arXiv:2301.01797v1 [physics.flu-dyn] 4 Jan 2023

横向磁场作用下液态钢中氩气泡上升的动力学

Purushotam Kumar*[1] 和 Surya P. Vanka†[2]

[1]康宁公司，制造技术与工程，纽约州科宁 14830[2]机械科学与工程，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，伊利诺伊州厄巴纳 61801

2023年1月6日

摘要

含气泡流存在于各种工业过程中，包括冶金过程。在这些过程中，气泡从大块液态金属底部注入，以搅拌液态金属并使其均匀化。了解这类气泡的运动至关重要，因为研究表明，气泡上浮可以去除夹杂物。本研究通过数值方法研究了横向磁场作用下，一对串列氩气泡在熔融钢中上升的三维动力学。我们考察了两种横向磁场强度（$Bx = 0$ 和 $0.2\ T$）的影响，并比较了不同磁场下气泡的运动和瞬态上升速度。本文讨论了气泡的形状变形和运动路径，并分析了气泡后方的流动结构。研究发现，在磁场作用下，流动结构更有序且呈细长状；而不施加磁场时，流动结构则复杂且相互交织。我们采用基于几何构造的流体体积法（*VOF*）追踪界面、维持质量守恒并估算界面曲率。此外，我们还采用了锐界面力法（*SSF*）来处理表面张力。该算法能够最大限度地减少伪速度。

关键词：气泡动力学；磁对流；涡相互作用；气泡相互作用；流体体积法（VOF）；锐界面力

1 引言

含气泡流存在于各种工业过程和日常生活中。为在冶金过程中混合并均匀化金属，通常从大块液态金属底部注入气泡，以搅拌液态金属。在广泛应用于

*pkumar8@illinois.edu
†spvanka@illinois.edu

炼钢的钢连续铸造过程中，通常会在铸造过程中注入氩气泡。了解这类氩气泡的运动至关重要，因为研究表明，气泡上浮可以去除夹杂物。此外，为提高产品质量，人们常常施加外加磁场，以控制流体运动和气泡行为。在过去几十年里，针对气泡在透明液体（如水和油类）中上升时的动力学，已开展了大量理论、实验和计算研究。然而，关于液体在外加磁场作用下气泡运动的研究报道仍然很少。

上升气泡的动力学取决于厄特沃什数（$Eo = \Delta\rho g d^2\sigma^{-1}$，也称邦德数 $Bo = \rho_l g d^2\sigma^{-1}$）、莫顿数（$Mo = g\mu_o^4\rho_l^{-1}\sigma^{-3}$）、约束比（$C_r$ =Wd^{-1}）和哈特曼数 $Ha = \mathrm{B}d\sqrt{\sigma/\mu_l}$（Jin等人，2016；Kumar等人，2015年a）。Grace（1973）、Grace等人（1976）以及Bhaga和Weber（1981）的研究汇总了大量关于无约束介质中气泡上升的实验数据，并以列线图的形式展示了不同邦德数和莫顿数组合下的终端雷诺数及气泡形状。此外，气泡与壁面的距离会改变气泡的上升速度和形状，并增大气液界面处的剪切力（Figueroa-Espinoza等人，2008；Kumar和Vanka，2015）。Clift等人（1978）和DeKee（2002）的研究对牛顿流体中的气泡动力学作了详细综述。

多位作者研究了无磁场条件下牛顿流体中多气泡上升的动力学（Abbassi等人，2018；Gumulya等人，2017；Watanabe和Sanada，2006年；Yuan和Prosperetti，1994；Legendre等人，2003年；Yu等人，2011；Katz和Meneveau，1996；Ruzicka，2000），并指出气泡周围的流动结构对前导气泡与尾随气泡之间的相互作用有重要影响。他们还指出，尾随气泡前方的尾流在降低其周围阻力方面发挥着重要作用。由于阻力减小，尾随气泡会加速，直至与前导气泡聚并。

本文简要讨论了一种用于模拟两相流的数值方法，并利用该方法研究在给定气泡尺寸和中心距的条件下，横向磁场作用时两个尺寸相同的气泡在熔融钢中的三维变形与上升过程。本文考察了气泡形状、上升速度和上升轨迹等多种参数。计算所用算法见数值方法部分。问题描述见计算细节部分。在结果与讨论部分，我们展示模拟结果并讨论关键发现。文末对本研究的发现进行了总结。

2 问题设置

我们研究一对在充满液态钢的矩形柱中上升的可变形氩气泡。初始尺寸(d) 和形状均相同，且均为球形；两者中心之间的初始距离(h) 可调。尾随气泡最初置于距底部边界两个直径处、管道横截面的中心，而前导气泡则置于与其相距 h的位置。求解过程开始时，两种流体（柱内液体和气泡）均处于静止状态。施加给定强度的恒定横向磁场(B_x)，方向为 $x-$ 方向。重力沿 $z-$轴负向作用。我们考虑了一个三维计算域，其尺寸分别沿 $4d \times 4d \times 24d$ 方向为 x， y 和 z；计算域的所有边界均为无滑移、不可穿透的绝缘壁面。根据系统的网格细化研究，我们选定每个气泡直径方向上32 个控制体作为适当的分辨率，本研究采用的网格包含32 个控制体/气泡直径，共 $128 \times 128 \times 768$ (≈ 13 百万个控制体。图1 展示了计算域示意图。

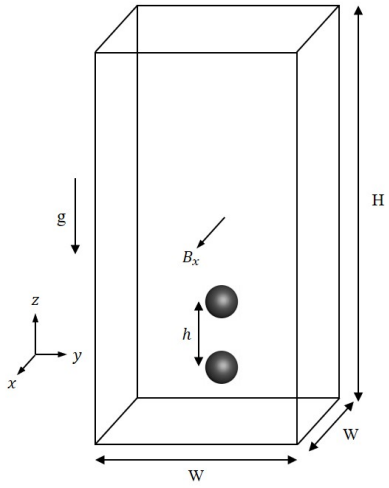


图 1：液柱中气泡的初始位置

钢和氩的材料属性取值如下：密度分别为 7000 和 0.56 kg/m^3，黏度分别为 6.3×10^{-3} 和 $7.42 \times 10^{-5} Pa\ s$，电导率分别为 714000 和 10^{-15} $1/(\Omega\ s)$。表面张力（γ）取值为 $1.2\ N/m$。

