arXiv:2301.01818v1 [math.NA] 4 Jan 2023

用于不可压缩流高阶有限元离散的静态凝聚迭代罚方法 *

Mark Ainsworth† 和Charles Parker ‡

摘要。我们提出并分析了一种静态凝聚迭代惩罚（SCIP）方法，用于求解采用 p 阶 Scott-Vogelius 元离散的不可压流问题。标准迭代罚方法通常是计算离散解的首选算法，但每次迭代都需要求逆一个含有 $\mathcal{O}(p^d)$ 个未知量的线性系统。SCIP 方法将该系统的规模缩减至 $\mathcal{O}(p^{d-1})$ 个未知量，同时保持迭代罚方法的几何收敛率。将 SCIP 应用于 Kovasznay 流和 Moffatt 涡旋，所得结果与理论吻合良好。

关键词：高阶有限元、不可压缩流、迭代罚方法

AMS 学科分类号：76M10, 65N30, 65N12

1. 引言。 寻找用于 Stokes 方程的稳定混合有限元对由来已久，且研究成果丰富。近年来，研究重点转向满足正合序列性质的有限元；例如，可参见综述论文 [11] 及其中的参考文献。基于正合序列的有限元空间颇具吸引力，因为它们能构造出具有“压力鲁棒性”的格式，并使速度的近似在每一点上都无散。这类格式通常相对于网格尺寸具有 inf-sup 稳定性，在某些情况下，还可证明其相对于多项式次数[2] 具有一致稳定性。稳定性对于避免数值解中的非物理伪影、获得最优先验估计以及构造有效的预条件器至关重要。

一种更为经典的混合有限元格式构造方法，尤其适用于高阶方法，是采用形如 $\boldsymbol{X}_D \times \operatorname{div} \boldsymbol{X}_D$ 的组合，其中空间 $\boldsymbol{X}_D$ 由连续分片多项式向量场构成。这类格式也属于正合序列的一部分，但其最初的推导并非基于这一思路[20, 21, 23]。已知 [21, 23]，只要空间 $\boldsymbol{X}_D$ 由四次或更高次数的多项式构成，这些单元就相对于网格尺寸 inf-sup 稳定；然而，同一分析 [21, 23] 表明，inf-sup 常数可能会随着多项式次数的增加而按代数规律衰减。不过，实际经验表明，该格式对多项式次数具有一致的 inf-sup 稳定性；本研究的一个附带成果是，在满足网格某些必要（但较宽松）假设的条件下，正式证明 Scott-Vogelius 元对网格尺寸和多项式次数均具有一致的 inf-sup 稳定性。尽管本文首次给出了一致稳定性的证明，本研究的主要目标却截然不同：我们提出一种算法，使 Scott-Vogelius 元能够得到高效实现，尤其适用于高阶单元。

应用 Scott-Vogelius 元的一大难点，是难以为离散压力空间 div 构造一组基 $\boldsymbol{X}_D$。此外，正如第 2 节所述，

*提交给编辑的日期。资助：第二作者承认，本材料基于美国国家科学基金会通过资助编号 DMS-2201487 支持的研究工作。

† 布朗大学应用数学系，罗德岛州普罗维登斯（mark ainsworth@brown.edu）。

‡ 牛津大学数学研究所，安德鲁·怀尔斯大楼，伍德斯托克路，牛津 OX2 6GG，英国（charles.parker@maths.ox.ac.uk）

压力空间在某些单元顶点处存在非平凡约束，这进一步加剧了这一问题。因此，该方法通常采用迭代惩罚（IP）方法[6, 7, 8, 15]实现。IP 方法无需为压力空间构造显式基，但代价是必须迭代求解，即反复求解仅涉及速度空间的有限元型问题 $\boldsymbol{X}_D$。对于低阶方法，这种方法颇具吸引力；但正如第 3 节所述，由于每次迭代都需要更新内部自由度，标准迭代惩罚方法在高阶单元中的吸引力会越来越低。

值得注意的是，内部自由度的数量为 $\mathcal{O}(p^d)$，而与单元边界相关的其余自由度数量为 $\mathcal{O}(p^{d-1})$。因此，内部自由度占自由度总数的大部分，每次迭代都必须更新这些自由度，这成为总体成本的主要部分。为解决这一问题，我们提出静态凝聚迭代惩罚（SCIP）方法，该方法每次迭代只需更新单元边界上的自由度；因此，与标准迭代罚方法相比，SCIP 每次迭代的成本大幅降低。

粗略地说，SCIP 方法的核心思想是将离散解分解为来自一对与单元边界相关的子空间的贡献，以及来自与单元内部相关的局部子空间对的贡献。每项贡献都可以通过求解定义在相应子空间上的类 Stokes 方程获得。首先使用标准迭代罚方法求解边界贡献，随后通过直接方法求解内部贡献，因为其基可以方便地构造。最终，SCIP 方法只需对内部自由度进行一次求解，而不必像使用 IP 方法那样在每次迭代时更新它们。

在第 4 节中，我们给出 SCIP 收敛性的理论界，并详细介绍其实现。在第 5 节中，我们给出两个数值算例，展示 SCIP 的性能。第 6 节介绍离散延拓算子，并在第 7 节中利用这些算子证明 SCIP 方法的收敛性结果。最后，附录 A介绍二维 Scott-Vogelius 元的各种性质，包括 inf-sup 稳定性、最优逼近和正合序列性质。

2. 数学预备知识。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$ 是一个多边形区域，其边界 Γ 被划分为互不相交的子集 Γ_D 和 Γ_N，且满足 $|\Gamma_D| > 0$。我们考虑 Ω 上的 Stokes 方程：

$$-\operatorname{div}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \mathbf{grad}\, q = \boldsymbol{f} \qquad \text{in } \Omega, \tag{2.1a}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{2.1b}$$
$$\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \qquad \text{on } \Gamma_D, \tag{2.1c}$$
$$-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\cdot\hat{\boldsymbol{n}} + q\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{g} \qquad \text{on } \Gamma_N, \tag{2.1d}$$

其中，$\boldsymbol{u}$ 和 q 分别为未知的流体速度和压力，$\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot)$ 为应变率张量，$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^2(\Gamma_N)$ 为给定数据。

令 $\boldsymbol{H}^1_D(\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) : \boldsymbol{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\}$ 且 $L^2_D(\Omega) = L^2(\Omega)$，若 $|\Gamma_D| \neq |\Gamma|$且 $L^2_D(\Omega) = L^2_0(\Omega)$，否则。则 (2.1) 的变分形式为：求解 $(\boldsymbol{u}, q) \in \boldsymbol{H}^1_D(\Omega) \times L^2_D(\Omega)$，使得

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - (q, \operatorname{div}\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1_D(\Omega), \tag{2.2a}$$
$$-(r, \operatorname{div}\boldsymbol{u}) = 0 \qquad \forall r \in L^2_D(\Omega), \tag{2.2b}$$

其中

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})) \quad \text{and} \quad L(\boldsymbol{v}) := (\boldsymbol{v},\boldsymbol{f}) + (\boldsymbol{v},\boldsymbol{g})_{\Gamma_N} \qquad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) \tag{2.3}$$

且 $(\cdot,\cdot)_\omega$ 表示 $L^2(\omega)$ 或 $\boldsymbol{L}^2(\omega)$ 内积。更一般地，$|\cdot|_{s,\,\omega}$ 和 $\|\cdot\|_{s,\,\omega}$ 分别表示 $H^s(\omega)$ 或 $\boldsymbol{H}^s(\omega)$ 半范数与范数。当 $\omega = \Omega$ 时，我们省略下标 ω。事实上，下面的讨论对更一般的情形也成立：双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 满足以下条件：

- 有界性：存在 $M > 0$，使得

$$|a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \le M\|\boldsymbol{u}\|_1\|\boldsymbol{v}\|_1 \qquad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1_D(\Omega). \tag{2.4}$$

- 椭圆性：存在 $\alpha > 0$，使得

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \ge \alpha\|\boldsymbol{u}\|_1^2 \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1_D(\Omega). \tag{2.5}$$

特别地，根据标准的 Babuˇska-Brezzi 理论（例如参见 (2.2)），这些条件确保 [10, 引理 3。19] 的适定性。满足 (2.4) 和 (2.5) 的双线性形式 $a(\cdot,\ \cdot$ 的相关示例包括

- Oseen 流：

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 2\nu(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})) + ((\boldsymbol{w}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \tag{2.6}$$

  其中，ν 是运动黏度，$\boldsymbol{w}$ 是无散的，且 $\boldsymbol{w}\cdot\hat{}\boldsymbol{n} \ge 0$ onΓ_N（关于 $\boldsymbol{w}$所需正则性的精确定义，参见例如[10, §1]）。

- Oseen 流的奇异摄动：$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \delta\{2\nu(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})) + ((\boldsymbol{w}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\}$，其中 ν 和 $\boldsymbol{w}$ 同上。

Oseen 方程出现在稳态 Navier-Stokes 方程的数值方法中，而奇异摄动问题则出现在非稳态 Stokes 流和 Navier–Stokes 流的时间离散中（例如参见 [10]），其中 $\delta \sim \Delta t$，Δt 为时间步长。

2.1. Scott-Vogelius 离散。设 $X \subset H^1(\Omega)$为Ω的三角剖分 $\mathcal{T}$上的连续分片多项式集合，其次数为 $p \in \mathbb{N}$：

$$X := \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_K \in \mathcal{P}_p(K)\ \forall K \in \mathcal{T}\},$$

其中，$\mathcal{P}_p(K)$表示次数不超过 p的多项式空间。特别地，我们假设三角剖分 $\mathcal{T}$将区域 Ω 划分为单纯形，并且任意两个不同的单元在 $\mathcal{T}$ 中的非空交集都是它们共有的一个子单纯形，网格尺寸为 $h := \max_{K\in\mathcal{T}} h_K$ 和 $h_K := \operatorname{diam}(K)$。¯我们还假设单元边界位于 Γ_D 与$\bar{\Gamma}_N$的交集处。空间 $X_D := X \cap H^1_D(\Omega)$由 X 中在 Dirichlet 边界 Γ_D上消失的函数构成，我们使用空间 $\boldsymbol{X}_D := [X_D]^d$ 对 (2.2) 进行离散，具体如下：求解 $(\boldsymbol{u}_X, q_X) \in \boldsymbol{X}_D \times$散度 $\boldsymbol{X}_D$，使得

$$a(\boldsymbol{u}_X,\boldsymbol{v}) - (q_X, \operatorname{div}\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D, \tag{2.7a}$$

$$-(r, \operatorname{div}\boldsymbol{u}_X) = 0 \qquad \forall r \in \text{散度}\ \boldsymbol{X}_D. \tag{2.7b}$$

这对 $\boldsymbol{X}_D \times$ 散度 $\boldsymbol{X}_D$ 对应 Scott-Vogelius 元 [20, 21, 23]，它们具备一些特性，使其成为混合高阶离散的理想选择。首先，速度空间由标准连续有限元组成，而这些有限元已在大多数（如果不是全部）高阶有限元

软件包中实现。其次，选择 $r =$ 散度 $\boldsymbol{u}_X$ 中的 (2.7b) 表明，所得离散速度 $\boldsymbol{u}_X$ 是逐点无散的，这意味着 (2.1b)得到了精确满足。此外，离散 inf-sup 条件成立：

$$\beta_X := \inf_{0\neq q\in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_D} \sup_{\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{X}_D} \frac{(\operatorname{div} \boldsymbol{v}, q)}{\|\boldsymbol{v}\|_1\|q\|}, \tag{2.8}$$

其中，一般而言，$\beta_X > 0$ 取决于 h 和 p，但严格为正。以下论证最容易说明这一点。散度算子 div：$\boldsymbol{X}_D \to \operatorname{div} \boldsymbol{X}_D$是连续且满射的，并且 $\boldsymbol{X}_D$ 是有限维的。因此，算子 div 存在一个有界右逆 R：div $\boldsymbol{X}_D \to \boldsymbol{X}_D$ 满足 div $Rq = q$ 对所有 $q \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_D$ 成立。在 $\boldsymbol{v} = Rq$ 中取上确界(2.8) 中的

$$\beta_X \geq \inf_{0\neq q\in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_D} \frac{(\operatorname{div} Rq, q)}{\|Rq\|_1\|q\|} = \inf_{0\neq q\in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_D} \frac{\|q\|}{\|Rq\|_1} \geq \|R\|^{-1} > 0,$$

其中 $\|R\|$表示通常的算子范数。

3. 标准迭代罚方法。有限元方法 (2.7) 的一种经典实现分两步进行：(i) 为空间 $\boldsymbol{X}_D$ 和 div $\boldsymbol{X}_D$ 选取合适的基；(ii) 求解由此得到的鞍点系统。速度空间 $\boldsymbol{X}_D$ 具有标准形式，因此可以通过常用技术构造一组基。我们对标量空间X_D 采用伯恩斯坦基（例如参见 [13]；其他选择也完全可以接受）。在 $d = 3$的情况下，这组基由 (i) 分片线性顶点函数、(ii) 边函数、(iii) 面函数和 (iv) 内部函数组成；而在 $d = 2$的情况下，面函数起到内部自由度的作用。特别地，对于给定单元 $K \in \mathcal{T}$，有 $d + 1$ 个顶点函数、$\binom{d+1}{2}(p-1)$ 个边函数、$\binom{d+1}{3}(p-1)(p-2)/2$ 个面函数，以及 $(p-1)(p-2)(p-3)/6$ 个相关函数。通过采用形如 $\{\phi_j \hat{\boldsymbol{e}}_k\}_{k=1}^d$的函数，可得到 $\boldsymbol{X}_D$ 的一组基，其中 $\{\hat{\boldsymbol{e}}_k\}_{k=1}^d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的标准基，$\{\phi_j\}$ 表示 X_D的基。

相比之下，为压力空间 div $\boldsymbol{X}_D$ 构造基要复杂得多，部分原因是散度算子的零空间很大。然而，困难还源于这样一个事实：空间 div $\boldsymbol{X}_D$ 的维数受单元拓扑影响。例如，在 $d = 2$ 的情形下，奇异顶点 [21, 22]处会出现困难。如果一个顶点处相交的所有单元边恰好位于两条直线上，则该单元顶点称为奇异顶点。因此，对于内部顶点，只有当四个单元在该顶点相邻时，才会出现奇异顶点。综上，与为 $\boldsymbol{X}_D$构造基相比，为压力空间构造基要困难得多。

