arXiv:2301.01801v2 [cs.LG] 6 Jan 2023

未知效用函数下的网络效用最大化：一种分布式数据驱动双层优化方法

Kaiyi Ji[1] 和 Lei Ying[2]1：计算机科学与工程系，布法罗大学[2]：电气工程与计算机科学系，密歇根大学安娜堡分校

2023年1月9日

摘要

公平的资源分配是通信网络中最重要的课题之一。现有解决方案几乎都假设每个用户的效用函数已知且为凹函数。本文旨在回答以下问题：当效用函数未知，甚至用户自身也不了解时，如何分配资源？在新一代人工智能感知通信网络中，用户效用十分复杂，且难以获得其闭式表达式，因此这一问题日益重要。本文提出一种采用分布式数据驱动双层优化方法的新方案：下层是一个采用凹代理效用函数的分布式网络效用最大化（NUM）算法，上层则是一个数据驱动学习算法，用于寻找使真实网络效用之和最大化的最佳代理效用函数。所提出的算法利用数据样本（效用值或梯度值）学习并自动调整代理效用函数，以最大化真实网络效用，因此适用于未知效用函数。对于一般网络，我们建立了所提出的算法在效用函数非凹情况下的非渐近收敛速率。仿真验证了我们的理论结果，并展示了所提出方法在真实网络中的显著效果。

1 引言

数十年来，自开创性研究 [1] 以来，网络效用最大化（NUM）一直受到广泛研究，并已成为设计通信网络（如互联网、6G网络）公平、分布式资源分配的核心分析框架。其应用范围广泛，涵盖网络拥塞控制 [1, 2, 3],、无线网络中的功率分配与路由 [4, 5], 、云计算中的负载调度 [6, 7, 8], ，以及动态网络上的视频流传输 [9, 10, 11, 12, 13, 14], 等。关于该方法及其与控制理论和凸优化之间联系的全面介绍，可参见 [15]。

在传统的网络效用最大化中，每个用户都关联一个效用函数，用于衡量其对所分配资源（通常是分配的数据速率）的满意程度。分布式网络效用最大化解及其变体已被用于互联网中的拥塞控制算法（如 TCP-Reno），以及蜂窝网络中的调度算法（如比例公平调度）。这些解在信道容量、平均功率等资源约束下最大化网络总效用。

关于有线 [1, 2, 3, 15, 16, 17, 18, 19]和无线网络[20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 11, 12, 13, 27, 14]中的网络效用最大化，已有大量研究。现有研究几乎都假设用户已知效用函数，且这些函数是凹函数，例如广泛使用的 α公平效用函数[28], 。然而，在许多现实应用中，例如新兴的 AI 感知的下一代网络（如 6G），底层效用函数往往与用户体验、信息新鲜度、多样性、保真度、任务质量等相关，因此可能是非凹的，且通常未知。那么，该领域一个尚待解决且颇具挑战性的问题是：

当效用函数未知且非凹时，如何公平、高效地分配网络资源？

除了近期少数尝试 [29, 14] 采用在线学习算法外，这个问题尚未得到充分探讨。例如， [14] 聚焦于随机动态场景，并提出了一种在线策略，逐步学习效用函数并据此分配资源。然而，该方法仍假设未知效用函数是凹函数，且需要中央调度器。

本文考虑未知效用函数，并从一种新的双层优化视角提出分布式解决方案：下层问题是采用参数化代理效用函数（例如 α–公平效用函数）的标准分布式资源分配算法，上层则根据用户体验/反馈微调代理效用函数。尽管该解决方案基于双层优化，但由于其在通信网络中的分布式特性，与现有的非分布式双层优化研究 [30,31, 32, 33, 34, 35, 36, 37] 截然不同（更全面的综述见 [38] 和 [39] ）。此外，由于这些方法需要计算网络效用最大化目标函数的海森矩阵逆或海森矩阵乘积，而这要求每个节点掌握难以获取的全局网络信息，因此无法直接应用于此处，也不切实际。尽管 [40, 41, 42, 43, 44], 提出了若干去中心化双层优化方法，但这些方法考虑的是一般双层目标函数，未将信道容量、传输链路和结构化网络效用最大化目标函数纳入考量，因此无法直接用于网络效用最大化问题。本文的主要贡献总结如下：

- 我们的首要贡献是设计了一种名为 DBiNUM 的分布式双层优化算法。该算法通过一步梯度下降近似上层梯度的海森矩阵逆与向量的乘积。我们证明，在 DBiNUM 中，每位用户只需了解部分网络信息，例如其路径上其他用户的传输速率和链路状态，因此 DBiNUM 可实现分布式实现。此外，DBiNUM 无需了解真实的效用函数，只需要通过基于梯度或基于数值的查询获取用户反馈。

- 理论上，我们证明，尽管超梯度估计误差在初始阶段较大，但通过适当选择学习率，该误差由一系列迭代递减项构成。基于这些关键推导，我们为具有一般非凹上层目标函数和一般网络拓扑的 DBiNUM 提供了有限时间收敛速率保证。此外，我们还对单链路多用户网络进行了案例研究，并表明当真实的用户效用是 α-公平性函数（但用户仍不知道这些函数）时，DBiNUM 收敛到的解与已知效用函数时相同。这为所提出的双层公式提供了一定的验证。

- 在仿真中，我们首先通过证明：当真实效用函数为 α-公平效用函数时，我们的双层算法会收敛到标准网络效用最大化解（总效用、用户资源），从而验证我们的理论结果。在真实的 Abilene 网络中，我们证明，与采用固定代理效用函数的标准网络效用最大化基线相比，我们的双层方法能够实现显著更高的网络效用。

2 问题表述

考虑一个包含 n 个用户（或数据流）和 m 条通信链路的通信网络。每个用户~都关联一个效用函数 $U_r(x_r)$，其中 x_r 表示用户 r. 的传输速率。令 $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, ..., l_m\}$表示所有通信链路， c_l 表示链路 l， $\mathcal{L}_r$ 表示用户 r路径上的所有链路，且$\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]^T$表示传输速率向量。网络效用最大化问题是寻找资源分配$\mathbf{x}$，使其满足以下优化问题:

$$\max_{\mathbf{x}} \sum_{r=1}^{n} \widetilde{U}_r(x_r) \tag{1}$$

$$\text{subject to: } \sum_{r:l\in\mathcal{L}_r} x_r \le c_l, \quad \text{for any } l \in \mathcal{L}$$

$$x_r \ge 0, \quad \text{for } r = 1, ..., n. \tag{2}$$

~与现有的网络效用最大化研究不同，我们考虑一般的效用函数 $U_r(x_r)$，它不一定是凹函数，并假设用户可能不知道该函数 r.

2.1 传统网络效用最大化与原始解

若 $U_r(\cdot)$ 连续二阶可微且**凹**，例如 α 公平性效用函数满足 $U_r(x_r) = \frac{x_r^{1-\alpha}}{1-\alpha}$，并且用户已知该函数 r，那么式 (1) 中的问题便成为传统网络效用最大化问题，自开创性工作 [1] 以来已得到广泛研究。具体而言，已有多种分布式算法被提出，可在用户与网络之间仅交换有限信息的情况下，高效求解式 (1)。其中，原始方法将容量约束作为惩罚项纳入网络总效用，并求解以下替代的正则化问题。

$$\min_{x_1,...,x_n>0} \quad \sum_{r=1}^{n} U_r(x_r) - \sum_{l\in\mathcal{L}} B_l\Big(\sum_{r:l\in\mathcal{L}_r} x_r\Big), \tag{3}$$

其中，正则项 $B_l(\cdot)$ 连续二阶可微且为 μ-强凸，可视为在链路 l 上传输数据的成本，用以惩罚超过链路容量的到达速率。用于互联网拥塞控制的 TCP-Reno 就是这样一种原始算法。

2.2 通过双层优化实现网络效用最大化

我们要回答的问题是：如何在效用函数未知的情况下求解网络效用最大化，以及如何以分布式方式求解。我们提出了一种针对该问题的分布式双层解。下层对应于标准的网络资源分配问题，通过式（3）中的原始分布式算法，采用参数化代理效用函数 $U_r(x_r; \alpha_r)$，其中 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}$ 为参数，且对于任意给定的 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}$，代理函数均为连续二次可微的凹函数。上层附加过程用于微调用户指定参数 α_r, $r = 1, ..., n$，以根据用户反馈学习最佳代理效用函数~$U_r(x_r; \alpha_r)$ $r = 1, ..., n$；例如，基于数值的查询 $U_r(x_r)$（即用户对 x_r的满意程度）或基于梯度的查询 $\nabla U_r(x_r)$（即用户体验增长的速度

在 x_r）。数学上，该问题可表述为

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}}\left[\Psi(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{r=1}^{n}\widetilde{U}_r(x_r^*(\boldsymbol{\alpha}))\right]$$
$$\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha})=\arg\max_{\boldsymbol{x}>0}\Phi(\mathbf{x};\boldsymbol{\alpha})=\sum_{r=1}^{n}\big(U_r(x_r;\alpha_r)-\frac{\epsilon x_r^2}{2}\big)-\sum_{l\in\mathcal{L}}B_l\Big(\sum_{i:l\in\mathcal{L}_i}x_i\Big), \tag{4}$$

其中 $\mathcal{A}:=\{\boldsymbol{\alpha}:\ \alpha_r\in\mathcal{A}_r, r=1,...,n\}$ 是一个闭、凸且有界的约束集。与式（3）相比，我们在每个代理效用函数 $U_r(x_r;\ \alpha_r)$ 中加入了一个较小的二次项 $-\frac{\epsilon x_r^2}{2}$，以确保下层目标函数 $\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})$ 关于**强凹** $\mathbf{x}$。还需注意，这个额外的二次项对式（3）原始解的影响仅为 ϵ 量级，因此解 $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha})$ 仍然有效。

3 算法与主要结果

我们首先讨论求解双层问题式（4）所面临的挑战，然后介绍一种分布式双层算法。接着，我们给出所提方法的主要结果。

3.1 网络上的超梯度计算挑战

梯度上升是高效求解式（4）中的双层问题的一种典型方法。该过程需要计算上层目标函数的梯度 $\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha})$（我们称之为超梯度）。然而，如下述命题所示，由于存在嵌套问题结构，该超梯度包含复杂的组成部分。

命题 1. 超梯度 $\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha})$ 的形式为

$$\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha})=-\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*;\boldsymbol{\alpha})\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}^*;\boldsymbol{\alpha})\big)^{-1}\big[\nabla\widetilde{U}_1(x_1^*),...,\nabla\widetilde{U}_n(x_n^*)\big]^T, \tag{5}$$

其中，$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*;\boldsymbol{\alpha})$ 是一个对角矩阵，其 i^{th} 对角元素为 $\nabla_\alpha\nabla_x U_i(x_i^*;\alpha_i)$，而海森矩阵 $\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}^*;\boldsymbol{\alpha})$ 的$(i,j)^{th}$元素等于

$$\begin{cases}\nabla_x^2U_i(x_i^*;\alpha_i)-\epsilon-\sum_{l\in\mathcal{L}_i}\nabla^2B_l\big(\sum_{r:l\in\mathcal{L}_r}x_r\big), i=j\\ -\sum_{l\in\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_j}\nabla^2B_l\big(\sum_{r:l\in\mathcal{L}_r}x_r\big),\ i\neq j,\end{cases} \tag{6}$$

其中，为简便起见，我们定义$\sum_{l\in\emptyset}(\cdot)=0$。

注意，海森矩阵 $\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}^*;\ \boldsymbol{\alpha})$ 可逆，因为下层函数 $\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})$ 是强凹的。如命题 1 所示，超梯度 $\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha})$ 涉及下层函数 $\Phi(\boldsymbol{x}^*;\boldsymbol{\alpha})$ 的二阶导数$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*;\boldsymbol{\alpha})$ 和 $\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}^*;\ \boldsymbol{\alpha})$。具体而言，要精确计算$\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha})$，需要对海森矩阵 $\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}^*;\boldsymbol{\alpha})$ 求逆，其形式如命题 1 所示。然而，在大型通信网络中，这种求逆难以实现，因为它需要全局网络信息，而现实中的每个用户只掌握部分信息。此外，这种求逆在计算上也不可行，因为当网络包含数百万用户时，矩阵维度可能极大。接下来，我们将介绍一种快速近似方法来解决这两个问题。该方法 1）支持在网络中进行分布式实现；2）效率极高，无需进行任何海森矩阵求逆计算。

算法 1分布式双层网络效用最大化（DBiNUM）

1: **输入：** 初始化 $\boldsymbol{a}_0 \in \mathcal{A}$以及 $\mathbf{x}_0 > 0$2: **对于** $k = 0,\ 1,\ .....,\ K$ **执行**
3: 下层**标准** 网络最大化过程，包含 T_l 个时隙:

• 使用**标准**分布式原始算法，得到$\widehat{x}_{k,\ r} \geq 0$ 满足$|\widehat{x}_{k,\ r} - x^*_{k,\ r}| \leq \delta_\Phi$ 适用于每个用户 r。4: 在包含 T_o 个时隙的上层进行信息广播:

• 所有用户发布携带信息$\widehat{x}_{k,\ r}$和$v_{k,\ r}$的数据包，用于 $r = 1,\ ...,\ n$ 广播。
• 每个用户 r 从其邻居$\widehat{x}_{k,\ i}$ 收集 $\mathcal{N}_r = \{i :\ \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_r \neq \emptyset\}$ 和$\nabla^2 B_l\big(\sum_{u:\ l\in\mathcal{L}_u} \widehat{x}_{k,\ u}\big)$ 从其链路 $l \in \mathcal{L}_r$。
5: 对于每个用户 r，根据公式（7）更新辅助变量$v_{k,\ r}$。6: 对于每个用户 $r = 1,\ ...,\ n$，根据公式（8）更新用户指定参数$\alpha_{k+1,\ r}$。7: **结束循环**

