon_2 c(\sigma)}}(0) = \emptyset.$$

这可由.....推出

$$\sqrt{1+3\epsilon+C\sigma-\epsilon_2+c(\sigma)-\epsilon_2 c(\sigma)} \leq 1-\sigma-\epsilon_2^\delta.$$

这等价于.....

$$3\epsilon + C\sigma + c(\sigma) + 2\sigma - \sigma^2 \leq \epsilon_2 + \epsilon_2 c(\sigma) + \epsilon_2^{2\delta} + 2\epsilon_2^\delta + 2\sigma\epsilon_2^\delta.$$

设 $c(\sigma)$ 足够小，并设 δ 与情形 (1) 中相同。我们可以看到，$f(t) = t + tc(\sigma) + t^{2\delta} + 2t^\delta + 2\sigma t^\delta$ 在 $t = \bar{\epsilon}$ 处取得最小值。因此，我们只需满足：

$$3\epsilon + C\sigma + c(\sigma) + 2\sigma - \sigma^2 \leq \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}c(\sigma) + \bar{\epsilon}^{2\delta} + 2\bar{\epsilon}^\delta + 2\sigma\bar{\epsilon}^\delta.$$

我们可以假设 δ 足够大，且 $\bar{\epsilon} \in (0, 1/2)$，使得 $\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}c(\sigma) + \bar{\epsilon}^{2\delta} + 2\bar{\epsilon}^\delta + 2\sigma\bar{\epsilon}^\delta \geq \frac{1}{2}\bar{\epsilon}$。因此我们只需满足

$$3\epsilon + C\sigma + c(\sigma) + 2\sigma - \sigma^2 \leq \frac{1}{2}\bar{\epsilon}.$$

当令 μ_0 足够小且 ϵ 足够小时，这一结论成立。 □

接下来，我们可以证明下面这个引理，它与 [3] 中的引理 1 类似，但略有修改。

引理 4.19. 对任意 $\bar{\epsilon} < e^{-1}$，我们可以令 μ_0 足够小，并令 ϵ 足够小。~对于任意 $A \subset B_{\frac{1}{2}}(0)$，它都是一个有界集。固定定义在 A 上并满足 $0 < \tilde{t} \leq \frac{\mu_0}{2}$的正函数 t。记 F 为所有满足 $x \in A$ 的截面 $S_{\tilde{t}(x)}(x)$ 所构成的族。那么存在一个可数子族 F、 $\{S_{\tilde{t}(x_k)}(x_k)\}_{k=1}^\infty$ ，使其具有以下性质（为简便起见，从现在起我们将 $\tilde{t}(x_k)$ 记作 t_k ）：

(i) 对几乎处处的 $x \in A$， $x \in \cup_{k=1}^\infty S_{t_k}(x_k)$。
(ii) $x_k \notin \cup_{j<k} S_{t_j}(x_j)$， $\forall k \geq 2$。(iii) 我们有如下族

$$F_{\epsilon_2} = \{S_{(1-\epsilon_2)t_k}(x_k)\}_{k=1}^\infty$$

有有界重叠；更准确地说

$$\Sigma_{k=1}^\infty \chi_{S_{(1-\epsilon_2)t_k}(x_k)}(x) \leq K log\frac{1}{\epsilon_2},$$

对于 $\bar{\epsilon} \leq \epsilon_2 \leq e^{-1}$，其中 K 是一个仅取决于 n 的常数。

证明。我们首先阐述论文 [3] 中引理 1 的证明思路，然后说明应在哪些地方进行修改，以使证明适用于我们的情形。

论文 [3] 中引理 1 的证明思路如下：固定一个常数 M。对于每个 $k \geq 1$，我们考虑满足 $\frac{M}{2^{k+1}} < t_x \leq \frac{M}{2^k}$ 的截面 $S_{t_x}(x)$。从这些截面中取一个可数子集，记为 F'_k。

为证明 (i)，我们首先证明每一代 F'_k 的重叠数都有一个与 k无关的有界常数。其次，我们将由此推出每一代 F'_k 都只有有限个成员；特别地，通过重新标记 F'_k 的成员，我们得到 (ii)（这里需要使用我们定义 F'_k的方式）。这意味着构造 F'_k的过程会在某一点停止，于是 (i) 得证。对于 (iii) 的证明，只需估计属于不同代的截面之间的重叠数。假设

$$z_0 \in \cap_i S_{(1-\epsilon)t_{r_i}^{e_i}}(x_{r_i}^{e_i}),$$

其中 $S_{t_{r_i}^{e_i}}(x_{r_i}^{e_i})$ 是在第 i 代定义的截面，且 $e_1 < e_2 < ... < e_i < ...$。利用引理 4.12，我们可以看到，如果 $e_i - e_1$ 很大，那么 z_0 就接近 $x_{r_i}^{e_i}$。然而，根据引理 4.17，z_0 与 $x_{r_i}^{e_i}$ 之间的距离至少为 ϵ_2^{δ}。由此可得 $e_i - e_1$ 的一个上界。

现在我们说明，为了使证明适用于我们的情形，需要在哪些地方作出修改。由于我们考虑的截面高度始终小于 1，因此在证明中只需取 $M = 1$。论文 [3] 中引理 1 的证明主要用到了该论文中的假设 (A)、(B) 和 (C)。

假设 (A) 对应于我们论文中的引理 4.12。请注意，幸运的是，在引理 4.12 的陈述中，用来与 $\frac{1}{\sqrt{t_0}}T_{t_0}^{-1},\ {}_{x_0}S_t(x)$ 比较的球，其球心恰好位于 $\frac{1}{\sqrt{t_0}}T_{t_0}^{-1},\ {}_{x_0}x$。然而，假设 (A) 使用的球的球心可能不在 $\frac{1}{\sqrt{t_0}}T_{t_0}^{-1},\ {}_{x_0}x$。这使得我们在使用引理 4.12 时可以更容易地完成证明。

假设 (B) 对应于引理 4.17。在我们的情形中，为了使用引理 4.17，我们还需要额外要求 $\bar{\epsilon} < \epsilon_2 < \frac{1}{2}$，因此需要在我们正在证明的引理陈述中加入这一要求。我们将在本文后续部分看到，这一限制不会造成任何问题。

我们的论文中没有假设 (C)，因为假设 (C) 针对的是高度趋于无穷大的截面，而在我们的情形中，我们定义的截面的高度均不超过 1。[3] 利用假设 (C) 证明每一代 F'_k 都是有限的。接下来，我们将在不使用假设 (C) 的情况下证明，在我们的情形中每一代 F'_k 都是有限的。记作$F'_k = \{S_{t_i^k}(x_i^k)\}$。然后，我们可以利用引理 4.8 得到：

$$B_{\frac{1}{C}(t_i^k)^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(x_i^k) \subset S_{t_i^k}(x_i^k) \subset B_{C(t_i^k)^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(x_i^k).$$

根据论文 [3] 中引理 1 的证明，我们可以在不使用假设 (C) 的情况下证明，每一代中的交集都有一个与 k 无关的常数上界 α^n 。因此，$\{B_{\frac{1}{C}(t_i^k)^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}(x_i^k)\}$的交集也有 α^n作为上界，即:

$$\Sigma_i \chi_{B_{\frac{1}{C}(t_i^k)^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}(x_i^k)}}(x) \leq \alpha^n. \tag{4.20}$$

由于 $A \subset B_{\frac{1}{2}}(0)$，我们可以假设 μ_0 很小，并使用引理 4.8 得到

$$B_{\frac{1}{C}(t_i^k)^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(x_i^k) \subset S_{t_i^k}(x_i^k) \subset B_{C(t_i^k)^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(x_i^k) \subset B_1(0).$$