迭代罚方法 [6, 7, 8, 15] 为经典实现 (2.7) 提供了一种很有吸引力的替代方案，因为它完全避免了构造 div $\boldsymbol{X}_D$ 的显式基。对于选定的足够大的参数，迭代罚方法按如下方式进行 $\lambda > 0$ (见 定理 3.1)：对于 $n = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,$ 求 $\boldsymbol{u}_X^n \in \boldsymbol{X}_D$ 使得

$$a_\lambda(\boldsymbol{u}_X^n, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) + (\operatorname{div} \boldsymbol{w}_X^n, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D, \tag{3.1a}$$

$$\boldsymbol{w}_X^{n+1} = \boldsymbol{w}_X^n - \lambda \boldsymbol{u}_X^n, \tag{3.1b}$$

其中 $\boldsymbol{w}_X^0 := \boldsymbol{0}$ 和

$$a_\lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \lambda(\operatorname{div} \boldsymbol{u}, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega). \tag{3.2}$$

注意， $\boldsymbol{u}_X^n$ 由 (3.1a) 借助 Lax–Milgram 引理可良好定义，因为 $a(\cdot,\ \cdot)$，因此 $a_\lambda(\cdot,\ \cdot)$ 在 $\boldsymbol{X}_D \subset \boldsymbol{H}_D^1(\Omega)$ 上具有椭圆性。(3.1a)-(3.1b) 将反复迭代，直到满足适当的停止准则（例如下文 定理 3.1 中的一种准则），此时压力近似取为 $q_X \simeq q_X^n :=$ 散度 $\boldsymbol{w}_X^n$。以下结果讨论了 (3.1)的收敛性。

THEOREM 3.1. 令 $(\boldsymbol{u}_X, q_X) \in \boldsymbol{X}_D \times$ 散度 $\boldsymbol{X}_D$ 表示方程 (2.7) 的解，且$(\boldsymbol{u}_X^n, \boldsymbol{w}_X^n)$ $n \in \mathbb{N}$ 由 (3.1)给出。则有如下误差估计：

$$\max\left\{\|\boldsymbol{u}_X - \boldsymbol{u}_X^n\|_1, \left(\frac{M(M+\alpha)}{\alpha\beta_X^2} + \frac{\sqrt{d}\lambda}{\beta_X}\right)^{-1} \|q_X - \operatorname{div} \boldsymbol{w}_X^n\|\right\} \leq \frac{M+\alpha}{\alpha\beta_X}\|\operatorname{div} \boldsymbol{u}_X^n\|,$$

其中 $M > 0$ (2.4)、 $\alpha > 0$ (2.5)和 $\beta_X > 0$ (2.8)。此外，

$$\|\operatorname{div} \boldsymbol{u}_X^n\| \leq \sqrt{d}\left[\frac{M(M+\alpha)^2}{\alpha^2\beta_X^2\lambda}\right]^n \|\boldsymbol{u}_X - \boldsymbol{u}^0\|_1.$$

定理 3.1 在 第 7.1 小节 中得到证明，并表明当 λ 足够大时，标准迭代罚方法 (3.1) 以几何速率收敛，并且量 $\|$ 散度 $\boldsymbol{u}_X^n\|$ 可作为停止准则的依据。

3.1. 实现成本。 使用标准迭代罚方法的主要成本在于 (3.1a) 需要在每次迭代中求解一个含有 $\mathcal{O}(|\mathcal{T}|p^d)$ 个未知数的方形线性系统。大部分自由度对应于内部基函数，正如前文所述，每个单元有 $\mathcal{O}(p^d)$ 个。相比之下，与单元边界相关的自由度数量为$\mathcal{O}(|\mathcal{T}|p^{d-1})$。由此产生的问题是：能否通过（理想情况下）一次性消去内部自由度，即进行(3.1a) 的静态凝聚，将系统缩减为含有$\mathcal{O}(|\mathcal{T}|p^{d-1})$ 个未知数的系统？静态凝聚？

为探讨这个问题，采用变分形式来表达静态凝聚会很方便。给定一个单元 $K \in \mathcal{T}$，令

$$\boldsymbol{X}_I(K) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D : \operatorname{supp} \boldsymbol{v} \subseteq K\} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{X}_I := \bigoplus_{K\in\mathcal{T}} \boldsymbol{X}_I(K). \tag{3.3}$$

关于 $a_\lambda(\cdot,\cdot)$ 形式， $\boldsymbol{X}_I$ 在 $\boldsymbol{X}_D$ 中的正交补及其“伴随算子”定义如下：

$$\boldsymbol{X}_B := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D : a_{\lambda,K}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0\ \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{X}_I(K),\ \forall K \in \mathcal{T}\} \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{X}_B^\dagger := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D : a_{\lambda,K}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0\ \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{X}_I(K),\ \forall K \in \mathcal{T}\}, \tag{3.5}$$

其中 $a_{\lambda,\ K}(\cdot,\ \cdot)$ 是 $a_\lambda(\cdot,\ \cdot)$ 在单元 K上的限制。静态凝聚即是以如下形式求解 (3.1a)：

$$\boldsymbol{u}_X^n = \boldsymbol{u}_B + \sum_{K\in\mathcal{T}} \boldsymbol{u}_K, \tag{3.6}$$

其中各项贡献为

$$\boldsymbol{u}_K \in \boldsymbol{X}_I(K) :\ a_{\lambda,K}(\boldsymbol{u}_K, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_K + (\operatorname{div} \boldsymbol{w}_X^n, \operatorname{div} \boldsymbol{v})_K \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_I(K), \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{u}_B \in \boldsymbol{X}_B :\quad a_\lambda(\boldsymbol{u}_B, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) + (\operatorname{div} \boldsymbol{w}_X^n, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_B^\dagger. \tag{3.8}$$

系统 (3.7)由以下部分组成：每个单元上有 $\mathcal{O}(p^d)$ 个内部未知量，这些未知量彼此解耦，可使用直接方法并行求解；与之相比，全局系统包含 $\mathcal{O}(|\mathcal{T}|p^d$ 个对应于 (3.1a) 的未知量。同时， (3.8) 等价于一个包含 $\mathcal{O}(|\mathcal{T}|p^{d-1}$ 个未知量的全局线性系统。 算法 3.1 概述了标准迭代罚方法，其中 (3.1a) 的解采用 (3.6) 的形式求得。不幸的是，由于每次迭代都需要求解 算法 3.1 每次迭代的计算成本仍为 $\mathcal{O}(|\mathcal{T}|p^{2d})$ 次运算，因为每次迭代都需要求解 (3.7) 。

算法 3.1 针对 (2.7) 的标准迭代罚方法

要求： $\boldsymbol{w}_X^0 := \mathbf{0}$, $\lambda > 0$

1: 对于 $n = 0, 1, \ldots,$ **do**

2: 求满足以下条件的 $\boldsymbol{u}_B \in \boldsymbol{X}_B$

$$a_\lambda(\boldsymbol{u}_B, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) + (\text{散度 } \boldsymbol{w}_X^n, \text{散度 } \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_B^\dagger.$$

3: 对于每个 $K \in \mathcal{T}$，求出满足以下条件的 $\boldsymbol{u}_K \in \boldsymbol{X}_I(K)$

$$a_{\lambda,K}(\boldsymbol{u}_K, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_K + (\operatorname{div} \boldsymbol{w}_X^n, \operatorname{div} \boldsymbol{v})_K \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_I(K).$$

4: $\boldsymbol{u}_X^n := \boldsymbol{u}_B + \sum_{K\in\mathcal{T}} \boldsymbol{u}_K$

5: 如果满足停止准则，则

6: 跳出

7: 结束如果

8: $\boldsymbol{w}_X^{n+1} := \boldsymbol{w}_X^n - \lambda \boldsymbol{u}_X^n$

9: 结束循环

10: 返回 $\boldsymbol{u}_X^n$, $q_X^n :=$ 散度 $\boldsymbol{w}_X^n$

4. 降低标准迭代罚方法的计算成本。 前述讨论表明，即使采用逐单元静态凝聚，标准迭代罚方法每次迭代的计算成本仍为 $\mathcal{O}(|\mathcal{T}|p^{2d})$ 次运算。静态凝聚未能降低每次迭代成本的主要原因是，算法 3.1 中的第 4 行和第 8 行要求在每次迭代中都获取内部自由度的值，以便计算第 2 行所需的边界自由度右端项。实质上，尽管静态凝聚将 (3.7) 和 (3.8)中的系统左端项解耦，但由于右端项中源项的形式，问题仍然是耦合的。

本节将说明，谨慎地调整空间 $\boldsymbol{X}_B$ （以及 $\boldsymbol{X}_B^\dagger$）的选取，可以实现内部自由度与边界自由度的 完全 解耦。这意味着只需对内部自由度求解 一次，而不必像 算法 3.1那样在每次迭代中都对内部自由度求解。其核心思想是利用无散内部函数空间的性质

$$\boldsymbol{N}_I(K) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_I(K) : \operatorname{div} \boldsymbol{v} \equiv 0\}, \ K \in \mathcal{T}, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{N}_I := \bigoplus_{K\in\mathcal{T}} \boldsymbol{N}_I(K), \tag{4.1}$$

这将在分析内部空间以及为 $\boldsymbol{X}_B$ 构造适当修正时发挥关键作用。

4.1. 内部空间。我们首先考察与单元 $K \in \mathcal{T}$ 上的内部自由度相关联的 Stokes 系统：求 $(\boldsymbol{u}_K, q_K) \in \boldsymbol{X}_I(K) \times$散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$，使得

$$a_K(\boldsymbol{u}_K, \boldsymbol{v}) - (q_K, \operatorname{div} \boldsymbol{v})_K = L_1(\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_I(K), \tag{4.2a}$$

$$-(r, \operatorname{div} \boldsymbol{u}_K)_K = L_2(r) \qquad \forall r \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_I(K), \tag{4.2b}$$

其中 $L_1(\cdot)$ 和 $L_2(\cdot)$ 是适当的线性泛函。问题(4.2) 可用矩阵表示如下。任意 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}_D$ 和 $q_K \in$散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$，$K \in \mathcal{T}$，均可表示为

$$\boldsymbol{u} = \vec{u}_B^T \vec{\Phi}_B + \vec{u}_I^T \vec{\Phi}_I \quad \text{and} \quad q_K = \vec{q}_K^T \vec{\psi}_{\iota,K},$$

其中 $\vec{\Phi}_I$ 是内部速度函数的一组基，$\vec{\Phi}_B$ 是顶点和边函数的一组基，而 $\psi_{\iota,K}$ 是散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$ 的一组基。对于 $K \in \mathcal{T}$，令 $\boldsymbol{E}_K$ 为与形式 $a_K(\cdot,\cdot)$ 对应的矩阵，其分块如下：

$$a_K(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} \vec{v}_{B,K} \\ \vec{v}_{I,K} \end{bmatrix}^T \boldsymbol{E}_K \begin{bmatrix} \vec{u}_{B,K} \\ \vec{u}_{I,K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_{B,K} \\ \vec{v}_{I,K} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{BB} & \boldsymbol{E}_{BI} \\ \boldsymbol{E}_{IB} & \boldsymbol{E}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_{B,K} \\ \vec{u}_{I,K} \end{bmatrix} \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D,$$

其中 $\vec{u}_{B,K}$ 和 $\vec{u}_{I,K}$ 是与单元 K关联的 $\boldsymbol{u}$ 的边界自由度和内部自由度。类似地，$\boldsymbol{G}_K$ 是与 $-(\cdot,$ 散度 $\cdot)_K$ 对应的矩阵：

$$-(q_K, \operatorname{div} \boldsymbol{u})_K = \vec{q}_K^T \boldsymbol{G}_K \begin{bmatrix} \vec{u}_{B,K} \\ \vec{u}_{I,K} \end{bmatrix} = \vec{q}_K^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{\iota B} & \boldsymbol{G}_{\iota I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_{B,K} \\ \vec{u}_{I,K} \end{bmatrix},$$

对所有 $q_K \in$散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$ 和 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}_D$而言。特别地，(4.2) 的左端项对应一个方阵

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{II} & \boldsymbol{G}_{\iota I}^T \\ \boldsymbol{G}_{\iota I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

第一个结果涉及以下方程解的存在唯一性：(4.2)：

LEMMA 4.1. 内部 Stokes 系统(4.2)具有唯一解。

证明。如上所示，(4.2) 等价于一个涉及矩阵 (4.3) 的方形线性系统，因此只需证明唯一性。设 $(\boldsymbol{u}_K, q_K) \in \boldsymbol{X}_I(K) \times$散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$ 满足带有 $L_1 = L_2 = 0$ 的 (4.2)。由 (4.2b) 可知，$\boldsymbol{u}_K \in \boldsymbol{N}_I(K)$。在 (4.2a) 中取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_K$，得到 $a(\boldsymbol{u}_K, \boldsymbol{u}_K) = 0$。由于根据 (2.5)，$a(\cdot,\cdot)$ 在$\boldsymbol{N}_I(K)$上具有椭圆性，$\boldsymbol{u}_K \equiv 0$。根据散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$ 的定义，存在 $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{X}_I(K)$ 使得散度 $\boldsymbol{w} = q_K$，因此由 (4.2a) 得到 $0 =$(散度 $\boldsymbol{w}$) $= (q_K, q_K)$。于是，$q_K \equiv 0$，证明完成。 ∎

4.2. 边界空间。此前，在(3.4)和(3.5)中，边界空间$\boldsymbol{X}_B$ 被选为关于形式 $a_\lambda(\cdot,\cdot)$（定义于(3.2)）的正交补。然而，算法 3.1第 2—3 行数据中的项（div $\cdot$,div $\cdot$）的存在，最终导致每次迭代都需要重新计算静态凝聚。为避免这种对数据的依赖，我们构造新的空间 $\tilde{\boldsymbol{X}}_B$ 和 $\tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$，以显式解耦由（div $\cdot$,div $\cdot$）项产生的对数据的依赖。特别地，如果空间 $\boldsymbol{X}_B$ 具有以下性质：

$$\boldsymbol{v} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B \implies (\operatorname{div} \boldsymbol{v}, q) = 0 \qquad \forall q \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_I, \tag{4.4}$$