3 数值方法

控制方程

我们采用式（1）、（2）和（3）-（4）给出的连续性方程、动量方程和电磁方程来模拟气泡动力学。我们假设流动不可压缩且等温（忽略

黏性耗散或涡流产生的任何热量）。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\mu \left[\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T\right]\right) + \rho \mathbf{g} + \gamma \kappa \mathbf{n} \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) + \mathbf{F}_L \tag{2}$$

$$\mathbf{J} = \sigma (-\nabla \Phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{3}$$

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = \nabla \cdot [\sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] \tag{4}$$

在上述方程中，$\mathbf{u}$ 表示流体速度，p 表示压力，ρ 表示密度，μ 表示动力黏度，γ 表示表面张力系数，κ 表示界面曲率，$\mathbf{n}$表示界面法向量，δ 表示狄拉克δ函数，$\mathbf{x}$ 表示求解该方程的空间位置，$\mathbf{x}^f$ 表示界面位置，$\mathbf{g}$ 表示重力加速度，$\mathbf{J}$ 表示电流密度，$\mathbf{B}$ 表示外加磁场，Φ 表示电势，and σ 表示电导率。

$\mathbf{F}_L$ 表示洛伦兹力，计算方式为 $\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$，电流密度 $\mathbf{J}$ 根据欧姆定律由式（3）计算，电势（Φ）由式（4）计算。我们还求解一个方程来强制满足无散条件 （$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$），以保证电流密度满足电荷守恒性质。

液相和气相分布由液相体积分数 （α）区分。我们求解由式（ α ）给出的 5 对流方程，以捕捉两种流体界面的运动。

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = 0 \tag{5}$$

我们采用液相体积分数的线性加权来计算混合物密度、黏度和电导率，如下:

$$\rho = \alpha \rho_l + (1 - \alpha) \rho_g \tag{6}$$

$$\mu = \alpha \mu_l + (1 - \alpha) \mu_g \tag{7}$$

$$\sigma = \alpha \sigma_l + (1 - \alpha) \sigma_g \tag{8}$$

下标 l 和 g 分别表示气相和液相。

求解过程

多相算法的准确性和速度取决于界面跟踪、表面张力建模、减小界面两侧的动量不平衡、处理物性不连续性等方法。在我们当前的数值方法中，采用几何构造方法Rider and Kothe（1998年）来表示网格单元内的界面，并计算单元面处的体积分数通量。界面法向量由 α 采用二阶

中心差分格式计算导数。采用Noh andWoodward （1976年）的二阶算子分裂方法；Li （1995年）；Ashgrizand Poo （1991年）的方法求解VOF方程。具体而言，首先进行沿一个方向（x、y或z）的平流，然后进行沿其余两个方向的平流。我们轮换平流的顺序，以减小算子分裂方法引入的方向偏置误差。动量方程（式（2））中的平流项也采用几何方法计算，以确保体积分数平流与动量平流之间的一致性。Kumar （2016年）；Kumar等人（2015b）详细介绍了在三维中实施几何构造方法所涉及的挑战及其缓解措施。

该 $\gamma\kappa\mathbf{n}\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}f\right)$ 项（式（2））表示界面处的表面张力，其中 $\gamma\kappa$ 为拉普拉斯压力跃变。在当前算法中，我们采用尖锐表面力（SSF）（Francois等人，2006年；Wang和Tong，2008年；Kumar等人，2019年）方法对纳维–斯托克斯方程中的表面张力项进行建模。这里，表面张力项写作压力梯度项，形式如下：

$$\gamma\kappa\mathbf{n}\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_f\right)=-\nabla\tilde{p} \tag{9}$$

其中， $\tilde{p}$ 是仅由界面处表面张力产生的压力。由连续性方程和动量方程可得到关于 $\tilde{p}$ 的泊松方程，

$$\nabla\cdot\left(\frac{\nabla\tilde{p}}{\rho}\right)=0 \tag{10}$$

在求解式（9）时，采用了式（10）给出的界面跃变条件。这确保了表面张力导致的界面压力差精确无误。采用此方法，对于曲率已知解析值的静止气泡，伪速度可降至机器精度；而在曲率由数值计算得到时，伪速度也会非常小。我们采用了Rudman （1998年）；Cummins等人(2005年)的高度函数法来估算曲率。诚然，在纳维–斯托克斯方程中引入表面张力的方法有多种（Renardy和Renardy Renardy和Renardy (2002年）、Sussman等人Sussman （2003年）；Sussman等人（2007年）、Gueyffier等人Gueyffier等人(1999年））， 然而，根据我们的经验，当前方法在降低伪速度方面更准确，并且相对更容易在图形处理器上实现。

动量方程和连续性方程采用有限体积法在同位笛卡尔网格上离散。动量方程中的各项使用阿达姆斯–巴什福思时间推进法进行积分，在时间和空间上均达到二阶精度。对流项$(\nabla\cdot\rho uu)$采用几何方法计算，并通过线性插值求得面速度。压力梯度项定义在单元面上，其形式为 $\frac{\nabla p}{\rho}$ 。将压力梯度与密度耦合，可消除密度插值中的任何歧义，从而得到一种稳健的方法。黏性项

—

采用二阶中心差分格式计算。面密度和黏度通过线性插值求得。

式（3）和（4）所给出的电磁方程与连续性方程和动量方程在同一网格上求解。磁场强度 （**B**）、电势 （Φ）、电流密度 （**J**）和热导率 （σ）存储在单元中心，并采用线性平均格式计算单元面上的值。