然后，我们在 $B_1(0)$ 上对不等式 4.20 积分，得到:

$$\begin{aligned}&\Sigma_i \alpha(2n)(\frac{1}{C}(t_i^k)^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})})^{2n}\\ &= \Sigma_i \int_{B_1(0)} \Sigma_i \chi_{B_{\frac{1}{C}(t_i^k)^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}(x_i^k)}}(x)dx \leq \alpha(2n)\alpha^n,\end{aligned}$$

其中， $\alpha(2n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中单位球的体积。注意到 $\frac{1}{2^{k+1}} < t_i^k \leq \frac{1}{2^k}$，并假设 $0 < log_{\mu_0}(1 - C\sigma^{\frac{1}{2}}) < \frac{1}{2}$。我们可以得到

$$\Sigma_i \alpha(2n)(\frac{1}{C}(\frac{1}{2^{k+1}}))^{2n} \leq \alpha(2n)\alpha^n.$$

这意味着第一个求和中的项数有限。因此， F_k' 中只有有限个截面。□

接下来，我们要估计 $\mu(S_t(x))$ 与 $\mu(S_{(1-\epsilon_2)t}(x))$ 之间的差异。

引理 4.21. 对于 $t \leq \mu_0$，存在一个仅依赖于 n 的常数 C ，使得

$$\mu(S_t(x) \setminus S_{(1-\epsilon_2)t}(x)) + \mu(S_{(1-\epsilon_2)t}(x) \setminus S_t(x)) \leq C(\sigma + \epsilon_2)\mu(S_t(x)).$$

此外，我们有:

$$|\mu(S_t(x)) - \mu(S_{(1-\epsilon_2)t}(x))| \leq C(\sigma + \epsilon_2)\mu(S_t(x)).$$

证明. 根据引理 4.3，我们有

$$\begin{aligned}B_{(1-\sigma)}(0) &\subset \frac{1}{\sqrt{t}} T_{t,x}^{-1} S_t(x) \subset B_{(1+\sigma)}(0)\\ B_{(1-\sigma)}(0) &\subset \frac{1}{\sqrt{(1-\epsilon_2)t}} T_{(1-\epsilon_2)t,x}^{-1} S_{(1-\epsilon_2)t}(x) \subset B_{(1+\sigma)}(0)\end{aligned}$$

由于对于任意 $t \leq \mu_0$，$T_{t,x}$ 的行列式为 1，因此它是保面积的。于是我们有

$$\begin{aligned}&\alpha(2n)(1-\sigma)^{2n}t^n \leq m(S_t(x)) \leq \alpha(2n)(1+\sigma)^{2n}t^n\\ &\alpha(2n)(1-\sigma)^{2n}((1-\epsilon_2)t)^n \leq m(S_{(1-\epsilon_2)t}(x)) \leq \alpha(2n)(1+\sigma)^{2n}((1-\epsilon_2)t)^n.\end{aligned}$$

因此我们有

$$m(S_t(x) \setminus S_{(1-\epsilon_2)t}(x)) + m(S_{(1-\epsilon_2)t}(x) \setminus S_t(x)) \leq C(\sigma + \epsilon_2)m(S_t(x)).$$

由于 $|f - 1| \leq \epsilon$，我们有：

$$\frac{1}{2}m \leq (1-\epsilon)m \leq \mu \leq (1+\epsilon)m \leq 2m.$$

因此我们有

$$\mu(S_t(x) \setminus S_{(1-\epsilon_2)t}(x)) + \mu(S_{(1-\epsilon_2)t}(x) \setminus S_t(x)) \leq C(\sigma + \epsilon_2)\mu(S_t(x)).$$

□

证明。（定理 4.1 的证明）该定理的证明与 [3] 中的定理类似。我们将简述证明过程，并指出针对本情形所需作出的修改。

证明思路如下：由于 $\frac{\mu(S_k \cap A)}{\mu(S_k)} \leq \delta$，~~直观上~~我们有：

$$\mu(A) \leq \delta\mu(\cup_{k=1}^{\infty} S_k).$$

如果 S_k 彼此不相交，这一点就成立。虽然一般情况下这种情况不会发生，但我们可以考虑更小的截面：$S_k^{\epsilon_2} = S_{(1-\epsilon_2)t_k}(x_k)$。根据引理 4.17，可以估计较小截面的重叠部分。注意，根据引理 4.21，S_k 与 $S_k^{\epsilon_2}$之间的范数相当小。因此，用 $S_k^{\epsilon_2}$代替 S_k 所造成的误差是可控的。

现在我们想指出，为了适用于我们的情况，需要做哪些修改。

此处的定理只要求截面 S_k 满足一个较弱的性质：

$$\frac{\delta}{C_1} \leq \frac{\mu(S_k \cap A)}{\mu(S)} \leq \delta.$$

而非我们想要证明的性质 (a)。实际上，在本文余下部分中，我们需要更强的版本。我们需要以更谨慎的方式定义 S_k。对于每个满足 t_x 且如引理 4.19 中那样定义良好的 $x \in A$，我们考虑 $\nu_x = \lambda_x t_x$，其中 $1 < \lambda_x < 2$ 尚待确定。利用 t_x 的定义以及截面关于其高度的左连续性，我们得到：

$$\frac{\mu(S_{t_x}(x) \cap A)}{\mu(S_{t_x}(x))} \geq \delta.$$

我们还有：

$$\frac{\mu(S_t(x) \cap A)}{\mu(S_t(x))} \leq \delta, \text{ for any } t_x \leq t \leq \frac{t_x}{\mu_0}.$$

这是因为根据定义，对于任意 $t_x \leq t \leq \mu_0^3$,

$$\frac{\mu(S_t(x) \cap A)}{\mu(S_t(x))} \geq \delta$$

以及 $t_x \leq \mu_0^4$。因此我们有：

$$\begin{aligned}\delta &\geq \frac{\mu(S_t(x)\cap A)}{\mu(S_t(x))} \geq \frac{\mu(S_{t_x}(x)\cap A)}{\mu(S_t(x))} \\ &\geq \frac{\mu(S_{t_x}(x)\cap A)}{\mu(S_{t_x}(x))}(1-C\sigma-C(\frac{t}{t_x}-1)) \geq (1-C\sigma-C(\frac{t}{t_x}-1))\delta\end{aligned} \tag{4.22}$$

对于任意 $(1+c(\sigma))t_x \leq (1+C\sigma^{\frac{1}{2}})t_x < t \leq 2t_x$，若我们假设 $\mu_0 \leq \frac{1}{2}$。注意，我们利用 $(1+c(\sigma))t_x \leq (1+C\sigma^{\frac{1}{2}})t_x < t$ 和命题 4.3 得到 $S_{t_x}(x) \subset S_t(x)$。在第二行中，我们使用引理 4.21。与 [3], 中定理的证明一样，我们希望将引理 4.19 应用于 $\{S_{\nu_x}(x)\}$，从而得到一个截面的子族，记为 $\{S_k = S_{\mu_k}(x_k)\}$。我们还定义 $S_k^{\epsilon_2} = S_{(1-\epsilon_2)\mu_k}(x_k)$。接下来按照 [3] 中定理的证明进行计算。计算中有一处需要修改。 [3] 使用以下不等式：

$$|\mu(S_{\nu_k}(x_k)) - \mu(S_{(1-\epsilon_2)\nu_k}(x_k))| \leq \epsilon_2 log C \mu(S_{\nu_k}(x_k)).$$

在我们的情形下，可以使用引理 4.21 证明：

$$|\mu(S_{\nu_k}(x_k)) - \mu(S_{(1-\epsilon_2)\nu_k}(x_k))| \leq C(\sigma+\epsilon_2)\mu(S_{\nu_k}(x_k)).$$

这比 [3] 稍弱一些。不过，我们将看到，这对于后续证明已经足够。在我们的情形下，最终可以得到：

$$\mu(A) = \mu((\cup S_k)\cap A) \leq \theta(\epsilon_2)\mu(\cup S_k^{\epsilon_2}),$$

