arXiv:2301.01845v2 [math.AP] 8 May 2023

穿孔区域上 sinh-Poisson 型方程的变号泡塔解

PABLO FIGUEROA

ABSTRACT. 对于具有狄利克雷边界条件的非对称 sinh-Poisson 型问题——这类问题作为平衡湍流涡旋的平均场方程而出现，其可变强度在流体动力学湍流中备受关注——我们研究穿孔区域 $\Omega_\epsilon := \Omega \setminus B(\xi,\epsilon)$ 上变号泡塔解的存在性，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个光滑有界区域，而 $B(\xi,\epsilon)$ 是以 $\xi \in \Omega$ 为中心、半径为 $\epsilon > 0$ 的球。具体而言，给定一个小参数 $\rho > 0$ 和任意整数 $m \geq 2$，存在一个足够小的半径 $\epsilon = \epsilon(\rho) > 0$，使得每个 sinh-Poisson 型方程（无论是刘维尔形式还是平均场形式）都有一个解 u_ρ；当 ρ 趋于零时，该解的渐近轮廓呈现为一列变号的奇异刘维尔气泡，这些气泡以同一个 ξ 为中心，且具有 $\epsilon(\rho) \to 0^+$。

1. INTRODUCTION

设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$中的一个光滑有界区域。给定 $\epsilon > 0$ 和 $\xi \in \Omega$，定义 $\Omega_\epsilon := \Omega \setminus \overline{B(\xi,\epsilon)}$，这是一个穿孔区域，其中 $B(\xi,\epsilon)$ 是以 ξ 为中心、半径为 ϵ的球。受 [1, 13, 17, 20, 30],中的结果启发，我们希望在穿孔区域 Ω中构造具有可变强度和狄利克雷边界条件的双曲正弦-泊松型方程的变号泡塔解，其形式可以是刘维尔形式，也可以是平均场形式。具体而言，一方面，我们考虑以下刘维尔形式的问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \rho(V_0(x)e^u - \nu V_1(x)e^{-\tau u}) & \text{in } \Omega_\epsilon \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega_\epsilon \end{cases}, \tag{1.1}$$

另一方面，我们还研究平均场形式的问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda_0 V_0(x)e^u}{\int_{\Omega_\epsilon} V_0 e^u} - \dfrac{\lambda_1 \tau V_1(x)e^{-\tau u}}{\int_{\Omega_\epsilon} V_1 e^{-\tau u}} & \text{in } \Omega_\epsilon \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega_\epsilon \end{cases}, \tag{1.2}$$

其中 $\rho > 0$ 较小，$\lambda_0, \lambda_1 > 0$, $V_0, V_1 > 0$ 是 Ω 中的光滑势函数，$\tau > 0, \epsilon > 0$ 是一个小数，且 $\nu \geq 0$。我们的目标是针对每个问题，在适当选择 $\epsilon = \epsilon(\rho)$ 的情况下，构造一族解 u_ρ，其渐近剖面为以同一点 ξ 为中心的正负奇异刘维尔泡之和，其中该点满足 $\rho \to 0$，这与 [20, 30]的思路一致。

近年来，这些方程及相关方程受到广泛关注，因为它们与 Onsager [28] 开创的二维湍流统计力学描述密切相关。具体而言，在这一背景下，Caglioti、Lions、Marchioro、Pulvirenti [6] 以及 Sawada、Suzuki [35] 推导出了以下方程：

$$-\Delta u = \lambda \int_{[-1,1]} \frac{\alpha e^{\alpha u}}{\int_\Omega e^{\alpha u} dx} d\mathcal{P}(\alpha) \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \ \text{ on } \partial\Omega, \tag{1.3}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^2$中的有界区域，u 是该流的流函数，$\lambda > 0$ 是与逆温度相关的常数，而 $\mathcal{P}$ 是 $[-1,1]$ 上的博雷尔概率测度，用于描述点涡强度分布。我们注意到，式（1.3）是在对涡旋环量分布作出确定性假设的情况下得到的。

Date:2023年5月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 35B44，35J25，35J60。
Key words and phrases. 双曲正弦-泊松型方程，穿孔区域，泡泡塔。

根据1.3式，通过对 $\mathcal{P}$作适当选择，可以得到若干著名问题。例如，若 $\mathcal{P}=\delta_1$ 集中于 1，则式（1.3对应于经典平均场方程

$$-\Delta u=\lambda\frac{e^u}{\int\limits_\Omega e^u dx}\quad \text{in } \Omega,\qquad u=0\ \text{ on } \partial\Omega. \tag{1.4}$$