3.2 所提出的分布式双层算法

在本节中，我们提 出一种分布式双层方法，用于求解式（4）中的资源分配问题。

如算法 1 所示，该算法包含一个双层优化过程。对于下层，采用标准分布式原始算法（示例见 [15]）来获得 δ_Φ 近似解 $\widehat{x}_{k,\ r}$ 使得 $|\widehat{x}_{k,\ r} - x^*_{k,\ r}| \leq \delta_\Phi$ （δ_Φ 足够小）在 $\alpha_{k,\ r}$ 条件下，对 $r = 1,\ ...,\ n$ 均成立，其中 $x^*_{k,\ r},\ r = 1,\ ...,\ n$ 是式（4）问题的下层解，且其给定形式为

$$x^*_{k,1}, ..., x^*_{k,n} = \underset{x_1,...,x_n>0}{\arg\max} \sum_{r=1}^{n} \big(U_r(x_r;\alpha_{k,r}) - \frac{\epsilon x_r^2}{2}\big) - \sum_{l\in\mathcal{L}} B_l\Big(\sum_{i:l\in\mathcal{L}_i} x_i\Big).$$

请注意，即使存在网络延迟，只要执行时间 T_l 足够长 [45]，上述解 $\widehat{x}_{k,\ r},\ r = 1,\ ...,\ n$ 仍然可以实现。

在下一阶段，所有用户继续传输数据包，以广播其信息 $\widehat{x}_{k,\ r}$ 以及 $v_{k,\ r}$，对于 $r = 1,\ ...,\ n$，并通过网络传输。每个用户在收到来自邻居 $\mathcal{N}_r = \{i$的所有信息 $\widehat{x}_{k,\ i}$（包括其自身的信息）以及沿其路径上所有链路 $l \in \mathcal{L}_r$ 的约束诱导量 $\nabla^2 B_l\big(\sum_{u:\ l\in\mathcal{L}_u} \widehat{x}_k$后，便停止广播。经过足够长的时间 T_o后，该过程即告结束，也就是说，网络中不再传输任何数据包。请注意，每个用户只需识别新变量$v_{k,\ r}$是否存在，就能轻松区分此阶段的数据包与先前 NUM 过程中的数据包。

收到用户 $i \in \mathcal{N}_r$ 的邻居信息 $\widehat{x}_{k,\ i},\ v_{k,\ i}$ 后，每个用户 r 在本地更新辅助变量$v_{k,\ r}$，更新方式如下:

$$\begin{aligned} v_{k+1,r} = &-\eta \sum_{i\in\mathcal{N}_r} \sum_{l\in\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_r} \nabla^2 B_l\Big(\sum_{j:l\in\mathcal{L}_j} \widehat{x}_{k,j}\Big) v_{k,i} \\ &+ \big(1 - \epsilon + \eta\nabla_x^2 U_r(\widehat{x}_{k,r};\alpha_{k,r})\big) v_{k,r} - \underbrace{\eta\widetilde{\nabla U_r}(\widehat{x}_{k,r})}_{\text{user feedback}}, \end{aligned} \tag{7}$$

其中，重要的量 $\widetilde{\nabla U_r}\ (\widehat{x}_{k,\ r})$ 反映了增加当前供应量 $\widehat{x}_{k,\ r}$时用户体验能够提升的速度。请注意，对于用户 r，式（7）中的更新仅使用其至少共享一条公共链路的邻居的信息，因此适用于实际的去中心化实现。式（7）中 $r = 1,\ ...,\ n$ 的更新可视为海森矩阵逆与向量的乘积的一步近似

$\left(\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi\left(\boldsymbol{x}^*_k;\ \boldsymbol{\alpha}_k\right)\right)^{-1}[\nabla\widetilde{U}_1\left(x^*_{k,\,1}\right)\ ...,\ \nabla\widetilde{U}_n\left(x^*_{k,\,n}\right)]^T$，即式（5）中的超梯度。式（7）中的量 $\nabla\widetilde{U}_r\left(\widehat{x}_{k,\,r}\right)$ 通过查询接收到的资源所对应的用户体验来构造。如前所述，我们利用用户提供的梯度类型信息，通过询问在供应量略高于$\widehat{x}_{k,\,r}$的资源时其体验提升的速度，来改进资源分配。在某些只能观测到效用值的情况下，例如用户满意度或任务质量，我们还在第 6 节中提供了一种仅使用效用值$\widetilde{\ }(\cdot)$的无导数梯度 U_r近似方法。

最后，每个用户通过投影梯度上升步骤更新用户指定的参数$\alpha_{k,\,r}$，具体如下:

$$\alpha_{k+1,r}=\mathcal{P}_{\mathcal{A}_r}\Big\{\alpha_{k,r}-\beta\nabla_\alpha\nabla_x U_r(\widehat{x}_{k,r};\alpha_{k,r})v_{k+1,r}\Big\},\tag{8}$$

其中，$\beta>0$ 是外循环步长，$\mathcal{P}_{\mathcal{A}_r}(\cdot)$是到约束集 $\mathcal{A}_r$上的投影。

3.3 主要结果

我们给出了算法 1 中所提出的分布式方法的有限时间收敛性分析。首先介绍一些定义和假设。

定义 1。 $f(z)$：$\mathcal{Z}\to\mathbb{R}^d$若对 $\forall z_1$、$z_2\in\mathcal{Z}$、$\|f(z_1)-f(z_2)\|\le L\|z_1-z_2\|$，则称其为 L-利普希茨连续。

在没有 lo 不失一般性，我们对式 (4) 中的目标函数作如下假设).

假设 1. 式 (4) 中的下层解 $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha})$ 是有界的，具体而言，存在常数δ、$b>0$，使得其每个坐标都满足 $\delta<x^*_r(\boldsymbol{\alpha})<b$、$r=1$、...、$n$，其中 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}$。

假设 1 表明，下层解 x^*_r、$r=1$、.....、n 的下界和上界分别由一个较小的常数 $\delta>0$ 和一个足够大的常数 b限定。这个假设是合理的，因为正则化项$B_l(\cdot)$可防止解趋于无穷大，而下界常数 δ 有助于避免在 $x_r\to0$ 时出现一些问题，例如对于某些效用函数，如 $\log(x_r)$ 和 $\frac{x_r^{1-\alpha_r}}{1-\alpha_r}$（其中 $\alpha_r>1$）。例如，可以证明，在 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}$有界的情况下，$\alpha$-公平性效用函数 $U_r(x_r;\alpha_r)=\frac{x_r^{1-\alpha_r}}{1-\alpha_r}$的解满足假设 1。

以下假设对效用函数 $U_r(\cdot\,;\alpha_r)$ 和正则化函数 $B_l(\cdot)$ 施加了一些几何条件。令 $\mathcal{X}:=\{\boldsymbol{x}:\frac{\delta}{2}<x_r<2b,\ \ r=1,\ .....,\ \ n\}$。

假设 2. 对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}$ 和任意 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}$,

- $U_r(\cdot;\ \alpha_r)$ 是凹的，且 $B_l(\cdot)$ 是 μ-强凸的。
- $\widetilde{U}_r(\cdot)$、$\nabla\widetilde{U}_r(\cdot)$、$\nabla_x U_r(\cdot\,;\ \cdot)$、$\nabla_\alpha\nabla_x U_r(\cdot\,;\ \cdot)$、$\nabla^2_x U_r(\cdot\,;\ \cdot)$ 均为 L_u-*Lipschitz*连续。
- $\nabla B_l(\cdot)$和 $\nabla^2 B_l(\cdot)$ 均为 L_b-*Lipschitz*连续。

假设 2 涵盖了许多具有实际意义的效用函数，例如对数效用 $\log(x_r)$ 和 α-公平性效用；也涵盖了各种正则项，例如二次函数 $\frac{\mu}{2}x^2$和障碍函数 $-\log(c-x)$（$\frac{\delta}{2}<x<2b<c$）。例如，对于 α-公平性效用函数 $\frac{x_r^{1-\alpha_r}}{1-\alpha_r}$，其高阶导数（如 $\nabla_x U_r(x_r;\ \alpha_r)=\frac{1}{x_r^{\alpha_r}}$、$\nabla^2_x U_r(x_r;\alpha_r)=\frac{-\alpha_r}{x_r^{\alpha_r+1}}$、$\nabla^3_x U_r(x_r;\ \alpha_r)=\frac{\alpha_r}{(\alpha_r+1)x_r^{\alpha_r+2}}$）均**有界**，因为 $\alpha_r\in\mathcal{A}_r$和 $x_r\in(\frac{\delta}{2},\ 2b)$ 有界。

以下定理刻画了所提出的算法在一般效用函数和网络下的收敛速率分析。

定理 1. 假设假设 *1* 和 *2* 成立。选取 $\delta_\phi < \frac{\delta}{2}, \eta < \frac{1}{L_{grad}}$ 和 $\beta \le \min\left(\sqrt{\frac{\eta\mu_\Phi}{256C_vL_u^2}}, \frac{1}{2L_\Psi}\right)$，其中 $L_\Psi = \left(\frac{L_{grad}}{\mu_\Phi}\left(\frac{\sqrt{n}L_u^2}{\mu_\Phi} + \frac{\sqrt{n}L_u^2L_{Hess}}{\mu_\Phi^2} + \frac{L_u}{\mu_\Phi}\right) + \frac{\sqrt{n}L_u^2}{\mu_\Phi} + \frac{\sqrt{n}L_u^3}{\mu_\Phi^2}\right)$ 是总目标函数 $\Psi(\boldsymbol{\alpha})$的光滑常数。则由算法 *1* 生成的迭代序列满足

$$\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\|G_{proj}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2 \le \underbrace{\frac{16(\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}}\Psi(\boldsymbol{\alpha}) - \Psi(\boldsymbol{\alpha}_0))}{\beta K} + \frac{256nL_u^4(1+\mu_\Phi^2)}{\eta\mu_\Phi^3}\frac{1}{K}}_{\textit{Sublinearly decaying terms}} + \underbrace{\frac{128L_u^2C_\Phi\delta_\Phi^2}{\eta\mu_\Phi} + \frac{4L_u^4n^2\delta_\Phi^2}{\mu_\Phi^2}}_{\textit{Lower-level error}},$$

其中，$G_{proj}(\boldsymbol{\alpha}_k) = \beta^{-1}(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\{\boldsymbol{\alpha}_k + \beta\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\} - \boldsymbol{\alpha}_k)$ 表示第 k^{th} 次迭代时的广义投影梯度；μ_Φ、L_{grad}、L_{Hess}、C_Φ 和 C_v 分别为命题 *2*、*3* 和 *4* 中定义的常数。

定理 1 使用广义梯度 $G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)$ 而非梯度 $\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)$，这是由于投影的存在。注意，如果迭代点 $\boldsymbol{\alpha}_k+\beta\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)$ 位于约束集 $\mathcal{A}$ 内部，则该广义梯度 $G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)$ 会退化为普通梯度 $\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)$。

定理 1 表明，对于式（4）中的约束非凹双层问题，所提出的 DBiNUM 能够找到一个驻点 $\boldsymbol{\alpha}_s$，满足 $s = \text{argmin}_k \|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2$；该点的广义投影梯度范数 $\|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_s)\|^2$ 包含一个次线性衰减项，以及由下层网络效用最大化的近似误差 δ_Φ 所引起的收敛误差 $\frac{128L_u^2C_\Phi\delta_\Phi^2}{\eta\mu_\Phi} + \frac{4L_u^4n^2\delta_\Phi^2}{\mu_\Phi^2}$。通过将下层目标精度 δ_Φ 设得足够小，例如设为 ϵ 精度，可以使该收敛误差任意小。注意，由于上层目标函数 U_r 通常是非凹的，我们采用驻点作为收敛准则。

4 主要结果的证明

本节给出定理 1 的技术证明。我们首先证明下层目标函数 $\Phi(\mathbf{x};\boldsymbol{\alpha})$ 具有一项重要的强凹几何性质。

命题 2。 假设假设条件 *2* 成立。对于任意 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, $\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})$，其关于 $\boldsymbol{x}$ 是 μ_Φ-强凹的，其中 $\mu_\Phi := \frac{\epsilon+\mu M_{\min}}{2}$，且 $M_{\min} = \min_{r=1,\ldots,n}\{M_r : \text{用户 } r \text{ 独占的链路数量}\}$。

请注意，由于因子 $M_{\min}$，强凹常数 $\frac{\epsilon+\mu M_{\min}}{2}$ 取决于网络拓扑。对于每个用户 r 至少独占一条链路的情况，$M_{\min} \ge 1$，因此，式 (4) 中的二次项 $\frac{\epsilon}{2}x_r^2$，$r = 1, \ldots, n$ 并非必需。然而，对于一般网络拓扑，为保证强凹性，必须进行二次正则化。

在最坏情况下，海森矩阵 $\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\cdot;\boldsymbol{\alpha})$ 的光滑性参数按 $n^{\frac{3}{2}}|\mathcal{L}|$ 的量级增长，其形式由命题 1 给出。对于拥有数百万用户和链路的网络而言，这一数值可能大得难以承受，因此会导致实践中的收敛速度缓慢。基于此，接下来我们将考虑稀疏网络结构（即每个用户仅与其他部分用户共享链路），对量 $\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})$ 和 $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})$ 的光滑性进行更精细的分析。

命题 3. 假设假设 *2* 成立。那么，对于任意 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}$、 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ 和任意向量 $\boldsymbol{u} = [u_1, ..., u_n]$,

$$\begin{aligned}
\|\nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\alpha}) - \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{\alpha})\| \leq & L_{grad} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|, \\
\|\nabla^2_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u} - \nabla^2_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u}\| \leq & L_{Hess} \max_i |u_i| \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|, \\
\|\nabla^2_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u} - \nabla^2_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\alpha}')\boldsymbol{u}\| \leq & L_u \max_i |u_i| \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}'\|,
\end{aligned}$$

其中， $L_{grad} = \sqrt{2L_u^2 + 2n \sum_{i=1}^n \sum_{l:\ l \in \mathcal{L}_i} L_b^2}$和 L_{Hess} : $= \sqrt{2L_u^2 + 2nL_b^2}$最大值$_i \Big(\sum_{j:\ \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j \neq \emptyset} \sum_{l \in \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j} 1 \Big)^2$是与网络拓扑相关的常数。类似地，对于混合导数 $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi$（$\boldsymbol{x}$； $\boldsymbol{\alpha}$），有

$$\begin{aligned}
\|\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u} - \nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u}\| \leq & L_u \max_i |u_i^2| \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|, \\
\|\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u} - \nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\alpha}')\boldsymbol{u}\| \leq & L_u \max_i |u_i| \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}'\|.
\end{aligned}$$