其中

$$\theta(\epsilon_2) = (1-\frac{1-\delta}{C_0 log(\frac{1}{\epsilon_2})})(1+\frac{C(\sigma+\epsilon_2)}{1-C(\gamma+\epsilon_2)}C_0 log(\frac{1}{\epsilon_2})).$$

上述公式中的常数 C 仅依赖于 n。与 [3], 中一样，对于任意 $0 < \epsilon_2 < C(n,\delta)$，我们有：

$$(1-\frac{1-\delta}{C_0 log(\frac{1}{\epsilon_2})})(1+\frac{2C\epsilon_2}{1-2C\epsilon_2}C_0 log(\frac{1}{\epsilon_2})) < 1$$

然后我们固定 $\epsilon_2 \in (0, C(n,\delta))$，并令 μ_0 足够小、 ϵ 足够小，使得$\sigma \leq \epsilon_2$ ，且引理 4.19 中的 $\bar{\epsilon}$ 小于 ϵ_2。因此我们有：

$$\theta(\epsilon_2) < 1.$$

性质 (c) 已得到满足。我们希望 S_k 满足性质 (a)。利用不等式 4.22 可得：

$$\delta \geq \frac{\mu(S_{\lambda_x t_x}(x)\cap A)}{\mu(S_{\lambda_x t_x}(x))} \geq (1-C\sigma-C(\lambda_x-1))\delta$$

回顾一下，我们需要 $\lambda_x \geq 1+C\sigma^{\frac{1}{2}}$ 来得到不等式 4.22。因此，我们令 $\lambda_x = 1+C\sigma^{\frac{1}{2}}$，使得：

$$(1-C\sigma-C(\lambda_x-1))\delta \geq (1-C\sigma^{\frac{1}{2}})\delta.$$

性质 (a) 得以满足。 □

5. Critical density

[4] 中的定理 1 在我们的情形下也成立：

定理 5.1. 存在两个常数 $M_1 > 1$ 和 $0 < \lambda < 1$，它们仅取决于 μ 的倍增常数和维数，使得对于任意截面$S = S_t(x)$以及 $L_\varphi u = 0$ 的任意非负解 u，满足

$$\inf_{z \in S_{\frac{t}{2}}(x)} u(z) \leq 1$$

我们有

$$\mu(\{z \in S : u(z) > M_1\}) < \lambda \mu(S).$$

证明。该定理的证明类似于 [4]中的定理 1。我们首先概述证明过程。首先，我们将 $S_t(x)$ 归一化，使其接近单位球，并相应地归一化 ϕ，具体细节将在后文说明。令 α 足够大，使得 $v = u + \alpha\phi$ 满足

$$\inf_{z \in S_{\frac{t}{2}}(x)} v(z) \leq -1.$$

我们将证明，在我们的情形下可以取 $\alpha = 6$。于是，我们可以对 $v^-(x) = -\min\{v(z)\ 0\}$ 使用 ABP 估计，从而得到满足 v^- 且其凸包络 $\Gamma(v^-)$ 与之相切的点的测度下界。在这些接触点上， u 一致有界，因为在这样的点处， $v \leq 0$ 和 ϕ 由 ABP 估计一致有界，而 α 是一个一致常数，稍后我们将对此作出解释。至此，定理的证明完成。

接下来，我们指出为将 [4] 中定理 1 的证明改编到我们的情形所作的修改。

首先，我们对 ϕ 进行归一化并更换坐标（将新坐标记为 w）。根据第 2 节、命题 4.3 和引理 4.10，我们可以假设：

$$\phi = 0 \text{ on } \partial S_t(x)$$

and

$$(1 - 0.1\sigma)B_1(0) \subset S_t(x) \subset (1 + 0.1\sigma)B_1(0).$$

断言：我们可以令 σ 和 ϵ 足够小，使得：

$$\phi \leq -\frac{1}{3} \text{ on } S_{\frac{t}{2}}(x).$$

我们分两种情况证明这一点。在证明之前，我们注意到，根据命题 4.3，存在一个椭球 E，使得：

$$(1 - 0.1\sigma)\sqrt{\frac{1}{2}}E \subset S_{\frac{t}{2}}(x) \subset (1 + 0.1\sigma)\sqrt{\frac{1}{2}}E.$$

情形 (1) $S_t(x)$ 和 $S_{\frac{t}{2}}(x)$ 属于同一代。因此我们有 $E = B_1(0)$。因此我们有：

$$B_{\frac{1-0.1\sigma}{\sqrt{2}}}(0) \subset S_{\frac{t}{2}}(x) \subset B_{\frac{1+0.1\sigma}{\sqrt{2}}}(0).$$

利用引理 4.3、引理 4.15 和引理 4.16，我们可以得到：

$$|w|^2 - 1 - 3\epsilon - C\sigma \leq \phi \leq |w|^2 - 1 + 3\epsilon + C\sigma. \tag{5.2}$$

因此，对于任意的 $w \in S_{\frac{t}{2}}(x)$,

$$\phi \leq \frac{(1+0.1\sigma)^2}{2} - 1 + 3\epsilon + C\sigma.$$

令 σ 和 ϵ 足够小，我们可以得到

$$\phi \leq -\frac{1}{3} \text{ on } S_{\frac{t}{2}}(x).$$

情形（2） $S_t(x)$ 和 $S_{\frac{t}{2}}(x)$ 不属于同一代。我们可以假设 $\mu_0 < \frac{1}{2}$，从而存在 k，使得：

$$\mu_0^{k+2} < \frac{t}{2} \leq \mu_0^{k+1} < t \leq \mu_0^k,$$

也就是说， $S_t(x)$ 和 $S_{\frac{t}{2}}(x)$ 属于相邻代。因此我们有：

$$B_{(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}(0) \subset E \subset B_{(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})}(0),$$

根据命题 4.3 和引理 4.4。因此我们有：

$$B_{\frac{(1-0.1\sigma)(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{2}}}(0) \subset S_{\frac{t}{2}}(x) \subset B_{\frac{(1+0.1\sigma)(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{2}}}(0).$$

根据不等式 6.4，对于任意 $w \in S_{\frac{t}{2}}(x)$，我们有：

$$\phi \leq \frac{(1+0.1\sigma)^2(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})^2}{2} - 1 + 3\epsilon + C\sigma.$$

令 σ 和 ϵ 充分小，我们可以得到

$$\phi \leq -\frac{1}{3} \text{ on } S_{\frac{t}{2}}(x).$$

该结论得证。

ABP 估计需要使用 $det(D^2\phi)$。在我们的情形中，我们只知道 $det(\phi_{i\bar{j}})$的估计，而不知道 $det(D^2\phi)$的估计。不过，在 ϕ 为凸的点上，我们可以使用 $det(D^2\phi)^{\frac{1}{2}} \leq 2^n det(\phi_{i\bar{j}})$。幸运的是，ABP 估计中的积分部分只取在 ϕ 为凸的点上。

我们使用的常数 α 是统一的。这是因为归一化后，我们有 $\phi = 0$ 在 $\partial S_t(x)$ 上，且 $\phi \leq -\frac{1}{3}$ 在 $S_{\frac{t}{2}}(x)$ 上。根据假设，$\inf_{z \in S_{\frac{t}{2}}(x)} u(z) \leq 1$。因此，我们只需取 $\alpha = 6$，使得

$$\inf_{z \in S_{\frac{t}{2}}(x)} (u(z) + \alpha\phi(z)) \leq -1.$$

□

6. Infimum estimate on a larger section

我们需要以下引理:

引理 6.1. 设 u 是方程 $L_\phi u = 0$的一个正上解，即:

$$L_\phi u \le 0.$$

若 $x_0 \in R^n$ 和 $0 < \epsilon_4 < 1$，则

$$L_\phi(-u^{\epsilon_4})(x_0) \ge -\epsilon_4(\epsilon_4 - 1)u(x_0)^{\epsilon_4 - 2}|\nabla u(x_0)|^2 \frac{det(u_{i\bar{j}}(x_0))}{trace(u_{i\bar{j}})}.$$

