arXiv:2301.01803v1 [math.SG] 4 Jan 2023

关于双对称周期轨道

Urs Frauenfelder，Agustin Moreno

摘要

本文研究具有两个自由度的哈密顿系统中的 $doubly\ symmetric$ 周期轨道，即相对于两个（不同的）交换的反辛对合对称的周期轨道。这类轨道在力学中的若干重要问题中普遍存在。我们证明，在四维情形下，双对称周期轨道不可能是负双曲型。这一结论带来若干推论：(1) 双对称轨道的所有覆盖都是 $good$，这与辛场论 [6]的意义一致；(2) 非退化的双对称轨道稳定，当且仅当其 CZ 指数为奇数；(3) 双对称轨道不会不 发生倍周期分岔；(4) 在任何一组具有负 $SFT\text{-}Euler\ characteristic$ （术语见 [11]）的双对称周期轨道中，总存在一个稳定轨道。上述结果源于：(5) 一个对称轨道为负双曲型，当且仅当其两个 $B\text{-}signs$（由 [10]引入）不同。

目录

1 引言 **1**

2 双对称周期轨道示例 7

2.1 希尔月球问题中的顺行与逆行周期轨道 . 7 2.2 Levi-Civita 正则化.7

2.3 朗缪尔周期轨道.8 2.4 对称冻结行星.10

3 实数对 10

4 双对称周期轨道 13

5 约化单值矩阵 17

1 引言

本文研究四维空间中的双重对称周期轨道，即具有两个自由度的哈密顿系统中的周期轨道。这类轨道

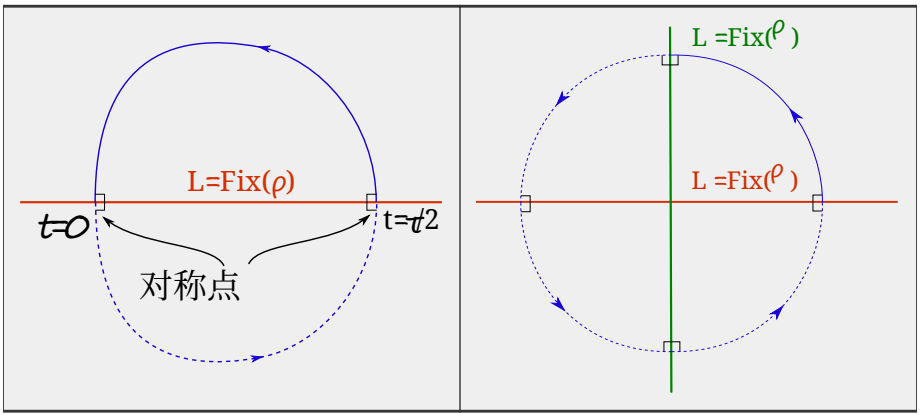


图1：左：一条对称轨道。右：一条双对称轨道。

在力学中值得关注的问题里随处可见；我们将在第2节给出几个例子。下面先介绍基本概念。

对称轨道。 考虑一个辛流形 $(M,\ \omega)$，其上赋有一个反辛对合 $\rho:$ $M \to M$ （即 $\rho^2 = id,\ \rho^* = \omega = -\omega$），也称为实结构。其不动点集 $L =$ Fix(ρ) 是 M 中的一个拉格朗日子流形。给定一个哈密顿量 $H:\ M \to \mathbb{R}$，如果 ρ 是由 H 诱导的哈密顿系统的对称性，则称之为 $H \circ \rho = H$。在这种情况下，对称周期轨道是满足以下条件的周期轨道 $v:\ S^1 = \mathbb{R}/\tau\mathbb{R} \to M$：对所有 t，均有 $\rho(v(-t)) = v(t)$。对称周期轨道也可以看作一条始于并终于 L 的弦，其端点与 $v(0)$ $v(\tau/2)$ 重合（即对称点），见图1。

现在假设我们有两个不同的反辛对合 ρ_1 和 ρ_2，且它们彼此交换。在这种情况下，我们有两个拉格朗日子流形L_1 =Fix(ρ_1) 和 L_2 =Fix(ρ_2)。给定一条从 L_1 到 L_2 的弦，我们可以对其应用 ρ_2，得到一条始于并终于 L_1 的弦。接着对这条弦应用 ρ_1。由此得到的周期轨道便是双重对称的，因为它同时关于 ρ_1，ρ_2 对称，仍见图1。我们在第4节给出双重对称周期轨道概念的更正式定义。

约化单值矩阵。假设（$M,\ \omega$）是一个四维辛流形，$H:\ M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑哈密顿量，而 v 是哈密顿量 H 的哈密顿向量场 X_H 的一条非常值周期轨道，其周期为 τ。由于能量守恒，H 沿着 v保持不变，也就是说，v 在所有时刻都位于某个 $c \in \mathbb{R}$对应的等值集$\Sigma = H^{-1}(c)$ 上。流 ϕ_H^t 的微分在二维商向量空间上诱导出一个映射

$$M_v := \overline{d\phi_H^\tau(v(0))}:\ T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))\rangle \to T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))\rangle,$$

称为约化单值矩阵。约化单值矩阵是一个二维辛变换，即 $\det M_v = 1$. 取决于

其约化单值矩阵的迹，四维辛流形上的周期轨道现可分为三类。

正双曲型： $\mathrm{tr}(M_v) > 2$，此时约化单值矩阵有两个互为倒数的正实特征值。

负双曲型： $\mathrm{tr}(M_v) < 2$，此时约化单值矩阵有两个互为倒数的负实特征值。

椭圆型： $-2 \leq \mathrm{tr}(M_v) \leq 2$. 若迹恰好为二，则约化单值矩阵的特征值 1 的代数重数为二。若迹恰好为负二，则特征值 -1 的代数重数为二。否则，它有两个位于单位圆上且互为共轭的非实特征值。