由命题 3 可知， $\nabla^2_{\boldsymbol{x}} \Phi(\cdot; \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u}$的光滑常数的数量级为$\sqrt{n}$最大值$_i (\sum_{j:\ \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j \neq \emptyset} \sum_{l \in \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j} 1)^2$, , 其表示用户 i 与其他用户共享的链路总数。如前所述，在最坏情况下，即所有用户共享相同的链路时，该常数的数量级为 $n^{\frac{3}{2}}|\mathcal{L}|$。然而，在实际网络中，每个用户仅与少量用户共享链路，因此每个 $\sum_{j:\ \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j \neq \emptyset} \sum_{l \in \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j} 1$ 都远小于最坏情况下的 $n|\mathcal{L}|$。

接下来，我们刻画在第 k 次迭代中，超梯度里的海森矩阵逆与向量的乘积近似所产生的误差。为方便记号，令 $\boldsymbol{v}_k = [v_{k,1}, ..., v_{k,n}]^T$和 $\nabla \widetilde{U}(\boldsymbol{x}) = \big[\nabla \widetilde{U}_1(x_1) ..., \nabla \widetilde{U}_n(x_n)\big]^T$。

命题 4。 假设假设 *1* 和 *2* 成立。取 $\delta_\phi < \frac{\delta}{2}$ 和 $\eta < \frac{1}{L_{grad}}$。令 $C_v = n\big(1 + \frac{2}{\eta\mu_\Phi}\big)\Big(\frac{L_{grad}}{\mu_\Phi}\Big(\frac{L_u L_{Hess}}{\mu_\Phi^2} + \frac{L_u}{\sqrt{n}\mu_\Phi}\Big) + \frac{L_u^2}{\mu_\Phi^2}\Big)^2$和 $C_\Phi = 4\big(1 + \frac{1}{\eta\mu_\Phi}\big)\Big(\frac{L_{Hess} L_u}{\mu_\Phi^2} + \frac{L_u}{\sqrt{n}\mu_\Phi}\Big)^2 n^2$。则有

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}_{k+1} - (\nabla^2_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}_k^*; \boldsymbol{\alpha}_k))^{-1} \nabla \widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\|^2 \\
&\leq \big(1 - \frac{\eta\mu_\Phi}{2}\big) \big\|\boldsymbol{v}_k - \nabla^2_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}_{k-1}^*; \boldsymbol{\alpha}_{k-1})^{-1} \nabla \widetilde{U}(\boldsymbol{x}_{k-1}^*)\big\|^2 \\
&+ C_v \|\boldsymbol{\alpha}_k - \boldsymbol{\alpha}_{k-1}\|^2 + C_\Phi \delta_\Phi^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

命题 4 刻画了 $\boldsymbol{v}_{k+1}$ 在近似超梯度的海森矩阵逆与向量的乘积$\widetilde{}(\nabla^2_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}_k^*; \boldsymbol{\alpha}_k))^{-1} \nabla U(\boldsymbol{x}_k^*)$时的误差。从式 (9) 可以看出，该误差包含一个逐次递减项（即右侧第一项）和两个误差项 $C_v\|\boldsymbol{\alpha}_k - \boldsymbol{\alpha}_{k-1}\|$（它刻画了相邻迭代之间的差异）以及 $C_\Phi \delta_\Phi^2$ （它由下层估计误差 $\|\widehat{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{x}_k\|$引起）。通过将上层步长 β 设得足够小，我们可以很好地控制增量 $\|\boldsymbol{\alpha}_k - \boldsymbol{\alpha}_{k-1}\|$ ，并确保超梯度估计误差不会发散。根据命题 1 中建立的超梯度形式，式 (8) 中的更新可以写为

$$\boldsymbol{\alpha}_{k+1} = \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\big\{\boldsymbol{\alpha}_k - \beta \nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k; \boldsymbol{\alpha}_k)\boldsymbol{v}_{k+1}\big\}, \tag{10}$$

$\widehat{}$其中， $\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k) := -\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k; \boldsymbol{\alpha}_k)\boldsymbol{v}_{k+1}$ 是由$\widehat{}$式（5）给出的超梯度 $\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)$ 的估计量。现在，我们刻画 $\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)$ 与 $\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)$ 之间的误差。

命题 5. 假设假设 *1* 和 *2* 成立。选择 $\delta_\phi < \frac{\delta}{2}$、 $\eta < \frac{1}{L_{grad}}$和 $\beta < \sqrt{\frac{\eta\mu_\Phi}{16C_v L_u^2}}$。则，

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k) - \nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\right\|^2 \leq & \left(1 - \frac{\eta\mu_\Phi}{4}\right)^k 4nL_u^4(1+\mu_\Phi^{-2}) \\ & + 4C_v L_u^2 \beta^2 \sum_{t=0}^{k-1}\left(1 - \frac{\eta\mu_\Phi}{4}\right)^{k-1-t}\|G_{proj}(\boldsymbol{\alpha}_t)\|^2 \\ & + \frac{8L_u^2 C_\Phi \delta_\Phi^2 \mu_\Phi + 4\eta L_u^4 n^2 \delta_\Phi^2}{\eta\mu_\Phi^2},\end{aligned} \tag{11}$$

其中，常数 C_v, C_Φ 由命题 *4*给出，

命题 5表明，超梯度估计误差 $\left\|\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k) - \nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\right\|^2$包含三项，即一项指数衰减项、一项与平均梯度范数成正比的误差项，以及一项由下层近似引起且足够小的误差项。根据命题 2、3、4 和 5 的结果，我们现在刻画算法 1 中分布式双层方法的收敛速率表现。

定理 1 的证明概要。 第一步是推导超梯度 $\nabla\Psi(\cdot)$的光滑性。根据式 (5) 中 $\nabla\Psi(\cdot)$的形式，并利用命题 2 和命题 3，对于任意两个$\boldsymbol{\alpha}_1$， $\boldsymbol{\alpha}_2 \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\|\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_1) - \nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_2)\| \leq & L_u(\|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_1) - \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_2)\| + \|\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2\|)\frac{\sqrt{n}L_u}{\mu_\Phi} \\ & + \frac{\sqrt{n}L_u^2}{\mu_\Phi^2}\left(L_{\text{Hess}}\|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_1) - \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_2)\| + L_u\|\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2\|\right) \\ & + \frac{L_u}{\mu_\Phi}\|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_1) - \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_2)\|,\end{aligned} \tag{12}$$

利用 $\|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_1) - \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_2)\| \leq \frac{L_{\text{grad}}}{\mu_\Phi}\|\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2\|$，可得

$$\|\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_1) - \nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_2)\| \leq L_\Psi\|\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2\|. \tag{13}$$

令 $\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k) = -\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)\boldsymbol{v}_{k+1}$ 对超梯度估计进行降阶。然后，根据式（47）中确立的光滑性，我们有

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_{k+1}) - \Psi(\boldsymbol{\alpha}_k) \geq & \left\langle \widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k), \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\left\{\boldsymbol{\alpha}_k + \beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\right\} - \boldsymbol{\alpha}_k \right\rangle \\ & + \left\langle \nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k) - \widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k), \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\left\{\boldsymbol{\alpha}_k + \beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\right\} - \boldsymbol{\alpha}_k \right\rangle \\ & - \frac{L_\Psi}{2}\|\boldsymbol{\alpha}_{k+1} - \boldsymbol{\alpha}_k\|^2.\end{aligned} \tag{14}$$

利用对凸集 $\mathcal{A}$ 的投影性质，即 $\langle \boldsymbol{x} - \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{y} - \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})\rangle \leq 0$ 对于任意 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}$均成立，并注意到 $\boldsymbol{\alpha}_k \in \mathcal{A}$, 式 (48) 右侧的第一项可下界为

$$\frac{1}{\beta}\|\boldsymbol{\alpha}_k - \mathcal{P}_{\mathcal{A}}\left\{\boldsymbol{\alpha}_k + \beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\right\}\|^2. \tag{15}$$

令 $\widehat{G}_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k) = \beta^{-1}\big(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\{\boldsymbol{\alpha}_k + \beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\} - \boldsymbol{\alpha}_k\big)$ 为命题 5 中定义的广义投影梯度 $G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)$ 的估计。然后，将式 (50) 代入式 (48)，并根据 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \geq -\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2)$ 以及凸集上投影的非扩张性质，可得

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_{k+1}) \geq & \Psi(\boldsymbol{\alpha}_k) + \big(\frac{\beta}{4} - \frac{L_\Psi \beta^2}{4}\big)\|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2 \\ & - \big(\beta - \frac{L_\Psi \beta^2}{2}\big)\|\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k) - \widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2. \end{aligned} \tag{16}$$

将命题 5 应用于上述式 (51)，进行望远镜求和，并利用以下事实：$\sum_{k=1}^{K-1}\sum_{t=0}^{k-1} a_{k-1-t}b_t \leq \sum_{k=0}^{K-1} a_k \sum_{t=0}^{K-1} b_t$ 对于 $a_t,\ b_t \geq 0$，可得

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{8} - \frac{16C_v L_u^2 \beta^2}{\eta\mu_\Phi}\Big)\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2 \leq & \frac{\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}}\Psi(\boldsymbol{\alpha}) - \Psi(\boldsymbol{\alpha}_0)}{\beta K} \\ & + \frac{16nL_u^4(1+\mu_\Phi^{-2})}{\eta\mu_\Phi}\frac{1}{K} + \frac{8L_u^2 C_\Phi \delta_\Phi^2 \mu_\Phi + 4\eta L_u^4 n^2 \delta_\Phi^2}{\eta\mu_\Phi^2},\end{aligned}$$

结合对 $\beta \leq \sqrt{\frac{\eta\mu_\Phi}{256 C_v L_u^2}}$ 的选择，即完成证明。□

5 双层公式的验证研究

本节以图 1 所示的单链路多用户网络为例进行案例研究，以验证我们在式 (4) 中提出的双层公式。其中，所有 n 用户共享同一条通信链路，其容量为 P。在此设定下，双层公式对应于求解以下问题。

$$\begin{aligned}&\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}}\ \ \Psi(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{r=1}^{n}\frac{x_r^*(\boldsymbol{\alpha})^{1-\widetilde{\alpha}_r}}{1-\widetilde{\alpha}_r}, \\ &x_1^*(\boldsymbol{\alpha}), ..., x_n^*(\boldsymbol{\alpha}) = \underset{x_r>0, \sum_{r=1}^n x_r \leq P}{\arg\max}\ \ \sum_{r=1}^{n}\frac{x_r^{1-\alpha_r}}{1-\alpha_r},\end{aligned} \tag{17}$$

其中，我们采用一个简单的有界约束集 $\mathcal{A} := \{0 < a_r \leq b, r = 1, ..., n\}$。请注意，下层采用式 (1) 中的原始问题，而非式 (4) 中的原始版本，因为这里可以得到显式解。

下面的定理证明：当真实用户效用为 α-公平性函数时，式 (17) 中双层问题的解与标准单层网络效用最大化的解等价。

定理 2. 令 $\boldsymbol{\alpha}^* \in \text{argmax}_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}}\Psi(\boldsymbol{\alpha})$ 为式 (17) 中双层问题的任意解。则由双层公式得到的分配资源 $x_r^*(\boldsymbol{\alpha}^*)$ $r = 1, ..., n$ 可恢复以下标准效用最大化问题的解：该问题采用具有固定参数 $\widetilde{\alpha}_r > 0$, $r = 1, ..., n$ 的 α-公平性效用。

$$\max_{x_1,...,x_n}\ \ \sum_{r=1}^{n}\Big[\widetilde{U}_r(x_r;\widetilde{\alpha}_r) = \frac{x_r^{1-\widetilde{\alpha}_r}}{1-\widetilde{\alpha}_r}\Big], \tag{18}$$

满足 $\sum_{r=1}^{n} x_r \leq P$ 和 $x_r > 0$，对于 $r = 1, ..., n$。

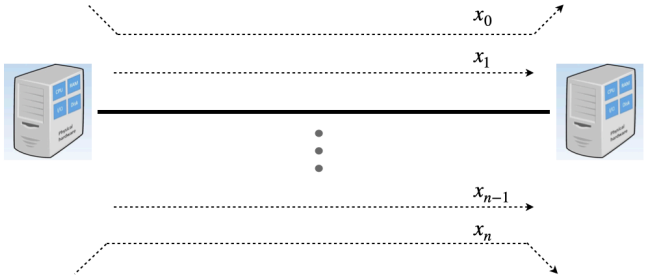


图 1：研究示例：包含 n 个用户的单条通信链路。

定理 2 表明，我们在式 (17) 中构造的双层问题的解 $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}^*)$，也使式 (18) 中原始网络效用最大化问题的目标函数达到最大。这意味着，所提出的 DBiNUM 收敛到一个解，其效果仿佛已知效用函数。该案例研究为所提出的双层目标函数提供了一定的验证。我们注意到，若图结构满足某些性质，我们的分析或可扩展至多链路场景。

6 用户反馈讨论

由式 (7) 可知，DBiNUM 利用用户（或应用）信息 $\nabla U_r(\widehat{x}_{k,\,r})$来改进用户效用函数的选择。换言之，每个用户都必须向网络提供反馈，说明在给定分配资源 $\widehat{x}_{k,\,r}$的情况下，其体验提升的速度有多快。不过，在某些情况下，我们只能获得效用值，例如能耗、用户满意度或任务质量，因此，更可行的解决方案是查询用户在 x处的效用值，即 $U_r(x)$。有了这样的数值信息，我们可以采用无梯度方法，通过计算两个邻近点 $\widehat{x}_{k,\,r}$ 和 $\widehat{x}_{k,\,r}+\delta u$处的效用差来近似梯度 $\nabla U_r(\widehat{x}_{k,\,r})$，如下所示。

$$\widehat{\nabla}_{\text{two}}\widetilde{U}_r(\widehat{x}_{k,r};u)=\frac{\widetilde{U}_r(\widehat{x}_{k,r}+\delta u)-\widetilde{U}_r(\widehat{x}_{k,r})}{\delta}u, \tag{19}$$