在这种数值方法中，我们求解三个泊松方程：压力（p）、表面张力压力（$\tilde{p}$）和电势（Φ）。这些方程通过几何多重网格加速的红黑超松弛迭代格式高效求解。

计算域的所有边界均视为壁面，因此在这些边界上施加无滑移、无穿透和绝缘边界条件。

$$u_{wall} = v_{wall} = w_{wall} = 0 \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \hat{n}}\right)_{wall} = \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \hat{n}}\right)_{wall} = 0 \tag{12}$$

$$J_{wall} = J_{wall} = J_{wall} = 0 \tag{13}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}}\right)_{wall} = 0 \tag{14}$$

我们已实现该算法，使其能够在多个图形处理器（GPU）上运行。我们使用了 Portland Group （PGI）Fortran 编译器支持的 CUDA-Fortran 平台。此前，我们已验证多GPU实现（Kumar 等，2015b；Vanka 等，2016；Kumar，2016），并将其用于研究气泡动力学的约束效应（Kumar 和 Vanka，2015）、T形接头处的两相流（Horwitz 等，2012，2013；Kumar 等，2013）、非牛顿流体中的气泡动力学（Kumar 等，2015a，2019）、方形管道中的液滴动力学（Horwitz 等，2014，2019）、液态钢中氩气气泡的上升（Vanka 等，2015；Jin等人，2016；Kumar 和 Vanka，2022）以及湍流含气泡流（Vanka 等，2016；Kumar 和 Vanka，2021）。

通过分析控制方程，我们发现，气泡在受限导电液体介质中上升的动力学过程取决于以下无量纲参数。

$$\text{Bond number} = Bo = \rho_l g d^2/\gamma \tag{15}$$

$$\text{Morton number} = Mo = g\mu_l^4/\rho_l\gamma^3 \tag{16}$$

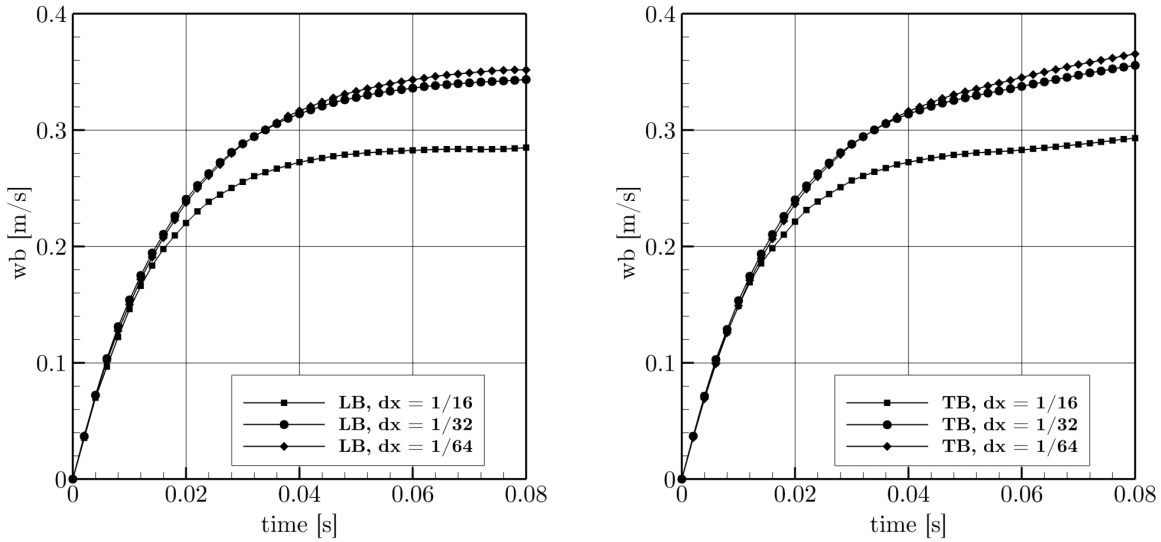
$$\text{哈特曼数} = Ha = Bd\sqrt{\sigma/\mu_l} \tag{17}$$

$$\text{Confinement ratio} = C_r = W/d \tag{18}$$

$$\text{中心距} = h_d = h/d \tag{19}$$

网格细化研究

我们开展了系统的网格细化研究，以了解网格尺寸对气泡动力学的影响。在这项网格细化研究中，我们考虑了三种网格，即：粗网格（$\Delta x = d/16$： $64 \times 64 \times 384$）、细网格（$\Delta x = d/32$： $128 \times 128 \times 768$）和更细网格（$\Delta x = d/64$： $256 \times 256 \times 1536$），并分析了前导气泡和尾随气泡的上升速度及形状。