用辛场论的术语来说，负双曲型轨道的偶覆盖称为坏轨道；否则，周期轨道称为好轨道。下面我们证明：

定理A： 对于具有两个自由度的哈密顿系统，双对称周期轨道不可能是负双曲型。

特别地，由定理 A 可知，双对称周期轨道的所有覆盖轨道都是好周期轨道。

稳定性。 椭圆周期轨道是稳定的，而双曲型轨道不稳定。另一方面，椭圆型轨道和负双曲轨道的康利-策恩德指数为奇数，而正双曲型轨道的康利-策恩德指数为偶数。对于第二个结论，最好排除约化单值矩阵的迹为二这一退化情形，因为在这种情况下，对于如何定义康利-策恩德指数存在不同的约定。由此可见，如果能够排除负双曲轨道，就可以根据周期轨道的康利-策恩德指数的奇偶性来判断其稳定性。特别地，我们有以下定理 A 的推论：

推论 *B*： *</style}*设 v 是一个具有两个自由度的哈密顿系统中的非退化双对称周期轨道。那么，当且仅当其康利-策恩德指数为奇数时，它是稳定的。

定理 A 的证明概述。 定理 A 的证明对称周期轨道的约化单值矩阵采用了实数版本的克赖因理论。给定一个对称轨道 v，反辛对合在$v(0) \in L = \mathrm{Fix}(\rho)$处的微分诱导出一个反辛对合

$$R\colon T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))\rangle \to T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))\rangle,$$

即在二维向量空间$T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))$上的反向对合。对合 R 将约化单值矩阵与其逆矩阵共轭，

其逆，即

$$RM_vR = M_v^{-1}. \tag{1}$$

我们在 $T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))$ 上选取一个辛基，使对合 R对应于矩阵

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

而约化单值矩阵由一个矩阵给出

$$M_v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

满足行列式条件 $ad - bc = 1$。由 (1) 可得 $a = d$，因此

$$M_v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad a^2 - bc = 1.$$

特别是，周期轨道所属的类别完全由约化单值矩阵的元素 a 确定。对于固定的 a，若一个非对角元素不为零，则根据行列式条件，它完全决定另一个非对角元素。另一方面，非对角元素取决于用于将约化单值矩阵表示为矩阵的辛基的选取。由于辛基的基向量必须是反辛对合 R的特征向量，因此这样的辛基只在比例因子意义下确定，从而约化单值矩阵的矩阵表示在由下列形式的矩阵进行共轭的意义下唯一：

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

特别是，虽然 b 的取值不是不变量，但其符号是不变量。按照 [10]，我们将 sign(b) 称为约化单值矩阵的 ***B*-符号**，另见 [25]。在椭圆情形下，根据 [10, 附录 B]，B-符号包含的信息与约化单值矩阵特征值的 Krein 类型相同（该类型见 [15, 16, 17, 18, 19] 中的定义）。在双曲情形下，特征值没有 Krein 类型。因此，双曲情形下的 B-符号是实结构 ρ 的一个额外不变量。

一个对称周期轨道在其两个对称点处与拉格朗日子流形 $L = \mathrm{Fix}(\rho)$ 相交。由每个对称点的约化单值变换，我们得到一个 B-符号，因此一个对称周期轨道实际上带有两个 B 符号。证明定理 A 的主要观察如下：

定理 C： 具有两个自由度的哈密顿系统的一个对称周期轨道是负双曲型，当且仅当它的两个 ***B*-符号不同。**

如果该对称周期轨道是椭圆型，那么两个 B-符号必然相同，这一点实际上显而易见。事实上，正如前面提到的，在椭圆情形下，B-符号仅由特征值的克莱因符号决定。由于周期轨道在不同起始点处的约化单值矩阵彼此共轭，因此定理 C 在椭圆情形下得证。剩下需要考察的是双曲情形，即在正双曲情形下两个 B 符号相同，而在负双曲情形下两者不同。为此，我们在第 3 节引入实偶的概念，从而定理 C 成为下文命题 3.2 的推论。

证明定理 A 的策略现在已经相当明显。我们证明，双对称周期轨道所具有的额外实结构会迫使两个 B-符号一致，因此鉴于定理 C，双对称轨道不可能是负双曲型的。相关论证在第 5 节完成，其中定理 A 被称为推论 5.1。

倍周期分岔。 在族中考察时，周期轨道可能发生分岔，即非退化轨道变为退化轨道（也就是说，其单值的一个特征值变为 1），并且可能出现新的轨道。一般的 四维分岔已得到充分理解，参见例如 [1, 第 599] 页。然而，对称性的存在，尤其是双对称轨道的存在，是非一般的，因此人们预期会出现新的现象。事实上，接下来的结果与这一预期十分吻合。

作为分岔的一个特例，从椭圆周期轨道到负双曲轨道的转变会导致倍周期分岔，此时会出现一条新轨道，其周期接近原轨道周期的两倍。在负双曲轨道具有对称性的情况下，其两个不同的 B-符号实际上有助于确定新的双周期周期轨道从何处分岔，参见 [9]。也就是说，分岔发生在 B-符号不 发生跳变的对称点附近。此外，定理 A 还推出以下结论，突出了对称性的非一般性:

推论 D： 在四维系统中，双重对称周期轨道不会发生倍周期分岔。

事实上，正如倍周期分岔中轨道本身不会 发生分岔（发生分岔的是它的双重覆盖）一样，如果分岔前的轨道是双重对称的，那么分岔后的轨道也必然是双重对称的，这与定理 A 矛盾。我们指出，推论 D 在六维系统中不成立，即对于具有三自由度的系统不成立。事实上，例如参见 [11, 第 6] 节中双重对称轨道发生平面到空间 倍周期分岔的数值示例。

SFT-欧拉示性数。 为了处理比倍周期分岔更一般的分岔情形（在存在对称性的情况下），我们考虑一个*Floer* 数值不变量。具体而言，沿用 [10], the*SFT*-欧拉

示性数 周期轨道 v 的定义是其局部弗洛尔同调的欧拉示性数，表示为

$$\chi_{SFT}(v) = \#\text{良性正双曲轨道} - \#\text{椭圆型、负双曲型}.$$

这里，对轨道 v进行一般扰动后出现的每种轨道类型都计数一次；此时该轨道分岔为一组非退化轨道。我们指出，坏轨道不计入这个数目。还要注意，根据 v 本身的类型，当 v 本身非退化时，这个数目为 ± 1 。由弗洛尔理论可知，一个显著事实是， $\chi_{SFT}(v)$与扰动无关，因此尤其在 v发生分岔时仍保持不变。因此，它对于研究非一般分岔非常有用。