证明. 逐字仿照 [4] 中引理 2.1 的证明即可证明本引理。□

定理 6.2. 存在一个常数 $L > 1$，它依赖于 n，使得对于任意$\alpha > 0$，若 u 是 $S_{4t}(x_0)$ 上 $L_\phi u = 0$ 的任意非负解，并满足:

$$u|_{S_t(x_0)} > \alpha,$$

then

$$u|_{S_{2t}(x_0)} > \frac{\alpha}{L}$$

证明。这个定理与论文 [4] 中的定理 2 类似。我们简述证明，并指出为将论文 [4] 中的定理 2 的证明调整到我们的情形所需的修改。

首先简述该定理的证明如下：考虑四个截面：$S_k^* = S_{t_k}(x_0)$、$k = 1$、2、3、4，其中 $t_1 = t < t_2 = 2t < t_3 < t_4 = 4t$。$t_3$ 尚待确定（这是论文 [4] 中的定义。我们将在本文的情形下修改 S_3^* 的定义。）。我们对 ϕ 进行归一化，并改变坐标（将新坐标记为 w），使得:

$$\phi|_{\partial S_{4t}(x_0)} = 0$$

and

$$B_{1-0.1\sigma}(0) \subset S_{4t}(x_0) \subset B_{1+0.1\sigma}(0).$$

然后定义辅助函数 w_{ϵ_4}，其定义稍后将详细讨论。接着考虑

$$h(x) = \frac{-\phi(x) + w_{\epsilon_4}(x)}{2\beta_n},$$

其中 β_n 是一个依赖于 n 的常数。考虑 $u^{\epsilon_4} - h(x)$ 在 S_4^* 上的最小值，并证明

$$u|_{S_{2t}(x)} \ge \frac{\alpha}{L}$$

分为三种情况:

情况 1：最小值在 S_1^* 上取得。情况 2：最小值在 $S_4^* \setminus S_3^*$ 上取得。情况 3：最小值在 $S_3^* \setminus S_1^*$ 上取得。

情况 1 和 2 甚至不需要辅助函数 w_{ϵ_4}。情况 3 则更为复杂。利用引理 6.1，可以在极小点处估计 $L_\phi(u^{\epsilon_4} - h(x))$

由于 $L_\phi(u^{\epsilon_4} - h(x)) \geq 0$ 在极小点处，利用引理 6.1，我们可以证明 $g = \Delta\phi$ 在该点处有界，从而得到进一步的估计。

接下来，我们讨论为适配论文 [4]中定理 2 的证明所需进行的修改。

首先，在我们的情形下， S_3^* 不一定能写成 $S_t(x)$的形式。相反，我们定义

$$S_3^* = \{w \in S_4^* : \phi(w) \leq s_3\},$$

其中 $s_3 \in [-\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}]$ 有待确定。利用引理 4.3、引理 4.15 和引理 4.16，我们可以得到:

$$|w|^2 - 1 - 3\epsilon - C\sigma \leq \phi \leq |w|^2 - 1 + 3\epsilon + C\sigma. \tag{6.3}$$

因此，对任意 $\phi \leq s_3$，都有:

$$|w|^2 \leq 1 + 3\epsilon + C\sigma + s_3.$$

于是我们有

$$S_3^* \subset B_{\sqrt{1+3\epsilon+C\sigma+s_3}}(0) \subset B_{\sqrt{1+3\epsilon+C\sigma-\frac{1}{4}}}(0) \subset B_{\frac{2}{\sqrt{5}}}(0).$$

这里我们假设 σ 和 ϵ 都很小。

在 [4]中，需要对 $|\nabla\phi|$ 在 S_3^* 中的情况作出估计。我们希望在当前情形下推导出这样的估计。我们已经证明

$$S_3^* \subset B_{\frac{2.1}{\sqrt{5}}}(0).$$

在当前情形下，我们可以使用 $W^{2,\,p}$估计中的结果: $||\phi||_{W^{2,\,p}(B_{\frac{2}{\sqrt{5}}}(0))} \leq C$。如果 p 很大，那么对于某个 $\beta_0 > 0$，我们有 $||\phi||_{C^{1,\,\beta_0}(B_{\frac{2}{\sqrt{5}}}(0))} \leq C$ 。特别地，我们得到 $|\nabla\phi|$ 在 S_3^*中的一个估计。

在 [4], 中，需要估计该集合的测度:

$$H_{\epsilon_4} = \{x \in S_3^* : g(x) \geq \frac{\gamma_0}{\epsilon_4}\},$$

其中， γ_0 是一个较小的正参数。我们需要估计 ∂S_3^* 的面积；当 S_3^* 是凸集时，这很容易处理，如 [4]所示。在我们的情形下， S_3^* 只是一个伪凸集。因此我们使用余面积公式:

$$\int_{\{a\leq\phi\leq b\}} |\nabla\phi| dx = \int_a^b dt \int_{\phi=t} dS,$$

对任意 $a < b$。根据萨德定理，我们可以找到 $s_{ab} \in (a, b)$，使得$\{\phi = s_{ab}\}$ 是光滑的，并且

$$\int_a^b dt \int_{\phi=t} dS \geq (b-a)|\{\phi = s_{ab}\}|.$$

我们需要进行估计

$$m(\{a \leq \phi \leq b\}).$$

利用引理 4.3、引理 4.15 和引理 4.16，我们可以得到：

$$|w|^2 - 1 - 3\epsilon - C\sigma \leq \phi \leq |w|^2 - 1 + 3\epsilon + C\sigma. \tag{6.4}$$

因此，对于任意 $a \leq \phi \leq b$，有：

$$1 - 3\epsilon - C\sigma + a \leq |w|^2 \leq 1 + 3\epsilon + C\sigma + b.$$

因此有：

$$\{a \leq \phi \leq b\} \subset B_{\sqrt{1+3\epsilon+C\sigma+b}}(0) \setminus B_{\sqrt{1-3\epsilon-C\sigma+a}}(0).$$

我们假设 $b \leq -\frac{1}{4}$。我们已证明 $|\nabla\phi|_{\{\phi\leq-\frac{1}{4}\}} \leq C$，结合上述方程可得

$$\begin{aligned}(b-a)|\{\phi = s_{ab}\}| &\leq \int_{\{a\leq\phi\leq b\}} |\nabla\phi| dx \\ &\leq |\nabla\phi|_{C^1(\{a\leq\phi\leq b\})} m(B_{\sqrt{1+3\epsilon+C\sigma+b}}(0) \setminus B_{\sqrt{1-3\epsilon-C\sigma+a}}(0)).\end{aligned} \tag{6.5}$$

利用引理 4.21 可得：

$$m(B_{\sqrt{1+3\epsilon+C\sigma+b}}(0) \setminus B_{\sqrt{1-3\epsilon-C\sigma+a}}(0)) \leq C(\sigma + \epsilon + b - a).$$

我们可以利用这个不等式和不等式 6.5 得到：

$$|\{\phi = s_{ab}\}| \leq C(1 + \frac{\sigma+\epsilon}{b-a}),$$

对某个 $s_{ab} \in [a, b]$ 成立。因此，当我们要选取 t_3 时，可以利用上述论证找到 $s_3 \in [-\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}]$。然后我们定义 根据上述计算可得

$$|\{\phi = s_3\}| \leq C(1 + \sigma + \epsilon).$$

利用这一点，我们可以按照 [4] 中的方法估计 $|H_{\epsilon_4}|$，得到：

$$|H_{\epsilon_4}| \leq A_n \frac{\epsilon_4}{\gamma_0}(1 + \sigma + \epsilon) \leq C\frac{\epsilon_4}{\gamma_0}$$