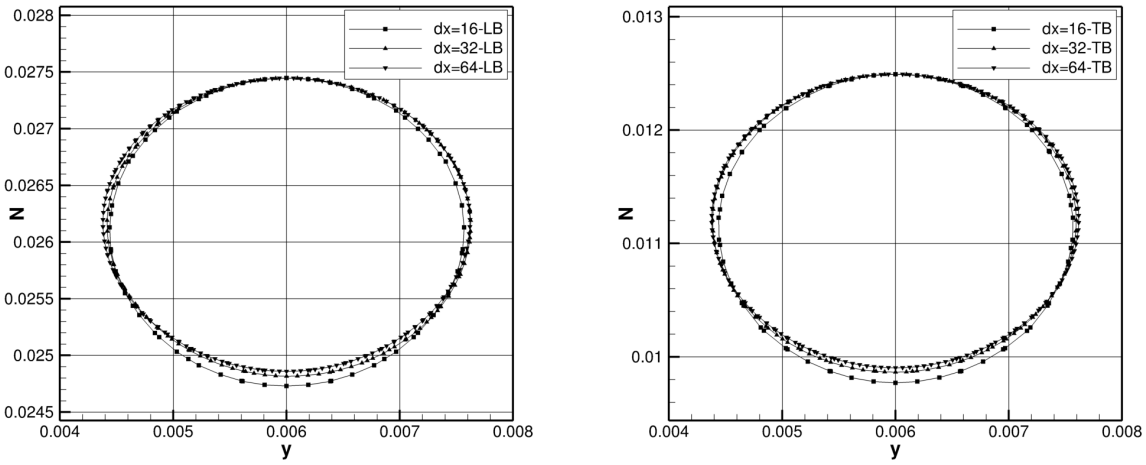


（a）前导气泡的上升速度　　（b）尾随气泡的上升速度

图 2： 三种网格尺寸下前导气泡和尾随气泡的上升速度

图 2 展示了三种不同网格下前导气泡和尾随气泡的上升速度。从图中可以看出，两个气泡最初均以较快的速率加速，随后减速并达到稳态。在本研究所考虑的总模拟时间内，我们注意到前导气泡达到了稳态，而尾随气泡仍在继续加速。此外，可以观察到，三种网格下前导气泡和尾随气泡的上升速度在 15 ms 之前几乎完全相同，此后则出现差异。粗网格预测的速度最低，并且随着网格细化而增加。对于前导气泡，在 $t = 0.08$ ms 时，1/32 和 1/64 网格下的上升速度分别为 0.2848、0.3434 和 0.3581 m/s。更细网格与细网格之间的上升速度差异为 4.1%，而更细网格与粗网格之间的差异为 20.5%。类似地，对于尾随气泡，在 $t = 0.08$ ms 时， $\delta x = 1/16$、1/32 和 1/64 网格下的上升速度分别为 0.2931、0.3557 和 0.3654 m/s。更细网格与细网格之间的上升速度差异为 2.6%，而更细网格与粗网格之间的差异为 19.8%。

图3 显示了先行气泡达到稳态时计算域中心平面上的气泡形状



(a) 前导气泡的形状　　(b) 尾随气泡的形状

图 3： 三种网格尺寸下前导气泡和尾随气泡的形状

气泡已达到稳态。为便于更好地比较结果，我们对齐了三种网格中气泡的顶部。可以看出，随着网格逐渐细化，气泡变得更加扁平，而$\Delta x = 1/16$ 网格预测的先行气泡和尾随气泡均具有最大的高度和最小的宽度。随着网格细化至 $\Delta = 1/32$ 和 $1/64$ ，高度和宽度均趋于收敛，细网格与更细网格之间的差异非常小。

根据三种网格的上升速度和形状对比，我们决定采用 $\Delta x = 1/32$ 作为合适的网格，以便在计算成本适中的情况下获得准确结果。以下讨论的结果均基于细网格（$\Delta x = d/32$： $128 \times 128 \times 768$）。

4 结果与讨论

下面介绍一项研究的结果，该研究分析横向磁场对气泡变形、上升速度、上升路径和涡脱落的影响。我们考虑了直径为 $7\ mm$ 的气泡，前导气泡位于尾随气泡上方 3 个直径处，并采用两种磁场强度（0 和 0.2 T）来研究其影响。对于这些条件，关键的无量纲参数为 $Bo = 2.8$、$Mo = 1.2 \times 10^{-12}$、 $C_r = 4$、 $h_d = 3$ 和 $Ha = 14.9$。需要指出的是，气泡最初位于横截面中心，但在上升过程中可能会靠近壁面。因此，瞬时约束比可能会发生变化。

我们首先观察气泡向上运动时的瞬态形状。根据 Grace 图 Grace (1973年)， 初始为球形的气泡 $Bo = 2.8$ 在 $Mo =$液体介质中上升时