此外，给定一组周期轨道（它们不一定来自分岔，例如可以是作用泛函的临界点，且其同伦类预先固定），也可以用上述公式计算同一个数目。当然，该数目在任意同伦下不一定保持不变，而是取决于具体情形。冻结行星就是一个有趣的例子，在这种情形下存在适当的同伦不变性。冻结行星是氦问题的周期轨道，我们将在第2节中进一步讨论。由于氦中两个电子之间的相互作用，无法通过微扰方法逼近冻结行星；不过，可以用平均相互作用代替两个电子之间的瞬时相互作用。在平均相互作用与瞬时相互作用之间进行插值，可得到冻结行星问题的一个同伦；对于该同伦，在对称情形 [8]下具有紧性。由此可以定义冻结行星的一个欧拉示性数版本，它在此同伦 [5], 下保持不变，并且与瞬时相互作用对应的 SFT 欧拉示性数 χ_{SFT} 一致。这个问题的欧拉示性数为 -1, 见[5]中推论 B 之后的注记。对于每个负能量，这意味着瞬时相互作用下存在一条对称冻结行星轨道，见 [4]中的推论 C。这是由欧拉示性数的同伦不变性，以及平均相互作用下存在一条唯一的非退化对称轨道（已在 [7]中通过解析方法证明）得出的。

基于这些动机，下面的结论同样是定理 A 的推论：

推论 E： 在四维中，假设一组双对称周期轨道具有负的 *SFT*-欧拉示性数。那么存在一条稳定周期轨道。

事实上，定理 A 和定义 χ_{SFT} 的公式表明存在一条椭圆型轨道；需要回顾的是，对于四维哈密顿系统，椭圆型轨道恰好就是稳定轨道。

致谢。 A. Moreno 得到了美国国家科学基金会项目 DMS-1926686 的资助，以及德国研究联合会资助的几何、代数与动力学中的辛结构特别研究领域 TRR 191（项目编号 281071066 – TRR 191）的资助。

2 双对称周期轨道的例子

2.1 希尔月球问题中的顺行与逆行周期轨道

希尔月球哈密顿量源自希尔关于月球轨道的开创性研究，该研究描述了月球围绕地球和太阳的运动 [14], 。地球位于参考系的中心，而假定质量无限大于地球的太阳则位于无穷远处。哈密顿量写作

$$H\colon T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}, \quad (q,p) \mapsto \frac{1}{2}\big((p_1+q_2)^2 + (p_2-q_1)^2\big) - \frac{1}{|q|} - \frac{3}{2}q_1^2.$$

它在以下两个交换的反辛对合下保持不变

$$\rho_1, \rho_2\colon T^*\mathbb{R}^2 \to T^*\mathbb{R}^2$$

给定为（q, p）$\in T^*\mathbb{R}^2$，即

$$\rho_1(q_1,q_2,p_1,p_2) = (q_1,-q_2,-p_1,p_2), \quad \rho_2(q_1,q_2,p_1,p_2) = (-q_1,q_2,p_1,-p_2).$$

这两个反辛对合的不动点集分别是 x-轴和 y-轴的余法丛。若在构形空间 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 中研究双对称周期轨道，这意味着它从 x-轴垂直出发，经过四分之一周期后垂直到达 y-轴，随后在 y-轴反射，再经过四分之一周期，最后在 x-轴反射，完成周期的后半段。可以通过射击论证找到这类周期轨道：从 x-轴垂直出发，让起点在 x-轴上变化，直到垂直到达 y-轴。Birkhoff 在 [2] 中运用这一射击论证，证明了在低于第一个临界值的所有能量下都存在逆行周期轨道，另见 [12, 第 8.3 章。2]。尽管逆行周期轨道看起来比顺行周期轨道简单，[13], 天文学家实际上往往对顺行周期轨道更感兴趣，因为我们的月球以及太阳系中大多数卫星都是顺行的。不过也有显著的反例。例如，海王星最大的卫星海卫一就是逆行的。

2.2 Levi-Civita 正则化

希尔月球问题是限制性三体问题的一种极限情形，参见例如 [12, 第 5.8 章。2] 在限制性三体问题中，太阳和地球的质量相当，且它们之间的距离是有限的。与希尔月球问题不同，限制性三体问题仅在反辛对合下保持不变

$$\rho\colon T^*\mathbb{R}^2 \to T^*\mathbb{R}^2, \quad (q_1,q_2,p_1,p_2) \mapsto (q_1,-q_2,-p_1,p_2)$$

由关于 x 轴的反射得到，但在对应于关于 y 轴反射的反辛对合下则不再成立。

我们将 $\mathbb{R}^2$ 视为复平面 $\mathbb{C}$，并用 $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 表示以原点为基点的复平面。我们考虑平方映射

$$\ell \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^2.$$

注意，平方映射是一个二重覆盖。平方映射的逆变（或辛提升）是辛映射

$$L \colon T^*\mathbb{C}^* \to T^*\mathbb{C}^*, \quad (z, w) \mapsto \left(z^2, \frac{w}{2\bar{z}}\right),$$

其中 $\bar{z}$ 是 z的复共轭。Levi-Civita 曾利用此映射将二体碰撞 [21] 正则化，因此它被称为*Levi-Civita* 正则化。在 $T^*\mathbb{C}$ 上，我们有两个交换的反辛对合

$$\sigma_1, \sigma_2 \colon T^*\mathbb{C} \to T^*\mathbb{C}$$

它们对于 $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} = T^*\mathbb{C}$，由下式给出

$$\sigma_1(z, w) = (\bar{z}, -\bar{w}), \quad \sigma_2(z, w) = (-\bar{z}, \bar{w}).$$

Levi-Civita 正则化将反辛对合 ρ在 $T^*\mathbb{C}^*$ 上的限制提升为 σ_1和 σ_2在 $T^*\mathbb{C}^*$上的限制，因此我们有

$$L \circ \sigma_1\big|_{T^*\mathbb{C}^*} = \rho\big|_{T^*\mathbb{C}^*} \circ L, \qquad L \circ \sigma_2\big|_{T^*\mathbb{C}^*} = \rho\big|_{T^*\mathbb{C}^*} \circ L.$$