那么对数据的依赖将被消除。当然，我们仍希望空间 $\boldsymbol{X}_B$ 对应于与单元边界相关联的自由度。因此，我们在(4.4) 中加入附加条件

$$\boldsymbol{v} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B \implies a_\lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{N}_I, \tag{4.5}$$

其中 $\boldsymbol{N}_I$ 由 (4.1)给出。下文将证明，条件 (4.4) 和 (4.5) 彼此独立。因此，我们得到如下边界空间的选取方式：

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_B := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D : a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) = 0 \ \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{N}_I \text{ and } (\operatorname{div} \boldsymbol{v}, r) = 0 \ \forall r \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_I\}, \tag{4.6}$$

其中，我们利用 $\boldsymbol{N}_I$ (4.1) 的定义，通过省略 $a_\lambda(\cdot,\cdot)$ 中的 $(\operatorname{div}\cdot, \operatorname{div}\cdot)$ 项，将 (4.5) 改写为关于 $a(\cdot,\cdot)$ 的形式。同样，我们将 $\tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$ 定义为相应的“伴随算子”空间：

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger := \{\boldsymbol{v}^\dagger \in \boldsymbol{X}_D : a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}^\dagger) = 0 \ \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{N}_I \text{ and } (\operatorname{div} \boldsymbol{v}^\dagger, r) = 0 \ \forall r \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_I\}.$$

等价关系 $\boldsymbol{N}_I = \oplus_{K\in\mathcal{T}} \boldsymbol{N}_I(K)$ 和 $\boldsymbol{X}_I = \oplus_{K\in\mathcal{T}} \boldsymbol{X}_I(K)$ 表明，(4.6) 中出现的条件可分解为针对每个 $K \in \mathcal{T}$ 的独立局部条件：

$$a_K(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{N}_I(K) \quad \text{and} \quad (\operatorname{div} \boldsymbol{v}, r)_K = 0 \quad \forall r \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_I(K). \tag{4.7}$$

此外，条件 (4.7) 彼此线性独立。从 (4.7)的矩阵形式可以最清楚地看出这一点，该形式为

$$\begin{aligned} \vec{z}_{I,K}^T \boldsymbol{E}_{II} \vec{v}_{I,K} &= -\vec{z}_{I,K}^T \boldsymbol{E}_{IB} \vec{v}_{B,K} \qquad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{N}_I(K) \\ \vec{r}_K^T \boldsymbol{G}_{\iota I} \vec{v}_{I,K} &= -\vec{r}_K^T \boldsymbol{G}_{\iota B} \vec{v}_{B,K} \qquad \forall r \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_I(K). \end{aligned}$$

注意，对于任意 $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{N}_I(K)$ 和 $s \in$ 散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$，$\vec{z}_{I,K}^T \boldsymbol{G}_{\iota I}^T \vec{s}_K = 0$ 根据定义，因此等价地有

$$\begin{bmatrix} \vec{z}_{I,K} \\ \vec{r}_K \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{II} & \boldsymbol{G}_{\iota I}^T \\ \boldsymbol{G}_{\iota I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_{I,K} \\ * \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \vec{z}_{I,K} \\ \vec{r}_K \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{IB} \\ \boldsymbol{G}_{\iota B} \end{bmatrix} \vec{v}_{B,K} \tag{4.8}$$

对所有 $(\boldsymbol{z}, r) \in \boldsymbol{N}_I(K) \times$ 散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$。这里，$*$ 表示一个无关紧要（但大小适当）的向量。根据 引理 4.1，上文左端项中出现的矩阵 (4.3) 可逆，这意味着 (4.7)中的条件确实线性无关。此外，有如下包含关系：

$$\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D : \vec{v}_{I,K} = \boldsymbol{S}_K \vec{v}_{B,K} \ \forall K \in \mathcal{T}\} \subseteq \tilde{\boldsymbol{X}}_B, \tag{4.9}$$

其中

$$\boldsymbol{S}_K := - \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{II} & \boldsymbol{G}_{\iota I}^T \\ \boldsymbol{G}_{\iota I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{IB} \\ \boldsymbol{G}_{\iota B} \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

正如我们稍后将证明的（见引理 4.2），反向包含关系也成立，这意味着该关系实际上是等式。(4.9)

通过先将条件 $\tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$ 表示为(4.8)，可以得到关于

$$\left[\begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \hline \vec{z}_{I,K} \\ \vec{r}_K \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{cc|cc} * & * & \boldsymbol{E}_{BI} & \boldsymbol{G}_{\iota B}^T \\ * & * & * & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{E}_{IB} & * & \boldsymbol{E}_{II} & \boldsymbol{G}_{\iota I}^T \\ \boldsymbol{G}_{\iota B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{\iota I} & \boldsymbol{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \vec{v}_{B,K} \\ \vec{0} \\ \hline \vec{v}_{I,K} \\ * \end{array}\right] = 0 \tag{4.11}$$

对所有 $(z、\ r) \in N_I(K) \times$ 散度 $X_I(K)$，其中我们再次使用 $*$ 来表示无关紧要的（但同样具有适当大小的）向量或矩阵。采用类似的论证，我们可以证明，伴随空间 $\tilde{X}_B^\dagger$ 的条件是(4.11)中条件的转置，从而得到以下关系：

$$\{v \in X_D : \vec{v}_{I,K} = T_K \vec{v}_{B,K} \ \forall K \in \mathcal{T}\} \subseteq \tilde{X}_B^\dagger,$$

其中

$$T_K := -\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{II}^T & G_{\iota I}^T \\ G_{\iota I} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{BI}^T \\ G_{\iota B} \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

注意， T_K 其定义良好，因为 (4.12) 中出现的矩阵是（可逆）矩阵 (4.3)的转置。综上，我们有

LEMMA 4.2. $\tilde{X}_B = \{v \in X_D :\ \vec{v}_{I,\ K} = S_K \vec{v}_{B,\ K} \ \forall K \in \mathcal{T}\}$ 以及 $\tilde{X}_B^\dagger = \{v \in X_D :\ \vec{v}_{I,\ K} = T_K \vec{v}_{B,\ K} \ \forall K \in \mathcal{T}\}$。

证明。令 $v \in \tilde{X}_B$，并按规则 $w := \vec{\Phi}_B^T \vec{v}_B + \vec{\Phi}_I^T \vec{w}_I$ 定义 $w \in X_D$，其中 $\tilde{\vec{w}}_{I,K} := S_K \vec{v}_{B,K}$ 对所有 $K \in \mathcal{T}$ 均成立。由 (4.9)， $w \in X_B$。函数 $X_D \ni e := v - w = \vec{\Phi}_I^T(\vec{v}_I - \vec{w}_I)$ 因而满足 $e \in \tilde{X}_B$，这是由线性性以及 $e \in X_I$ 得出的，因为 e 的边界自由度恒为零。根据 $\tilde{X}_B$ (4.6) 定义中的第二个条件，$\|$ 散度 $e\|^2 = 0$，因此 $e \in N_I$。~定义中的第一个条件给出 X_B $a(e,e) = 0$，因此由 (2.5) 可得 $e \equiv 0$。于是，$\tilde{v} = w$，且 $X_B = \{v \in X_D :\ \vec{v}_{I,K} = S_K \vec{v}_{B,K} \ \forall K \in \mathcal{T}\}$。类似的论证可得 $\tilde{X}_B^\dagger = \{v \in X_D : \vec{v}_{I,K} = T_K \vec{v}_{B,K} \ \forall K \in \mathcal{T}\}$。 ∎

引理 4.2 证实了如下预期：空间 $\tilde{X}_B$ 和 $\tilde{X}_B^\dagger$ 与单元边界相关联：也就是说，属于 $\tilde{X}_B$ 或 $\tilde{X}_B^\dagger$ 的函数的内部自由度由其边界自由度唯一确定，而这又意味着 $X_D = X_I \oplus \tilde{X}_B = X_I \oplus \tilde{X}_B^\dagger$。

我们记录这一结果，以及空间的一些有用性质 ~ X_B 和 散度 X_B，这些性质很快就会用到：

THEOREM 4.3. 有

$$X_D = X_I \oplus \tilde{X}_B \quad and \quad \operatorname{div} X_D = \operatorname{div} X_I \oplus \operatorname{div} \tilde{X}_B. \tag{4.13}$$

~ ~此外， $X_B \times$ 散度 X_B 这一对满足 inf-sup 条件：

$$\frac{\alpha\beta_X}{M+\alpha}\|\tilde{r}\| \le \sup_{0 \ne \tilde{v} \in \tilde{X}_B} \frac{(\operatorname{div}\tilde{v}, \tilde{r})}{\|\tilde{v}\|_1} \qquad \forall \tilde{r} \in \operatorname{div} \tilde{X}_B, \tag{4.14}$$

其中 $M > 0$ (2.4)， $\alpha > 0$ (2.5)，以及 $\beta_X > 0$ (2.8)。方程 (4.13) 和 (4.14) 在将 $\tilde{X}_B$ 替换为 $\tilde{X}_B^\dagger$ 后也成立。

证明。如上所述，分解 $X_D = X_I \oplus \tilde{X}_B = X_I \oplus \tilde{X}_B^\dagger$ ~由此得出 引理 4.2。因此，散度 $X_D =$ 散度 $X_I \oplus$ 散度 X_B。

~设 $\tilde{r} \in$ div X_B 已知。根据 (2.8)，存在 $w \in X_D$ 使得 div $w = \tilde{r}$ 且 $\|w\|_1 \le \beta_X^{-1}\|\tilde{r}\|$。由 (2.4) 和 (2.5)，根据 Lax-Milgram~ 引理，存在 $z_I \in N_I$ 使得对于所有满足 $\|z\|_1 \le M\alpha^{-1}\|w\|_1$ 的 $n \in N_I$，均有$a(z,n) = a(w,n)$。函数 $\tilde{v} := w - z$ 因而满足 div $\tilde{v} = \tilde{r}$、 $\tilde{v} \in X_B$，以及 $\|v\|_1 \le (M+\alpha)/(\alpha\beta_X)\|\tilde{r}\|$。给定 $\tilde{q} \in$ div $\tilde{X}_B^\dagger$，可类似地构造一个满足 div $v^\dagger = \tilde{q}$ 且$\|v^\dagger\|_1 \le (M+\alpha)/(\alpha\beta_X)\|\tilde{q}\|$ 的函数 $v^\dagger \in \tilde{X}_B^\dagger$。 ∎

4.3. 静态凝聚迭代罚方法。与(3.7) 和(3.8)类似，分解(4.13)将(2.7) 的解分解为边界分量和内部组件。不过，这次有一个关键区别：内部组件 $\{\boldsymbol{u}_K\}$ 定义于(4.16)中，并未出现在确定边界分量(4.15) 的系统数据中 $\tilde{\boldsymbol{u}}$:

LEMMA 4.4. 方程 (2.7)的解可写成如下形式

$$\boldsymbol{u}_X := \tilde{\boldsymbol{u}} + \sum_{K\in\mathcal{T}} \boldsymbol{u}_K \quad \textit{and} \quad q_X := \tilde{q} + \sum_{K\in\mathcal{T}} q_K,$$

其中：

1. $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{q}) \in \boldsymbol{X}_B \times$ 散度 $\boldsymbol{X}_B$ 满足

$$a(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) - (\tilde{q}, \operatorname{div}\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B^{\dagger}, \tag{4.15a}$$

$$-(r, \operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{u}}) = 0 \qquad \forall r \in \text{散度 } \tilde{\boldsymbol{X}}_B^{\dagger}. \tag{4.15b}$$

2. 对每个 $K \in \mathcal{T}$，$(\boldsymbol{u}_K, q_K) \in \boldsymbol{X}_I(K) \times$ 散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$ 满足

$$a_K(\boldsymbol{u}_K, \boldsymbol{v}) - (q_K, \operatorname{div}\boldsymbol{v})_K = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_K - a_K(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_I(K), \tag{4.16a}$$

$$-(r, \operatorname{div}\boldsymbol{u}_K)_K = 0 \qquad \forall r \in \operatorname{div}\boldsymbol{X}_I(K). \tag{4.16b}$$

此外，系统(4.15) 和(4.16)均有唯一解。

引理 4.4 的证明见第 6.1 小节。该引理表明，方程 (2.7) 的有限元解 $(\boldsymbol{u}_X, q_X)$ 可通过以下步骤求得：首先求解定义在边界空间 $\boldsymbol{X}_B \times$ 散度 $\boldsymbol{X}_B$ (4.15) 上的全局 Stokes 系统，然后求解定义在局部内部空间 $\boldsymbol{X}_I(K) \times$散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$ (4.16) 上的解耦局部 Stokes 系统。关键在于，(4.15) 中决定边界未知量 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 的数据独立于内部问题 (4.16)。换言之，现在可以独立于 (4.16) 求解决定边界自由度的系统 (4.15)。与之相反，之前基于 $\boldsymbol{X}_B$ 进行静态凝聚时，情况并非如此。

系统(4.15) 和(4.16)现在都具有Stokes 问题的形式，其定义在空间 $\boldsymbol{X}_B \times$散度 $\boldsymbol{X}_B$和 $\boldsymbol{X}_I(K) \times$散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$ 上。特别是，构造 $\operatorname{div}\boldsymbol{X}_B$ 的基 $\boldsymbol{X}_D$会遇到前文讨论 $\operatorname{div}\boldsymbol{X}_D$时提到的所有困难，这正是我们最初考虑采用标准迭代罚方法的原因。不过，同理，我们可以使用标准迭代罚方法求解全局系统(4.15) ，关键区别在于迭代过程中无需进行静态凝聚。相反，在获得边界分量 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 后，只需通过求解(4.16)，即可计算一次内部自由度。