1.2×10^{-12}会变形成较扁平的椭球形，表面振荡最小。在当前的研究中，由于磁场引入了额外的作用力，气泡动力学（包括形状和轨迹）预计会有所不同。

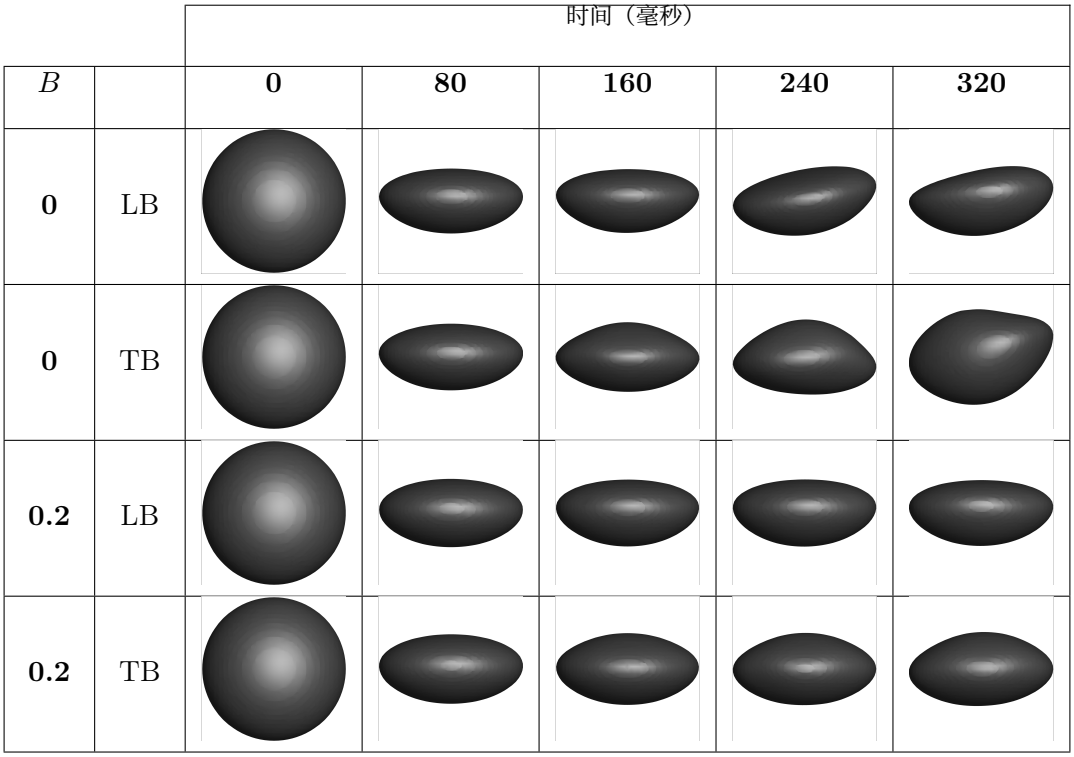


图 4： 两种磁场下气泡瞬态形状的三维正视图

图 4 显示了在 $\mathbf{B} = 0$ 和 0.2 时前导气泡（LB）和尾随气泡（TB）的瞬态形状。在没有磁场的情况下，前导气泡从球形变形为椭球形，到 80 毫秒时其顶部和底部表面呈不对称形状，并在剩余模拟时间内保持椭球形。我们可以看到，在 160 毫秒之前，气泡的长轴呈水平状态，随后在 160—240 毫秒之间转变为左右振荡（摇摆）。尾随气泡也经历了类似的变化，到 80 毫秒时从球形变为椭球形，但之后仍持续变形。上下表面的形状振荡依次表现为：上表面较平（80 毫秒）、上表面较圆（160 毫秒）、上表面隆起（240 毫秒），之后上表面变得不规则。

在磁场作用下，前导气泡和尾随气泡的变形程度都比无磁场时小，但尾随气泡的变形仍然比前导气泡更明显。可以看到，前导气泡在 80 ms 时已达到稳态形状，之后没有发生形状振荡或摇摆运动。然而，尾随气泡在 80 ms 后仍持续变形，在此处考察的时间范围内未能达到稳态形状。

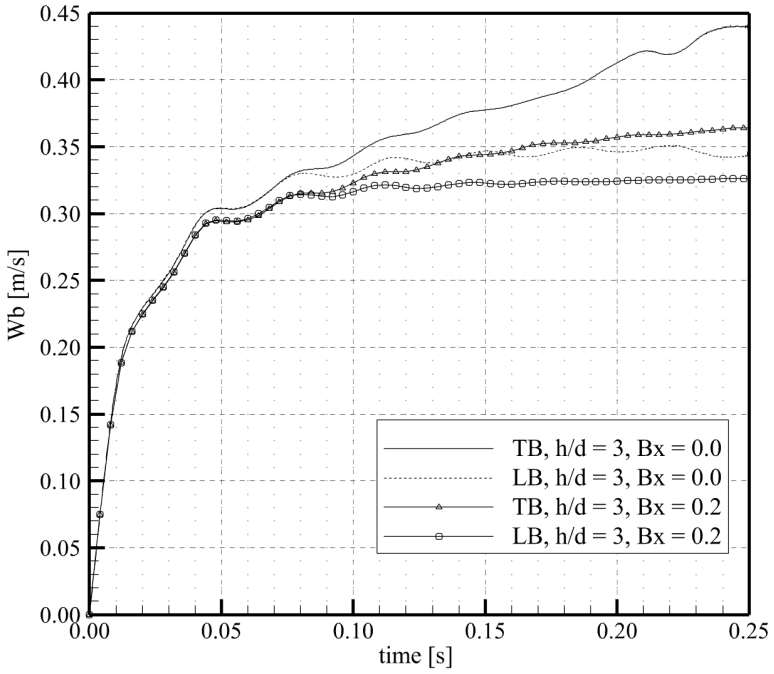
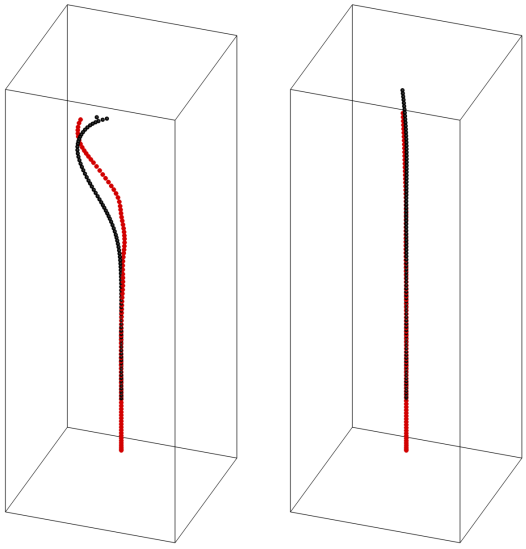


图5： 两种磁场下前导气泡和尾随气泡的上升速度

图 5 显示了前导气泡和尾随气泡的上升速度。气泡从静止状态开始，上升速度随时间增加，并经历波动，最终达到稳态或继续随时间增加。前导气泡和尾随气泡的上升速度表现不同，也会受到所施加磁场的影响。无磁场时，前导气泡和尾随气泡的上升速度在 $t \approx 75\ ms$之前相同。可以看到，前导气泡的上升速度出现快速振荡，且振荡幅度小于$0.01m/s$。还应注意，前导气泡的平均速度在 $t \approx 75\ ms$之后几乎保持不变。另一方面，在本研究考察的整个时间范围内，尾随气泡仍在持续加速。此外，尾随气泡的上升速度始终高于前导气泡。

在磁场作用下，气泡的上升速度在达到 $t \approx 80\ ms$ 之前相同，之后曲线开始分开。前导气泡在 $80\ ms$ 之后的速度增长非常缓慢，相较于 $t = 80\ ms$ 之前更是如此，并且几乎达到稳态。另一方面，尾随气泡仍持续加速，尽管加速度低于初始阶段，最终速度超过前导气泡。比较这些曲线可见，在磁场作用下，上升速度及其振荡均有所减小。