现在假设 $v = (q, p)$ 是 $T^*\mathbb{C}^*$ 中的一个周期轨道，它关于 ρ对称，且绕原点的绕数为奇数。那么，v 在 Levi-Civita 正则化下提升为 $T^*\mathbb{C}^*$ 上的一个周期轨道，该轨道关于 σ_1 和 σ_2双重对称。

另一方面，受限三体问题中也存在逆行轨道和顺行轨道。与希尔月球问题不同，它们仅具有对称性，而非双重对称性。不过，在 Levi-Civita 正则化下，它们的提升轨道具有双重对称性，因为逆行和顺行周期轨道绕原点的绕数为一。

2.3 朗缪尔周期轨道

朗缪尔周期轨道是氦问题中的一个周期轨道。Langmuir 最初通过数值方法发现了它 [20] ，并将其视为氦原子基态的候选轨道。关于其解析存在性证明，请参阅 [3], ；关于它在氦的半经典处理中的作用，请参阅 [22]。

氦原子中，原点处有一个带正二电荷的原子核，也就是说，里面有两个质子。根据库仑定律，它吸引两个带负一电荷的电子；库仑定律的形式与牛顿定律相同。

此外，两个电子也会相互排斥，同样遵循库仑定律。我们简记为

$$\Delta := \{(q,q) : q \in \mathbb{C}^*\} \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$$

对角线。因此，平面氦问题的哈密顿量是一个光滑函数

$$H\colon T^*\big(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \setminus \Delta\big) \to \mathbb{R}$$

定义为

$$H(q_1,q_2,p_1,p_2) = \frac{1}{2}|p_1|^2 + \frac{1}{2}|p_2|^2 - \frac{2}{|q_1|} - \frac{2}{|q_2|} + \frac{1}{|q_1-q_2|}.$$

该哈密顿量在以下辛对合下保持不变

$$\sigma\colon T^*\big(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \setminus \Delta\big) \to T^*\big(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \setminus \Delta\big)$$

定义为

$$\sigma(q_1,q_2,p_1,p_2) = (\bar{q}_2,\bar{q}_1,\bar{p}_2,\bar{p}_1),$$

由粒子交换和关于 x-轴的反射组合而成。***Langmuir*** 哈密顿量是 H 在 σ 的不动点集上的限制

$$H_\sigma := H\big|_{\mathrm{Fix}(\sigma)}\colon \mathrm{Fix}(\sigma) \to \mathbb{R}.$$

不动点集由满足以下条件的点（q_1， q_2， p_1， p_2） $\in T^*(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \setminus \Delta)$组成

$$q_1 = \bar{q}_2 =: q, \quad p_1 = \bar{p}_2 =: p.$$

因此，只需考虑上半平面余切丛上的朗缪尔哈密顿量

$$\mathbb{H} = \{q = q_1 + iq_2 \in \mathbb{C} : q_2 > 0\}$$

其表达式为

$$H_\sigma(q,p) = |p|^2 - \frac{4}{|q|} + \frac{1}{2q_2}.$$

在上半平面的余切丛上，我们有两个反辛对合

$$\rho_1, \rho_2\colon T^*\mathbb{H} \to T^*\mathbb{H}$$

它们定义为

$$\rho_1(q,p) = (-\bar{q},\bar{p}), \quad \rho_2(q,p) = (q,-p),$$

在这两种变换下， H_σ 均保持不变。 ρ_1 的不动点集是正虚轴的余法丛，而 ρ_2 的不动点集由制动点组成，也就是说，这些点处的速度为零。第一颗电子 e_1^- 的朗缪尔轨道从虚轴处垂直出发，并在四分之一周期处制动，因此它是关于ρ_1 和 ρ_2的双对称周期轨道。第二颗电子 e_2^- 同样有一条与之对应的朗缪尔轨道，由对e_1^-的轨道进行共轭得到，见图 2。

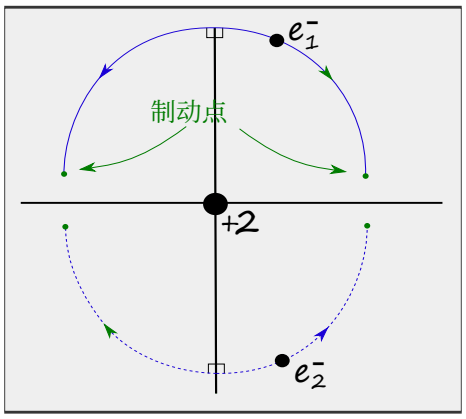


图 2：Langmuir 的双对称轨道及其对称版本。

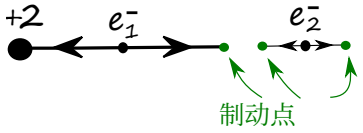


图 3：冻结行星构型。

2.4 对称冻结行星

氦问题中的其他周期轨道实例包括冻结行星轨道。在这些实例中，两颗电子位于原子核同一侧的一条直线上。内侧电子连续与原子核碰撞。外侧电子，也就是名副其实的“冻结行星”，受到原子核吸引、内侧电子排斥，几乎静止不动，但会轻微摆动。冻结行星轨道是物理学家 [22, 23]在半经典领域发现的。它们近来引起了数学家 [4, 24]的兴趣。如果两颗电子同时制动，并且在内侧电子与原子核碰撞时，外侧电子再次制动，那么这种冻结行星轨道就称为对称 轨道，见图 3。对对称冻结行星轨道应用列维-奇维塔正则化，可得到一条双对称周期轨道。

3 实偶

实辛向量空间是一个三元组 $(V,\ \omega,\ R)$，由一个辛向量空间 $(V,\ \omega)$ 和一个线性反辛对合 $R\colon\ V \to V$ 构成，即 $R^2 = Id,\ R^*\omega = -\omega$。