其中，$\delta>0$是平滑参数，u是标准高斯随机变量。根据 [46], 中的结果，可以证明上述两点估计器的估计偏差 $\left|\mathbb{E}_u\widehat{\nabla}_{\text{two}}\widetilde{U}_r(\widehat{x}_{k,\,r};\,u)-\nabla\widetilde{U}_r(\widehat{x}_{k,\,r})\right|$有界于 $4L_u\delta$，通过选择较小的 δ，该界可以很小。因此，我们可以建立与定理 1 类似的收敛速率结果，其误差与 δ成正比。

请注意，式 (19) 中的估计量需要查询两次用户效用值。在实际应用中，尤其是在效用值随时间变化的环境中，U_r 随时间变化，因此两点估计器可能包含较大的估计误差。在这种情况下，单点方法更具吸引力，其形式为

$$\widehat{\nabla}_{\text{one}}\widetilde{U}_r(\widehat{x}_{k,r};u)=\frac{\widetilde{U}_r(\widehat{x}_{k,r}+\delta u)u}{\delta}. \tag{20}$$

可以证明，上述单次查询估计器与两次查询估计具有相同的均值，即 $\mathbb{E}_u\nabla_{\text{one}}U_r(\widehat{x}_{k,\,r};u)=\mathbb{E}_u\nabla_{\text{two}}U_r(\widehat{x}_{k,\,r};u)$，因此定理 1 中的收敛性分析仍然适用。

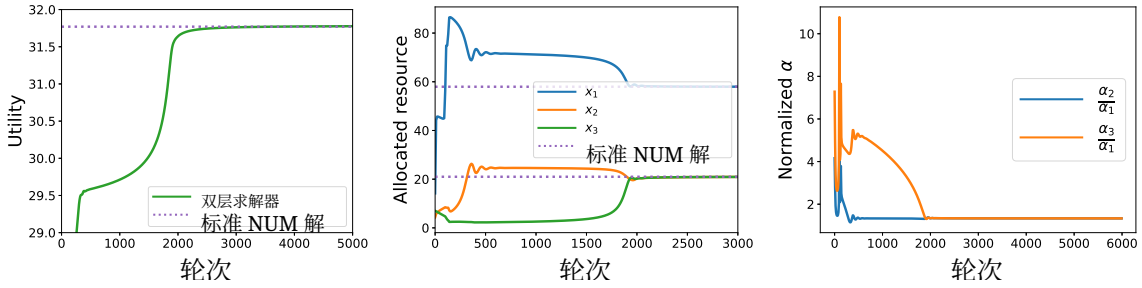


图 2：在 3 个用户的场景中，通过我们提出的双层求解器 DBiNUM 实现网络效用最大化。左图：总底层效用 Ψ 与轮次数的关系；中图：分配资源与轮次数的关系；右图：归一化 α 与轮次数的关系。

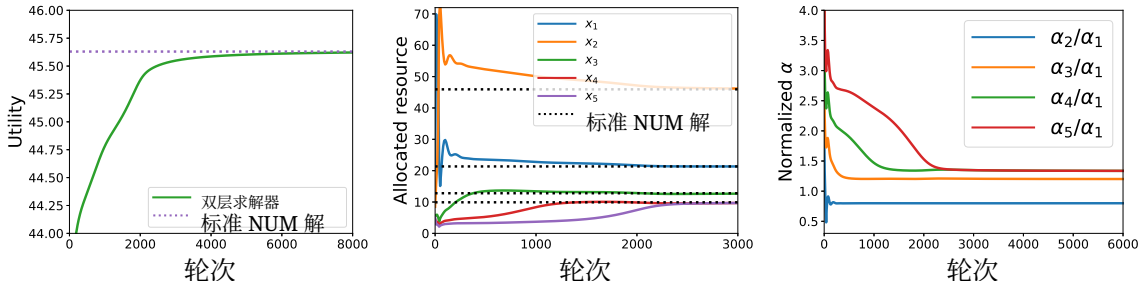


图 3：在 5 个用户的场景中，通过我们提出的双层求解器 DBiNUM 实现网络效用最大化。左图：总底层效用 Ψ 与轮次数的关系；中图：分配资源与轮次数的关系；右图：归一化 α 与轮次数的关系。

7 底层方法讨论

我们的方法可以看作是在较低层的标准网络资源分配流程之上增加了一个顶层流程，以提升整体网络效用。本节将讨论较低层流程对我们收敛性分析的影响。

如算法 1 所示，底层过程采用分布式原始解（见 [15]），其形式为 $\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha}) = \arg\max_{\boldsymbol{x}} \Phi(\mathbf{x};\ \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{r=1}^{n} \left(U_r(x_r;\alpha_r) - \frac{\epsilon x_r^2}{2}\right) - \sum_{l\in\mathcal{L}} B_l\left(\sum_{i:l\in\mathcal{L}_i} x_i\right)$，如式 (4) 所示。为求解给定 α_r 时的该目标函数，每个用户首先利用其共享链路邻居的信息计算梯度信息$\nabla_x U_r(x_r;\alpha_r) - \epsilon x_r - \sum_{l\in\mathcal{L}_r} \nabla B_l(\sum_{i:l\in\mathcal{L}_i} x_i)$，然后执行简单的基于梯度的更新。命题 2 和 3 已表明，底层函数 $\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})$ 关于 $\boldsymbol{x}$分别是强凸且光滑的。随后，根据光滑凸优化的结果 [47], 可知，简单的梯度上升法能够以次线性速率找到最优最大化解。换言之，我们可以在有限步内于第 k^{th} 次迭代找到一个 δ_Φ-精度解 $\widehat{x}_{k,r}$。此处也可采用 Nesterov 加速等加速梯度法，以实现更快的线性收敛速率。

实际上，存在各种延迟，例如从源到目标链路的前向延迟 T_f，以及某些反馈返回源的反向延迟 T_b。通过将步长设为与网络中的最大延迟成反比，我们能够证明低层过程的渐近稳定性（见 [15]中的第 2.6 节），并给出非渐近收敛保证（见 [48]）。因此，只要让低层过程运行足够长的时间，我们就能获得满足所需 δ_ϕ精度的解。

8 仿真实验

8.1 双层目标函数的验证

本节通过实验验证定理 2，以表明我们基于双层优化的方法（算法 1）能够恢复已知效用函数时的标准网络效用最大化解。我们考虑与第 5 节相同的单链路多用户场景，其中 n 个用户通过容量为 P 的单条通信链路传输数据包。我们考虑以下问题设置。

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} \ \Psi(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{r=1}^{n}\frac{x_r^*(\boldsymbol{\alpha})^{1-\widetilde{\alpha}_r}}{1-\widetilde{\alpha}_r},$$

$$x_1^*(\boldsymbol{\alpha}),...,x_n^*(\boldsymbol{\alpha})=\underset{x_r>0,\sum_{r=1}^n x_r\le P}{\arg\max}\sum_{r=1}^{n}\frac{x_r^{1-\alpha_r}}{1-\alpha_r}-B\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)$$

其中，我们选择对数障碍正则化函数 $B(x)=-\tau\log(P-x)$，其参数为 τ。对于下层问题，我们使用简单的 T 步梯度上升法，步长为 λ，以便在每轮 k 获得良好的估计值$\widehat{x}_{k,\,r}$，$r=1,\ .....n$。对于约束集，我们选择 $\mathcal{A}:=\{0.001<a_r\le 100, r=1,...,n\}$，以确保 $\boldsymbol{\alpha}$的有界性。

超参数选择。我们从候选集合 $\{10^{-t}, t=-4,\ -3.-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 中选择超参数 $\lambda,\ \eta,\ \beta$ 和 τ，并将较大的内循环迭代次数 T 设为 $\{10^t, t=3,4,5\}$，以确保每轮都能获得高精度的下层解。对于所有实验，我们均选择链路容量 $P=100$。对于图 2 中的实验，我们考虑一个满足 $n=3$ 的 3用户设置，其中设定 $\widetilde{\alpha}_1=\frac{1}{2}$、$\widetilde{\alpha}_2=\frac{2}{3}$ 和 $\widetilde{\alpha}_3=\frac{2}{3}$。对于图 3 中的实验，我们考虑一个满足 $n=3$ 的 5用户设置，其中设定 $\widetilde{\alpha}_1=\frac{1}{2}$、$\widetilde{\alpha}_2=\frac{2}{5}$ $\widetilde{\alpha}_3=\frac{3}{5}$ $\widetilde{\alpha}_4=\frac{2}{3}$ $\widetilde{\alpha}_5=\frac{2}{3}$ 、、、。

结果。从图 2 左侧的图可以看出，我们提出的 DBiNUM 所实现的总底层效用随着轮次增加，并收敛到标准 NUM 解 31。77。从图 2 中间的图可以看出，在底层效用函数采用 $\widetilde{\alpha}_1$、$\widetilde{\alpha}_2$、$\widetilde{\alpha}_3=\frac{1}{2}$、23、23的情况下，$x_1$ 收敛到标准 NUM 解 57。9；由于 x_2 和 x_3 的底层效用函数与 $\widetilde{\alpha}_2=\widetilde{\alpha}_3=\frac{2}{3}$ 相同，因此它们收敛到相同的解 20。99。这验证了定理 2 中的结果：我们证明了双层解 $x_r^*(\boldsymbol{\alpha}^*)$ $r=1,...,n$ 能够恢复标准 NUM 解。对于 5 用户的情况也能观察到相同的现象：用户 4、5 收敛到最低值 9。9，这是因为其 $\widetilde{\alpha}_4=\widetilde{\alpha}_5=\frac{2}{3}$ 最大；用户 2 则收敛到最高值 45。9，这是因为其 $\widetilde{\alpha}_2=\frac{2}{5}$ 最小（注意，较大的 α意味着在较大的 x 处增长率较低，因此分配资源较少）。从图 2 和图 3 右侧的图可以看出，由于全局解 $\boldsymbol{\alpha}$ 并不唯一，我们绘制了归一化解 α_i/α_1、$i=2$、3、$\cdots$。可以清楚地看到，每个归一化解经过若干轮次后都会收敛。

8.2 真实世界网络上的仿真

在本节中，我们考虑一个真实世界的网络 Abilene 网络，其拓扑结构如图4所示。按照 [14], 中的设置，该网络包含四条具有不同底层效用函数的数据传输流，其中流1采用二次效用函数 a_1x^2，流2采用平方根效用函数 $a_2\sqrt{x}+b_2-a_2\sqrt{x}$，流3采用对数效用 $a_3\log(b_3+1)$，流4则采用 α-公平性 $\frac{x^{1-a_4}}{1-a_4}$ 或 S形效用 [49]$x^{a_4}\mathbf{1}_{(x\ge 0)}-b_4(-x)^{a_4}\mathbf{1}_{(x<0)}$ ($\mathbf{1}_{(\cdot)}$ 为指示函数)。对于公式（4）中的双层目标函数，我们选择对数障碍正则化函数 $B(x)=-\tau\log(P-x)$，其容量为 P。与第8.1节的设置类似，我们针对下层问题采用简单的 T 步梯度上升法，步长为 λ。对于约束集，我们选择 $\mathcal{A}:=\{1.01<a_r\le 100, r=1,...,n\}$，以确保 $\boldsymbol{\alpha}$ 的有界性。

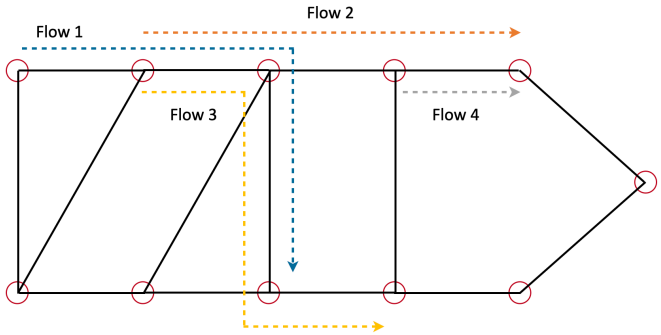


图4：包含四条传输流的 Abilene 网络。

超参数设置。 对于正则化函数 $B(\cdot)$，我们选择常数 $\tau = 0.01$，并将每条链路的容量设为 $P = 20$。步长 λ、η、β从 $\{10^t, t = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 中选取，以确保收敛。对于图5中的实验，我们设置 $a_1 = 0.1$、$a_2 = 5$、$b_2 = 0.4$、$a_3 = 4$、b_3 =1、$a_4 = 0.8$ 以及 $b_4 = 0.2$。对于图 6中的实验，我们设置 $a_1 = 3$、$a_2 = 0.5$、$b_2 = 0.2$、$a_3 = 0.5$、b_3 =2、$a_4 = 1.8$ 以及 $b_4 = 2$。对于两组实验，基线均为标准 NUM 解，其中每个用户都采用 α-公平性效用函数，且 $\alpha = 2$。

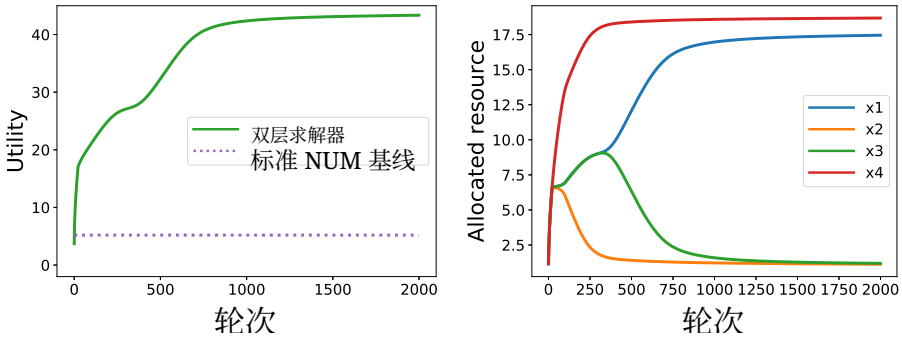


图 5：在 Abilene 网络中通过 DBiNUM 实现网络效用最大化，参数为 $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ a_4,\ b_4) = (0.1,\ 5,\ 0.4,\ 4,\ 1,\ 0.8,\ 0.2)$。左图：总底层效用 Ψ 与轮次数的关系；右图：资源与轮次数的关系。

