SE通过梅林变换得到的若干经典恒等式

Khristo N. Boyadzhiev

俄亥俄北方大学数学系，美国俄亥俄州阿达，45810

电子邮箱：k-boyadzhiev@onu.edu

DOI:

摘要。我们提出一条利用梅林变换的求和法则，用以简洁地证明特殊函数与伯努利多项式和欧拉多项式之间的一些重要经典关系。例如，赫尔维茨ζ函数在负整数处的取值可以用伯努利多项式表示。我们还给出了涉及指数多项式和埃尔米特多项式的恒等式。

1. 引言

全文中，我们用记号 $a+it=\sigma+t\in\mathbb{R}$ 表示实部为$0<\sigma<1$、方向从负无穷指向正无穷的竖直直线。首先回顾梅林变换的公式

$$G(s)=\int_0^\infty x^{s-1}g(x)dx$$

及其逆变换

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}x^{-s}G(s)ds,\ \ x>0. \tag{1}$$

定义。对于>0 n，考虑如下形式的积分

$$\int_{L(n)}x^{-s}G(s)ds,\ \ x>0$$

其中 $L(n)$ 由线段 $[-ni,ni]$以及左半平面内的半圆 $R(n)$ 构成，且该线段为半圆的对角线。如果积分

$$\int_{R(n)}x^{-s}G(s)ds$$

当 $n\to\infty$ 时趋于零，我们称式 (1) 中的积分路径可以向左闭合。同理，我们定义积分路径可以向右闭合的积分。

命题。假设函数 $G(s)$ 在半平面 $Re\ s<a+\varepsilon$上亚纯，其中 $\varepsilon>0$ 足够小，并且仅在 $s=0,-1,-2,...$ 处有简单极点，其留数为c_0、c_1、c_2、...。如果式（1）中的积分路径可以向左闭合，则由留数定理可得表示式

2010年数学主题分类：30B10、11M05、11M41、33B15。关键词：黎曼ζ函数、勒奇超越函数、多对数函数、双伽马函数、欧拉常数。

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \tag{2}$$

对于式（1）中的函数 $g(x)$，即该函数是一个幂级数。如果此时 $f(s)$ 是定义在 $Re\ s\ a<\ +\varepsilon$ 上且无极点的适当全纯函数，我们可以写成

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)} x^{-s} f(s)G(s)\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\, f(-n)x^n\,, \tag{3}$$

当右侧的幂级数收敛时。

这类公式用于级数求和或插值，并见于许多出版物中（参见 [2, 4, 9, 10] 及其中的参考文献）。

本文着重探讨命题的一类特殊应用：通过梅林反演并比较系数来获得一些经典恒等式。为使文章简短，我们省略细节，也不讨论某些积分和级数的收敛性。这类公式的有效性见 [4, 9, 10]。

以下示例展示了该方法的应用。

2 示例

提醒一下，伽马函数在零点和负整数处的留数由 $\mathrm{Res}(\Gamma,-n)=(-1)^n/n!$ for $n=0,1,2,\ldots$ 给出。此外，$\Gamma(s)$ 在竖直线上快速衰减。我们有估计 ([15, (20)]

$$|\Gamma(a+it)|\sim\sqrt{2\pi}\,|t|^{a-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|},\ a\in\mathbb{R}$$

当 $|t|\to\infty$ 时。该估计有助于保证积分收敛。

上述事实将在以下示例中用到。请注意，在这些示例中，积分路径可以向左闭合（证明是标准的，利用 $\Gamma(s)$ 的增长估计即可）。另请注意，在 (3) 中将 $G(s)$ 替换为 $\Gamma(s)$ 时，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)} x^{-s} f(s)\Gamma(s)\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f(-n)x^n\,. \tag{4}$$

示例 1. 拉马努金主定理。正如 Hardy 在 [8], 中所写，拉马努金非常钟爱他的积分公式 [8, p.186]

$$\int_0^{\infty}x^{s-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)(-x)^n}{n!}\right\}dx=f(-s)\Gamma(s) \tag{5}$$

并将其用于许多应用。Berndt 恰当地称之为拉马努金主定理 [2,第 11 项，第105]页。(5) 式的详细内容、注释和应用见于这两本书以及 [1, 4, 6]。显然，将 $f(s)$ 替换为 $f(s-)$ 后，经过梅林反演，方程 (5) 就变成了 (4)。拉马努金证明时没有使用留数定理，而只用了标准微积分（见 [2, 第106]页）。