定义 3.1 假设(V_1, ω_1, R_1) 和(V_2, ω_2, R_2) 是实辛

向量空间。实偶 (Ψ, Φ) 是由线性辛映射组成的元组

$$\Psi\colon (V_1, \omega_1) \to (V_2, \omega_2), \quad \Phi\colon (V_2, \omega_2) \to (V_1, \omega_1)$$

它们之间的关系为

$$R_2 \Psi R_1 = \Phi^{-1}. \tag{2}$$

注意，若 $(\Psi,\ \Phi)$ 是一个实偶，则 $(\Phi,\ \Psi)$ 也是一个实偶，因为由 (2) 可知

$$R_1 \Phi R_2 = R_1 R_1^{-1} \Psi^{-1} R_2^{-1} R_2 = \Psi^{-1}.$$

若 $(\Psi,\ \Phi)$ 是一个实偶，则它们的复合

$$\Phi\Psi\colon (V_1, \omega_1) \to (V_1, \omega_1)$$

是从固定辛向量空间 $(V_1,\ \omega_1)$ 到其自身的线性辛映射，并具有一个特殊性质：它在反辛对合 R_1 下与其逆映射共轭。事实上，

$$R_1 \Phi \Psi R_1 \quad = \quad R_1 \Phi R_2 R_2 \Psi R_1 = \Psi^{-1}\Phi^{-1} = (\Phi\Psi)^{-1}. \tag{3}$$

现在我们更仔细地考察二维情形。注意，每个二维实辛向量空间都共轭于 $\mathbb{R}^2$，并赋予其标准辛结构和反辛对合

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

经过这样的共轭后，一个实偶由一对矩阵构成

$$(A, B) \in SL(2;\mathbb{R}) \times SL(2;\mathbb{R})$$

使得

$$RAR = B^{-1}. \tag{4}$$

写作

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1$$

我们有

$$\begin{aligned} RAR &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此

$$B = (RAR)^{-1} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

因此，它们的乘积由以下矩阵给出

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad+bc & 2ab \\ 2cd & ad+bc \end{pmatrix} \tag{5}$$

and

$$BA = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad+bc & 2bd \\ 2ac & ad+bc \end{pmatrix}. \tag{6}$$

由于

$$BA = B(AB)B^{-1}$$

这两个乘积在 $SL(2;\mathbb{R})$ 中彼此共轭。此外，它们都属于子空间

$$SL^R(2;\mathbb{R}) := \left\{ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} : \alpha^2 - \beta\gamma = 1 \right\}$$

$SL(2;\mathbb{R})$。如果 $M \in SL^R(2;\mathbb{R})$ 满足 $\mathrm{tr}(M) \neq \pm 2$，我们将其实 ***Krein*** 符号 定义为

$$\kappa(M) := \mathrm{sign}(\beta).$$

注意，迹条件意味着 $\alpha \neq \pm 1$ ，因此，根据行列式条件 $\alpha^2 - \beta\gamma$，我们有 $\beta \neq 0$，所以其符号定义良好。下面的命题很容易证明。

命题 3.2 AB 和 BA 的实 ***Krein*** 符号不同，当且仅当

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) < -2, \tag{7}$$

即，当且仅当 AB ，因此 BA 也都是负双曲型。

证明： 由 (5) 和 (6) 可知，迹条件 (7) 等价于不等式

$$ad + bc < -1.$$

根据行列式条件 $ad - bc = 1$ ，这又等价于不等式

$$ad < 0,$$

也就是说，要求 a 和 d 的符号不同。再看一遍 (5) 和 (6)，可知当且仅当 AB 和 BA 的实 Krein 符号不一致时，这种情况才会发生。由此命题得证。□

以下我们假设 $(\Psi,\ \Phi)$ 是实辛向量空间 $(V_1,\ \omega_1,\ R_1)$ 与 $(V_2,\ \omega_2,\ R_2)$ 之间的一个实偶。

定义 3.3 若存在一个线性映射，则称实偶(Ψ, Φ) 为对称

$$S\colon V_1 \to V_2$$

该映射是反辛的，即：

$$S^*\omega_2 = -\omega_1$$

并且满足

$$\Psi = S\Psi^{-1}S, \quad \Phi^{-1} = S\Phi S, \quad R_2SR_1 = S. \tag{8}$$

对于一个对称实对

$$T := SR_1 = R_2S\colon (V_1, \omega_1) \to (V_2, \omega_2)$$

是一个线性辛映射，由于

$$TR_1 = S = R_2T$$

交换两个实结构，因此 T 导致两个实辛向量空间 (V_1, ω_1, R_1) 和 (V_2, ω_2, R_2) 之间的一个同一化。在二维情形下，如果进一步将其与赋予标准辛形式和标准实结构 R 的 $\mathbb{R}^2$ 同一化，那么不仅 R_1 和 R_2 与 R 同一化， S 也如此。同一化后的实元组成为一对 (A, B) $SL(2, \mathbb{R})$ 矩阵，它们不仅满足 (4)，也因 (8) 而满足

$$RAR = A^{-1}, \qquad RBR = B^{-1},$$

即，两个矩阵都通过 R 与其逆共轭，因此属于 $SL(2;\, \mathbb{R})$ 的子空间 $SL^R(2;\mathbb{R})$。这意味着

$$A = B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad a^2 - bc = 1$$

因此

$$AB = BA.$$

特别地， AB 和 BA 具有相同的实 Krein 符号。因此，我们由命题 3.2 得到以下推论。

推论 3.4 假设(Ψ, Φ) 是一个二维对称实对。那么， $\Phi\Psi$ 和 $\Psi\Phi$ 都不是负双曲型。

4 双对称周期轨道

假设 (M, ω) 是一个辛流形，且 $H\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑的哈密顿量。 H 的哈密顿向量场 X_H 由以下条件隐式定义

$$dH = \omega(\cdot, X_H).$$

我们用 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 表示圆。简单周期轨道 是一个双射 $v\colon S^1 \to \mathbb{R}$ ，存在 $\tau > 0$ ，使得 v 满足常微分方程