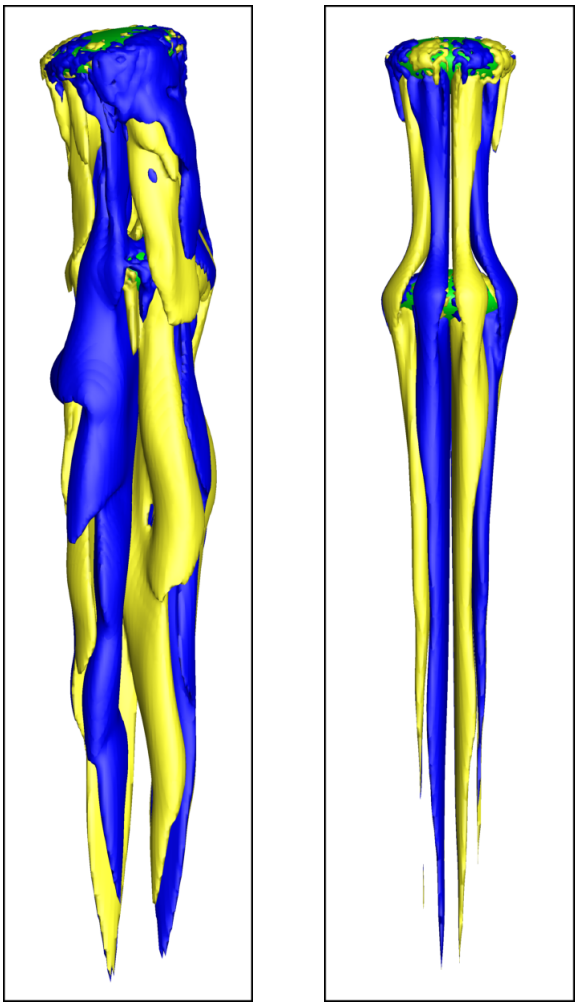


(a) $\mathbf{B} = 0$ (b) $\mathbf{B} = 0.2$

图 6： 两种磁场下领先气泡和尾随气泡的上升轨迹

图6 展示了前导气泡和尾随气泡上升时的轨迹——红色曲线和黑色曲线分别表示尾随气泡和前导气泡的轨迹。可以看出，在没有磁场的情况下，两个气泡最初沿直线路径运动，随后转为曲折前进。此外，尾随气泡比前导气泡更早偏离直线路径。在上升初始阶段，尾随气泡的速度较低，且远离由前导气泡改变的流场，因此其形状从球形变为非对称椭球，且没有出现表面振荡。这是气泡最初沿直线路径运动的主要原因。随着气泡加速并达到某一临界速度（或雷诺数），它们开始脱落对称涡旋，随后涡旋逐渐变得非对称。这会导致气泡后方出现非均匀压力分布，推动气泡偏离液柱中心，并沿曲折轨迹运动。

加入磁场后，两个气泡沿直线路径上升的时间都更长；然而，模拟接近结束时，它们开始偏离，可能转而进入之字形路径。这与我们从图4中观察到的结果一致：气泡达到稳定形状，且没有形状或取向振荡。为了进一步了解之字形上升路径和振荡上升速度，我们分析了气泡后方的流动结构。

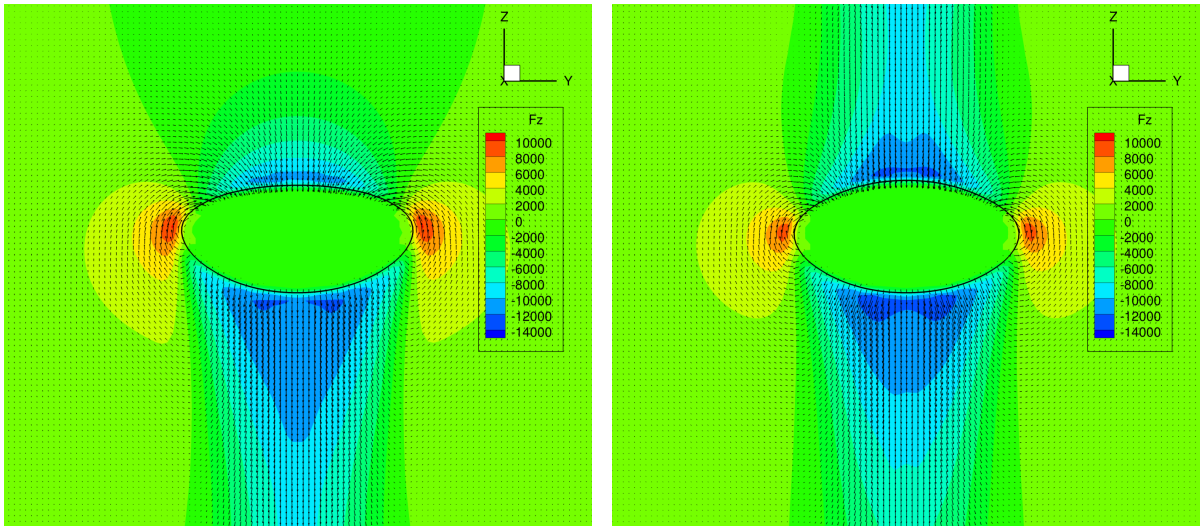


(a) $\mathbf{B} = 0$ (b) $\mathbf{B} = 0.2$

图7： $\omega_z = \pm 25$ 在 $t = 240\ ms$ 下两种磁场的等值面

图7 展示了 ω_z 在 $t = 240\ ms$ 时的等值面正视图（蓝色和黄色分别表示 $\omega_z = 25$ 和 $\omega_z = -25$ 的等值面）。我们可以看到气泡后方有细长的尾流结构，形状如同“尾巴”。在没有磁场时，这些结构更加扁平且相互纠缠，表明这些反向旋转涡旋彼此作用，并可能分解成更小的涡旋结构。我们还可以注意到，前导气泡产生的涡脱落并不均匀，这可能改变尾随气泡所处的流场。这解释了为何尾随气泡的上升路径比前导气泡更早偏离直线轨迹。在有磁场时，我们注意到前导气泡产生的涡脱落具有对称性，且更加有序。这些结构彼此作用并环绕尾随气泡，但流动结构的对称性仍保持不变。前导气泡和尾随气泡产生的涡脱落会对它们施加横向力，并可能将它们推离管道中心线