例 2. 赫尔维茨ζ函数定义为

$$\zeta(s,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^s}\quad (\mathrm{Re}(z)>0,\ \mathrm{Re}(s)>1)$$

带有积分表示

$$\zeta(s,z)\Gamma(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}\frac{e^{t(1-z)}}{e^t-1}dt\quad (\mathrm{Re}(s)>1)$$

当 1z = ，(,ζ 1 =ζ) ( )s s是黎曼 ζ 函数 [5]。

我们还有修正后的积分表示（论证与[13]第 61—62 页中的相同）

$$\zeta(s,z)\Gamma(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}\left(\frac{e^{t(1-z)}}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)dt\quad (0<\mathrm{Re}(s)<1)$$

这是一个梅林变换公式。根据梅林反演

$$\frac{e^{t(1-z)}}{e^t-1}-\frac{1}{t}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}t^{-s}\zeta(s,z)\Gamma(s)ds=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\zeta(-n,z)$$

与此同时，伯努利多项式 ( )nB z 具有生成函数

$$\frac{xe^{xz}}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(z)}{k!}x^k$$

由此

$$g(x,z)\equiv\frac{e^{x(1-z)}}{e^x-1}-\frac{1}{x}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k(1-z)}{k!}x^{k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}(1-z)}{(n+1)!}x^n.$$

因此，通过比较 0、1、.....n = 的系数，我们得到经典公式

$$\zeta(-n,z)=\frac{(-1)^nB_{n+1}(1-z)}{n+1}=-\frac{B_{n+1}(z)}{n+1}$$

（利用性质 (1) (1) ( ) n n nB z B z − − = ，从而有 − +1 − = − +1 (1) (1) ( ) n n nB z B z ）。

特别地,

$$\zeta(0,z)=-B_1(z)=\frac{1}{2}-z.$$

对于伯努利数 (= 0 = −1 n 1) ( ) ( )n n n B B B, 我们有

$$\zeta(-n)=\zeta(-n,1)=\frac{(-1)^nB_{n+1}(0)}{n+1}=\frac{(-1)^nB_{n+1}}{n+1}.$$

奇数阶伯努利数除 1 = −1/ 2B 外均为零。因此 (ζ 0 = −1 2) / 。

接下来，我们给出 Kenneth Williams 和张南岳 [14] 的一个结果的新证明。

例 3. 现在考虑交错赫尔维茨ζ函数

$$\eta(s,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+z)^s}\quad (\mathrm{Re}(z)>0,\ \mathrm{Re}(s)>0)$$

该函数关于变量 s 在整个复平面上解析延拓，并具有积分表示

$$\eta(s,z)\Gamma(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}\frac{e^{t(1-z)}}{e^t+1}dt\quad (\mathrm{Re}(s)>0).$$

通过反演

$$\frac{e^{t(1-z)}}{e^t+1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}t^{-s}\eta(s,z)\Gamma(s)\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\eta(-n,z)x^n.$$

欧拉多项式 $E_n(z)$ 由生成函数定义

$$\frac{2e^{tx}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!}\quad (|t|<\pi).$$

比较系数可得

$$\eta(-n,z)=\frac{(-1)^n}{2}E_n(1-z)=\frac{1}{2}E_n(z)$$

根据性质（1）（1）（）$^{n}{}_{n}{}_{n}$ E z E z − = − 。

例4。欧拉研究了函数

$$L(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}\quad (\mathrm{Re}\,s>0)$$

我们在此称其为欧拉的L函数（有时也称为狄利克雷的L函数）。该函数具有积分表示

$$2\Gamma(s)L(s)=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{\cosh x}dx.$$

它在复平面上也具有解析延拓。

通过梅林反演并利用方程（4）

$$\frac{1}{2\cosh(x)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}x^{-s}L(s)\Gamma(s)\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}L(-n)x^n$$

欧拉数$_nE$由生成函数定义

$$\frac{1}{\cosh x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}x^n.$$

该函数是偶函数，因此奇数指标对应的欧拉数均为零。通过比较系数可得

$$L(-2n)=\frac{1}{2}E_{2n}\quad (n=0,1,2,...).$$

例5。指数多项式$_n\varphi$ 由生成函数定义

$$e^{z(e^x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(z)\frac{x^n}{n!}$$

（见 [3, 12]）。我们将使用函数

$$\psi(x,z)=e^{z(e^{-x}-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\varphi_n(z)\frac{x^n}{n!}$$