$$\partial_t v(t) = \tau X_H(v(t)), \quad t \in S^1.$$

由于简单周期轨道对应的映射是双射，哈密顿向量场 X_H 在 v 上处处非零，因此 τ 由 v 唯一确定。我们将 τ 称为简单周期轨道 v 的周期 。我们用

$$\mathcal{P}_H \subset C^\infty(S^1, M)$$

哈密顿向量场 X_H 的简单周期轨道集合。

一个实辛流形是一个三元组 (M, ω, ρ)，其中 (M, ω) 是一个辛流形，而 $\rho \in \mathrm{Diff}(M)$ 是 M 上的反辛对合，即，

$$\rho^2 = \mathrm{id}, \quad \rho^*\omega = -\omega.$$

若 $H\colon M \to \mathbb{R}$ 是实辛流形上的光滑函数，且在反辛对合下保持不变，即，

$$H \circ \rho = H,$$

则其哈密顿向量场是反不变的，即，

$$\rho^* X_H = -X_H.$$

于是我们得到一个对合

$$I\colon \mathcal{P}_H \to \mathcal{P}_H, \quad v \mapsto \rho \circ v^-$$

其中 v^- 是反向遍历的轨道，即，

$$v^-(t) = v(-t), \quad t \in S^1.$$

一个<整简单对称周期轨道 是 I 的不动点，即满足以下条件的 $v \in \mathcal{P}_H$

$$I(v) = v.$$

我们将其简写为

$$\mathcal{P}_H^I := \mathrm{Fix}(I) \subset \mathcal{P}_H$$

简单对称周期轨道的集合。我们注意到，反辛对合的不动点集

$$L := \mathrm{Fix}(\rho)$$

是 M 的拉格朗日子流形。注意，如果 $v \in \mathcal{P}_H^I$，那么

$$v\big(0\big), v\big(\tfrac{1}{2}\big) \in L$$

因此，$v_{[0,\frac{1}{2}]}$ 可以解释为从 L 到 L 的弦。

双实辛流形是一个四元组（M， ω， ρ_1， ρ_2），其中（M， ω）是一个辛流形，而 ρ_1， $\rho_2 \in \in$Diff（M）是两个不同的反辛

对合，且彼此可交换。注意，由于 ρ_1 和 ρ_2 可交换，它们的复合

$$\sigma := \rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$$

是 (M, ω) 上的辛对合。假设 $(M, \omega, \rho_1, \rho_2)$ 是一个双实辛流形，且 $H\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个在两个对合 ρ_1 和 ρ_2下均保持不变的光滑映射。于是，在简单周期轨道集 $\mathcal{P}_H$ 上有两个对合

$$I_1\colon \mathcal{P}_H \to \mathcal{P}_H, \quad v \mapsto \rho_1 \circ v^-, \qquad I_2\colon \mathcal{P}_H \to \mathcal{P}_H, \quad v \mapsto \rho_2 \circ v^-.$$

此外， M有两个拉格朗日子流形

$$L_1 = \mathrm{Fix}(\rho_1), \qquad L_2 = \mathrm{Fix}(\rho_2).$$

定义 4.1 假设 $(M, \omega, \rho_1, \rho_2)$ 是一个双实辛流形，且 $H\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个在两个对合 ρ_1 和 ρ_2下均保持不变的光滑函数。若 ρ_1 的简单对称周期轨道 $v \in \mathcal{P}_H^{I_1}$ 满足双对称，则称其为双对称周期轨道

$$\rho_2 \circ v\big(0\big) = v\big(\tfrac{1}{2}\big). \tag{9}$$

注意，由于对称周期轨道 $v(1/2)$ 位于 ρ_1 的不动点集内，条件(9)等价于

$$\sigma \circ v\big(0\big) = v\big(\tfrac{1}{2}\big).$$

相对于 ρ_1 的双对称周期轨道与相对于 ρ_2 的双对称周期轨道之间存在自然的一一对应。对于$r \in S^1$ 和 $v \in \mathcal{P}_H$，我们记为

$$r_* v \in \mathcal{P}_H$$

重新参数化的简单周期轨道

$$r_* v(t) = v(r + t), \quad t \in S^1.$$

我们有以下引理。

引理 4.2 轨道 $v \in \mathcal{P}_H^{I_1}$ 关于 ρ_2 是双重对称的，当且仅当 $\big(\frac{1}{4}\big)_* v \in \mathcal{P}_H^{I_2}$关于 ρ_1 是双重对称的。

证明： 假设 $v \in \mathcal{P}_H^{I_1}$ 关于 ρ_2是双重对称的。经过重新参数化后，简单周期轨道仍然是简单周期轨道，因此我们有

$$\big(\tfrac{1}{4}\big)_* v \in \mathcal{P}_H.$$

由于 H 在 ρ_2 作用下保持不变，我们有

$$I_2\Big(\big(\tfrac{1}{4}\big)_* v\Big) \in \mathcal{P}_H.$$

利用（9），我们计算得

$$\begin{aligned} I_2\Big(\big(\tfrac{1}{4}\big)_*v\Big)\big(\tfrac{1}{4}\big) &= \rho_2\circ\Big(\big(\tfrac{1}{4}\big)_*v\Big)^-\big(\tfrac{1}{4}\big) \\ &= \rho_2\Big(\big(\tfrac{1}{4}\big)_*v\Big)\big(-\tfrac{1}{4}\big) \\ &= \rho_2\circ v\big(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\big) \\ &= \rho_2\circ v(0) \\ &= v\big(\tfrac{1}{2}\big) \\ &= \Big(\big(\tfrac{1}{4}\big)_*v\Big)\big(\tfrac{1}{4}\big). \end{aligned}$$

这意味着 $\big(\frac{1}{4}\big)_*v$和 $I_2\big(\big(\frac{1}{4}\big)_*v\big)$ 是同一个一阶常微分方程的解，并且在时刻$\frac{1}{4}$经过同一点。因此，根据一阶常微分方程初值问题解的唯一性，我们可以推得

$$I_2\Big(\big(\tfrac{1}{4}\big)_*v\Big)=\big(\tfrac{1}{4}\big)_*v$$

从而

$$\big(\tfrac{1}{4}\big)_*v\in\mathcal{P}_H^{I_2}.$$

还需检查它相对于 ρ_1的双重对称性。为此，我们计算

$$\begin{aligned} \rho_1\circ\Big(\big(\tfrac{1}{4}\big)_*v\Big)(0) &= \rho_1\circ v\big(\tfrac{1}{4}\big) \\ &= v\big(-\frac{1}{4}\big) \\ &= v\big(\tfrac{3}{4}\big) \\ &= \Big(\big(\tfrac{1}{4}\big)_*v\Big)\big(\tfrac{1}{2}\big). \end{aligned}$$