我们要做的另一项修改如下：在 [4]，中定义了一个辅助函数。我们先说明 [4] 定义辅助函数的方式：令

$$k(x) = detD^2\phi(x)$$

˜然后用开集 H_{ϵ_4} 近似集合 H_{ϵ_4}，使得 $H_{\epsilon_4} \subset H_{\epsilon_4} \subset S_4^{*\tilde{}}$，且 $|H_{\epsilon_4} \setminus H_{\epsilon_4}|$ 足够小。给定（较小的） $\delta > 0$，他们定义了 ˜φ（x），这是 S_4^* 上的一个光滑函数，并满足 φ（x） $= 1$ 于 H_{ϵ_4}，φ（x） $= \delta$ 于 $S_4^* \setminus H_{\epsilon_4}$，且 $\delta \leq \varphi$（x） ≤ 1。然后他们定义辅助函数：

$$\begin{aligned}detD^2 w_{\epsilon_4}(x) &= k(x)\varphi(x) \text{ in } S_4^* \\ w_{\epsilon_4}|_{\partial S_4^*} &= 0.\end{aligned}$$

接下来我们说明在本情形下如何定义辅助函数。由于我们处理的是复蒙日-安培方程和线性化复蒙日-安培方程，自然会想到利用复蒙日-安培方程来定义辅助函数。然而，之后我们需要导出辅助函数的

导数估计。复蒙日-安培方程无法提供这种估计。因此，我们仍希望利用实Monge–Ampère方程来定义辅助函数。另一个困难是，在本情形下， S_4^* 可能不是凸集。因此，我们无法在 S_4^*上求解实Monge–Ampère方程的狄利克雷问题。于是，我们改为在一个略大于 S_4^*的椭球上求解狄利克雷问题:

$$\begin{aligned} &detD^2 w_{\epsilon_4}(x) = 4^n k^2(x)\varphi^2(x) \text{ in } (1+\sigma)B_1(0) \\ &w_{\epsilon_4}|_{(1+\sigma)B_1(0)} = 0, \end{aligned}$$

其中 $k(x) = det\phi_{i\bar{j}}$。回顾命题 4.3,

$$(1-\sigma)B_1(0) \subset S_4^* \subset (1+\sigma)B_1(0).$$

如果令 ϵ_4 足够小，并令 δ 足够小，我们可以得到 $|w_{\epsilon_4}|$ 和 $|D(w_{\epsilon_4})|_{S_3^*}$都如 [4] 中所示非常小。接下来考虑上面列出的三种情况。

(1) 我们可以像 [4] 中那样逐字证明情况 1。

(2) 对于第二种情况，由于对于 $-\frac{1}{2} \le s \le 0$， $S_{4(1+s)t}(x_0)$ 和 $S_{4t}(x_0)$ 属于同一代或相邻代，因此在坐标 w 中有:

$$(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})B_{\sqrt{1+s}}(0) \subset S_{4(1+s)t}(x_0) \subset (1+C\sigma^{\frac{1}{2}})B_{\sqrt{1+s}}(0). \tag{6.6}$$

结合不等式 6.4，我们得到:

$$\{\phi \le -\frac{1}{2} - C(\sigma^{\frac{1}{2}}+\epsilon)\} \subset S_2^* \subset \{\phi \le -\frac{1}{2} + C(\sigma^{\frac{1}{2}}+\epsilon)\}.$$

根据 s_3 的定义,

$$\{\phi \le -\frac{3}{8}\} \subset S_3^* \subset \{\phi \le -\frac{1}{4}\}$$

因此，对于 $x \in S_2^*$，我们有

$$\begin{aligned} h(x) - h(P) &= \frac{-\phi^*(x)}{2\beta_n} + \frac{w_{\epsilon_4}(x)}{2\beta_n} + \frac{\phi^*(P)}{2\beta_n} - \frac{w_{\epsilon_4}(P)}{2\beta_n} \\ &\ge \frac{\frac{1}{2} - C(\sigma^{\frac{1}{2}}+\epsilon)}{2\beta_n} + \frac{w_{\epsilon_4}(x)}{2\beta_n} + \frac{-\frac{3}{8}}{2\beta_n} \\ &= \frac{1 - C(\sigma^{\frac{1}{2}}+\epsilon)}{16\beta_n} + \frac{w_{\epsilon_4}(x)}{2\beta_n} \\ &\ge \frac{1}{32\beta_n} \end{aligned}$$

在最后一行中，我们令 σ、 ϵ 和 ϵ_4 足够小。

（3）对于第三种情况。与 [4], 中一样，我们需要证明:

$$|\nabla\phi^*(P)| \ge C > 0,$$

对于 $P \in S_3^* - S_1^*$。回想一下,

$$S_3^* \subset B_{\frac{2}{\sqrt{5}}}(0).$$

我们需要使用一种插值版本（参见 [9] 中的引理 4.32）。我们可以使用

$$|\phi - (|z|^2 - 1)|_{B_{\sqrt{\frac{5}{6}}}(0)} \leq C(\epsilon + \sigma).$$

and

$$|\phi|_{C^{1,\alpha}(B_{\sqrt{\frac{5}{6}}}(0))} \leq C$$

由 $W^2,\ ^p$ 估计。然后利用插值可得 $|\nabla(\phi - (|z|^2 - 1))|_{B_{\ 2\ }(0)}$ 可以任意小，只要 σ 和 ϵ 足够小。特别地，$\sqrt{5}$我们可以假设：

$$|\nabla(\phi - (|z|^2 - 1))|_{B_{\frac{2}{\sqrt{5}}}(0)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

利用公式 6.6，我们得到

$$S_2^* \supset B_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(0).$$

注意：

$$|\nabla(|z|^2 - 1)|_{B^c_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(0)} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

因此我们得到：

$$|\nabla\phi|_{S_3^* \setminus S_2^*} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

这可以推出

$$|\nabla\phi^*(P)| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

我们还需要使用以下不等式：

$$detD^2 w_{\epsilon_4} \leq 4^n det((w_{\epsilon_4})_{i\bar{j}})^2.$$

将 $det((w_{\epsilon_4})_{i\bar{j}})$ 化简为 $detD^2 w_{\epsilon_4}$。这就是我们需要做的全部修改。□

7. Harnack inequality and Hölder continuity

首先，我们可以结合定理 5.1 和定理 6.2，得到以下引理：

引理 7.1. 设 u 是截面 $S_{4t}(x_0)$ 中的一个非负解，且 α 是任意一个正数，满足：

$$\mu\{x \in S_t(x_0) : u(x) > \alpha\} \geq \lambda\mu(S_t(x_0)),$$

then

$$u(x) \geq \frac{\alpha}{M_0},\ \forall x \in S_t(x_0),$$

这里 $M_0 = M_1 L^2$。 λ 和 M_1 见定理 5.1， L 见定理 6.2。

证明。我们可以定义 $v = \frac{M_1 u}{\alpha}$。 v 仍满足线性化复 Monge-Ampère 方程。根据定理 5.1，我们有：

$$\inf_{x \in S_{\frac{t}{2}}(x_0)} v(x) \geq 1.$$

由于 $2^2 \geq 2(1 + c(\sigma))$。利用命题 4.3，我们有：

$$S_{2t}(x_0) \supset S_t(x_0).$$

利用定理 6.2，我们有：

$$\inf_{S_{2t}(x_0)} v \geq \frac{1}{L} \inf_{S_t(x_0)} v \geq \frac{1}{L^2} \inf_{S_{\frac{1}{2}t}(x_0)} v \geq \frac{1}{L^2}$$

那么我们有：

$$\inf_{S_t(x_0)} u \geq \inf_{S_{2t}(x_0)} u = \frac{\alpha}{M_1} \inf_{S_{2t}(x_0)} v \geq \frac{\alpha}{M_1 L^2}$$

□

[4] 的引理 3.1 在我们的情形下也成立，其中 $t \leq \mu_0^3$:

引理 7.2. 设 u 是截面$S_t(z)$ 中的一个 $L_\phi u = 0$ 的非负解，使得：

$$\inf_{S_t(z)} u \leq 1$$

其中 $t \leq \mu_0^3$。令 θ 为引理 4.6 中的常数。那么，若 $y \in S_t(z)$ 和$S_h(y)$ 是一个满足 $h < \theta t$ 的截面，并且

$$\mu\{x \in S_h(y) : u(x) > \alpha\} \geq \lambda \mu(S_h(y))$$

then

$$h \leq \theta t (\frac{M_0 L}{\alpha})^{\frac{1}{\delta}}.$$

这里， $0 < \lambda$ 由定理 5.1 给出。 M_0 由引理 7.1 给出。 θ是引理 4.6 中的常数，而 $L > 1$ 是定理 6.2 中的常数。

证明。我们可以逐字仿照[4] 中的引理 3.1 的证明来证明这个引理。□

下面的引理引自 [6]。

引理 7.3。令 f： $B_{0.8} \to \mathbb{R}$ 为一个 L^1 函数。那么，对于 m-几乎处处的 $x \in B_{0.8}$，有：

$$\lim \sup_{x \in S_{\mu_\alpha}(x_\alpha), \mu_\alpha \to 0} \frac{1}{m(S_{\mu_\alpha}(x_\alpha))} \int_{S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)} |f(y) - f(x)| dm(y) = 0.$$

特别地，对于任意 $A \subset B_{0.8}$，我们可以在上述公式中取 $f = \chi_A$ ，从而得到：对于几乎处处的 $x \in A$,

$$\lim \sup_{x \in S_{\mu_\alpha}(x_\alpha), \mu_\alpha \to 0} |\frac{1}{m(S_{\mu_\alpha}(x_\alpha))} m(A \cap S_{\mu_\alpha}(x_\alpha)) - 1| = 0.$$

接下来，我们要证明 u 的超水平集的衰减估计，然后得到某个 $p>0$下 u 的 L^p 估计。

定理 7.4. 存在 $p>0$，使得对于任意 $z_0 \in B_{\frac{1}{2}}$，我们有：

$$|u|_{L^p(B_{\frac{\mu_0^2}{C}}(z_0))} \leq C \inf_{S_{\mu_0^3}(z_0)} u.$$

其中 $B_{\underline{\mu_0^2}}(z_0) \subset S_{\mu_0^3}(z_0)$。$c$

证明. 我们将在集合 $S_{\mu_0^3}(z_0)$ 中进行计算。将 u 乘以一个不影响结论的常数后，我们可以假设

$$\inf_{S_{\mu_0^3}(z_0)} u \leq 1.$$

设 $B_{\underline{\mu_0^2}}(z_0)$ 是 $S_{\mu_0^3}(z_0)$ 的子集。由引理 4.8 可知这一点成立。我们c定义

$$E_k = \{x : u(x) \geq KM^k\},$$

其中，K 和 M 是待定常数。定义

$$S_k = B_{\frac{\mu_0^2}{C}(1-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2^{k+1}})}(z_0)$$

对于 $k \geq 1$ 和 $S_0 = B_{\underline{\mu_0^2}}(z_0)$。我们要证明：$c$

$$\mu(E_{k+1} \cap S_k) \leq \delta_1 \mu(E_k \cap S_{k-1})$$

对于某个 $0<\delta_1<1$。在对$S_1 \cap E_2$进行 Calderón–Zygmund 分解之前，我们需要验证对于几乎处处的 $x \in A$，定理 4.1 中的假设 (1) 和 (2) 都成立。根据引理 7.3，假设 (1) 成立。假设假设 (2) 不成立。那么存在 $t_0 \in (\mu_0^4, \mu_0^3]$ 使得：

$$\mu(S_{t_0}(x) \cap E_2 \cap S_1) > \lambda \mu(S_{t_0}(x)).$$

于是我们可以利用引理 7.1 得到：

$$\inf_{x \in S_{t_0}(x)} u(x) \geq \frac{KM^2}{M_0}.$$

由于

$$\inf_{S_{\mu_0^3}(z_0)} u \leq 1$$

且 $t_0 \leq \mu_0^3$，我们可以利用引理 7.2 得到

$$t_0 \leq \theta \mu_0^3 (\frac{M_0 L}{KM^2})^{\frac{1}{\delta}}.$$

令 M 足够大，使得 $t_0 \leq \mu_0^4$。这与我们已假设 $t_0 > \mu_0^4$ 相矛盾。因此，定理 4.1 中的假设 (1) 和 (2) 成立。

然后，我们可以利用定理 4.1，在层 $\frac{\lambda}{1-C\sigma^{\frac{1}{2}}}$ 处对 $S_1 \cap E_2$ 作 Calderon-Zygmund 分解：$\{S_{t_i^1}(x_i^{(1)})\}$（我们假设 σ 和 ϵ_2 足够小，使得 $\frac{\lambda}{1-C\sigma^{\frac{1}{2}}} < 1$）。此外，我们有：

$$\frac{\mu(S_{t_i^1}(x_i^{(1)})) \cap S_1 \cap E_2}{\mu(S_{t_i^1}(x_i^{(1)}))} \geq (1 - C\sigma^{\frac{1}{2}}) \frac{\lambda}{1 - C\sigma^{\frac{1}{2}}} = \lambda.$$

于是我们可以使用定理 7.1 得到：

$$u \geq \frac{KM^2}{M_0} \geq KM \text{ on } S_{t_i^{(1)}}(x_i^{(1)}).$$

这里我们假设 $M \geq M_0$。这意味着

$$S_{t_i^{(1)}}(x_i^{(1)}) \subset E_1.$$

利用引理 7.2，我们可以得到：

$$t_i^{(1)} \leq \theta \mu_0^3 (\frac{M_0 L}{KM^2})^{\frac{1}{\delta}}.$$

这意味着

$$S_{t_i^{(1)}}(x_i^{(1)}) \subset B_{[\theta\mu_0^3(\frac{M_0L}{KM^2})^{\frac{1}{\delta}}]^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(x_i^{(1)}),$$

根据引理 4.8。我们可以令 M 足够大，使得：

$$[\theta\mu_0^3(\frac{M_0L}{KM^2})^{\frac{1}{\delta}}]^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})} \leq \frac{1}{2^2}\frac{\mu_0^2}{C}.$$

这意味着：

$$S_{t_i^{(1)}}(x_i^{(1)}) \subset S_0.$$

因此，我们证明了

$$S_{t_i^{(1)}}(x_i^{(1)}) \subset S_0 \cap E_1.$$

利用定理 4.1，我们可以得到

$$\mu(S_1 \cap E_2) \leq \delta_0 \mu(\cup S_{t_i^{(1)}}(x_i^{(1)})) \leq \delta_0 \mu(S_0 \cap E_1).$$

假设我们已经证明：

$$\mu(S_{k-1} \cap E_k) \leq \delta_0 \mu(S_{k-2} \cap E_{k-1}).$$

根据上述证明，我们可以从定理 4.1 得到关于 $S_k \cap E_{k+1}$、层级为 $\frac{\lambda}{1-C\sigma^{\frac{1}{2}}}$ 的 Calder´on-Zygmund 分解：$\{S_{t_i^{(k)}}(x_i^{(k)})\}$。我们有：

$$\mu(S_k \cap E_{k+1}) \leq \delta_0 \mu(\cup S_{t_i^{(k)}}(x_i^{(k)})) \tag{7.5}$$

此外，定理 4.1 蕴含

$$\frac{\mu(S_{t_i^{(k)}}(x_i^{(k)}) \cap E_{k+1})}{\mu(S_{t_i^{(k)}}(x_i^{(k)}))} \geq (1 - C\sigma^{\frac{1}{2}})\frac{\lambda}{1 - C\sigma^{\frac{1}{2}}} = \lambda.$$