在空间 (4.16) 上求解内部问题 $\boldsymbol{X}_I(K)\times$散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$ 的问题仍然存在。当然，可以采用迭代罚方法求解该问题，但这将需要对规模为 $\mathcal{O}(p^d$ 的问题进行迭代，而这正是我们力求避免的。幸运的是，如 [23, 引理 2。5]所示，在 $d = 2$ 情形下，局部内部压力空间可以明确刻画如下：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{X}_I(K) = \{r \in \mathcal{P}_{p-1}(K) \cap L_0^2(K) : r(\boldsymbol{a}) = 0 \text{ for all vertices } \boldsymbol{a} \text{ of } K\}. \tag{4.17}$$

同理，在 $d = 3$ 的情况下，有 [17, 定理 4.2]:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{X}_I(K) = \{q \in \mathcal{P}_{p-1}(K) \cap L_0^2(K) : q \text{ vanishes along element edges}\}.$$

这些刻画意味着，可以通过标准方法构造 $\operatorname{div} \boldsymbol{X}_I(K)$ 的基；例如，参见 第 5.1 小节 ，其中针对 $d=2$ 的情况，给出了使用伯恩斯坦多项式构造基的方法。因此，可以直接逐单元组装并求逆局部系统 (4.16)。

整体方案称为静态凝聚迭代惩罚（SCIP）方法，其总结见 算法 4.1。关键在于，求解内部自由度现在发生在 之外 `for` 循环中，见 算法 4.1；这意味着对 (4.15) 应用标准迭代罚方法时，每次迭代只需对一个含有 $\mathcal{O}(|\mathcal{T}|p^{d-1})$ 个未知数的线性系统求逆，而对 (2.7)应用标准迭代罚方法时，则需要对一个含有 $\mathcal{O}(|\mathcal{T}|p^{d})$ 个未知数的系统求逆。

此外，关于 $\boldsymbol{X}_B \times$ 散度$\boldsymbol{X}_B$ (4.14) 的 inf-sup 条件给出了定理 3.1的如下对应结果：

THEOREM 4.5. 设 $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{q}) \in \boldsymbol{X}_B \times$散度 $\boldsymbol{X}_B$是 (4.15) 的解，且 $(\tilde{\boldsymbol{u}}^n, \tilde{\boldsymbol{w}}^n)$，$n \in \mathbb{N}$ 由 算法 4.1给出。则有

$$\max\left\{\|\tilde{\boldsymbol{u}}-\tilde{\boldsymbol{u}}^n\|_1, \left(\frac{M(M+\alpha)^3}{\alpha^3\beta_X^2}+\frac{\sqrt{d}\lambda(M+\alpha)}{\alpha\beta_X}\right)^{-1}\|\tilde{q}-\operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{w}}^n\|\right\} \leq \frac{(M+\alpha)^2}{\alpha^2\beta_X}\|\operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{u}}^n\|, \tag{4.18}$$

其中 $M>0$ (2.4)、 $\alpha>0$ (2.5)以及 $\beta_X>0$ (2.8)。此外，

$$\|\operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{u}}^n\| \leq \sqrt{d}\left[\frac{M(M+\alpha)^4}{\alpha^4\beta_X^2\lambda}\right]^n\|\tilde{\boldsymbol{u}}-\tilde{\boldsymbol{u}}^0\|_1. \tag{4.19}$$

式 (4.15) 中出现伴随空间 $\tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$ 和散度 $\tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$，意味着定理 4.5 并非标准迭代罚方法相关结果（例如 [6, 定理 13.1.19 和定理 13.2.2], ）的直接推论，因此我们在第 7 节给出一个简短证明。为了获得几何收敛率，参数 λ 必须选取为满足 $\lambda \geq M(M+\alpha)^2(\alpha\beta_X)^{-2}$，这适用于标准迭代罚方法算法 3.1；而对于算法 4.1， λ必须选取得稍大一些，使其满足 $\lambda \geq M(M+\alpha)^4(\alpha^2\beta_X)^{-2}$。

4.4. SCIP 的矩阵形式。为了便于实现 SCIP 方法，我们现在推导 算法 4.1 的矩阵形式。

刚度矩阵和载荷向量。 我们首先考虑 算法 4.1第 2 行中的双线性形式和载荷向量。设 $\boldsymbol{E}_K$ 和 $\boldsymbol{G}_K$ 按照 第 4.2 小节中的方式定义并分块，并设 $\boldsymbol{C}_K$ 对应于形式（散度 $\cdot$，散度 $\cdot$）$_K$，并以类似方式进行分块，其中我们使用上标“（K）”来明确表示矩阵和向量子块对单元 K的依赖关系：

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{u}, \operatorname{div}\boldsymbol{v})_K = \begin{bmatrix}\vec{v}_{B,K}\\ \vec{v}_{I,K}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{BB}^{(K)} & \boldsymbol{C}_{BI}^{(K)}\\ \boldsymbol{C}_{IB}^{(K)} & \boldsymbol{C}_{II}^{(K)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{u}_{B,K}\\ \vec{u}_{I,K}\end{bmatrix} \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D.$$

同样，令 L_K 表示满足与数据$\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$对应的单元载荷向量：

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_K + (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{v})_{\Gamma_N \cap \partial K} = L_K(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix}\vec{v}_{B,K}\\ \vec{v}_{I,K}\end{bmatrix}^T \vec{L}_K = \begin{bmatrix}\vec{v}_{B,K}\\ \vec{v}_{I,K}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\vec{L}_B^{(K)}\\ \vec{L}_I^{(K)}\end{bmatrix} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D.$$

算法 4.1 用于 (2.7) 的静态凝聚迭代罚方法 (SCIP)

要求： $\tilde{\boldsymbol{w}}^0 := \boldsymbol{0}$, $\lambda > 0$ 对于 $n = 0, 1, \ldots,$ 执行 求出满足条件的 $\tilde{\boldsymbol{u}}^n \in \boldsymbol{X}_B$ 如果满足停止准则，则 跳出 结束 if $\tilde{\boldsymbol{w}}^{n+1} := \tilde{\boldsymbol{w}}^n - \lambda\tilde{\boldsymbol{u}}^n$ 结束 for 对于每个 $K \in \mathcal{T}$，求出 $(\boldsymbol{u}_K, q_K) \in \boldsymbol{X}_I(K) \times$ 散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$，使得

$$
\begin{aligned}
a_K(\boldsymbol{u}_K, \boldsymbol{v}) - (q_K, \operatorname{div}\boldsymbol{v})_K &= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_K - a_K(\tilde{\boldsymbol{u}}^n, \boldsymbol{v}) \qquad && \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_I(K), \\
-(r, \operatorname{div}\boldsymbol{u}_K)_K &= 0 && \forall r \in \operatorname{div}\boldsymbol{X}_I(K).
\end{aligned}
$$

返回 $\boldsymbol{u}_X^n := \tilde{\boldsymbol{u}}^n + \sum_{K\in\mathcal{T}} \boldsymbol{u}_K$, $q_X^n :=$ 散度 $\tilde{\boldsymbol{w}}^n + \sum_{K\in\mathcal{T}} q_K$

有了单元矩阵和荷载向量后，我们定义

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{E}}_K &:= \boldsymbol{E}_{BB}^{(K)} + \boldsymbol{E}_{BI}^{(K)}\boldsymbol{S}_K + \boldsymbol{T}_K^T\boldsymbol{E}_{IB}^{(K)} + \boldsymbol{T}_K^T\boldsymbol{E}_{II}^{(K)}\boldsymbol{S}_K, \\
\tilde{\boldsymbol{C}}_K &:= \boldsymbol{C}_{BB}^{(K)} + \boldsymbol{C}_{BI}^{(K)}\boldsymbol{S}_K + \boldsymbol{T}_K^T\boldsymbol{C}_{IB}^{(K)} + \boldsymbol{T}_K^T\boldsymbol{C}_{II}^{(K)}\boldsymbol{S}_K, \\
\tilde{\boldsymbol{A}}_K &:= \tilde{\boldsymbol{E}}_K + \lambda\tilde{\boldsymbol{C}}_K, \\
\tilde{\vec{L}}_K &:= \vec{L}_B^{(K)} + \boldsymbol{T}_K^T\vec{L}_I^{(K)},
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{S}_K$ 和 $\boldsymbol{T}_K$ 定义于 (4.10)和 (4.12) 借助 引理 6.2，对于所有 $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B$ 和 $\tilde{\boldsymbol{v}} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$，我们有以下关系：

$$
a_{\lambda,K}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{v}}) = \vec{v}_{B,K}^T\tilde{\boldsymbol{A}}_K\vec{u}_{B,K}, \quad L_K(\tilde{\boldsymbol{v}}) = \vec{v}_{B,K}^T\tilde{\vec{L}}_K, \quad (\operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{u}}, \operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{v}})_K = \vec{v}_{B,K}^T\tilde{\boldsymbol{C}}_K\vec{u}_{B,K}.
$$

局部矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}_K$ 和 $\tilde{\boldsymbol{C}}_K$ 以及载荷向量 $\tilde{L}_K$ 以常规方式进行子组装，从而得到全局矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{C}}$ 以及全局载荷向量 $\tilde{L}$。给定 $\tilde{\boldsymbol{w}}^n \in \boldsymbol{X}_B$，算法 4.1 的第 2 行对应于算法 4.2 的第 2 行。我们再次强调，算法 4.2 的第 2 行包括在每次迭代中求逆一个含有 $\mathcal{O}(|\mathcal{T}|p^{d-1}$ 个未知数的方程组，而标准迭代罚方法的第 2–3 行则包括在每次迭代中求逆一个含有 $\mathcal{O}(|\mathcal{T}|p^d$ 个未知数的方程组。

局部 Stokes 系统。 对于每个 $K \in \mathcal{T}$，第 8 行中的逐单元系统算法 4.1 对应于算法 4.2的第 8 行。相关系统可以使用直接求解器并行求解。特别需要注意的是，在每次迭代中，内部自由度都不会更新。

解的表示。 算法 4.1 第 9 行的最后一步要求将解 $\boldsymbol{u}_X^n$ 和 q_X^n 分别表示为关于某些基的形式。为简单起见，我们给出每个单元 $K \in \mathcal{T}$ 上的自由度。对于速度 $\boldsymbol{u}_X^n$，使用原始基来表示较为方便

，该基用于 $\boldsymbol{X}_D$ 限制在 K上。根据引理 4.2，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_X^n|_K &= \vec{\Phi}_{B,K}^T \vec{u}_{B,K}^n + \vec{\Phi}_{I,K}^T \left(\vec{u}_K + \boldsymbol{S}_K \vec{u}_{B,K}^n\right),\\ \tilde{\boldsymbol{w}}^n|_K &= \vec{\Phi}_{B,K}^T \vec{w}_{B,K}^n + \vec{\Phi}_{I,K}^T \boldsymbol{S}_K \vec{w}_{B,K}^n.\end{aligned}$$

对于压力 q，我们取 $\{\psi_{B,K}\} \subset \mathcal{P}_{p-1}(K)$ 为 $\dim\ \mathcal{P}_{p-1}(K)\ -\dim\ \operatorname{div}\ \boldsymbol{X}_I(K)$ 个函数的任意线性无关集，使得 $\{\psi_{\iota,K}\} \cup \{\psi_{B,K}\}$ 是 $\mathcal{P}_{p-1}(K)$ 的一个基。于是，存在一个矩阵 $\boldsymbol{H}_K$ 使得

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}|_K = \begin{bmatrix}\psi_{B,K}\\ \psi_{\iota,K}\end{bmatrix}^T \boldsymbol{H}_K \vec{v}_K \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D,$$

因此，算法 4.2 的第 9 行对应于算法 4.1的第 9 行。

算法 4.2 SCIP 方法的矩阵形式

Require: $\vec{w}_B^0 = \vec{0}$, $\lambda > 0$

1: **for** $n = 0, 1, \ldots,$ **do**
2: Solve $\tilde{\boldsymbol{A}} \vec{u}_B^n = \vec{\tilde{L}} + \tilde{\boldsymbol{C}} \vec{w}_B^n$
3: **if** stopping criteria is met **then**
4: **break**
5: **end if**
6: $\vec{w}_B^{n+1} := \vec{w}_B^n - \lambda \vec{u}_B^n$
7: **end for**
8: For each $K \in \mathcal{T}$, solve $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{II}^{(K)} & (\boldsymbol{G}_{\iota I}^{(K)})^T\\ \boldsymbol{G}_{\iota I}^{(K)} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\vec{u}_K\\ \vec{q}_K\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{L}_I^{(K)} - \boldsymbol{E}_{IB}^{(K)} \vec{u}_{B,K}^n\\ \vec{0}\end{bmatrix}$.
9: **return** $\begin{bmatrix}\vec{u}_{B,K}^n\\ \vec{u}_K + \boldsymbol{S}_K \vec{u}_{B,K}^n\end{bmatrix}$ and $\boldsymbol{H}_K \begin{bmatrix}\vec{w}_{B,K}^n\\ \boldsymbol{S}_K \vec{w}_{B,K}^n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\vec{0}\\ \vec{q}_K\end{bmatrix}$, $K \in \mathcal{T}$.