这可能导致之字形轨迹。我们可以结合图4、6和7 推断，气泡的非直线运动与气泡后方形成的尾流结构有关。尾流中的这些不稳定性会导致气泡后方出现非对称流动，并引发之字形运动。现在我们来探讨为什么在磁场作用下涡旋结构更加流线化。



(a) 前导气泡周围的垂直洛伦兹力　　(b) 尾随气泡周围的垂直洛伦兹力

图8：气泡周围在 yz–平面、 $t = 160\ ms$ 时刻的垂直洛伦兹力分布，$\mathbf{B}\ = 0.2\ T$

图8(a) 和8(b) 展示了$\mathbf{F}_{lz}$ 分布，并叠加显示了 yz–平面上前导气泡和尾随气泡周围的洛伦兹力矢量，时间为 $t = 160\ ms$。从这两幅图可以看出，洛伦兹力对两个气泡的作用方向均为 z–负方向。不过，尾随气泡所受的力大于前导气泡。这会使尾随气泡比前导气泡减速更多。我们还可以看出，洛伦兹力关于垂直中心线对称。因此，磁力会抑制气泡摆动。在图5中，我们观察到尾随气泡的速度高于前导气泡，这表明前导气泡引起的流动改变对阻力的影响大于洛伦兹力的影响。

5 结论

我们研究了横向磁场存在时，两个串列氩气泡在熔融钢中的三维动力学。我们采用结合尖锐表面力处理方法的VOF界面追踪方法，以准确捕捉界面并纳入表面张力。通过求解电磁方程，捕捉磁场的影响。随后，我们针对不同磁场下、以 7 mm 气泡彼此相隔 $3d$

中心间距的情况进行了两次模拟。我们分析了气泡变形、上升路径、上升速度以及气泡后方的流动结构。

我们观察到，磁场会强烈影响气泡变形。对于$\mathbf{B} = 0.0$，前导气泡和尾随气泡均变形成上下表面不对称的扁平椭球体，并经历了形状振荡。对于$\mathbf{B} = 0.2$，前导气泡达到椭球状气泡的稳态形状，而尾随气泡则经历轻微的形状振荡。此外，我们观察到，对于$\mathbf{B} = 0.0$，气泡起初沿直线路径上升，但随后迁移至之字形路径，其路径振幅几乎是气泡直径的两倍。对于$\mathbf{B} = 0.2$，气泡在大部分上升过程中沿线性路径上升，并在末段偏离中心。

在两种磁场条件下，上升速度均经历振荡；然而，在无磁场情况下，速度幅值显著更大。我们发现，这些振荡与气泡的形状振荡以及之字形上升路径有关。在两种情况下，前导气泡和尾随气泡起初以相同速度上升。达到最大变形后，尾随气泡的上升速度快于前导气泡。

参考文献

K. Jin、P. Kumar、S. P. Vanka 和 B. G. Thomas。在横向磁场作用下氩气气泡在液态钢中的上升过程。《流体物理学》，28(9)，2016年。ISSN 10897666。doi：10.1063/1.4961561。

Purushotam Kumar、Kai Jin 和 S.Pratap Vanka。气泡在方形管道中的非牛顿流体内上升与变形。《热流体科学中的计算方法与工具》，第1–15页，2015年a。

JR Grace。气泡在无限液体中的形状与上升速度。《化学工程师学会汇刊》，51 (2):116–120，1973年。

J.R. Grace、T. Wairegi 和 T.H Nguyen。单个液滴和气泡在不互溶液体中自由运动时的形状与速度。《化学工程研究与设计》，54a：167–173，1976年。Dahya Bhaga 和 M.E. Weber。黏性液体中的气泡：形状、尾流和速度。《流体力学杂志》，105：61–85，1981年。B. Figueroa-Espinoza、R. Zenit 和 D. Legendre。约束效应对单个清洁气泡运动的影响。《流体力学杂志》，616：419–443，2008年11月。ISSN 0022-1120。P. Kumar 和 S.P. Vanka。约束效应对方形管道中气泡动力学的影响。《国际多相流杂志》，77：32–47，2015年。ISSN 0301-9322。