然后利用引理 7.1 可得:

$$u \geq \frac{KM^{k+1}}{M_0} \geq KM^k \text{ on } S_{t_i^{(k)}}(x_i^{(k)}).$$

这意味着

$$S_{t_i^{(k)}}(x_i^{(k)}) \subset E_k.$$

利用定理 7.2，可得:

$$t_i^{(k)} \leq \theta\mu_0^3(\frac{M_0 L}{KM^{k+1}})^{\frac{1}{\delta}}.$$

这意味着

$$S_{t_i^{(k)}}(x_i^{(k)}) \subset B_{[\theta\mu_0^3(\frac{M_0 L}{KM^{k+1}})^{\frac{1}{\delta}}]^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(x_i^{(k)}),$$

利用直径估计。我们可以令 M 足够大，使其与 k 无关，从而得到:

$$[\theta\mu_0^3(\frac{M_0 L}{KM^{k+1}})^{\frac{1}{\delta}}]^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1+C\sigma^{\frac{1}{2}})} \leq \frac{1}{2^{k+1}}\frac{\mu_0^2}{C}.$$

这意味着:

$$S_{t_i^{(k)}}(x_i^{(k)}) \subset S_{k-1}.$$

因此，我们已经证明

$$S_{t_i^{(k)}}(x_i^{(k)}) \subset S_{k-1} \cap E_k.$$

因此，不等式 7.5 意味着:

$$\mu(S_k \cap E_{k+1}) \leq \delta_0\mu(S_{k-1} \cap E_k).$$

因此，我们有:

$$\mu(B_{\frac{\mu_0^2}{2C}}(z_0) \cap E_{k+1}) \leq \mu(S_k \cap E_{k+1}) \leq \delta_0^k\mu(S_0 \cap E_1).$$

因此我们有:

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{\frac{\mu_0^2}{2C}}(z_0)} u^p = p\int_0^\infty s^{p-1}Area(\{x : u(x) \geq s\} \cap B_{\frac{\mu_0^2}{2C}}(z_0))ds \\
&= p\int_0^{KM} s^{p-1}ds + \Sigma_{i=1}^\infty \int_{KM^i}^{KM^{i+1}} s^{p-1}Area(\{x : u(x) \geq s\} \cap B_{\frac{\mu_0}{2C}}(z_0))ds \\
&\leq C + \Sigma_{i=1}^\infty p\int_{KM^i}^{KM^{i+1}} s^{p-1}Area(\{u \geq KM^i\} \cap B_{\frac{\mu_0^2}{2C}}(z_0))ds \\
&\leq C + C\Sigma_{i=1}^\infty (KM^{i+1})^p\delta_0^{i-1}.
\end{aligned}$$

然后我们可以令 p 足够小，使得 $M^p\delta_0 < 1$。因此，上述公式的最后一行是有限的。□

接下来需要一个在 [2] 中证明的引理：

引理 7.6. 假设 $u \geq 0$ 在 $B_1 \subset R^d$ 中满足：

$$\partial_i(a^{ij}\partial_j u) \geq 0.$$

这里 $\frac{1}{\lambda\, x()} \leq a^{ij}(x) \leq \lambda(x)$，且对于某个 $p > \frac{3d}{2}$， $\lambda(x) \in L^p(B_1)$，那么对于任意 $\epsilon_5 > 0$，存在一个常数 C，它依赖于 p、 $||\lambda||_{L^p(B_1)}$ 和 ϵ_5，使得：

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u \leq C||u||_{L^{\epsilon_5}(B_1)}.$$

结合定理 7.4 和引理 7.6，我们可以证明以下 Harnack 不等式：

定理 7.7. 存在一个常数 C，使得对于任意 $z_0 \in B_{\frac{1}{2}}$，我们有：

$$\sup_{B_{\frac{\mu_0^2}{C}}(z_0)} u \leq C \inf_{B_{\frac{\mu_0^2}{C}}(z_0)} u$$

证明。利用 $w^{2,p}$ 论文的主定理，我们可以推出 $W^{2,p}$估计，并且如果令 ϵ 足够小，就可以使 ϕ 和 p 任意大。这意味着 $\max_l \lambda_l(\phi_{i\bar{j}}) \in L^p(B_{0.8})$。由于 $1 - \epsilon \leq det(\phi_{i\bar{j}}) \leq 1 + \epsilon$，我们可以得到

$$\max_k \frac{1}{\lambda_k(\phi_{i\bar{j}})} \leq 2 \max_l \lambda_l(\phi_{i\bar{j}})^{n-1}$$

因此我们还可以得到 $\max^k {}^{\lambda_k}{}^{1}{}^{(\phi_{i\bar{j}}) \in} L^p(B_{0.8})$。因此我们可以利用引理 7.6 得到：

$$\sup_{B_{\frac{\mu_0^2}{2C}}(z_0)} u \leq C||u||_{L^{\epsilon_5}(B_{\frac{\mu_0^2}{C}}(z_0))}.$$

利用引理 7.4，我们有：

$$||u||_{L^{p_0}(B_{\frac{\mu_0^2}{C}}(z_0))} \leq C \inf_{S^3_{\mu_0}(z_0)} u \leq C \inf_{B_{\frac{\mu_0^2}{2C}}(z_0)} u$$

对于某个 $p_0 > 0$。那么我们可以令 ϵ_5 足够小，使得 $\epsilon_5 \leq p_0$。于是我们有：

$$\sup_{B_{\frac{\mu_0^2}{2C}}(z_0)} u \leq C||u||_{L^{\epsilon_5}(B_{\frac{\mu_0^2}{C}}(z_0))} \leq C||u||_{L^{p_0}(B_{\frac{\mu_0^2}{C}}(z_0))} \leq C \inf_{B_{\frac{\mu_0^2}{2C}}(z_0)} u.$$

□

我们应该能够证明定理 1.5：

证明。（定理 1.5 的证明。）我们首先将 $S_t(z_0)$ 归一化，使其接近一个球。定义坐标 w 为 $z - z_0 = \sqrt{t}T_{t,\ z_0}w$。令 h_{z_0} 为一个二次多重调和多项式，使得当我们定义

$$\widetilde{\phi}(w) = \frac{\phi(z_0 + \sqrt{t}T_{t,z_0}w)}{t|det(T_{t,z_0})|^{\frac{2}{n}}} + h_{z_0},$$
$$\widetilde{u}(w) = u(z_0 + \sqrt{t}T_{t,z_0}w)$$

~我们有 $\phi = 0$ 在坐标 w中的 $\partial S_t(z_0)$ 上成立。利用 $W^{2,\ p}$ 论文中的定理 1.3，我们可以得到

$$||\widetilde{\phi}||_{W^{2,p}(B_{0.9})} \leq C, \quad ||\sum_i \frac{1}{\widetilde{\phi}_{i\bar{i}}}||_{L^p(B_{0.9})} \leq C,$$

对于任意大的 p，若令 μ_0 足够小且 ϵ 足够小，则可应用定理 7.7 得到:

$$\sup_{B_{\frac{\mu_0^2}{C}}} \widetilde{u} \leq C \inf_{B_{\frac{\mu_0^2}{C}}} \widetilde{u}$$

~令 $S_\mu(w_0)$ 为以坐标 w 定义的截面，其定义方式与 S_μ相同。由引理 4.3 可得:

$$\frac{1}{1 - c_1(\gamma)}\widetilde{S}_{\frac{\mu_0^4 t}{C_0}}(0) \subset B_{\frac{\mu_0^2}{C}},$$

若令 C_0 足够大，并假设 $c_1(\gamma) \leq \frac{1}{2}$。利用上述公式以及 u 与 $\widetilde{u}$之间的关系，可得:

$$\sup_{\frac{1}{1-c_1(\gamma)}\widetilde{S}_{\frac{\mu_0^4 t}{C_0}}(0)} u \leq C \inf_{\frac{1}{1-c_1(\gamma)}\widetilde{S}_{\frac{\mu_0^4 t}{C_0}}(0)} u.$$