4.5. 推广到其他有限元。 上述讨论可直接推广到任意协调有限元空间 $\boldsymbol{X}_D$，使得 $\boldsymbol{X}_I$ 由下式定义的(3.3) 非空。特别地，本节、第 6 节以及第 7 节中的所有结果均成立，且证明完全相同，其中 inf-sup 常数 β_X (2.8) 现在对应于对 $\boldsymbol{X}_D \times \operatorname{div} \boldsymbol{X}_D$，其可能取决于 h 和 p。当然，实现 SCIP 方法需要对空间 $\operatorname{div}\ \boldsymbol{X}_I(K)$ 进行明确刻画，而在所有情况下，这种刻画可能并不为人所知或并不可用。

5. 数值算例。现在我们给出两个数值算例，展示 SCIP 算法应用于多项式次数为 $p \geq 4$ 的二维 Scott-Vogelius 元时的收敛性质。如定理 A.1所示，这些单元关于网格尺寸 h 和多项式次数 p 均具有一致的 inf-sup 稳定性，并且在一大类网格上具有最优逼近性质。因此，估计式 (4.18)保证 SCIP 方法（在精确算术下）的收敛性不会因网格加密或多项式次数提高而降低。特别是，这种单元的选择使我们能够独立于单元稳定性相关问题来考察 SCIP 的性能。

5.1. 实现细节。我们首先详细说明如何利用伯恩斯坦基为 $\operatorname{div}\ \boldsymbol{X}_I(K)$ 构造一组基，并在 [4, §6.1.1] 中概述该构造。

令 $K \in \mathcal{T}$，并令 $\{B_\alpha^k\}_{\alpha\in\mathcal{I}^k}$ 表示定义在 K 上的伯恩斯坦多项式：

$$B_\alpha^k = \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\lambda_3^{\alpha_3},$$

其中 $\mathcal{I}^k := \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^3 : \ |\alpha| = k\}$ 和 $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$ 是 K上的重心坐标。集合 $\{B_\alpha^k\}_{\alpha\in\mathcal{I}_0^k}$，其中 $\mathcal{I}_0^k := \{\alpha \in \mathcal{I} : \ \alpha_i < k、\ 1 \le i \le 3\}$，由所有在 K的顶点处消失的 k 次多项式组成。固定任意一个 $\gamma \in \mathcal{I}_0^{p-1}$；由于所有伯恩斯坦多项式具有相同的平均值，根据（4.17），集合 $\{B_\alpha^{p-1} - B_\gamma^{p-1}: \ \alpha \in \mathcal{I}_0^{p-1} \setminus \{\gamma\}\}$ 是 div $\boldsymbol{X}_I(K)$ 的一个基。由于我们同样对 X_D 使用伯恩斯坦基，因此可以使用 [1] 中的算法，在 $\mathcal{O}(p^4)$ 次运算中计算单元矩阵 $\boldsymbol{E}_K$、$\boldsymbol{G}_K$和 $\boldsymbol{C}_K$，并在 $\mathcal{O}(p^3)$ 次运算中计算单元载荷向量 $\vec{L}_K$。

为确保不同流动问题之间的一致性，我们对 Stokes 矩阵求逆 [9]，而所有局部单元矩阵均使用 Eigen 的 `FullPivLU`求解器求逆。

5.2. Kovasznay 流。我们首先考虑矩形区域上的 Oseen 流 (2.6)，其区域为 $\Omega = (-0.5, 2) \times (-0.5, 1.5)$，黏度为 $\nu = 10^{-1}$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$，且

$$\boldsymbol{w}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 - e^{\kappa x}\cos(2\pi y) \\ \frac{\kappa}{2\pi}e^{\kappa x}\sin(2\pi y) \end{bmatrix},$$

其中 $\kappa = \frac{1}{2\nu} - \sqrt{\frac{1}{4\nu^2} + 4\pi^2}$。此外，我们在 Γ 上施加 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$。该问题的精确解最初由 Kovasznay[12] 在 Navier–Stokes 流的背景下推导，表达式为

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \boldsymbol{w}(x,y) \quad \text{and} \quad q(x,y) = -\frac{1}{2}e^{2\kappa x} - \bar{q}, \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{5.1}$$

其中 $\bar{q}$ 是 $-\frac{1}{2}e^{2\kappa x}$ 在 Ω 上的平均值。

我们首先使用 图 2b 中的 4x4 交叉网格，考察 SCIP 的性能。对于 $p \in \{4, 7, 10, 13\}$、$\lambda \in \{10^2, 10^3, 10^4\}$ 和 $0 \le n \le 8$，我们在 n 步后终止 SCIP，并展示相对速度误差 $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_X^n\|_1/\|\boldsymbol{u}\|_1$ 和相对压力误差 $\|q - q_X^n\|/\|q\|$，见 图 1。相对误差与定理 4.5一致。误差持续减小，直到 SCIP 方法中的误差小于离散误差，此时误差趋于平稳。此外，与速度误差相比，压力误差通常还需要多进行一到两次 SCIP 迭代才会趋于平稳。

图 2a 以对数-线性尺度展示了速度误差和压力误差随多项式次数的变化，因此直线对应于预期的指数收敛。这一预期适用于 p，因为精确解 (5.1) 是解析函数 [19]。请注意，虽然我们确实观察到 $p \in \{1, \ldots, 10\}$ 的指数收敛，但当 p 取较大值时，精度会有所损失，我们将其归因于伯恩斯坦基的条件数。

SCIP 近似 $\|$散度 $\boldsymbol{u}_X^n\|$ 是另一个重要量。根据定理 4.5，随着迭代次数增加，该量会以指数速度收敛。图 3 展示了图 1 中相同 n 和 p 取值下的 $\|$散度 $\boldsymbol{u}_X^n\|$；与式 (4.19) 一致，$\|$散度 $\boldsymbol{u}_X^n\|$，因此$\|$散度 $\tilde{\boldsymbol{u}}^n\|$，会随 n以指数速度衰减，且 λ取值越大，衰减速度越快。当 $p > 10$时，我们观察到结果有所退化，这同样归因于伯恩斯坦基的舍入误差问题。使用 $p = 10$ 和 $\lambda = 10^3$ 进行 8 次 SCIP 迭代后得到的近似结果见图 2b。

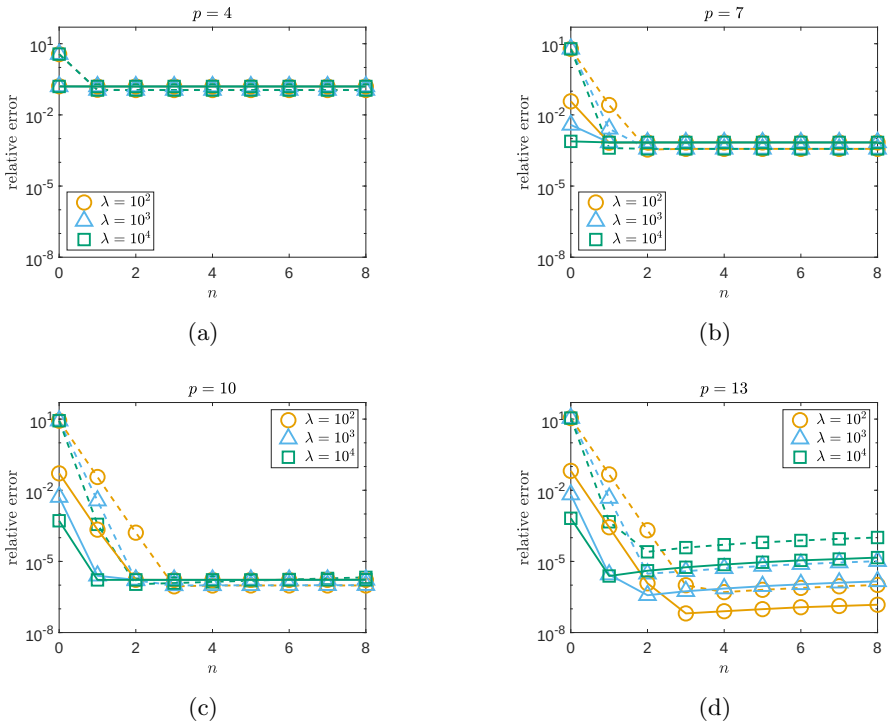


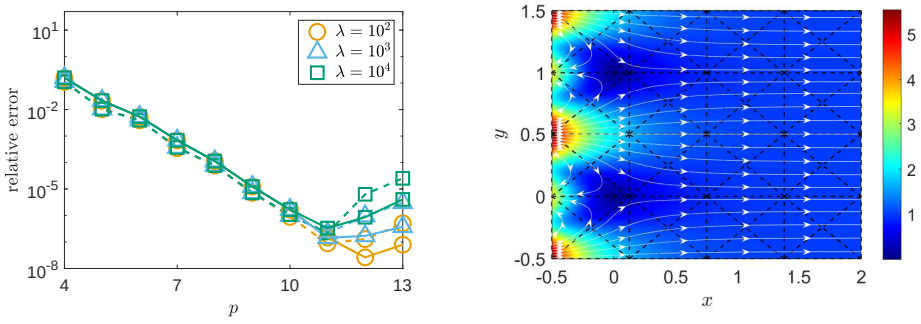
图 1：采用 SCIP 方法求得的解 $(\boldsymbol{u}_X^n, p_X^n)$ 的相对速度误差（实线）和压力误差（虚线），其中 (a) $p = 4$、(b) $p = 7$、(c) $p = 10$ 和 (d) $p = 13$ 应用于满足 $\nu = 10^{-1}$ 的 Kovasznay 流动问题。

5.3. Moffatt 涡旋。现在我们考虑一个由 Moffatt 引起的 Stokes 流示例[14], , 这是高阶方法中常见的基准测试，因为它包含多个尺度上的特征。设 Ω 为楔形区域，其固定网格如图 4a 所示，并采用以下边界条件：

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \begin{bmatrix} 1-x^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad -1 \le x \le 1, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ on } \Gamma \setminus (-1,1) \times \{0\}.$$

速度包含无限的涡旋级联，每个涡旋都比前一个弱约 400 倍；而压力则包含无限级的奇点，从 (±1,0) 开始。这两个特征结合起来，使其成为一个颇具挑战性的测试问题。

采用 SCIP 方法迭代 8 次后得到的数值解，其中 $p = 10$和 $\lambda = 10^3$ 位于 图 4a 所示计算网格上，满足 $\|$散度 $\boldsymbol{u}_X^n\| = 6.8\text{e-}11$，结果如 图 5所示。可以看到，该方法很好地捕捉了压力分布以及三个涡旋。在 图 6中，我们放大数值解后发现，还解析出了另外两个涡旋，其 $|\boldsymbol{u}_X^n|$ 量级为 10^{-11}。因此，该方法能够解析所有量级达到 $\|$ 散度 $\boldsymbol{u}_X^n\|$ 的涡旋，并捕捉压力分布，而无需使用关于解的先验知识。



(a) (b)

图 2：带有 $\nu = 10^{-1}$ 的 Kovasznay 流动问题的 SCIP 近似。(a) 对解 $(\boldsymbol{u}_X^n, p_X^n)$ 进行 8 次迭代后，最小相对速度误差（实线）和压力误差（虚线）；(b) 进行 8 次迭代后，$p = 10$ 和$\lambda = 10^3$ 近似对应的 4x4 交叉网格（虚线）和速度流线（实线），背景颜色为 $|\boldsymbol{u}_X^n|$。

6. Stokes 延拓算子。给定一个函数 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X} := X \times X$ 和 $K \in \mathcal{T}$，引理 4.1 表明存在唯一的 $(\boldsymbol{u}_{S,K}, q_{S,K}) \in \mathrm{P}_p(K) \times$ 散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$，满足

$$a_K(\boldsymbol{u}_{S,K}, \boldsymbol{v}) - (q_{S,K}, \operatorname{div} \boldsymbol{v})_K = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_I(K), \tag{6.1a}$$

$$-(r, \operatorname{div} \boldsymbol{u}_{S,K})_K = 0 \qquad \forall r \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_I(K), \tag{6.1b}$$

$$(\boldsymbol{u}_{S,K} - \boldsymbol{u})|_{\partial K} = \boldsymbol{0}. \tag{6.1c}$$

我们按以下规则定义离散 Stokes 延拓算子 $\mathbb{S}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ 和 $\mathbb{Q}: \boldsymbol{X} \to$ 散度 $\boldsymbol{X}_I$：$\mathbb{S}\boldsymbol{u}|_K := \boldsymbol{u}_{S,K}$ 以及 $\mathbb{Q}\boldsymbol{u}|_K = q_{S,K}$，对所有 $K \in \mathcal{T}$ 均成立。类似地，存在$\boldsymbol{u}_{S,K}^\dagger \in \mathrm{P}_p(K)$ 和 $q_{S,K}^\dagger \in$ 散度 $\boldsymbol{X}_I(K)$，满足

$$a_K(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_{S,K}^\dagger) - (q_{S,K}^\dagger, \operatorname{div} \boldsymbol{v})_K = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_I(K), \tag{6.2}$$

连同 (6.1b) 和 (6.1c)。我们类似地根据 $\boldsymbol{u}_{S,K}^\dagger$ 和 $q_{S,K}^\dagger$ 定义“伴随” Stokes 延拓算子 $\mathbb{S}^\dagger$和 $\mathbb{Q}^\dagger$。

下一个结果将精确说明上述算子在何种意义下是“伴随算子”。令 $s(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)$ 表示 Stokes 双线性型

$$s(\boldsymbol{u}, q; \boldsymbol{v}, r) := a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (q, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) - (r, \operatorname{div} \boldsymbol{u}) \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X},\ \forall q, r \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}.$$

此外，令 $\Pi_I: L^2(\Omega) \to \operatorname{div} \boldsymbol{X}_I$ 表示通常的 $L^2(\Omega)$ 到 $\operatorname{div} \boldsymbol{X}_I$ 上的投影算子：

$$(\Pi_I q, r) = (q, r) \qquad \forall q \in L^2(\Omega),\ \forall r \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_I,$$