这里，第二个等式用到了 v 关于ρ_1对称这一性质，第三个等式则用到了它是一周期的性质。这表明$\big(\frac{1}{4}\big)_*v$关于 ρ_1具有双重对称性。

还需验证：如果 $\big(\frac{1}{4}\big)_*v\in\mathcal{P}_H^{I_2}$ 关于 ρ_1是双重对称的，那么 $v\in\mathcal{P}_H^{I_1}$ 关于 ρ_2也是双重对称的。在前面的讨论中交换 ρ_1 和 ρ_2 的角色，可得

$$\big(\tfrac{1}{4}\big)_*\big(\tfrac{1}{4}\big)_*v=\big(\tfrac{1}{2}\big)_*v\in\mathcal{P}_H^{I_1}$$

关于 ρ_2是双重对称的。 $\big(\frac{1}{2}\big)_* v$在$I_1$ 作用下保持不变这一事实意味着

$$\begin{aligned} I_1 v(t) &= \rho_1 \circ v^-(t) \\ &= \rho_1 \circ v(-t) \\ &= \rho_1 \circ \Big(\big(\tfrac{1}{2}\big)_* v\Big)\big(-t-\tfrac{1}{2}\big) \\ &= \rho_1 \circ \Big(\big(\tfrac{1}{2}\big)_* v\Big)^-\big(t+\tfrac{1}{2}\big) \\ &= I_1\Big(\big(\tfrac{1}{2}\big)_* v\Big)\big(t+\tfrac{1}{2}\big) \\ &= \Big(\big(\tfrac{1}{2}\big)_* v\Big)\big(t+\tfrac{1}{2}\big) \\ &= v\big(t+1\big) \\ &= v(t), \end{aligned}$$

因此， $v \in \mathcal{P}_H^{I_1}$在 I_1下也保持不变。由于 $\big(\frac{1}{2}\big)_* v$关于 ρ_2 双重对称，我们进一步得到

$$\begin{aligned} \rho_2 \circ v(0) &= \rho_2 \circ \Big(\big(\tfrac{1}{2}\big)_* v\Big)\big(-\tfrac{1}{2}\big) \\ &= \rho_2 \circ \Big(\big(\tfrac{1}{2}\big)_* v\Big)\big(\tfrac{1}{2}\big) \\ &= \rho_2^2 \circ \Big(\big(\tfrac{1}{2}\big)_* v\Big)\big(0\big) \\ &= \Big(\big(\tfrac{1}{2}\big)_* v\Big)\big(0\big) \\ &= v\big(\tfrac{1}{2}\big), \end{aligned}$$

因此， v 也关于 ρ_2 双重对称。引理得证。□

5 约化单值

设（M， ω）是一个辛流形，且 $H\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数。我们用 ϕ_H^t 表示 H的哈密顿向量场的流，其特征为

$$\phi_H^0(x) = x, \quad \frac{d}{dt}\phi_H^t(x) = X_H(\phi_H^t(x)), \qquad x \in M.$$

若 v 是 X_H 的一条周期为 τ 的简单周期轨道，则有

$$\phi_H^\tau(v(0)) = v(0),$$

即， $v(0)$ 是 ϕ_H^τ 的不动点。流的微分

$$d\phi_H^\tau(v(0))\colon T_{v(0)}M \to T_{v(0)}M$$

是辛向量空间（$T_{v(0)}M$，$\omega_{v(0)}$）到其自身的线性辛映射。这个映射称为未约化单值映射。由于 H 是自治的，即不依赖于时间，因此我们有

$$d\phi_H^\tau(v(0))X_H(v(0)) = X_H(v(0)).$$

此外，由于能量守恒，哈密顿量 H 沿其哈密顿向量场的流保持不变。特别地，如果 c 是 v的能量，即 H 沿 v所取的值，那么流的微分将能量超曲面的切空间 $T_{v(0)}\Sigma$

$$\Sigma = H^{-1}(c)$$

映回自身。因此，未约化单值映射诱导出一个线性映射

$$M_v := \overline{d\phi_H^\tau(v(0))} \colon T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))\rangle \to T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))\rangle$$

该映射对于$\omega_{v(0)}$诱导的 $T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))\rangle$ 上的辛结构仍然是辛的。这个映射称为约化单值矩阵。我们不必只关注 0，也可以考虑约化单值矩阵

$$M_v^t := \overline{d\phi_H^\tau(v(t))} \colon T_{v(t)}\Sigma/\langle X_H(v(t))\rangle \to T_{v(t)}\Sigma/\langle X_H(v(t))\rangle$$

对任意 $t \in S^1$。注意，对于不同的时刻 t ，约化单值变换之间由流辛共轭。

现在进一步假设 ρ 是(M,ω)上的一个实结构，在该实结构下 H保持不变，且 $v \in \mathcal{P}_H^I$ 是一个对称周期轨道。由于点 $v(0)$和$v\left(\frac{1}{2}\right)$ 都属于 ρ的不动点集， ρ的微分便导出线性反辛对合

$$d\rho\big(v\big(0\big)\big) \colon T_{v(0)}M \to T_{v(0)}M, \quad d\rho\big(v\big(\tfrac{1}{2}\big)\big) \colon T_{v(1/2)}M \to T_{v(1/2)}M$$

它们分别在商空间 $T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))\rangle$ 和 $T_{v(1/2)}\Sigma/\langle X_H(v(1/2))\rangle$ 上诱导实结构。由于哈密顿向量场是反不变的，反辛对合 ρ 将正向流共轭为反向流

$$\rho\phi_H^t\rho = \phi_H^{-t}.$$

特别地，对此恒等式求导可得

$$d\rho\big(v\big(\tfrac{1}{2}\big)\big) \circ d\phi_H^{\tau/2}\big(v\big(0\big)\big) \circ d\rho\big(v\big(0\big)\big) = \Big(d\phi_H^{\tau/2}\big(v\big(\tfrac{1}{2}\big)\big)\Big)^{-1}.$$