Roland Clift、John R Grace 和 Martin E Weber。《气泡、液滴与颗粒》。Academic Press，伦敦，1978年。Daniel DeKee。《气泡、液滴与颗粒中的传递过程》。CRC Press，2002年。W. Abbassi、S. Besbes、M. Elhajem、H. Ben Aissia 和 J.Y. Champagne。使用流体体积法（vof）对气泡自由上升和同轴聚并进行数值模拟。《计算机与流体》，161：47–59，2018年。ISSN 0045-7930。M. Gumulya、R.P. Utikar、G.M. Evans、J.B. Joshi 和 V. Pareek。静止液体中列队上升气泡的相互作用。《化学工程科学》，166：1–10，2017年。ISSN 0009-2509。Masao Watanabe 和 Toshiyuki Sanada。黏性液体中一对气泡的列队运动。《日本机械工程师学会国际期刊B辑：流体与热工程》，49：410–418，2006年。H. Yuan 和 A. Prosperetti。关于黏性流体中两个球形气泡的列队运动。《流体力学杂志》，278：325–349，1994年。Dominique Legendre、Jacques Magnaudet 和 Guillaume Mougin。黏性液体中并排上升的两个球形气泡之间的流体动力相互作用。《流体力学杂志》，497：133–166，2003年。Zhao Yu、Hui Yang 和 Liang-Shih Fan。使用自适应格子玻尔兹曼方法对气泡相互作用进行数值模拟。《化学工程科学》，66(14)：3441–3451，2011年。ISSN 0009-2509。第十届气液及气液固反应器工程国际会议。J. Katz 和 C. Meneveau。列队上升气泡的尾流诱导相对运动。《国际多相流杂志》，22(2)：239–258，1996年。ISSN 0301-9322。M.C Ruzicka。关于列队上升的气泡。《国际多相流杂志》，26(7)：1141–1181，2000年。ISSN 0301-9322。William J. Rider 和 Douglas B. Kothe。重构体积追踪。《计算物理学杂志》，141(2)：112–152，1998年4月。ISSN 00219991。WF Noh 和 P Woodward。SLIC（简单线性界面计算）。载于《第五届国际会议论文集》，第330–340页，柏林，1976年。施普林格出版社。Jie Li。分片线性界面计算（piecewise linear interface calculation）。《巴黎科学院报告》，320(8)：391–396，1995年。N Ashgriz 和 JY Poo。FLAIR：用于平流和界面重构的通量线段模型。《计算物理学杂志》，93(2)：449–468，1991年4月。ISSN 00219991。

Purushotam Kumar。 在图形处理器上开发和应用格子玻尔兹曼及高精度流体体积法数值技术。博士论文，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，2016年。

Purushotam Kumar、Kai Jin 和 S. Pratap Vanka。用于气液流动模拟的多GPU高精度算法。《热流体科学中的计算方法与工具》，第1–17页，2015b。

MarianneM. Francois、SharenJ. Cummins、Edward D. Dendy、Douglas B. Kothe、James M. Sicilian 和 Matthew W. Williams。体积追踪框架中连续及锐界面表面张力模型的平衡力算法。《计算物理学杂志》，213(1)：141–173，2006年3月。ISSN 00219991。

Zhaoyuan Wang 和 Albert Y. Tong。单个气泡在狭窄垂直管中上升时的变形与振荡。《国际热科学杂志》，47(3)：221–228，2008年3月。ISSN 12900729。

Purushotam Kumar、Kai Jin 和 Surya Pratap Vanka。采用尖锐表面力实现法对幂律流体中上升气泡进行数值模拟。*2019*年*ASME-JSME-KSME*第八届联合流体工程会议论文集。第*5*卷：多相流。美国加利福尼亚州旧金山，2019年7月28日至8月1日。

Murray Rudman。适用于密度变化较大的不可压缩多流体流动的体积追踪方法。《国际流体数值方法杂志》，28(2)：357–378，1998年8月。ISSN 0271-2091。

Sharen J. Cummins、Marianne M. Francois 和 Douglas B. Kothe。根据体积分数估算曲率。《计算机与结构》，83(6-7)：425 – 434，2005年。ISSN 0045-7949。

Yuriko Renardy 和 Michael Renardy。PROST：一种用于流体体积法的表面张力抛物重构方法。《计算物理学杂志》，183(2)：400–421，2002年12月。ISSN 00219991。

Mark Sussman。用于计算蒸汽泡生长与塌缩的二阶耦合水平集与流体体积法。《计算物理学杂志》，187(1)：110–136，2003年5月。ISSN 00219991。

M. Sussman、K.M. Smith、M.Y. Hussaini、M. Ohta 和 R. Zhi-Wei。用于不可压缩两相流的尖锐界面法。《计算物理学杂志》，221(2):469–505，2007年2月。ISSN 00219991。

Denis Gueyffier、Jie Li、Ali Nadim、Ruben Scardovelli 和 Stéphane Zaleski。采用平滑表面应力方法的流体体积法界面追踪，用于三维流动。《计算物理学杂志》，152(2):423–456，1999年7月。ISSN 00219991。S. P. Vanka、P. Kumar、K. Jin 和 B. G. Thomas。在图形处理器上进行单相流和多相流计算。热问题计算方法国际会议，(217349)，2016年。ISSN 2305-5995。
Jeremy Horwitz、Purushotam Kumar 和 Pratap Vanka。T形接头和分配集管中的多相流模拟。美国物理学会通报，57，2012年。

Jeremy Horwitz、Purushotam Kumar 和 Pratap Vanka。中等雷诺数下方形管道中液滴三维变形的模拟。美国物理学会通报，58，2013年。

Purushotam Kumar、Jeremy Horwitz 和 Surya Vanka。直角弯管中不混溶液滴变形的三维数值研究。美国物理学会通报，58，2013年。

JAK Horwitz、P Kumar 和 SP Vanka。中等雷诺数下方形管道流中球形液滴的三维变形。《国际多相流杂志》，67：10–24，2014年。

Jeremy A. K. Horwitz、S. P. Vanka 和 P. Kumar。通道中分散多相流的格子玻尔兹曼方法模拟：压力泊松方程的作用。*2019*年*ASME-JSME-KSME*第八届联合流体工程会议论文集。第*5*卷：多相流。美国加利福尼亚州旧金山，2019年7月28日至8月1日。

Surya Pratap Vanka、Kai Jin、Purushotam Kumar 和 Brian Thomas。横向磁场作用下液态钢中氩气气泡的上升。美国物理学会通报，60，2015年。

Purushotam Kumar 和 Pratap Vanka。横向磁场作用下液态钢中氩气泡对的上升动力学。美国物理学会通报，67，2022年。Pratap Vanka、Purushotam Kumar 和 Kai Jin。垂直方形管道中湍流含气泡流的数值模拟。美国物理学会通报，61，2016年。

Purushotam Kumar 和 Surya Pratap Vanka。方形管道中湍流含气泡流的大规模GPU模拟。*arXiv*预印本 *arXiv:2104.01636*，2021年。