以及 $\Pi_I^\perp := I - \Pi_I$。那么，我们有如下结果：

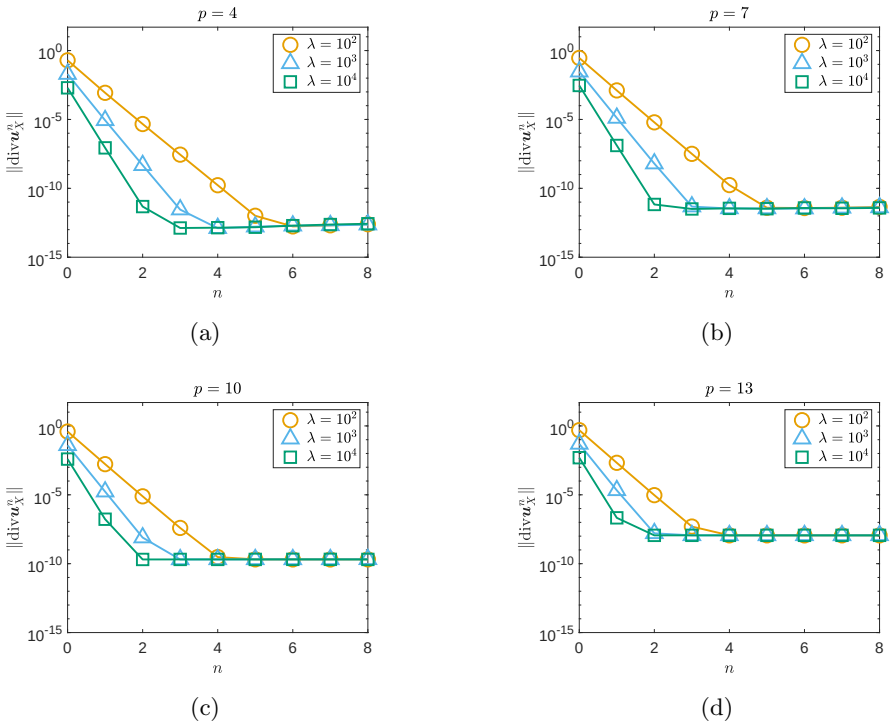


图 3：采用 SCIP 方法求解 Kovasznay 流动问题（$\nu = 10^{-1}$）所得的 $\|$散度 $\boldsymbol{u}_X^n\|$值，其中 (a) $p = 4$、(b) $p = 7$、(c) $p = 10$、(d) $p = 13$。

LEMMA 6.1. 对于所有 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}$ 和 q、$r \in$，若散度 $\boldsymbol{X}$，则有

$$s(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \mathbb{Q}\boldsymbol{u} + \Pi_I^\perp q; \boldsymbol{v}, r) = s(\boldsymbol{u}, q; \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{v}, \mathbb{Q}^\dagger \boldsymbol{v} + \Pi_I^\perp r) \tag{6.3}$$

and

$$\mathrm{div}\, \mathbb{S}\boldsymbol{u} = \mathrm{div}\, \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{u} = \Pi_I^\perp \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}. \tag{6.4}$$

证明。设 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}$给定。则，$\boldsymbol{u}_I := \boldsymbol{u} - \mathbb{S}\boldsymbol{u}$满足 $\boldsymbol{u}_I \in \boldsymbol{X}_I$由 (6.1c)，因此散度 $\mathbb{S}\boldsymbol{u} =$散度 $\boldsymbol{u} +$散度 $\boldsymbol{u}_I$。应用 $\Pi_I^\perp$可得

$$\mathrm{div}\, \mathbb{S}\boldsymbol{u} = \Pi_I^\perp \mathrm{div}\, \mathbb{S}\boldsymbol{u} = \Pi_I^\perp \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} + \Pi_I^\perp \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_I = \Pi_I^\perp \mathrm{div}\, \boldsymbol{u},$$

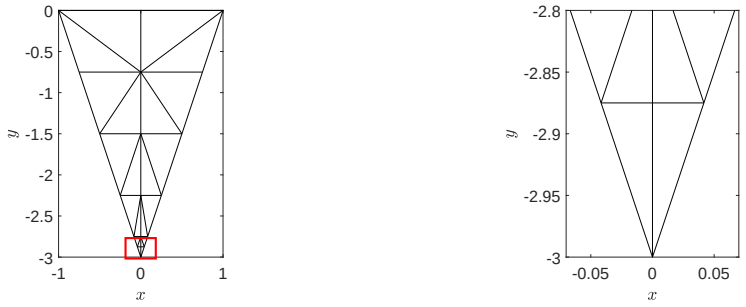
这里用到了 (6.1b) 以及 Π_I散度 $\boldsymbol{u}_I$ =散度 $\boldsymbol{u}_I$。类似的论证表明，散度 $\mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{u} = \Pi_I^\perp$散度 $\boldsymbol{u}$，且 (6.4) 得证。

现在设 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}$和 q，$r \in$散度 $\boldsymbol{X}$给定。由 (6.4)，有

$$\begin{aligned}(\Pi_I^\perp q, \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}) + (r, \mathrm{div}\, \mathbb{S}\boldsymbol{u}) &= (q, \Pi_I^\perp \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}) + (r, \Pi_I^\perp \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}) \\ &= (q, \mathrm{div}\, \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{v}) + (\Pi_I^\perp r, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}),\end{aligned}$$

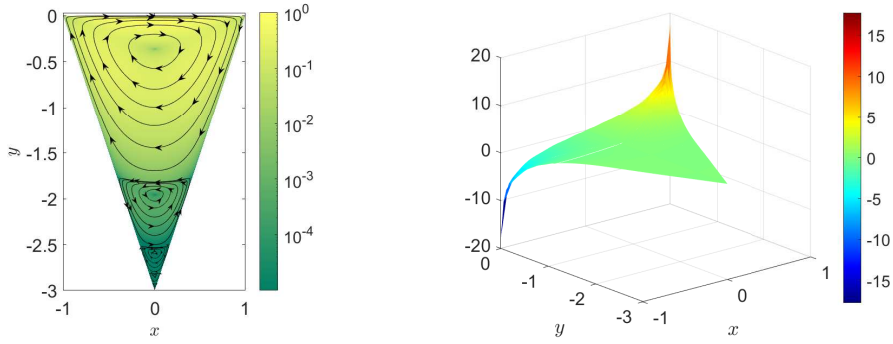
因此

$$s(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \mathbb{Q}\boldsymbol{u} + \Pi_I^\perp q; \boldsymbol{v}, r) = a(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (\mathbb{Q}\boldsymbol{u}, \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}) - (q, \mathrm{div}\, \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{v}) - (\Pi_I^\perp r, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}).$$



(a) (b)

图 4：(a) 由 22 个单元组成的计算网格；(b) Moffatt 问题的放大图。



(a) (b)

图 5： $p = 10$ 和 $\lambda = 10^3$条件下 Moffatt 问题的 SCIP 近似：(a) 以 $|\boldsymbol{u}|$ 为背景色的速度流线；(b) 压力。

由于 $\boldsymbol{v} - \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_I$ 根据(6.1c)，我们有

$$a(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (\mathbb{Q}\boldsymbol{u}, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) = a(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{v}) - (\mathbb{Q}\boldsymbol{u}, \operatorname{div} \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{v}) = a(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{v}),$$

其中我们使用了 (6.1a) 和 (6.1b)。对 $\boldsymbol{u} - \mathbb{S}\boldsymbol{u}$ 应用类似的论证可得

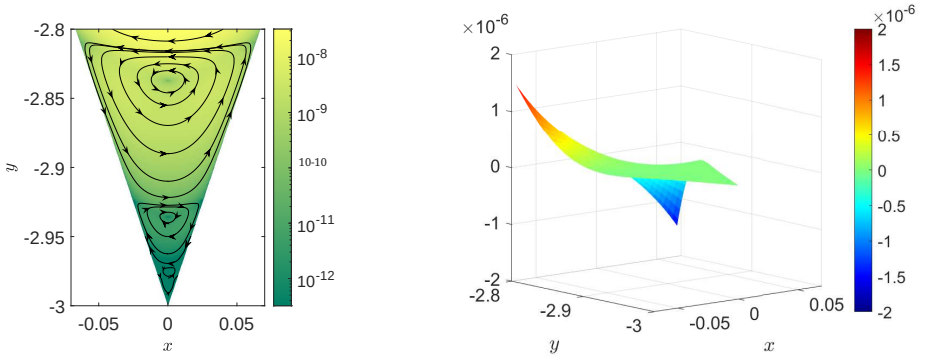
$$a(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u}, \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{v}) + (\mathbb{Q}^\dagger \boldsymbol{v}, \operatorname{div}(\mathbb{S}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u})) = a(\boldsymbol{u}, \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{v}) - (\mathbb{Q}^\dagger \boldsymbol{v}, \operatorname{div} \boldsymbol{u}),$$

其中我们使用了 (6.2)和 (6.1b)。 收集各项结果即可得到方程 (6.3)。 ˜下一个结果将 $\boldsymbol{X}_B$ 刻画为 $\boldsymbol{X}_D$ 在算子 $\mathbb{S}$ 下的不变子空间， $\tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$ 对于 $\mathbb{S}^\dagger$也同样成立：

LEMMA 6.2. 以下恒等式成立：

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_B = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D : \mathbb{S}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\} = \{\mathbb{S}\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D\}, \tag{6.5}$$

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D : \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\} = \{\mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D\}. \tag{6.6}$$



(a) (b)

图 6：放大显示 Moffatt 问题的 SCIP 近似中底部的涡旋，其中 $p = 10$ 和 $\lambda = 10^3$：(a) 速度流线，背景颜色为 $|\boldsymbol{u}|$ ；(b) 压力。

此外，

$$\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{X}}_B = \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger. \tag{6.7}$$

证明。令 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}_D$ 和 $K \in \mathcal{T}$。使用第 4 节的记号，$\boldsymbol{u}|_K$ 可表示为 $\boldsymbol{u}|_K = \vec{\Phi}^T_{B,K}\vec{u}_{B,K} + \vec{\Phi}^T_{I,K}\vec{u}_{I,K}$。根据(6.1)，$\mathbb{S}\boldsymbol{u}|_K = \vec{\Phi}^T_{B,K}\vec{u}_{B,K} + \vec{\Phi}^T_{I,K}\vec{u}^{\#}_{I,K}$，其中

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{II} & \boldsymbol{G}_{\iota I}^T \\ \boldsymbol{G}_{\iota I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}^{\#}_{I,K} \\ * \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{IB} \\ \boldsymbol{G}_{\iota B} \end{bmatrix} \vec{u}_{B,K}.$$

因此，$\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D : \ \mathbb{S}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\} = \{\mathbb{S}\boldsymbol{v} : \ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D\} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D : \ \vec{v}_{I,K} = \boldsymbol{S}_K \vec{v}_{B,K} \ \forall K \in \mathcal{T}\}$，由此(6.5) 可由引理 4.2推出。类似的论证可得(6.6)。 方程 (6.7) 现在可由(6.4)推出。 □

Lemma 6.3. 对所有 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}$，有

$$a(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \mathbb{S}\boldsymbol{v}) = a(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{v}) = a(\mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{u}, \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{v}). \tag{6.8}$$

证明。令 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}$。由 (6.1c) 和 (6.4)，$\mathbb{S}\boldsymbol{u} - \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{u}$，$\mathbb{S}\boldsymbol{v} - \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{N}_I$，因此

$$a(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \mathbb{S}\boldsymbol{v}) = a(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{v}) + a(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \mathbb{S}\boldsymbol{v} - \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{v}) = a(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{v})$$
$$a(\mathbb{S}\boldsymbol{u}, \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{v}) = a(\mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{u}, \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{v}) + a(\mathbb{S}\boldsymbol{u} - \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = a(\mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{u}, \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{v})$$

由 (6.1a) 取 $\boldsymbol{v} = \mathbb{S}\boldsymbol{v} - \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{v}$ 以及 (6.2) 取 $\boldsymbol{v} = \mathbb{S}\boldsymbol{u} - \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{u}$。 □

Lemma 6.4. 令 $\tilde{\boldsymbol{N}}_B := \{\boldsymbol{z} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B : \text{散度 } \boldsymbol{z} \equiv 0\}$ 且 $\tilde{\boldsymbol{N}}_B^\dagger := \{\boldsymbol{z} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger : \text{散度 } \boldsymbol{z} \equiv 0\}$。该变分问题

$$\boldsymbol{z} \in \tilde{\boldsymbol{N}}_B : \qquad a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{w}) \qquad \forall \boldsymbol{w} \in \tilde{\boldsymbol{N}}_B^\dagger \tag{6.9}$$

对于定义在 $\tilde{\boldsymbol{N}}_B^\dagger$ 上的所有线性泛函 F，均有唯一解。

证明。由于 (6.9) 等价于一个方形线性系统，因此只需证明唯一性。设 $\boldsymbol{z} \in \tilde{\boldsymbol{N}}_B$ 满足 (6.9) 且 $F \equiv 0$。取 $\boldsymbol{w} = \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{z}$ 并应用 (6.8) 可得 $a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{z}, \mathbb{S}^\dagger\boldsymbol{z}) = 0$。由椭圆性 (2.5)，$\boldsymbol{z} \equiv 0$。 □

6.1. 引理 引理 4.4 的证明。 由于 (4.15) 等价于一个方形线性系统，因此同样只需证明唯一性。设 $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{q})$ 满足 (4.15) 且在 ˜右端项上数据为零。方程 (4.15b) 和 (6.7) 意味着散度 $\tilde{\boldsymbol{u}} \equiv 0$，因此 $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{N}_B$。在 (4.15a) 中取 $\boldsymbol{v} \in \tilde{\boldsymbol{N}}_B^\dagger$ 可得 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 满足 (6.9) 且 $F \equiv 0$。由 引理 6.4， $\tilde{\boldsymbol{u}} \equiv 0$。

由 (6.7) 可知，存在 $\boldsymbol{v} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$ 使得散度 $\boldsymbol{v} = \tilde{q}$。将此选择代入 (4.15a)，得到 $\|\tilde{q}\|^2 = (\tilde{q}, \text{散度 } \boldsymbol{v}) = 0$，因此 $\tilde{q} \equiv 0$。由此，(4.15) 有唯一解。此外，对每个 $K \in \mathcal{T}$，根据引理 4.1，存在 $(\boldsymbol{u}_K, q_K) \in \boldsymbol{X}_I(K) \times \text{散度 } \boldsymbol{X}_I(K)$，满足 (4.16)。

由 (4.16)，函数 $\boldsymbol{u}_I := \sum_{K\in\mathcal{T}} \boldsymbol{u}_K$ 和 $q_I := \sum_{K\in\mathcal{T}} q_K$ 满足

$$a(\boldsymbol{u}_I, \boldsymbol{v}) - (q_I, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) - a(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_I, \tag{6.10a}$$

$$-(r, \operatorname{div} \boldsymbol{u}_I) = 0 \qquad \forall r \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_I. \tag{6.10b}$$

设 $\boldsymbol{u}_X := \tilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u}_I$ 和 $q_X := \tilde{q} + q_I$。 方程 (4.15b) 表示散度 $\tilde{\boldsymbol{u}} \equiv 0$，而关系 (6.10b) 表示散度 $\boldsymbol{u}_I \equiv 0$。因此，散度 $\boldsymbol{u}_X \equiv 0$，从而 (2.7b) 成立。