结果。 从图 5 和图 5 的左图可以看出，我们的双层优化方法能够迭代地提高底层网络效用，并且显著优于标准的网络效用最大化基线。例如，在图 5 中，我们的 DBiNUM 方法收敛到 1127.06 的效用，远高于基线 229.40。图 5 中也可以观察到相同的提升。这表明我们的双层优化过程能够有效提高总底层网络效用。

9 结论与未来工作

本文提出了一种针对未知用户效用函数的网络效用最大化新型分布式双层方法。我们的方法基于用户反馈，迭代提升底层总效用。从理论上，我们分析了所提方法的收敛速率，并证明其还能够恢复

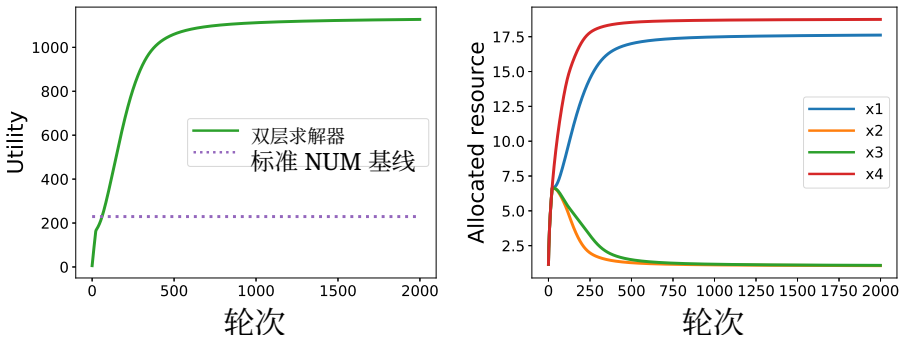


图 6：通过 DBiNUM 在 Abilene 网络中实现网络效用最大化，其中 $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ a_4,\ b_4) = (3,\ 0.5,\ 0.2,\ 0.5,\ 2,\ 1.8,\ 2)$。左图：总底层效用与轮次数量的关系；右图：资源与轮次数量的关系。

效用函数已知时的标准解。我们预计，所提出的理论和算法能够促进可行资源分配协议的设计，以支持动态异构无线网络中的分布式人工智能。我们还预计，我们的结果将推动分布式双层优化在通信网络资源分配中的发展与应用。

附录

定理2的证明

首先计算式（17）的下层解 $x_r^*(\boldsymbol{\alpha})$。根据 [15],中的标准分析，可以证明这些解满足等式 $\sum_{r=1}^{n} x_r = P$，这意味着，对于任意指标 m，都有$x_m = P - \sum_{i\neq m} x_i$。然后，将目标函数对$x_j$($j \neq m$)的导数设为0，即可得到这些解，如下所示。

$$\frac{\partial(\sum_{i\neq m} \frac{x_i^{1-\alpha_i}}{1-\alpha_i} + \frac{(P-\sum_{i\neq m} x_i)^{1-\alpha_m}}{1-\alpha_m})}{\partial x_j} = x_j^{-\alpha_j} - \left(P - \sum_{i\neq m} x_i\right)^{-\alpha_m} = 0,$$

由此可进一步得到：对于任意 $j \neq m$，均有 $x_j^{-\alpha_j} = x_m^{-\alpha_m}$。然后，结合这一关系与等式 $\sum_{i=1}^{n} x_i = P$，可得 $x_r^*(\boldsymbol{\alpha})$ $r = 1,\ \ldots,\ n$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^*(\boldsymbol{\alpha}) = P, \quad x_1^*(\boldsymbol{\alpha})^{-\alpha_1} = \cdots = x_n^*(\boldsymbol{\alpha})^{-\alpha_n}. \tag{21}$$

接下来，我们根据式（17）推导 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 的解。由式（21）可得

$$\sum_{t=1}^{n} (x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_t}} = P, \tag{22}$$

为简化记号，我们省略了每个 x_i^* 对应的 $\boldsymbol{\alpha}$。然后，对于 $i \neq j$，我们通过隐式求导，将式 (22) 对 α_j 的导数设为 0，从而求得导数 $\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j}$，如下所示。

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_t} (x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_t}-1} \frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j} - (x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_j}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j^2} \ln x_i^* = 0,$$

将所有项重新排列后，可得

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j} = \frac{(x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_j}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j^2} \ln x_i^*}{\sum_{t=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_t} (x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_t}-1}}. \tag{23}$$

对于 $i = j$ 的情况，采用与式 (23) 类似的方法，可得

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_i} = \frac{-\sum_{t\neq i} \frac{1}{\alpha_t} (x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_t}} \ln x_i^*}{\sum_{t=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_t} (x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_t}-1}}. \tag{24}$$

基于式 (23) 和式 (24) 中导数的性质，我们接下来推导最优解$\boldsymbol{\alpha}^*$ 以及由此得到的资源分配 $x_i^*(\boldsymbol{\alpha}^*)$。对上层总目标函数$\Psi(\boldsymbol{\alpha})$ $= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_r^*(\boldsymbol{\alpha}^{1-\widetilde{\alpha}_r})}{1-\widetilde{\alpha}_r}$关于$\alpha_j$ 求导，得到

$$\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} = \sum_{i\neq j} (x_i^*)^{-\widetilde{\alpha}_i} \frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j} + (x_j^*)^{-\widetilde{\alpha}_j} \frac{\partial x_j^*}{\partial \alpha_j},$$

将其与式 (23) 和式 (24) 结合，可得

$$\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j}=\sum_{i\neq j}(x_i^*)^{-\widetilde{\alpha}_i}\frac{(x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_j}}\frac{\alpha_i}{\alpha_j^2}\ln x_i^*}{\sum_{t=1}^n\frac{\alpha_i}{\alpha_t}(x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_t}-1}}-(x_j^*)^{-\widetilde{\alpha}_j}\frac{\sum_{i\neq j}\frac{1}{\alpha_i}(x_j^*)^{\frac{\alpha_j}{\alpha_i}}\ln x_j^*}{\sum_{t=1}^n\frac{\alpha_j}{\alpha_t}(x_j^*)^{\frac{\alpha_j}{\alpha_t}-1}}. \tag{25}$$

对于式 (25) 的右侧，注意到

$$\frac{\frac{1}{\alpha_i}(x_j^*)^{\frac{\alpha_j}{\alpha_i}}\ln x_j^*}{\sum_{t=1}^n\frac{\alpha_j}{\alpha_t}(x_j^*)^{\frac{\alpha_j}{\alpha_t}-1}}\overset{(i)}{=}\frac{\frac{1}{\alpha_j}x_j^*\ln x_j^*}{\sum_{t=1}^n\frac{\alpha_i}{\alpha_t}(x_j^*)^{\alpha_j(\frac{1}{\alpha_t}-\frac{1}{\alpha_i})}}\overset{(ii)}{=}\frac{\frac{1}{\alpha_j}x_j^*\ln x_j^*}{\sum_{t=1}^n\frac{\alpha_i}{\alpha_t}(x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_t}-1}}\overset{(iii)}{=}\frac{\frac{\alpha_i}{\alpha_j^2}(x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_j}}\ln x_i^*}{\sum_{t=1}^n\frac{\alpha_i}{\alpha_t}(x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_t}-1}}, \tag{26}$$

其中，(i) 是将上下两侧除以 $\frac{\alpha_j}{\alpha_i}(x_j^*)^{\frac{\alpha_j}{\alpha_i}-1}$ 得到的，(ii) 是因为 $(x_j^*)^{\alpha_j}=(x_i^*)^{\alpha_i\alpha_i}$（见式 (21)），而 (iii) 是因为 $x_j^*=(x_i^*)^{\alpha_j}$。然后，将式 (26) 代入式 (25)，可得

$$\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j}=\frac{1}{\alpha_j}\ln x_j^*\sum_{i\neq j}((x_i^*)^{-\widetilde{\alpha}_i}-(x_j^*)^{-\widetilde{\alpha}_j})\frac{(x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_j}}}{\sum_{t=1}^n\frac{\alpha_i}{\alpha_t}(x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\alpha_t}-1}}. \tag{27}$$

接下来，我们分别考虑两种情况 $P\neq n$ 和 $P=n$。

对于 $P\neq n$ 情况:

注意到 $x_j^*\neq 1$。否则，根据式 (22)，我们有 $n=P$，这与条件 $P\neq n$ 矛盾。然后，通过令式 (27) 等于 0，我们得到最优解 $\boldsymbol{\alpha}$。由此可得

$$\sum_{i\neq j}((x_i^*)^{-\widetilde{\alpha}_i}-(x_j^*)^{-\widetilde{\alpha}_j})\frac{(x_i^*)^{\frac{\alpha_i^*}{\alpha_j^*}}}{\sum_{t=1}^n\frac{\alpha_i^*}{\alpha_t^*}(x_i^*)^{\frac{\alpha_i^*}{\alpha_t^*}-1}}=0 \tag{28}$$

~ ~令 j 满足 $(x_j^*)^{-\alpha_j}\leq(x_i^*)^{-\alpha_i}$，对任意 $i=1,...,n$ 均成立。结合式 (28) 和 $x_i^*>0$，可得

$$(x_1^*)^{-\widetilde{\alpha}_1}=\cdots=(x_n^*)^{-\widetilde{\alpha}_n}. \tag{29}$$

将上述式 (29) 与式 (21) 中的关系 $(x_1^*)^{-\alpha_1}=\cdots=(x_n^*)^{-\alpha_n}$ 以及约束条件$\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}$相结合，解 $\boldsymbol{\alpha}^*\in\arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}}\Psi(\boldsymbol{\alpha})$ 满足 $\alpha_r^*=c\widetilde{\alpha}_r$，其中 $0<c\leq$ ^{b}最大值$_r(\widetilde{\alpha}_r)$，对 $r=1,...,n$ 均成立。接下来，我们证明所得的 $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}^*)$ 恢复了式 (18) 中传统网络最大化问题的解。为此，将式 (29) 与式 (21) 中的关系 $\sum_{i=1}^n x_i^*=P$ 相结合，可得每个 x_i^* 均满足 $\sum_{t=1}^n(x_i^*)^{\frac{\alpha_i}{\widetilde{\alpha}_t}}=P$，可以验证这就是式 (18) 的解。

对于 $P=n$ 情况:

在这种情况下，令式（27）中的导数为 0，可以看出，如果至少存在一个 $x_j^*=1$，根据式（21），所有 $x_1^*,...,x_n^*$ 都等于 1。否则，采用与上述 $P\neq n$ 情况类似的方法，~我们有 $\sum_{t=1}^n(x_i^*)^{\frac{\widetilde{\alpha}_i}{\widetilde{\alpha}_t}}=P$。令 i_0 满足 $\widetilde{\alpha}_{i_0}:=\max_i\widetilde{\alpha}_i$。那么，方程 $\sum_{t=1}^n(x_{i_0}^*)^{\frac{\alpha_{i_0}}{\widetilde{\alpha}_t}}=P=n$意味着 $x_{i_0}^*=1$。接着，根据式（21），我们也可以得出结论：所有 $x_1^*,...,x_n^*$ 都等于 1。总之，在这种 $P=n$ 情况下，解为 $x_1^*=\cdots=x_n^*=1$。请注意，这也得到了 $P=n$情况下式（18）的解。

然后，结合上述两种情况即可完成证明。

B 命题 1 的证明

首先，根据式（4）中 $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha})$的最优性，我们有

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha});\boldsymbol{\alpha})=0. \tag{30}$$

注意，由于 $\Phi(\cdot;\boldsymbol{\alpha})$ 具有强凹性，且 $\Phi(\cdot;\cdot)$ 二阶可微，因此 $\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha})$ 是唯一的。因此，对式 (30) 应用隐式求导可得

$$\frac{\partial\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha});\boldsymbol{\alpha})+\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha});\boldsymbol{\alpha})=0,$$

结合 $\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha});\boldsymbol{\alpha})$ 可逆这一事实，可进一步得到

$$\frac{\partial\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}}=-\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha});\boldsymbol{\alpha})\big(\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha});\boldsymbol{\alpha})\big)^{-1}. \tag{31}$$

式 (6) 中 $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha});\boldsymbol{\alpha})$ 和 $\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\alpha});\boldsymbol{\alpha})$ 的形式，可根据式 (4) 中 $\Phi(\cdot;\cdot)$ 的$\widetilde{}$的显式形式证明。此外，对上层函数 $\Psi(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{r=1}^n U_r(x_r^*(\alpha_r))$ 关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 求导，并使用链式法则，可得

$$\frac{\Phi(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\partial\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial\sum_{r=1}^n\widetilde{U}_r(x_r^*(\alpha_r))}{\partial\boldsymbol{x}}=\frac{\partial\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\big[\nabla\widetilde{U}_1(x_1^*),...,\nabla\widetilde{U}_n(x_n^*)\big]^T,$$