然后利用引理 4.11 得到:

$$S_{\frac{\mu_0^4 t}{C_0}}(z_0) \subset \frac{1}{1 - c_1(\gamma)}\widetilde{S}_{\frac{\mu_0^4 t}{C_0}}(0).$$

因此我们证明了:

$$\sup_{S_{\frac{\mu_0^4 t}{C_0}}(z_0)} u \leq C \inf_{S_{\frac{\mu_0^4 t}{C_0}}(z_0)} u.$$

□

证明。（推论 1.6 的证明）定义 $\tau = \frac{\mu_0^4}{C_0}$。定义 $\bar{u} = u - \inf\ u$，使得 $\bar{u}$ 非负，这样我们就可以对 $\bar{u}$ 应用 Harnack 不等式。定义 $M_t(z) = \sup_{S_t(z)}\bar{u}$ 和 $m_t(z) = \inf_{S_t(z)}\bar{u}$。对于任意 $t \leq \frac{\mu_0^5}{C_0}$，将 u 替换为 $M_t(z) - \bar{u}$ 和 $\bar{u} - m_t(z)$，即可应用推论 1.5，得到:

$$M_t(z) - m_{\tau t}(z) \leq \beta(M_t(z) - M_{\tau t}(z))$$
$$M_{\tau t}(z) - m_t(z) \leq \beta(m_{\tau t}(z) - m_t(z)).$$

将这两个不等式相加，得到：

$$M_{\tau t}(z) - m_{\tau t}(z) \leq \frac{\beta-1}{\beta+1}(M_t(z) - m_t(z)).$$

这意味着

$$osc_{S_{\frac{\tau^k\mu_0^5}{C_0}}(z)}\bar{u} \leq (\frac{\beta-1}{\beta+1})^k osc_{S_{\frac{\mu_0^5}{C_0}}(z)}\bar{u} \leq 2(\frac{\beta-1}{\beta+1})^k|\bar{u}|_{L^\infty}.$$

利用引理 4.8，我们得到

$$B_{\frac{1}{C}(\frac{\tau^k\mu_0^5}{C_0})^{\frac{1}{2}+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(z) \subset S_{\frac{\tau^k\mu_0^5}{C_0}}(z).$$

因此我们有：

$$osc_{B_{C(\frac{\tau^k\mu_0^5}{C_0})^{1+log_{\mu_0}(1-C\sigma^{\frac{1}{2}})}}(z)}\bar{u} \leq 2(\frac{\beta-1}{\beta+1})^k|\bar{u}|_{L^\infty} \leq 4(\frac{\beta-1}{\beta+1})^k|u|_{L^\infty}.$$

由于 $\frac{\beta-1}{\beta+1} < 1$，这意味着：

$$osc_{B_r(z)}u = osc_{B_r(z)}\bar{u} \leq Cr^\alpha,$$

由此完成引理的证明。 □

8. Some corollaries of the main theorem

证明。（推论 1.8 的证明）

现在取一点 $p_0 \in M$，并在 p_0 处取正规坐标 $(z_1, \cdots, z_n)$，使得 $g_{i\bar{j}}(p_0) = \delta_{ij}$ 且 $\nabla g(p_0) = 0$。我们可以选取局部势函数$\rho(z)$，使得在 p_0 附近（例如在 $B_1(p_0)$ 上，局部坐标为 z）有 $\omega_0 = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\rho$ 。因此，在这个邻域内，方程可以写成：

$$\det((\rho+\phi)_{i\bar{j}}) = f\det(g_{i\bar{j}}), \quad \text{in } B_1. \tag{8.1}$$

为了使用定理 1.7，我们需要在合适的尺度下对 p_0 处的 (8.1) 进行放大，使得右端接近一个常数。

令 $0 < r_0 < 1$，我们进行变量代换 $z = r_0 w$。接下来定义

$$\tilde{u}_{r_0}(w) = \frac{1}{r_0^2}u(r_0 w), \ \tilde{\rho}_{r_0} = \frac{1}{r_0^2}\rho(r_0 w), \ \tilde{\phi}_{r_0}(w) = \frac{1}{r_0^2}\phi(r_0 w).$$

因此我们有：

$$L_{\tilde{\rho}_{r_0}+\tilde{\phi}_{r_0}}(\tilde{u}_{r_0} - \tilde{\phi}_{r_0}) = 0.$$

根据该 W^2篇, ^{p} 论文中推论 1.1 的证明，若令 r_0 足够小（其取值取决于 ω_0），并令 ϵ 足够小，则定理 1.7 的假设成立，其中 ϕ 替换为 $\tilde{\rho}_{r_0} + \phi_{r_0}$， u 替换为$\tilde{u}_{r_0} - \phi_{r_0}$。于是我们可以应用定理 1.7，得到：

$$||\tilde{u}_{r_0} - \tilde{\phi}_{r_0}||_{C^\alpha(B_{\frac{1}{2}}(0))} \leq C.$$

这意味着：

$$||\tilde{u}_{r_0}||_{C^\alpha(B_{\frac{1}{2}}(0))} \leq C.$$

利用一个初等的覆盖论证，我们得到：

$$||u||_{C^{\alpha}(M)} \leq C.$$

□

9. Bibliography

References

[1] E. Bedford 和 B. A. Taylor。复蒙日-安培方程的狄利克雷问题。《数学发明》第 37 卷（1976 年），1-44。[2] Chen, Xiuxiong 和 Jingrui Cheng。关于常数标量曲率 K¨ahler 度量（I）——先验估计。《美国数学学会杂志》34.4（2021）：909-936。[3] Caffarelli, Luis 和 Cristian Guti´errez。与蒙日-安培方程相关的实分析。《美国数学学会会刊》348.3（1996），1075-1092。[4] Caffarelli, Luis 和 Cristian Guti´errez。线性化 Monge–Ampère 方程解的性质。《美国数学杂志》119.2（1997），423-465。[5] Chen, Xiuxiong、Hongnian Huang 和 Li Sheng。托里克曲面上 Calabi 流的内部正则性。《变分法与偏微分方程》55.4（2016）：1-28。[6] Cheng, Jingrui 和 Xu Yulun。复蒙日-安培方程小扰动的内部 W^{2,p} 估计。arXiv 预印本 arXiv:2301.00940（2022）。[7] Guti´errez, Cristian 和 Truyen Nguyen。线性化 Monge-Amp`ère 方程解的内部二阶导数估计。《美国数学学会会刊》367.7（2015）：4537-4568。[8] Guti´errez, Cristian E. 和 Truyen Nguyen。线性化 Monge–Amp`ère 方程解的内部梯度估计。《数学进展》228.4（2011）：2034-2070。[9] Gilbarg, David 和 Neil S. Trudinger。二阶椭圆偏微分方程。第224卷，第2期。柏林：Springer，（1977）。[10] Huang, Qingbo。具有 VMO 型数据的蒙日-安培方程解的二阶导数尖锐正则性结果。《纯粹与应用数学通讯：由库兰数学科学研究所发行的期刊》62.5（2009）：677-705。[11] Le, Nam。线性化 Monge-Ampere 方程的边界 Harnack 不等式及其应用。《美国数学学会会刊》369.9（2017）：6583-6611。[12] Le, N. Q. 和 Ovidiu Savin。线性化 Monge–Amp`ère 方程解的边界正则性。《理性力学与分析文档》210.3（2013）：813-836。[13] Tang, Lin 和 Qian Zhang。具有 VMO 型系数的线性化 Monge-Ampere 方程的全局 W^{2}, W^{p} 正则性。《数学研究成果》77.2（2022）。[14] Tang, Lin 和 Qian Zhang。线性化 Monge–Amp $C^{1,\alpha}$ ère 方程在具有 VMO 型系数时的内部正则性。《算子理论进展》5.1（2020）：204-218。[15] Zhou, Bin。托里克曲面极值度量的变分解。《数学杂志》283.3（2016）：1011-1031。