现在证明(2.7a) 成立。对于 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_I$，有

$$a(\boldsymbol{u}_X, \boldsymbol{v}) - (q_X, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) = a(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) + a(\boldsymbol{u}_I, \boldsymbol{v}) - (q_I, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}),$$

其中用到了(6.10a) 以及由$\tilde{q}$，散度 $\boldsymbol{v}) = 0$ 可知(4.6)。对于 $\boldsymbol{v} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$，有

$$a(\boldsymbol{u}_X, \boldsymbol{v}) - (q_X, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) = a(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v}) - (\tilde{q}, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) + a(\boldsymbol{u}_I, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) + a(\boldsymbol{u}_I, \boldsymbol{v}),$$

其中用到了(4.15a) 以及由q_I，散度 $\boldsymbol{v}) = 0$ 可知(4.6)。由于 $\boldsymbol{v} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$ 且散度 $\boldsymbol{u}_I \equiv 0$，$a(\boldsymbol{u}_I,\ \boldsymbol{v}) = 0$ 按定义成立。由分解，根据线性性可得方程 (2.7a) (4.13)，其中 $\tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$。

7. SCIP 的收敛性与迭代罚方法。我们先给出˜中与无散函数正交的函数 $\boldsymbol{X}_B$ 的一个估计：

LEMMA 7.1. 设 $\tilde{\boldsymbol{N}}_B^\perp := \{\boldsymbol{v} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B\colon\ a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) = 0\ \forall \boldsymbol{z} \in \tilde{\boldsymbol{N}}_B^\dagger\}$. 那么，

$$\|\boldsymbol{u}\|_1 \le \frac{(M+\alpha)^2}{\alpha^2 \beta_X} \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\| \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \tilde{\boldsymbol{N}}_B^\perp, \tag{7.1}$$

其中 $M > 0$ (2.4)、 $\alpha > 0$ (2.5)以及 $\beta_X > 0$ (2.8)。

证明。令 $\boldsymbol{u} \in \tilde{\boldsymbol{N}}_B^\perp$。根据定理 4.3 的证明，存在 $\boldsymbol{v} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B$，使得散度 $\boldsymbol{v}$ = 散度 $\boldsymbol{u}$ 且 $\|\boldsymbol{v}\|_1 \le (M+\alpha)(\alpha\beta_X)^{-1}\|$ 散度 $\boldsymbol{u}\|$。由于根据引理 6.4，(6.9) 有唯一解，因此存在 $\boldsymbol{z} \in \tilde{\boldsymbol{N}}_B$，使得对所有 $\boldsymbol{n} \in \tilde{\boldsymbol{N}}_B^\dagger$， $a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{n}) = a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$。由椭圆性 (2.5) 和 (6.8)，我们有

$$\alpha\|\boldsymbol{z}\|_1^2 \le a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{z}, \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{v}, \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) \le M\|\boldsymbol{v}\|_1 \|\boldsymbol{z}\|_1,$$

因为 $\mathbb{S}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$ 根据 引理 6.2。因此， $\|\boldsymbol{z}\|_1 \le M\alpha^{-1}\|\boldsymbol{v}\|_1$。

令 $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{v} - \boldsymbol{z}$。根据构造，散度 $\boldsymbol{w}$ = 散度 $\boldsymbol{u}$ 且 $\boldsymbol{w} \in \tilde{\boldsymbol{N}}_B^\perp$。此外，由三角不等式， $\boldsymbol{w}$ 满足 (7.1)。为完成证明，我们现在证明 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$。由于散度$(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) = 0$，存在 $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} \in \tilde{\boldsymbol{N}}_B^\perp$。根据 (6.8)，$0 = a(\boldsymbol{e}, \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{e}) = a(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}) \ge \alpha\|\boldsymbol{e}\|_1^2$。因此， $\boldsymbol{e} \equiv \boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$。 ∎

结合引理 7.1 ， 定理 4.5 的证明是对标准迭代罚方法收敛证明的推广（例如参见 [6, 第356页-359]）。

定理定理4.5的证明。令 $\boldsymbol{e}^n := \tilde{\boldsymbol{u}} - \tilde{\boldsymbol{u}}^n$ 且 $r^n := \tilde{q} - \tilde{q}^n$, $n \in \mathbb{N}_0$。将(4.20) 从 (4.15a) 中相减，对于 $n \in \mathbb{N}_0$,

$$a_\lambda(\boldsymbol{e}^n, \boldsymbol{v}) = (r^n, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_B^\dagger \tag{7.2}$$

且 $r^{n+1} = r^n + \lambda$散度 $\tilde{\boldsymbol{u}}^n = r^n - \lambda$散度 $\boldsymbol{e}^n$ 因为散度 $\tilde{\boldsymbol{u}} = 0$。利用这些关系，我们得到

$$a_\lambda(\boldsymbol{e}^{n+1}, \boldsymbol{v}) = (r^n, \text{散度 } \boldsymbol{v}) - \lambda(\text{散度 } \boldsymbol{e}^n, \text{散度 } \boldsymbol{v}) = a_\lambda(\boldsymbol{e}^n, \boldsymbol{v}) - \lambda(\text{散度 } \boldsymbol{e}^n, \text{散度 } \boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{e}^n, \boldsymbol{v})$$

对所有 $\boldsymbol{v} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$。取 $\boldsymbol{v} = \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{e}^{n+1}$ 并利用 (6.4) 和 (6.8) 即可得到

$$a(\boldsymbol{e}^{n+1}, \boldsymbol{e}^{n+1}) + \lambda \| \operatorname{div} \boldsymbol{e}^{n+1}\|^2 = a(\boldsymbol{e}^n, \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{e}^{n+1}) = a(\boldsymbol{e}^n, \boldsymbol{e}^{n+1}) \le M \|\boldsymbol{e}^n\|_1 \|\boldsymbol{e}^{n+1}\|_1, \tag{7.3}$$

这里用到了 (6.8) 以及 $\mathbb{S}\boldsymbol{e}^{n+1} = \boldsymbol{e}^{n+1}$。此外，(7.2) 表明 $\boldsymbol{e}^{n+1} \in \tilde{\boldsymbol{N}}_B^\perp$对所有 $n \in \mathbb{N}_0$。将 引理 7.1 和 (2.5) 应用于 (7.3) 的左端项，得到

$$(\alpha + \lambda \tilde{\Upsilon}^{-2}) \|\boldsymbol{e}^{n+1}\|_1 \le M \|\boldsymbol{e}^n\|_1 \implies \|\boldsymbol{e}^n\|_1 \le (M \tilde{\Upsilon}^2 \lambda^{-1})^n \|\boldsymbol{e}^0\|_1, \tag{7.4}$$

其中 $\tilde{\Upsilon} := (M+\alpha)^2/(\alpha^2 \beta_X)$，这是 (7.1)中出现的常数。现在注意到，式 (4.19) 可由 (7.4) 推出，因为散度 $\tilde{\boldsymbol{u}}^n = -$ 散度 $\boldsymbol{e}^n$。

现在，我们使用 引理 7.1 得到

$$\|\boldsymbol{e}^n\| \le \tilde{\Upsilon} \| \operatorname{div} \boldsymbol{e}^n\| = \tilde{\Upsilon} \| \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{u}}^n\|. \tag{7.5}$$

应用 inf-sup 条件 (4.14) 于 $\tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$ ×散度 $\tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$ 并利用 (6.7) 和 (7.2) 可得 s

$$\tilde{\beta}_X \|r^n\| \le \sup_{\mathbf{0} \ne \boldsymbol{v} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger} \frac{(r^n, \operatorname{div} \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|_1} = \sup_{\mathbf{0} \ne \boldsymbol{v} \in \tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger} \frac{a_\lambda(\boldsymbol{e}^n, \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_1} \le M \|\boldsymbol{e}^n\|_1 + \sqrt{d}\lambda \| \operatorname{div} \boldsymbol{e}^n\|,$$

其中 $\tilde{\beta}_X := \alpha \beta_X (M+\alpha)^{-1}$。由 (7.5)， $\|r^n\| \le (M\tilde{\Upsilon} + \sqrt{d}\lambda)\, \tilde{\beta}_X^{-1} \|$ 散度 $\tilde{\boldsymbol{u}}^n\|$。汇总结果即可得到方程 (4.18)。 □

7.1. 标准 IP 方法的收敛性。以下结果是 [6, 方程 (13.1.16)],的直接推论，是 引理 7.1的类似结果：

LEMMA 7.2. 对所有 $\boldsymbol{u} \in \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D : \ a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \ \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{X}_D : \text{散度 } \boldsymbol{w} = 0\}$，有

$$\|\boldsymbol{u}\|_1 \le \frac{M+\alpha}{\alpha \beta_X} \| \operatorname{div} \boldsymbol{u}\|,$$

其中 $M > 0$ (2.4)， $\alpha > 0$ (2.5)，以及 $\beta_X > 0$ (2.8)。

有了引理 7.2 ，定理 3.1 的证明与定理 4.5的证明类似：空间 $\tilde{\boldsymbol{X}}_B$ 和 $\tilde{\boldsymbol{X}}_B^\dagger$ 替换为 $\boldsymbol{X}_D$; 选择 $\boldsymbol{v} = \mathbb{S}^\dagger \boldsymbol{e}^{n+1}$ 替换为 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}^{n+1}$; 使用引理 7.1 和 $\tilde{\Upsilon}$ 替换为引理 7.2 和 $\Upsilon := (M+\alpha)/(\alpha\beta_X)$; 此外，inf-sup 常数 β_X 替换为 β_X，后者定义于(2.8)。

附录 A. 二维 Scott-Vogelius 元的性质。

最后，在本节中，我们将讨论二维 Scott-Vogelius 元的基本稳定性和逼近性质，以及离散正合序列性质。最优逼近性质的关键条件之一是

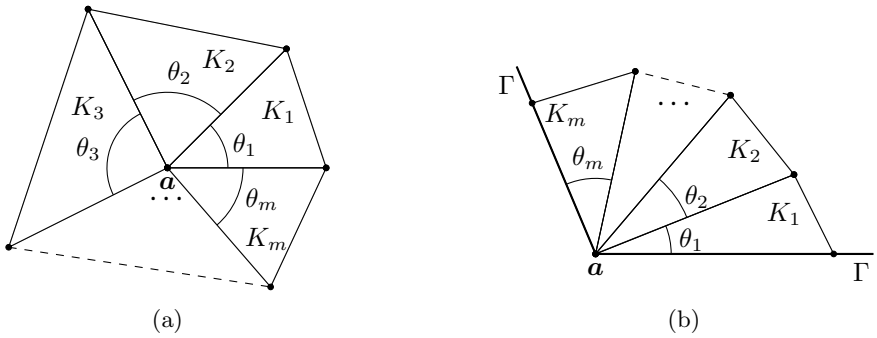


图 7：内部顶点 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_I$ 和边界顶点 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_D$附近网格的记号；两者各自邻接 $m = |\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}|$ 个单元。

网格在狄利克雷顶点处进行角点分裂。粗略而言，若每个单元至多有一条边位于 Γ_D 上，则称该网格为角点分裂网格。为了给出精确定义，我们令 $\mathcal{V}$ 表示单元顶点集，$\mathcal{V}_I$ 表示内部顶点集，而 $\mathcal{V}_C$表示与物理区域 Ω 的角点重合的单元顶点集。对于 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_I \cup \mathcal{V}_D$，我们按照图 7 标记这些单元，并定义

$$\xi(\boldsymbol{a}) := \sum_{i=1}^{|\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}|-\eta_{\boldsymbol{a}}} |\sin(\theta_i + \theta_{i+1})|, \qquad \text{where } \eta_{\boldsymbol{a}} = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_D, \\ 0 & \boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_I. \end{cases} \tag{A.1}$$

若满足 $\{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_C \cap \mathcal{V}_D : \xi(\boldsymbol{a}) = 0\} = \emptyset$，则网格在狄利克雷顶点处进行角点分裂。

以下结果表明，在网格 h 和 p 上，二维 Scott-Vogelius 元在适度的网格假设下具有一致的 inf-sup 稳定性和最优逼近性质：

THEOREM A.1. 假设 $p \geq 4$，且网格族 $\{\mathcal{T}\}$ 在狄利克雷顶点处进行角分割，并满足 *[5,* 式（5.14）*]*。那么，Scott-Vogelius 元在 h 和 p上具有一致的 inf-sup 稳定性；即，存在与h 和 p无关的 $\beta > 0$，使得

$$\beta \|q\| \leq \sup_{\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D} \frac{(\operatorname{div} \boldsymbol{v}, q)}{\|\boldsymbol{v}\|_1} \qquad \forall q \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_D. \tag{A.2}$$

此外，对于 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^s(\Omega) \cap \boldsymbol{H}^1_D(\Omega)$ 和 $q \in H^{s-1}(\Omega) \cap L^2_D(\Omega)$，$s > 1$，有

$$\inf_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}_D} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_1 \leq C h^{\min(p,s-1)} p^{-(s-1)} \|\boldsymbol{u}\|_s, \tag{A.3}$$

$$\inf_{r \in \operatorname{div} \boldsymbol{X}_D} \|q - r\| \leq C h^{\min(p,s-1)} p^{-(s-1)} \|q\|_{s-1}, \tag{A.4}$$

其中 C 与 $\boldsymbol{u}$、q、h和 p无关。

定理 定理 A.1 所需条件都相当标准，除了要求网格在狄利克雷顶点处进行角点分裂。关于 [5, 第 35] 页中对 定理 A.1 其余网格条件的详细描述，请参阅该处；本文余下部分均假定这些条件成立。尽管在重心细化网格 [24] 和均匀四面体网格 [25] 方面，三维