其梅林变换为

$$\Psi(s,z)=\int_0^{\infty}x^{s-1}\psi(x,z)\,dx=e^{-z}\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{ze^{-x}}dx$$

$$=e^{-z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left\{\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-nx}dx\right\}=e^{-z}\Gamma(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!n^s}=\Gamma(s)f(s,z)$$

with

$$f(s,z)=e^{-z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!n^s}.$$

现在，由方程（4）可得

$$\psi(x,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}x^{-s}\Psi(x,s)ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}x^{-s}f(s,z)\Gamma(s)ds=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f(-n,z)x^n$$

因此，当 $n\geq 0$ 时（满足条件 $0^0=1$）

$$\varphi_n(z)=f(-n,z)=e^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}z^k \tag{6}$$

这是指数多项式的基本性质之一。
注意，恒等式（6）可用于将 $\varphi_n(z)$ 有意义地推广到 $\varphi_\lambda(z)$，其中索引 λ 可以是非整数。例如，我们有（其中 $0^\lambda=0$）

$$\varphi_\lambda(z)=e^{-z}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^\lambda}{k!}z^k.$$

例6. 埃尔米特多项式的生成函数为

$$\psi(x,z)=e^{2xz-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(z)\frac{x^n}{n!}$$

其梅林变换为 [11, p. 27]

$$\Psi(s,z)=e^{\frac{z^2}{2}}2^{-s/2}D_{-s}(\sqrt{2}z)\Gamma(s).$$

其中$_pD$为抛物柱面函数 [7, pp. 1065-1067]。现在令

$$f(s,z)=e^{\frac{z^2}{2}}2^{-s/2}D_{-s}(\sqrt{2}z).$$

Then ( ) (= −1 ^{n} −) (,)$_nH$ z f nz并且由于 ( ) (= −1 ^{n} −) ( )$_n$ $_nH$ z H z, 可得经典结论 t

$$H_n(z)=2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{z^2}{2}}D_n(\sqrt{2}z)$$

([7, 条目 9.253, 第1067]页)。

6. 结论

本文介绍了一条规则，说明如何利用梅林变换简洁地证明若干经典恒等式，尤其是将伯努利多项式和欧拉多项式与赫尔维茨函数及交错赫尔维茨函数在负整数处的取值联系起来的恒等式。我们还证明了关于指数多项式和埃尔米特多项式的恒等式。

参考文献

[1] T. Amdeberhan、I. Gonzalez、M. Harrison、V. H. Moll、A. Straub，“拉马努金主定理”，The Ramanujan Journal，29，103–120（2012）。[2] B. C. Berndt，《拉马努金笔记》，第一、二部分，Springer-Verlag，纽约（1985，1989）。[3] K. N. Boyadzhiev，“指数多项式、斯特林数以及某些伽马积分的求值”，Abstract and Applied Analysis，文章编号 168672（2009）。[4] G. Dahlquist，“关于由 Plana、Lindelöf 和 Abel 导出的求和公式及相关的高斯–克里斯托费尔求积公式，I”，BIT Numer. Math.，37(2)，256-295（1997）；“关于由 Plana、Lindelöf 和 Abel 导出的求和公式及相关的高斯–克里斯托费尔求积公式，II”，BIT Numer. Math.，37(4)，804-832（19 关的高 9）。[5] H. M. Edwards，《黎曼ζ函数》，Academic Press，波士顿（1974）。[6] I. González、V. H. Moll、I. Schmidt，“广义拉马努金主定理在费曼图求值中的应用”，Adv. Appl. Math.，63，214-230（2015）。[7] I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik，《积分、级数与乘积表》，Academic Press（1980）。[8] G. H. Hardy，《Ramanujan》，Cambridge University Press（1940）。[9] E. Lindelöf，《留数计算及其在函数论中的应用》，Gauthier-Villars，巴黎（1905）。[10] D.S. Mitrinovic 和 J. D. Keckic，《柯西留数法》，D. Reidel Publ. Co.，多德雷赫特/波士顿（1984）。[11] F. Oberhettinger，《梅林变换表》，Springer-Verlag，纽约，1974。

[12] Gian-Carlo Rota，有限算子微积分，Academic Press，纽约，（1975）。[13] D.V. Widder，变换理论导论，Academic Press，纽约，（1971）。[14] K. S. Williams 和 Z. Nan-Yue，“Lerch ζ 函数的特殊值及某些积分的求值”，美国数学会会刊，**119**，35-49（1993）。[15] W. Heap，《伽马函数与黎曼 ζ 函数笔记》（在线出版物）。
https://wiki.math.ntnu.no/_media/ma3001/2014v/analytisktallteori/the_riemann_zeta_function_notes.pdf