结合式 (31)，证明即告完成。

C 命题 2 的证明

根据式（4）中 $\Phi(\mathbf{x};\boldsymbol{\alpha})$ 的定义可知，梯度 $\nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x};\boldsymbol{\alpha})$ 的 r^{th} 坐标为 $\nabla_{x_r}U_r(x_r;\alpha_r)-\epsilon x_r-\sum_{l\in\mathcal{L}_r}\nabla B_l\big(\sum_{i:\,l\in\mathcal{L}_i}x_i\big)$。因此，对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}$ 和 $\mathbf{x}\ \widetilde{}\mathbf{x}\in\mathcal{X}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\big\langle\nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x};\boldsymbol{\alpha}),\widetilde{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\big\rangle\\
=&\sum_{r=1}^n\nabla_{x_r}U_r(x_r;\alpha_r)(\widetilde{x}_r-x_r)-\sum_{r=1}^n\epsilon x_r(\widetilde{x}_r-x_r)-\sum_{r=1}^n\sum_{l\in\mathcal{L}_r}\nabla B_l\Big(\sum_{i:l\in\mathcal{L}_i}x_i\Big)(\widetilde{x}_r-x_r)\\
=&\sum_{r=1}^n\nabla_{x_r}U_r(x_r;\alpha_r)(\widetilde{x}_r-x_r)-\sum_{r=1}^n\epsilon x_r(\widetilde{x}_r-x_r)-\sum_{l\in\mathcal{L}}\nabla B_l\Big(\sum_{i:l\in\mathcal{L}_i}x_i\Big)\sum_{r:l\in\mathcal{L}_r}(\widetilde{x}_r-x_r)\\
=&\sum_{r=1}^n\nabla_{x_r}U_r(x_r;\alpha_r)(\widetilde{x}_r-x_r)-\sum_{r=1}^n\epsilon x_r(\widetilde{x}_r-x_r)-\sum_{l\in\mathcal{L}}\nabla B_l\Big(\sum_{i:l\in\mathcal{L}_i}x_i\Big)\Big(\sum_{i:l\in\mathcal{L}_i}\widetilde{x}_i-\sum_{i:l\in\mathcal{L}_i}x_i\Big)\\
\overset{(i)}{\geq}&\sum_{r=1}^n\big(U_r(\widetilde{x}_r;\alpha_r)-U_r(x_r;\alpha_r)\big)-\frac{\epsilon}{2}\sum_{r=1}^n(\widetilde{x}_r^2-x_r^2)+\frac{\epsilon}{2}\sum_{r=1}^n(\widetilde{x}_r-x_r)^2\\
&-\sum_{l\in\mathcal{L}}B_l\Big(\sum_{i:l\in\mathcal{L}_i}\widetilde{x}_i\Big)+\sum_{l\in\mathcal{L}}B_l\Big(\sum_{i:l\in\mathcal{L}_i}x_i\Big)+\frac{\mu}{2}\sum_{l\in\mathcal{L}}\Big(\sum_{i:l\in\mathcal{L}_i}(\widetilde{x}_i-x_i)\Big)^2\\
=&\Phi(\widetilde{\mathbf{x}})-\Phi(\mathbf{x})+\frac{\epsilon}{2}\|\widetilde{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|^2+\frac{\mu M_{\min}}{2}\|\widetilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}\|^2,
\end{aligned}$$

其中，(i) 成立是因为 $U_r(\cdot\,;\alpha_r)$ 是 μ-强凹的，且 $B_l(\cdot)$ 是凸的；而 $M_{\min}=\min_{r=1,\dots,n}\{M_r:$ 用户 r 独占使用的链路数量。至此，证明完成。

D 命题 3 的证明

首先，根据式 (4) 中 $\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})$ 的形式，梯度 $\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})$ 的 i^{th} 坐标为$\nabla_x U_i(x_i;\ \alpha_i)$ $-\sum_{l\in\mathcal{L}_i}\nabla B_l\big(\sum_{r:\ l\in\mathcal{L}_r} x_r\big)$，由假设 2 可得，对于任意 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}'\in\mathcal{X}$以及 $\boldsymbol{\alpha}$,

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})-\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}';\boldsymbol{\alpha})\|^2\\
&\quad\le\sum_{i=1}^{n}2(\nabla_x U_i(x_i;\alpha_i)-\nabla_x U_i(x_i';\alpha_i))^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{l\in\mathcal{L}_i}\Big(\nabla B_l\Big(\sum_{r:l\in\mathcal{L}_r}x_r\Big)-\nabla B_l\Big(\sum_{r:l\in\mathcal{L}_r}x_r'\Big)\Big)^2\\
&\quad\le 2\sum_{i=1}^{n}L_u^2(x_i-x_i')^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{l\in\mathcal{L}_i}L_b^2\Big(\sum_{r:l\in\mathcal{L}_r}(x_r-x_r')\Big)^2\\
&\quad\le 2L_u^2\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|^2+2nL_b^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{l\in\mathcal{L}_i}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|^2\\
&\quad=\Big(2L_u^2+2n\sum_{i=1}^{n}\sum_{l\in\mathcal{L}_i}L_b^2\Big)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|^2,
\end{aligned}
\tag{32}
$$

对两边开平方，即可证明 $\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\cdot;\boldsymbol{\alpha})$ 的 Lipschitz连续性。根据式 (6) 中海森矩阵 $\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{\alpha})$ 的形式，对于任意给定的向量 $\boldsymbol{u}=[u_1,...,u_n]^T$,

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u}-\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}';\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u}\|^2\\
&\qquad=\sum_{i=1}^{n}\Big(\nabla^2_x U_i(x_i;\alpha_i)u_i-\nabla^2_x U_i(x_i';\alpha_i)u_i\\
&\qquad\quad-\sum_{j:\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_j\neq\emptyset}\sum_{l\in\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_j}\Big(\nabla^2 B_l\big(\sum_{r:l\in\mathcal{L}_r}x_r\big)-\nabla^2 B_l\big(\sum_{r:l\in\mathcal{L}_r}x_r'\big)\Big)u_i\Big)^2\\
&\qquad\overset{(i)}{\le}\sum_{i=1}^{n}2\Big(\nabla^2_x U_i(x_i;\alpha_i)-\nabla^2_x U_i(x_i';\alpha_i)\Big)^2u_i^2\\
&\qquad\quad+\sum_{i=1}^{n}2\Big(\sum_{j:\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_j\neq\emptyset}\sum_{l\in\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_j}L_b\Big|\sum_{r:l\in\mathcal{L}_r}\big(x_r-x_r'\big)\Big||u_i|\Big)^2\\
&\qquad\le\sum_{i=1}^{n}2L_u^2(x_i-x_i')^2u_i^2+\sum_{i=1}^{n}2\Big(\sum_{r=1}^{n}|x_r-x_r'|\sum_{j:\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_j\neq\emptyset}\sum_{l\in\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_j}L_b|u_i|\Big)^2\\
&\qquad\le\Big(\sum_{i=1}^{n}2L_u^2u_i^2\Big)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|^2+\sum_{i=1}^{n}2\Big(\sum_{j:\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_j\neq\emptyset}\sum_{l\in\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_j}L_b|u_i|\Big)^2(\sum_{r=1}^{n}|x_r-x_r'|)^2\\
&\qquad\le\Big(2L_u^2+2nL_b^2\max_i\Big(\sum_{j:\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_j\neq\emptyset}\sum_{l\in\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_j}1\Big)^2\Big)\max_i u_i^2\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|^2,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

这证明了 $\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\cdot;\ \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u}$ 的 Lipschitz连续性。接下来，我们证明 $\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\cdot)\boldsymbol{u}$ 的 Lipschitz连续性。类似地，根据式 (6) 中 $\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})$ 的形式，对于任意 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}'$

$$
\|\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u}-\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha}')\boldsymbol{u}\|^2=\sum_{i=1}^{n}(\nabla^2_x U_i(x_i;\alpha_i)u_i-\nabla^2_x U_i(x_i;\alpha_i')u_i)^2
$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} L_u^2(\alpha_i - \alpha_i')^2 u_i^2 \leq L_u^2 \max_i u_i^2 \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}'\|^2. \tag{34}$$

最后，我们证明混合导数 $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u}$ 的 Lipschitz连续性。注意到 $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{\alpha})$ 是一个对角矩阵，其 i^{th} 对角元素为 $\nabla_\alpha \nabla_x U_i(x_i;\ \alpha_i)$。于是，对于任意 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}'$

$$\|\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u} - \nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}';\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u}\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} L_u^2(x_i - x_i')^2 u_i^2 \leq L_u^2 \max_i u_i^2 \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|^2. \tag{35}$$

类似地，可以证明 $\|\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{u} - \nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{\alpha}')\boldsymbol{u}\|^2 \leq L_u^2 \max_i u_i^2 \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}'\|^2.$。至此，证明完成。

E 命题 4 的证明

根据式 (7) 中的更新，辅助向量 $\boldsymbol{v}_{k+1}$ 可写为

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \big(I + \eta\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)\big)\boldsymbol{v}_k - \eta\nabla\widetilde{U}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k), \tag{36}$$

这可以看作海森矩阵逆向量 $\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\ \boldsymbol{\alpha}_k)\big)^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)$ 的单步估计。注意，根据算法 1，我们有 $x_{k,r}^* - \delta_\Phi < \widehat{x}_{k,r} < x_{k,r}^* + \delta_\Phi$，结合假设 1 中的 $\delta < x_{k,r}^* < b$ 和 $\delta_\Phi < \frac{\delta}{2}$，可得 $\widehat{x}_{k,r} < b + \delta_\Phi < 2b$ 以及 $\widehat{x}_{k,r} > \delta - \delta_\Phi > \frac{\delta}{2}$，进而有 $\widehat{\boldsymbol{x}}_k \in \mathcal{X}$。另请注意，$\boldsymbol{x}_k^* \in \mathcal{X}$。然后，根据式 (36) 中的更新，我们有

$$\boldsymbol{v}_{k+1} - \big(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)\big)^{-1}\nabla\widetilde{U}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k) = (1 + \eta\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k))\big(\boldsymbol{v}_k - \big(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)\big)^{-1}\nabla\widetilde{U}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)\big),$$

根据命题 2 中所确立的 $\Phi(;\boldsymbol{\alpha}_k)$ 的强凹性，可得

$$\|\boldsymbol{v}_{k+1} - (\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)\| \leq \big(1 - \eta\mu_\Phi\big)\big\|\boldsymbol{v}_k - (\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)\big\|. \tag{37}$$

注意，差 $(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\ \boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k)$ 与 $(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\ \boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)$ 之间的差为 y

$$\begin{aligned}
&\|(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k) - (\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\| \\
&\quad\leq \|(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)^{-1} - \nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k)^{-1})\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\| + \|\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)^{-1}\|\|\nabla\widetilde{U}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k) - \nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\| \\
&\quad\overset{(i)}{\leq} \frac{\sqrt{n}L_{\text{Hess}}L_u}{\mu_\Phi^2}\|\widehat{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{x}_k^*\| + \frac{L_u}{\mu_\Phi}\|\widehat{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{x}_k^*\| \\
&\quad\overset{(ii)}{\leq} \Big(\frac{L_{\text{Hess}}L_u}{\mu_\Phi^2} + \frac{L_u}{\sqrt{n}\mu_\Phi}\Big)n\delta_\Phi,
\end{aligned} \tag{38}$$

其中，(i)由假设 2、命题 2 和命题 3 得出，而(ii)成立是因为$|\widehat{x}_{k,\ r} - x_{k,\ r}^*| < \delta_\Phi$。将式 (38) 代入式 (37)，得到

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}_{k+1} - (\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\| \\
&\qquad\leq \big(1 - \eta\mu_\Phi\big)\big\|\boldsymbol{v}_k - (\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\big\| + \big(2 - \eta\mu_\Phi\big)\Big(\frac{L_{\text{Hess}}L_u}{\mu_\Phi^2} + \frac{L_u}{\sqrt{n}\mu_\Phi}\Big)n\delta_\Phi,
\end{aligned}$$

利用杨氏不等式 $(a+b)^2 \le (1+\lambda)a^2 + (1+\frac{1}{\lambda})b^2$，可得

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}_{k+1} - (\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_k;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_k)\|^2 \\
&\quad\le \big(1+\eta\mu_\Phi\big)\big(1-\eta\mu_\Phi\big)^2\big\|\boldsymbol{v}_k - (\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_k;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_k)\big\|^2 \\
&\qquad + \Big(1+\frac{1}{\eta\mu_\Phi}\Big)\big(2-\eta\mu_\Phi\big)^2\Big(\frac{L_{\text{Hess}}L_u}{\mu^2_\Phi} + \frac{L_u}{\sqrt{n}\mu_\Phi}\Big)^2 n^2\delta^2_\Phi \\
&\quad\le \big(1-\eta\mu_\Phi\big)\big\|\boldsymbol{v}_k - (\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_k;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_k)\big\|^2 \\
&\qquad + 4\Big(1+\frac{1}{\eta\mu_\Phi}\Big)\Big(\frac{L_{\text{Hess}}L_u}{\mu^2_\Phi} + \frac{L_u}{\sqrt{n}\mu_\Phi}\Big)^2 n^2\delta^2_\Phi. \qquad (39)
\end{aligned}
$$

接下来，我们界定相邻迭代中 $(\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_k;\,\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_k)$ 与 $(\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_{k-1};\,\boldsymbol{\alpha}_{k-1}))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_{k-1})$ 之间的差异。类似于式 (38)，有

$$
\begin{aligned}
&\big\|(\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_k;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_k) - (\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_{k-1};\boldsymbol{\alpha}_{k-1}))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_{k-1})\big\| \\
&\quad\le \|(\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_k;\boldsymbol{\alpha}_k)^{-1} - \nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_{k-1};\boldsymbol{\alpha}_{k-1})^{-1})\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_{k-1})\| \\
&\qquad + \|\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_k;\boldsymbol{\alpha}_k)^{-1}\|\|\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_k) - \nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_{k-1})\| \\
&\quad\le \frac{\sqrt{n}L_u}{\mu^2_\Phi}(L_{\text{Hess}}\|\boldsymbol{x}^*_k - \boldsymbol{x}_{k-1}\|^* + L_u\|\boldsymbol{\alpha}_k - \boldsymbol{\alpha}_{k-1}\|) + \frac{L_u}{\mu_\Phi}\|\boldsymbol{x}^*_k - \boldsymbol{x}^*_{k-1}\|,
\end{aligned}
$$

根据 [36] that $\|\boldsymbol{x}^*_k - \boldsymbol{x}^*_{k-1}\| \le \frac{L_{\text{grad}}}{\mu_\Phi}\|\boldsymbol{\alpha}_k - \boldsymbol{\alpha}_{k-1}\|$ 中的引理 2.2，可得

$$
\begin{aligned}
&\big\|(\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_k;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_k) - (\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_{k-1};\boldsymbol{\alpha}_{k-1}))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_{k-1})\big\| \\
&\qquad\le \Big(\frac{L_{\text{grad}}}{\mu_\Phi}\Big(\frac{L_uL_{\text{Hess}}}{\mu^2_\Phi} + \frac{L_u}{\sqrt{n}\mu_\Phi}\Big) + \frac{L^2_u}{\mu^2_\Phi}\Big)\sqrt{n}\|\boldsymbol{\alpha}_k - \boldsymbol{\alpha}_{k-1}\|. \qquad (40)
\end{aligned}
$$