Scott-Vogelius 元的稳定性、逼近性质和正合序列性质仍有待研究。

定理 A.1 的证明见附录 A.1。文献 [23] 已证明，对于足够大的 p 和 $K > 0$，将 β 替换为 Cp^{-K} 后，inf-sup 条件 (2.8) 成立；随后，文献 [21] 将对多项式次数的限制放宽至 $p \geq 4$。本文证明，这些单元在 h 和 p 中均具有一致稳定性。尽管由 (A.3) 表示的空间 $\boldsymbol{X}_D$ 的（最优）逼近性质可由 [19]，有限元的标准逼近理论推出，但关于空间 $\operatorname{div} \boldsymbol{X}_D$ 的最优逼近性结果 (A.4) 也是新的；不过，对于固定网格 [22, 上的纯牵引问题 ($|\Gamma_D| = 0$)，引理 3.3] 已有相关结果。已知的另一种协调有限元离散方法也定义在（同样经过角点分裂的）三角形网格上，在 h 和 p 中具有一致的 inf-sup 稳定性，并具备最优逼近性质 [2, 3]。

A.1. 正合序列性质。令 $\{\Gamma_{D,j}\}_{j=1}^{J}$ 表示 Γ_D 的连通分支，并定义

$$H^2_D(\Omega) := \{\psi \in H^2(\Omega) : \psi|_{\Gamma_{D,1}} = 0,\ \psi|_{\Gamma_{D,j}} \text{ is constant}, 2 \leq j \leq J,\ \partial_n \psi|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

不难看出 旋度 $H^2_D(\Omega) \subset \boldsymbol{H}^1_D(\Omega)$ 和散度 $\boldsymbol{H}^1_D(\Omega) \subseteq L^2_D(\Omega)$，其中旋度 $\phi = (\partial_y \phi, -\partial_x \phi)^T$。事实上，下列序列是正合的 [18, 引理 4.6。1] 其含义是，(A.5) 中每个算子的核都等于该序列中前一个算子的值域：

$$0 \xrightarrow{\subset} H^2_D(\Omega) \xrightarrow{\mathbf{curl}} \boldsymbol{H}^1_D(\Omega) \xrightarrow{\operatorname{div}} L^2_D(\Omega) \xrightarrow{0} 0. \tag{A.5}$$

例如，若 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1_D(\Omega)$ 是 (2.1) 中的速度，且散度 $\boldsymbol{u} \equiv 0$，则存在一个势函数 $\phi \in H^2_D(\Omega)$，使得 $\boldsymbol{u} =$ 旋度 ϕ。

我们将证明，Scott-Vogelius 有限元空间 $\boldsymbol{X}_D$ 和 $\operatorname{div} \boldsymbol{X}_D$ 也构成正合序列的一部分。为此，定义离散势空间如下：

$$\Sigma_D = \Sigma \cap H^2_D(\Omega), \qquad \text{where} \quad \Sigma := \{\psi \in C^1(\bar{\Omega}) : \psi|_K \in \mathcal{P}_{p+1}(K)\ \forall K \in \mathcal{T}\}.$$

如[5, 21, 23], 散度空间 $\boldsymbol{X}_D$ 在某些单元顶点处满足约束，如下所述。设 $\mathcal{V}_D$ 表示位于 Γ_D 内部的单元顶点集合，而 $\mathcal{V}_{DN}$ 表示与$\bar{\quad}$ $\bar{\quad}$和 Γ_D 的交点 Γ_N重合的顶点。除此之外，给定 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$，令 $\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}$ 表示以 $\boldsymbol{a}$ 为顶点的单元集合，标记方式如图 7所示。于是有以下结果：

Lemma A.2. 令 $\xi(\cdot)$ 按 (A.1) 中的定义，并定义

$$Q := \Big\{ q \in L^2(\Omega) : q|_K \in \mathcal{P}_{p-1}(K)\ \forall K \in \mathcal{T},\ \sum_{i=1}^{|\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}|} (-1)^i q|_{K_i}(\boldsymbol{a}) = 0\ \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_I : \xi(\boldsymbol{a}) = 0 \Big\}$$

and

$$Q_D := \Big\{ q \in Q \cap L^2_D(\Omega) : \sum_{i=1}^{|\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}|} (-1)^i q|_{K_i}(\boldsymbol{a}) = 0\ \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_D : \xi(\boldsymbol{a}) = 0 \Big\},$$

其中 $\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$ 中的单元按 图 7 所示进行标记。则序列

$$0 \xrightarrow{\subset} \Sigma_D \xrightarrow{\mathbf{curl}} \boldsymbol{X}_D \xrightarrow{\operatorname{div}} Q_D \xrightarrow{0} 0 \tag{A.6}$$

是精确的。

证明。 在 $|\Gamma_D| = |\Gamma|$ 的情形下，(A.6) 由[21], 中的命题 3.2 的证明可得，因此我们假设 $|\Gamma_D| < |\Gamma|$。包含关系 旋度 $\Sigma_D \subset \boldsymbol{X}_D$ 由定义可得，而散度 $\boldsymbol{X}_D = Q_D$ 由 [5, 定理 4。1]我们可以仿照 [16] 以及[18, 引理 4.6。2]中的证明，得到

$$\dim \Sigma_D = \dim \Sigma - 7|\mathcal{V}_D| - 5|\mathcal{V}_{DN}| - (2p-7)|\mathcal{E}_D| + |\{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_D : \xi(\boldsymbol{a}) = 0\}| + J - 1,$$

其中， $\mathcal{E}_D$ 是位于 Γ_D上的单元边集合。对空间 $\boldsymbol{X}_D$ 和 Q_D 中的约束进行计数可得

$$\begin{aligned} \dim \boldsymbol{X}_D &= \dim \boldsymbol{X} - 2\{|\mathcal{V}_D| + |\mathcal{V}_{DN}| + (p-1)|\mathcal{E}_D|\} \\ \dim Q_D &= \dim Q - |\{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_D : \xi(\boldsymbol{a}) = 0\}|. \end{aligned}$$

根据 [5, 引理 6.1], $\dim \Sigma + \dim\ Q - \dim\ \boldsymbol{X} = 1$， 因此

$$\dim \Sigma_D + \dim Q_D - \dim \boldsymbol{X}_D = J - 5|\mathcal{V}_D| - 3|\mathcal{V}_{DN}| + 5|\mathcal{E}_D|.$$

此外，

$$|\mathcal{E}_D| = \sum_{j=1}^{J} |\mathcal{E}_D \cap \Gamma_{D,j}| = \sum_{j=1}^{J} \left\{|(\mathcal{V}_D \cup \mathcal{V}_{DN}) \cap \bar{\Gamma}_{D,j}| - 1\right\} = |\mathcal{V}_D| + |\mathcal{V}_{DN}| - J,$$

其中，我们在每个连通分支 $\Gamma_{D,j}$: $|\mathcal{E}_D \cap \Gamma_{D,j}| = |(\mathcal{V}_D \cup \mathcal{V}_{DN}) \cap \Gamma_{D,j}| - 1$ 上使用了欧拉恒等式。此外，每个连通分支$\Gamma_{D,j}$的端点由 $\mathcal{V}_{DN}$ 中两个唯一的顶点组成，因此 $|\mathcal{V}_{DN}| = 2J$。汇总结果可得 $\dim\ \Sigma_D + \dim Q_D - \dim\ \boldsymbol{X}_D = 0.$。现在利用标准论证即可得到 (A.6) 的精确性（例如参见 [21, Proposition 3.1] 或 [5, Lemma 6.1]）∎

A.2. 稳定性与逼近。借助对 Q_D =散度 $\boldsymbol{X}_D$ 的显式刻画（A.6），我们现在证明定理 A.1。

定理定理A.1的证明。方程 (A.2)是 [5, 定理 5.1]的直接推论。令 $\tilde{Q}_D$:= $\{r \in L^2_D(\Omega)\colon\ \ r|_K \in \mathcal{P}_{p-1}(K)\ \ \forall K \in \mathcal{T}\ r$ 在非角点顶点处连续$\}$。

根据 [3, 定理 2.1]，，有

$$\inf_{r \in \tilde{Q}_D} \|q - r\| \le C h^{\min(p,s-1)} p^{-(s-1)} \|q\|_{s-1}, \tag{A.7}$$

其中 C 与 h 及 p 在$L^2_D(\Omega) = L^2_0(\Omega)$ 的情形下无关。采用与 [3, 引理 4.2 和 4.3]中完全相同的构造可得 (A.7) 在 $L^2_D(\Omega) = L^2(\Omega)$ 的情形下也成立。由于网格在狄利克雷顶点处进行了角点分裂，集合 $\{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_I \cup \mathcal{V}_D : \xi(\boldsymbol{a}) = 0\}$ 由邻接偶数个单元的单元顶点组成；也就是说，$|\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}|$ 为偶数（例如参见 [5]第 4.3 节）。因此，对于 $r \in Q_D$，条件为

$$\sum_{i=1}^{|\mathcal{T}_{\boldsymbol{a}}|} (-1)^i r|_{K_i}(\boldsymbol{a}) = 0\ \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_I \cup \mathcal{V}_D : \xi(\boldsymbol{a}) = 0$$

由于 q 在非角点顶点处连续，因此自动成立。于是，$\tilde{Q}_D \subset Q_D =$ 散度 $\boldsymbol{X}_D$，因此 (A.4) 由(A.7)得出。公式 (A.3)是 hp-有限元的标准逼近理论的结果；例如参见 [19]。∎

参考文献

[1] M. Ainsworth, G. Andriamaro and O. Davydov *Bernstein–Bézier finite elements of arbi-* , , , *trary order and optimal assembly procedures* 33 2011 3087 SIAM 科学计算杂志, ( ), 第 – 3109 页, https://doi.org/10.1137/11082539X。[2] M. Ainsworth and C. Parker, *Mass conserving mixed hp-FEM approximations to Stokes flow. Part : Uniform stability* 59 2021 1218 1244, I, SIAM 数值分析杂志, ( ), 第 – 页 https:// doi.org/10.1137/20M1359109。[3] M. Ainsworth and C. Parker, *Mass conserving mixed hp-FEM approximations to Stokes flow. Part : Optimal convergence* 59 2021 1245 1272, II, SIAM 数值分析杂志, ( ), 第 – 页 https://doi.org/10.1137/20M1359110。[4] M. Ainsworth and C. Parker, *A mass conserving mixed hp-FEM scheme for Stokes flow. Part* 60 2022 1574 III *: Implementation and preconditioning*, SIAM 数值分析杂志, ( ), 第 – 1606 页, https://doi.org/10.1137/21M1433927。[5] M. Ainsworth and C. Parker, *Unlocking the secrets of locking: Finite element analysis in planar linear elasticity* 395 2022 115034, , 《计算方法与应用力学和工程》, ( ), 第 https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115034 页。[6] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 《应用数学丛书》第15卷, Springer-Verlag, 纽约, 第3版, 2008年。[7] M. Fortin and R. Glowinski, *Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-value Problems* 15, , 《数学研究与应用》。North-Holland, 阿姆斯特丹, 1983年。[8] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Spring-Verlag, 纽约, 1984年。[9] G. Guennebaud, B. Jacob, et al., *Eigen v3*。http://eigen.tuxfamily.org, 2010年。[10] V. John, *Finite element methods for incompressible flow problems*, 《计算数学丛书》第51卷, Springer, 瑞士, 2016年, https://doi.org/10. 1007/978-3-319-45750-5。[11] V. John, A. Linke, C. Merdon, M. Neilan, and L. G. Rebholz, *On the divergence constraint in mixed finite element methods for incompressible flows* 59 2017 492 , 《SIAM评论》, ( ), 第 – 544 页, https://doi.org/10.1137/15M1047696。[12] L. I. G. Kovasznay, *Laminar flow behind a two-dimensional grid*, 《剑桥哲学学会数学论文集》, 44 (1948), 第58–62页, https://doi.org/10.1017/S0305004100023999。[13] M.-J. Lai and L. L. Schumaker, *Spline functions on triangulations*, 第110卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2007年。[14] H. K. Moffatt, *Viscous and resistive eddies near a sharp corner*, 《流体力学杂志》, 18 (1964), 第1–18页, https://doi.org/10.1017/S0022112064000015。[15] H. Morgan and L. R. Scott, *Towards a unified finite element method for the Stokes equations*, SIAM 科学计算杂志, 40 (2018), 第A130–A141页, https://doi.org/10.1137/16M1103117。[16] J. Morgan and R. Scott, *A nodal basis for C^1 piecewise polynomials of degree $n \geq 5$*, 《数学计算》, 29 (1975), 第736–740页, https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1975-0375740-7。[17] M. Neilan, *Discrete and conforming smooth de Rham complexes in three dimensions*, 《数学计算》, 84 (2015), 第2059–2081页, https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2015-02958-5。[18] C. Parker, *High Order 2D Finite Element Methods with Extra Smoothness*, 博士论文, 布朗大学, 2022年, https://repository.library.brown.edu/studio/item/bdr:mxzhbfy9/。[19] C. Schwab, *p- and hp-Finite Element Methods: Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics.* 1998 , 牛津大学出版社, 牛津, 。[20] L. R. Scott and M. Vogelius, *Conforming finite element methods for incompressible and nearly incompressible continua*, 载于《流体力学大规模计算》第2部分, 《应用数学讲义》第22卷, AMS, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1985年, 第221–244页, https://apps.dtic. mil/sti/citations/ADA141117。[21] L. R. Scott and M. Vogelius, *Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials* 19 1985 , 《ESAIM数学建模与数值分析》, ( ), 第111–143页, https://doi.org/10.1051/m2an/1985190101111。[22] M. Vogelius, *An analysis of the p- version of the finite element method for nearly incompressible materials* 41 1983 39 10 1007 01396304 , 《数值数学》, ( ), 第–53 页, https://doi.org/ . /BF 。[23] M. Vogelius, *A right-inverse for the divergence operator in spaces of piecewise polynomials*, 《数值数学》, 41 (1983), 第19–37页, https://doi.org/10.1007/BF01396303。[24] S. Zhang, *A new family of stable mixed finite elements for the 3D Stokes equations*, 《数学计算》, 74 (2005), 第543–554页, https://doi.org/10.1090/S0025-5718-04-01711-9。[25] S. Zhang, *Divergence-free finite elements on tetrahedral grids for $k \geq 6$*, 《数学计算》, 80 (2011), 第669–695页, https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2010-02412-3。