因此，所诱导的映射

$$\Psi := \overline{d\phi_H^{\tau/2}\big(v\big(0\big)\big)} \colon T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))\rangle \to T_{v(1/2)}\Sigma/\langle X_H(v(1/2))\rangle$$

and

$$\Phi := \overline{d\phi_H^{\tau/2}\big(v\big(\tfrac{1}{2}\big)\big)} \colon T_{v(1/2)}\Sigma/\langle X_H(v(1/2))\rangle \to T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))\rangle$$

构成一对实偶（Ψ，Φ）。注意，这些复合映射分别与时刻 0 和 $\frac{1}{2}$

$$\Phi\Psi = \overline{d\phi_H^\tau\big(v(0)\big)}, \quad \Psi\Phi = \overline{d\phi_H^\tau\big(v\big(\tfrac{1}{2}\big)\big)}.$$

现在我们进一步假设，辛流形 (M,ω) 具有实结构 ρ_1 和 ρ_2，使得在这两个实结构下，H 均保持不变，且 $v \in \mathcal{P}_H^{I_1}$ 关于 ρ_2 双对称。ρ_2 的微分给出一个线性反辛映射

$$d\rho_2(v(0))\colon T_{v(0)}M \to T_{v(1/2)}M$$

它在商空间上诱导出一个反辛映射

$$S\colon T_{v(0)}\Sigma/\langle X_H(v(0))\rangle \to T_{v(1/2)}\Sigma/\langle X_H(v(1/2))\rangle.$$

由于 ρ_1 与 ρ_2 可交换，该映射交换这两个实结构。由引理 4.2 可知 $\big(\frac{1}{4}\big)_* v \in \mathcal{P}_H^{I_2}$，因此 S 使实对 (Ψ,Φ) 成为对称的。因此，作为推论 3.4 的结果，我们得到以下推论，这就是引言中的定理 A：

推论 5.1 四维辛流形上的双对称周期轨道不可能是负双曲型。

参考文献

[1] R. Abraham, J. Marsden,《力学基础》，第 2 版。Addison-Wesley, 纽约（1978）。[2] G. Birkhoff,《限制性三体问题》，《巴勒莫数学学会学报》**39**（1915），265–334。[3] K. Cieliebak, U. Frauenfelder, M. Schwingenheuer,《关于朗缪尔周期轨道》，《巴塞尔数学档案》**118**（2022），第 4 期，413–425。[4] K. Cieliebak, U. Frauenfelder, E. Volkov,《氦中冻结行星轨道的变分方法》，即将发表于 Ann. Inst. H. Poincar´e。[5] K. Cieliebak, U. Frauenfelder, E. Volkov,《氦中冻结行星的非退化性与整数计数》，arXiv：2209.12634[6] Y. Eliashberg, A. Givental, H. Hofer《辛场论导论》，《几何与泛函分析》2000，特刊第二部分，560–673。[7] U. Frauenfelder,《氦与哈密顿时滞方程》，《以色列数学杂志》246, 239–260（2021）。[8] U. Frauenfelder,《冻结行星的紧性定理》，arXiv：2010:15532，即将发表于《拓扑学与分析杂志》。

[9] U. Frauenfelder, D. Koh, U. Frauenfelder, 《关于 *Floer* 型数值不变量、*GIT* 商以及真实行星系统的轨道分岔》, arXiv:2206.00627[10] U. Frauenfelder, A. Moreno, 《关于辛群的 *GIT* 商、对称轨道的稳定性与分岔》, arXiv:2109.09147[11] U. Frauenfelder, D. Koh, A. Moreno, 《在真实行星系统中搜索轨道的辛方法》, 预印本 arXiv:2206.00627。[12] U. Frauenfelder, O. van Koert, 《限制性三体问题与全纯曲线》, 数学之路, Birkh¨auser/Springer, 沙姆（2018）。[13] M. H´enon, 《限制性问题的数值探索。*V.* 希尔情形：周期轨道及其稳定性》, 《天文学与天体物理学》**1**, 223–238。[14] G. Hill, 《月球理论研究》, 《美国数学杂志》**1**（1878）, 5–26, 129–147, 245–260。[15] Krein, M.: A.M. Liapunov 关于周期系数线性微分方程的若干研究之推广。《苏联科学院通报》73（1950）445-448。[16] M. Krein, 《关于代数命题在单值矩阵理论中的应用》, 《数学科学进展》6（1951）171-177。[17] M. Krein, 《关于指数型整矩阵函数理论》, 《乌克兰数学杂志》3（1951）164-173。[18] M. Krein, 《关于特征数与 *Liapunov* 稳定区域的若干极大极小问题》, 《应用数学与力学》15（1951）323-348。[19] J. Moser, 《哈密顿系统稳定性理论的新进展》, 《纯粹与应用数学通讯》11（1958）81-114。[20] I. Langmuir, 《氦原子的结构》, 《物理评论》**17**（1921）, 339–353。[21] T. Levi-Civita, 关于 ´三体问题 `的正则化, 《数学学报》**42**（1920）, 99–144。[22] G. Tanner, K. Richter, J. Rost, 《双电子原子理论：从基态到完全碎裂》, 《现代物理评论》**72**（2）（2000）, 497–544。[23] D. Wintgen, K. Richter, G. Tanner, 《半经典氦原子》, 载于“恩里科·费米”国际物理学院第 CXIX 期课程论文集（1993）, 113–143。

[24] L. Zhao，氦模型中的共线周期轨道射击法，预印本。

[25] B. Zhou，制动轨道的迭代公式及实伪全纯曲线的指标不等式，J.Fixed Point Theory Appl.，https://doi.org/10.1007/s11784-021-00928-3（2022）。

U. Frauenfelder, Augsburg Universität, Augsburg, Germany*E-mail address*: urs.frauenfelder@math.uni-augsburg.deA. Moreno, Institute for Advanced Study, Princeton NJ, USA/ Heidelberg Uni-versität, Heidelberg, Germany
E-mail address: agustin.moreno2191@gmail.com