然后，将式 (40) 代入式 (39)，并使用杨氏不等式，可得

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}_{k+1} - (\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_k;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_k)\|^2 \\
&\quad\le \big(1-\eta\mu_\Phi\big)(1+\tau)\big\|\boldsymbol{v}_k - (\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_{k-1};\boldsymbol{\alpha}_{k-1}))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_{k-1})\big\|^2 \\
&\qquad + \big(1-\eta\mu_\Phi\big)\Big(1+\frac{1}{\tau}\Big)\Big(\frac{L_{\text{grad}}}{\mu_\Phi}\Big(\frac{L_uL_{\text{Hess}}}{\mu^2_\Phi} + \frac{L_u}{\sqrt{n}\mu_\Phi}\Big) + \frac{L^2_u}{\mu^2_\Phi}\Big)^2 n\|\boldsymbol{\alpha}_k - \boldsymbol{\alpha}_{k-1}\|^2 \\
&\qquad + 4\Big(1+\frac{1}{\eta\mu_\Phi}\Big)\Big(\frac{L_{\text{Hess}}L_u}{\mu^2_\Phi} + \frac{L_u}{\sqrt{n}\mu_\Phi}\Big)^2 n^2\delta^2_\Phi,
\end{aligned}
$$

通过选择 $\tau = \frac{\eta\mu_\Phi}{2}$，并根据 C_v 和 Δ_Φ 的定义，可得结论，从而完成证明。

F 命题 5 的证明

利用命题 1 中 $\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha})$ 的形式，我们有

$$
\begin{aligned}
&\big\| - \nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)\boldsymbol{v}_{k+1} - \nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\big\| \\
&\quad\le \big\|\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)\big(\boldsymbol{v}_{k+1} - (\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*_k;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*_k)\big)\big\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\|(\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)-\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k))(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\|\\
\overset{(i)}{\leq}&\big\|\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)\big(\boldsymbol{v}_{k+1}-(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\big)\big\|+\frac{\sqrt{n}L_u^2}{\mu_\Phi}\|\widehat{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}_k^*\| \qquad (41)
\end{aligned}
$$

其中 (i) 由命题 3 结合 $\max_i|u_i|\leq\|\boldsymbol{u}\|$ 得出。接下来，我们对式 (41) 右侧的第一项作上界估计。与命题 4 的证明类似，我们有 $\widehat{\boldsymbol{x}}_k\in\mathcal{X}$。于是，对于任意 $\boldsymbol{u}$,

$$
\|\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)\boldsymbol{u}\|^2=\sum_{i=1}^n(\nabla_\alpha\nabla_x U_i(\widehat{x}_{k,i};\alpha_{k,i})u_i)^2\leq L_u^2\|\boldsymbol{u}\|^2. \qquad (42)
$$

将式 (42) 应用于式 (41)，得到

$$
\big\|-\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)\boldsymbol{v}_{k+1}-\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\big\|\leq L_u\big\|\boldsymbol{v}_{k+1}-(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\big\|+\frac{nL_u^2}{\mu_\Phi}\delta_\Phi. \qquad (43)
$$

将式 (10) 中的更新代入命题 4，可得

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}_{k+1}-(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\|^2\leq&\big(1-\frac{\eta\mu_\Phi}{2}\big)\big\|\boldsymbol{v}_k-(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_{k-1}^*;\boldsymbol{\alpha}_{k-1}))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_{k-1}^*)\big\|^2\\
&+C_v\beta^2\|\beta^{-1}\big(\boldsymbol{\alpha}_{k-1}-\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\big\{\boldsymbol{\alpha}_{k-1}-\beta\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1};\boldsymbol{\alpha}_{k-1})\boldsymbol{v}_k\big\}\big)\|^2+\Delta_\Phi,
\end{aligned}
$$

结合投影的非扩张性和式 (43)，得到

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}_{k+1}-(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\|^2\\
&\quad\leq\big(1-\frac{\eta\mu_\Phi}{2}\big)\big\|\boldsymbol{v}_k-(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_{k-1}^*;\boldsymbol{\alpha}_{k-1}))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_{k-1}^*)\big\|^2\\
&\qquad+2C_v\beta^2\|\beta^{-1}\big(\boldsymbol{\alpha}_{k-1}-\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\big\{\boldsymbol{\alpha}_{k-1}+\beta\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_{k-1})\big\}\|^2+\Delta_\Phi\\
&\qquad+2C_v\beta^2\|-\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_{k-1})-\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_{k-1};\boldsymbol{\alpha}_{k-1})\boldsymbol{v}_k\|^2\\
&\quad\leq\big(1-\frac{\eta\mu_\Phi}{2}+4C_vL_u^2\beta^2\big)\big\|\boldsymbol{v}_k-(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_{k-1}^*;\boldsymbol{\alpha}_{k-1}))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_{k-1}^*)\big\|^2\\
&\qquad+2C_v\beta^2\|\beta^{-1}\big(\boldsymbol{\alpha}_{k-1}-\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\big\{\boldsymbol{\alpha}_{k-1}+\beta\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_{k-1})\big\}\|^2+\Delta_\Phi+\frac{4C_v\beta^2L_u^4n^2}{\mu_\Phi^2}\delta_\Phi^2. \qquad (44)
\end{aligned}
$$

回顾定义 $G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)=\beta^{-1}(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\{\boldsymbol{\alpha}_k+\beta\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\}-\boldsymbol{\alpha}_k)$。然后，注意到我们选择步长 β，使得 $4C_vL_u^2\beta^2<\frac{\eta\mu_\Phi}{4}$。对式 (44) 关于 k 进行裂项求和，得到

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}_{k+1}-(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\|^2\\
&\quad\leq\big(1-\frac{\eta\mu_\Phi}{4}\big)^k\|\boldsymbol{v}_1-(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_0^*;\boldsymbol{\alpha}_0))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_0^*)\|^2\\
&\qquad+2C_v\beta^2\sum_{t=0}^{k-1}\big(1-\frac{\eta\mu_\Phi}{4}\big)^{k-1-t}\|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_t)\|^2+\frac{4\Delta_\Phi\mu_\Phi+\eta L_u^2n^2\delta_\Phi^2}{\eta\mu_\Phi^2},
\end{aligned}
$$

结合式 (7)、$\boldsymbol{v}_0=\mathbf{0}$ and $\big\|\nabla\widetilde{U}(\widehat{\boldsymbol{x}}_0)\big\|\leq\sqrt{n}L_u$，可得

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}_{k+1}-(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\|^2\leq&\big(1-\frac{\eta\mu_\Phi}{4}\big)^k2nL_u^2(1+\mu_\Phi^{-2})\\
&+2C_v\beta^2\sum_{t=0}^{k-1}\big(1-\frac{\eta\mu_\Phi}{4}\big)^{k-1-t}\|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_t)\|^2+\frac{4\Delta_\Phi\mu_\Phi+\eta L_u^2n^2\delta_\Phi^2}{\eta\mu_\Phi^2}. \qquad (45)
\end{aligned}
$$

将式 (45) 代入式 (43)

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)\boldsymbol{v}_{k+1}-\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\right\|^2\\
&\quad\le 2L_u^2\left\|\boldsymbol{v}_{k+1}-(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}_k^*;\boldsymbol{\alpha}_k))^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}_k^*)\right\|^2+\frac{2n^2L_u^4}{\mu_\Phi^2}\delta_\Phi^2\\
&\quad\le\big(1-\frac{\eta\mu_\Phi}{4}\big)^k 4nL_u^4(1+\mu_\Phi^{-2})+4C_vL_u^2\beta^2\sum_{t=0}^{k-1}\big(1-\frac{\eta\mu_\Phi}{4}\big)^{k-1-t}\|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_t)\|^2\\
&\qquad+\frac{8L_u^2\Delta_\Phi\mu_\Phi+4\eta L_u^4n^2\delta_\Phi^2}{\eta\mu_\Phi^2},
\end{aligned}
$$

至此，证明完成。

G 定理 1 的证明

我们首先推导超梯度 $\nabla\Psi(\cdot)$ 的光滑性。根据式 (5) 中 $\nabla\Psi(\cdot)$ 的形式，对于任意两个 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2\in\mathcal{A}$

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_1)-\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_2)\|\\
&\quad\le\|\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_1);\boldsymbol{\alpha}_1)\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_1);\boldsymbol{\alpha}_1)\big)^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_1))\\
&\qquad-\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_2);\boldsymbol{\alpha}_2)\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}^2\Phi(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_2);\boldsymbol{\alpha}_2)\big)^{-1}\nabla\widetilde{U}(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_2))\|\\
&\quad\overset{(i)}{\le}L_u(\|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_1)-\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_2)\|+\|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\|)\frac{\sqrt{n}L_u}{\mu_\Phi}\\
&\qquad+\frac{\sqrt{n}L_u^2}{\mu_\Phi^2}\big(L_{\text{Hess}}\|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_1)-\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_2)\|+L_u\|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\|\big)+\frac{L_u}{\mu_\Phi}\|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_1)-\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_2)\|
\end{aligned}\tag{46}
$$

其中，(i) 由命题 2、命题 3 和式 (42) 得出。根据 [36] 中的引理 2.2，即 $\|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_1)-\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\alpha}_2)\|\le\frac{L_{\text{grad}}}{\mu_\Phi}\|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\|$，由式 (46) 可得

$$
\|\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_1)-\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_2)\|\le\underbrace{\Big(\frac{L_{\text{grad}}}{\mu_\Phi}\Big(\frac{\sqrt{n}L_u^2}{\mu_\Phi}+\frac{\sqrt{n}L_u^2L_{\text{Hess}}}{\mu_\Phi^2}+\frac{L_u}{\mu_\Phi}\Big)+\frac{\sqrt{n}L_u^2}{\mu_\Phi}+\frac{\sqrt{n}L_u^3}{\mu_\Phi^2}\Big)}_{L_\Psi}\|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\|.\tag{47}
$$

$\widehat{\ }$为方便记号，定义超梯度估计 $\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)=-\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\widehat{\boldsymbol{x}}_k;\boldsymbol{\alpha}_k)\boldsymbol{v}_{k+1}$。那么，根据式 (47) 中建立的光滑性，我们有

$$
\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{\alpha}_{k+1})&\ge\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)+\langle\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k),\boldsymbol{\alpha}_{k+1}-\boldsymbol{\alpha}_k\rangle-\frac{L_\Psi}{2}\|\boldsymbol{\alpha}_{k+1}-\boldsymbol{\alpha}_k\|^2\\
&\ge\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)+\frac{1}{\beta}\big\langle\beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k),\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\big\{\boldsymbol{\alpha}_k+\beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\big\}-\boldsymbol{\alpha}_k\big\rangle\\
&\quad+\big\langle\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)-\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k),\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\big\{\boldsymbol{\alpha}_k+\beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\big\}-\boldsymbol{\alpha}_k\big\rangle-\frac{L_\Psi}{2}\|\boldsymbol{\alpha}_{k+1}-\boldsymbol{\alpha}_k\|^2.
\end{aligned}\tag{48}
$$

对于式（48）右侧的第二项，我们注意到

$$
\big\langle\beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k),\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\big\{\boldsymbol{\alpha}_k+\beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\big\}-\boldsymbol{\alpha}_k\big\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
=&\big\langle \boldsymbol{\alpha}_k+\beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)-\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\big\{\boldsymbol{\alpha}_k+\beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\big\},\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\big\{\boldsymbol{\alpha}_k+\beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\big\}-\boldsymbol{\alpha}_k\big\rangle\\
&+\|\boldsymbol{\alpha}_k-\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\big\{\boldsymbol{\alpha}_k+\beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\big\}\|^2, \qquad (49)
\end{aligned}
$$

利用在凸集 $\mathcal{A}$ 上的投影性质，即对于任意 $\boldsymbol{y}\in\mathcal{A}$，有 $\langle \boldsymbol{x}-\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{y}-\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})\rangle\le 0$，并注意到 $\boldsymbol{\alpha}_k=\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\{\boldsymbol{\alpha}_{k-1}+\beta\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_{k-1})\}\in\mathcal{A}$，可得

$$
\big\langle \beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k),\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\big\{\boldsymbol{\alpha}_k+\beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\big\}-\boldsymbol{\alpha}_k\big\rangle\ge\|\boldsymbol{\alpha}_k-\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\big\{\boldsymbol{\alpha}_k+\beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\big\}\|^2. \qquad (50)
$$

为方便记号，令 $\widehat{G}_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)=\beta^{-1}(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}\{\boldsymbol{\alpha}_k+\beta\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\}-\boldsymbol{\alpha}_k)$ 表示命题 5 中定义的真实广义投影梯度 $G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)$ 的估计。于是，将式 (50) 代入式 (48)，并利用 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\ge-\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2)$，可得

$$
\Psi(\boldsymbol{\alpha}_{k+1})\ge\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)+\frac{\beta}{2}\|\widehat{G}_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2-\frac{\beta}{2}\|\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)-\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2-\frac{L_\Psi\beta^2}{2}\|\widehat{G}_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2,
$$

结合 $\|\widehat{G}_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)-G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|\le\|\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)-\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\|$ 和 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2\ge\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|^2-\|\boldsymbol{b}\|^2$，可得

$$
\Psi(\boldsymbol{\alpha}_{k+1})\ge\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)+\big(\frac{\beta}{4}-\frac{L_\Psi\beta^2}{4}\big)\|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2-\big(\beta-\frac{L_\Psi\beta^2}{2}\big)\|\nabla\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)-\widehat{\nabla}\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2. \qquad (51)
$$

将命题 5 应用于上述式（51），可得

$$
\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{\alpha}_{k+1})\ge&\Psi(\boldsymbol{\alpha}_k)+\big(\frac{\beta}{4}-\frac{L_\Psi\beta^2}{4}\big)\|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2\\
&-4C_vL_u^2\beta^2\big(\beta-\frac{L_\Psi\beta^2}{2}\big)\sum_{t=0}^{k-1}\big(1-\frac{\eta\mu_\Phi}{4}\big)^{k-1-t}\|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_t)\|^2\\
&-4nL_u^4(1+\mu_\Phi^{-2})\big(\beta-\frac{L_\Psi\beta^2}{2}\big)\big(1-\frac{\eta\mu_\Phi}{4}\big)^k-\big(\beta-\frac{L_\Psi\beta^2}{2}\big)\frac{8L_u^2\Delta_\Phi\mu_\Phi+4\eta L_u^4n^2\delta_\Phi^2}{\eta\mu_\Phi^2}. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

将式（52）对 k 从 0 到 $K-1$ 进行求和，可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}}\Psi(\boldsymbol{\alpha})-\Psi(\boldsymbol{\alpha}_0)}{\beta K}\ge&\big(\frac{1}{4}-\frac{L_\Psi\beta}{4}\big)\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2\\
&-4\big(1-\frac{L_\Psi\beta}{2}\big)C_vL_u^2\beta^2\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K-1}\sum_{t=0}^{k-1}\big(1-\frac{\eta\mu_\Phi}{4}\big)^{k-1-t}\|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_t)\|^2\\
&-\frac{16nL_u^4(1+\mu_\Phi^{-2})}{\eta\mu_\Phi}\big(1-\frac{L_\Psi\beta}{2}\big)\frac{1}{K}-\big(1-\frac{L_\Psi\beta}{2}\big)\frac{8L_u^2\Delta_\Phi\mu_\Phi+4\eta L_u^4n^2\delta_\Phi^2}{\eta\mu_\Phi^2},
\end{aligned}
$$

结合 $\sum_{k=1}^{K-1}\sum_{t=0}^{k-1}a_{k-1-t}b_t\le\sum_{k=0}^{K-1}a_k\sum_{t=0}^{K-1}b_t$ 对于 $a_t,\ b_t\ge0$，可得

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{4}-\frac{L_\Psi\beta}{4}-16\big(1-\frac{L_\Psi\beta}{2}\big)\frac{C_vL_u^2\beta^2}{\eta\mu_\Phi}\Big)\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2\le&\frac{\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}}\Psi(\boldsymbol{\alpha})-\Psi(\boldsymbol{\alpha}_0)}{\beta K}\\
&+\frac{16nL_u^4(1+\mu_\Phi^{-2})}{\eta\mu_\Phi}\big(1-\frac{L_\Psi\beta}{2}\big)\frac{1}{K}+\big(1-\frac{L_\Psi\beta}{2}\big)\frac{8L_u^2\Delta_\Phi\mu_\Phi+4\eta L_u^4n^2\delta_\Phi^2}{\eta\mu_\Phi^2}. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

由于我们选择 β 使得 $0 < \beta \leq \frac{1}{2L_\Psi}$，因此有 $\frac{3}{4} < 1 - \frac{L_\Psi \beta}{2} < 1$。于是，式 (53) 可简化为

$$\Big(\frac{1}{8} - \frac{16C_v L_u^2 \beta^2}{\eta \mu_\Phi}\Big) \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2 \leq \frac{\max_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}} \Psi(\boldsymbol{\alpha}) - \Psi(\boldsymbol{\alpha}_0)}{\beta K} + \frac{16nL_u^4(1 + \mu_\Phi^{-2})}{\eta \mu_\Phi} \frac{1}{K} + \frac{8L_u^2 \Delta_\Phi \mu_\Phi + 4\eta L_u^4 n^2 \delta_\Phi^2}{\eta \mu_\Phi^2}, \tag{54}$$

与 $\beta \leq \sqrt{\frac{\eta \mu_\Phi}{256 C_v L_u^2}}$ 结合后，得到

$$\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \|G_{\text{proj}}(\boldsymbol{\alpha}_k)\|^2 \leq \frac{16(\max_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}} \Psi(\boldsymbol{\alpha}) - \Psi(\boldsymbol{\alpha}_0))}{\beta K} + \frac{256nL_u^4(1 + \mu_\Phi^2)}{\eta \mu_\Phi^3} \frac{1}{K} + \frac{128L_u^2 \Delta_\Phi \mu_\Phi + 4\eta L_u^4 n^2 \delta_\Phi^2}{\eta \mu_\Phi^2},$$

至此，证明完毕。

参考文献

[1] Frank P Kelly、Aman K Maulloo 和 David Kim Hong Tan。通信网络的速率控制：影子价格、比例公平性与稳定性。运筹学会刊，49(3):237–252，1998。[2] Steven H Low 和 David E Lapsley。优化流量控制。一、基本算法与收敛性。*IEEE/ACM*网络汇刊，7(6):861–874，1999。[3] Daniel P Palomar 和 Mung Chiang。网络效用最大化的替代分布式算法：框架与应用。*IEEE*自动控制汇刊，52(12):2254–2269，2007。[4] Michael J Neely、Eytan Modiano 和 Charles E Rohrs。时变无线网络中的动态功率分配与路由。载于*IEEE INFOCOM 2003*，第1卷，第745–755页。IEEE，2003。[5] Leonidas Georgiadis、Michael J Neely、Leandros Tassiulas 等。无线网络中的资源分配与跨层控制。*Foundations and Trends® in Networking*，1(1):1–144，2006。[6] Siva Theja Maguluri、Rayadurgam Srikant 和 Lei Ying。云计算集群中的负载均衡与调度随机模型。载于*IEEE INFOCOM 2012*，第702–710页。IEEE，2012。[7] Javad Ghaderi、Sanjay Shakkottai 和 Rayadurgam Srikant。云中的风暴调度与数据流。*ACM*计算系统建模与性能评估汇刊（*TOMPECS*），1(4):1–28，2016。[8] Kaiyi Ji、Guocong Quan 和 Jian Tan。一致性哈希下LRU缓存的渐近未命中率。载于*IEEE INFOCOM 2018-IEEE*计算机通信会议，第450–458页。IEEE，2018。[9] Mohammad Sadegh Talebi、Ahmad Khonsari、Mohammad Hassan Hajiesmaili 和 Sina Jafar-pour。可扩展视频流的准最优网络效用最大化。*arXiv*预印本 *arXiv:1102.2604*，2011。

[10] Mohammad H Hajiesmaili、Ahmad Khonsari、Ali Sehati 和 Mohammad Sadegh Talebi。通过动态网络效用最大化实现高效视频流的内容感知速率分配。《网络与计算机应用杂志》，35(6):2016–2027，2012。[11] Xiaowen Gong、Xu Chen 和 Junshan Zhang。移动网络中的社交群体效用最大化：从利他行为到恶意行为。载于*2014*年第*48*届信息科学与系统年会（*CISS*），第1–6页。IEEE，2014。[12] Chengtie Li、Jinkuan Wang 和 Mingwei Li。无线传感器网络中的网络效用最大化数据传输优化算法。《国际分布式传感器网络杂志》，12(9):1550147716670646，2016。[13] Xiaoguo Ye 和 Weifa Liang。无线可充电传感器网络中的充电效用最大化。*Wireless Networks*，23(7):2069–2081，2017。[14] Xinzhe Fu 和 Eytan Modiano。Learning-num：具有未知效用函数和排队时延的网络效用最大化。*IEEE/ACM*网络汇刊，2022。[15] Rayadurgam Srikant 和 Lei Ying。通信网络：优化、控制与随机网络视角。剑桥大学出版社，2013。[16] M. Chiang。无线多跳网络中传输层与物理层的平衡：联合最优的拥塞控制与功率控制。《*IEEE*通信领域精选期刊》，23(1):104–116，2005年1月。[17] Xiaojun Lin 和 Ness B Shroff。具有多路径路由的通信网络的效用最大化。*IEEE*自动控制汇刊，51(5):766–781，2006。[18] Ermin Wei、Asuman Ozdaglar 和 Ali Jadbabaie。网络效用最大化的分布式牛顿法——一、算法。*IEEE*自动控制汇刊，58(9):2162–2175，2013。[19] Amir Beck、Angelia Nedi´c、Asuman Ozdaglar 和 Marc Teboulle。网络资源分配问题的O(1/k)梯度法。《*IEEE*网络系统控制汇刊》，1(1):64–73，2014。[20] J-W Lee、Ravi R Mazumdar 和 Ness B Shroff。互联网多类别服务的非凸优化与速率控制。*IEEE/ACM*网络汇刊，13(4):827–840，2005。[21] Michael J Neely、Eytan Modiano 和 Chih-Ping Li。异构网络中的公平性与最优随机控制。*IEEE/ACM*网络汇刊，16(2):396–409，2008。[22] A. Eryilmaz 和 R. Srikant。瑞利衰落信道上满足服务质量约束的调度。载于*IEEE*决策与控制会议论文集（*CDC*），第4卷，第3447–3452页，2004年12月。[23] A. L. Stolyar。在满足稳定性的条件下最大化排队网络效用：贪心原始-对偶算法。*QueueingSyst.*，50(4):401–457，2005年8月。[24] X. Wang 和 K. Kar。采用随机接入的无线网络中的端到端比例公平跨层速率控制。载于*ACM*移动自组网与计算国际研讨会论文集（*MobiHoc*），第157–168页，2005。

[25] M. Chiang、S. H. Low、A. R. Calderbank 和 J. C. Doyle。分层作为优化分解：网络架构的数学理论。载于*IEEE*论文集，第255–312页，2007年1月。[26] Pradeep Chathuranga Weeraddana、Marian Codreanu、Matti Latva-aho 和 Anthony Ephremides。无线网络中跨层效用最大化的资源分配。*IEEE*车辆技术汇刊，60(6)：2790–2809，2011年。[27] Yu Ma、Weifa Liang 和 Wenzheng Xu。通过同时为多个传感器充电，实现无线可充电传感器网络中的充电效用最大化。*IEEE/ACM*网络汇刊，26(4)：1591–1604，2018年。[28] J. Mo 和 J. Walrand。公平的端到端基于窗口的拥塞控制。*IEEE/ACM*网络汇刊，5：556–567，2000年。[29] Arun Verma 和 Manjesh K Hanawal。未知效用下的随机网络效用最大化：多臂老虎机方法。载于*IEEE INFOCOM 2020——IEEE*计算机通信会议，第189–198页。IEEE，2020年。[30] Justin Domke。基于优化建模的通用方法。载于人工智能与统计（*AISTATS*），第318–326页。PMLR，2012年。[31] Fabian Pedregosa。利用近似梯度进行超参数优化。载于国际机器学习会议，第737–746页。PMLR，2016年。[32] Kaiyi Ji、Junjie Yang 和 Yingbin Liang。双层优化：收敛性分析与增强设计。载于国际机器学习会议（*ICML*），第4882–4892页。PMLR，2021年。[33] Kaiyi Ji 和 Yingbin Liang。双层优化的下界与加速算法。*arXiv*预印本 *arXiv:2102.03926*，2021年。[34] Risheng Liu、Pan Mu、Xiaoming Yuan、Shangzhi Zeng 和 Jin Zhang。超越下层单点集的双层规划通用一阶算法框架。载于国际机器学习会议（*ICML*），第6305–6315页。PMLR，2020年。[35] Kaiyi Ji、Mingrui Liu、Yingbin Liang 和 Lei Ying。双层优化器能否从循环中受益？*arXiv*预印本 *arXiv:2205.14224*，2022年。[36] Saeed Ghadimi 和 Mengdi Wang。双层规划的近似方法。*arXiv*预印本 *arXiv:1802.02246*，2018年。[37] Mingyi Hong、Hoi-To Wai、Zhaoran Wang 和 Zhuoran Yang。双层优化的双时间尺度框架：复杂度分析及其在演员-评论家中的应用。*arXiv*预印本 *arXiv:2007.05170*，2020年。[38] Risheng Liu、Jiaxin Gao、Jin Zhang、Deyu Meng 和 Zhouchen Lin。从统一视角探究用于学习与视觉的双层优化：综述及进展。*IEEE*模式分析与机器智能汇刊，2021年。[39] Kaiyi Ji。机器学习中的双层优化：算法设计与收敛性分析。*arXiv*预印本 *arXiv:2108.00330*，2021年。

[40] Songtao Lu、Xiaodong Cui、Mark S Squillante、Brian Kingsbury 和 Lior Horesh。面向个性化客户端学习的去中心化双层优化。载于*ICASSP 2022——2022年IEEE声学、语音与信号处理国际会议（ICASSP）*，第5543–5547页。IEEE，2022年。[41] Xuxing Chen、Minhui Huang 和 Shiqian Ma。去中心化双层优化。*arXiv*预印本 *arXiv:2206.05670*，2022年。[42] Shuoguang Yang、Xuezhou Zhang 和 Mengdi Wang。通信网络上的去中心化基于 gossip 的随机双层优化。*arXiv*预印本 *arXiv:2206.10870*，2022年。[43] Hongchang Gao、Bin Gu 和 My T Thai。网络上的随机双层分布式优化。*arXiv*预印本 *arXiv:2206.15025*，2022年。[44] Peiwen Qiu、Yining Li、Zhuqing Liu、Prashant Khanduri、Jia Liu、Ness B Shroff、Elizabeth Serena Bentley 和 Kurt Turck。Diamond：攻克去中心化双层优化中的样本与通信复杂度。*arXiv*预印本 *arXiv:2212.02376*，2022年。[45] L. Ying、R. Srikant、A. Eryilmaz 和 G. Dullerud。存在异构时延时蜂窝网络中的分布式公平资源分配。*IEEE自动控制汇刊*，52(1)：129–134，2007年1月。[46] Yurii Nesterov 和 Vladimir Spokoiny。凸函数的随机无梯度最小化。计算数学基础，17(2)：527–566，2017年。[47] Yurii Nesterov。光滑凸优化。载于凸优化讲义，第59–137页。Springer，2018年。[48] Xiangru Lian、Ce Zhang、Huan Zhang、Cho-Jui Hsieh、Wei Zhang 和 Ji Liu。去中心化算法能否胜过集中式算法？去中心化并行随机梯度下降的案例研究。神经信息处理系统进展（*NeurIPS*），第30卷，2017年。[49] Amos Tversky 和 Daniel Kahneman。前景理论进展：不确定性的累积表示。风险与不确定性杂志，5(4)：297–323，1992年。