鉴于文献中已有大量关于（1.4）的研究结果，我们仅引用 [2, 7, 8, 9, 12, 26]。当 $\mathcal{P}=\sigma\delta_1+\ (1-\sigma)\ \delta_{-\tau}$ 且 $\tau\in[-1,1]$ 和 $\sigma\in[0,1]$时，方程（1.3）变为

$$-\Delta u=\lambda\left(\sigma\frac{e^u}{\int\limits_\Omega e^u dx}-(1-\sigma)\tau\frac{e^{-\tau u}}{\int\limits_\Omega e^{-\tau u}dx}\right)\quad \text{in } \Omega,\qquad u=0\ \text{ on }\ \partial\Omega. \tag{1.5}$$

令 $\lambda_0=\lambda\sigma$， $\lambda_1=\lambda\ (1-\sigma)$ ，则问题（1.5）可改写为（1.2），其中将 Ω_ϵ 替换为 Ω。若 $\tau=1$ 且 $V_0=V_1\equiv 1$ ，则问题（1.2化为平衡湍流的平均场方程，见 [5, 21, 24, 27, 31] ；或化为其相关的 sinh-Poisson 形式，见 [3, 4, 20, 23, 25], ，近年来这两类方程引起了广泛关注。最近，文献 [19]中构造了 Ω 上具有罗宾边界条件的双曲正弦-泊松方程的变号解。

关于 $\tau>0$的相关结果，Pistoia 和 Ricciardi 在 [29] 中构造了方程（1.2）（在 Ω 而非 Ω_ϵ 中）的爆破解序列，其中 λ_0， $\lambda_1\tau^2$ 接近于 8π。Ricciardi 和 Takahashi 在 [32] 中给出了方程（1.2）的解序列的完整爆破图景，随后在 [33] 中，Ricciardi 等人在 $\lambda_0\to 8\pi^+$ 且 $\lambda_1\to 0$ 的多连通区域上构造了极小极大解（在这种情况下，非线性项 $e^{-\tau u}$ 可视为相对于主项 e^u的低阶项）。当 $\tau>0$ 时，在 [22, 34]的紧黎曼曲面上获得了爆破分析及一些存在性结果。最近，在 [18]中构造了紧黎曼曲面上的泡解。

另一方面，在穿孔区域上，Ahmedou 和 Pistoia 在 [1] 证明了：在 Ω_ϵ上，对于任意 $\lambda>8\pi$，经典平均场方程（1.4）存在一个解，该解在 ξ 处爆破，当 $\epsilon\to 0$ 时 $\lambda\in 8\pi\mathbb{N}$（当 $\lambda\in 8\pi\mathbb{N}$时需要额外的对称条件）。在 [13] 中，作者构造了具有可变强度的平均场方程（1.2）的一族解；当 ϵ_1，它们分别在 $\xi_1,\dots,\xi_{m_1}$ 和 $\xi_{m_1+1},\dots,\xi_m$处正向和负向爆破。这里考虑的是具有多个孔洞的穿孔区域，其中 Ω_ϵ 被 $\Omega\setminus\cup_{i=1}^m B(\xi_i,\epsilon_i)$ 中的 in 所替代，且处于超临界区间 $\lambda_0>8\pi m_1$和 $\lambda_1\tau^2>8\pi(m-m_1)$，满足 $m_1\in\{0,1,\dots,m\}$。最近，本着 [13], 的相同思想，作者在 [17] 中研究了具有可变强度的双曲正弦-泊松型方程（1.1），其定义在带有多个孔洞的穿孔区域 $\Omega\setminus\cup_{i=1}^m B(\xi_i,\epsilon_i)$上。方程（1.1）通过使用如下变换与问题（1.2）相关，但并不等价

$$\rho=\frac{\lambda_0}{\int_{\Omega_\epsilon}V_0e^u}\qquad\text{and}\qquad \rho\nu=\frac{\lambda_1\tau}{\int_{\Omega_\epsilon}V_1e^{-\tau u}}.$$

据我们所知，目前关于 sinh-Poisson 型问题的非简单爆破结果寥寥无几。具体而言，文献 [15] 为 Neumann sinh-Poisson 方程构造了具有非简单爆破的变号解。Grossi 和 Pistoia 在文献 [20] 中，在关于不动点 $\xi\in\Omega$ 对称的区域 Ω 上，为 sinh-Poisson 形式（$\tau=1$）构造了变号泡塔解。此后，Pistoia 和 Ricciardi 在文献 [30] 中，将这一构造推广到具有非对称指数（$\tau\neq 1$）的双曲正弦-泊松型方程，并要求 Ω 满足取决于 $\tau\in\mathbb{Q}$ 或 $\tau\notin\mathbb{Q}$ 的对称性假设。在这两种情形下， [20, 30] 泡的数量都可以任意大。

我们感兴趣的一个问题是：对于穿孔区域 Ω 上的方程，1.1，当 ρ 取较小值时，或者对于方程 1.2，当参数 $\lambda_0,\lambda_1,\tau>0$ 取某些值时，是否存在泡以 ξ为中心的变号泡塔解？我们沿这一方向得到的首个不依赖对称性假设的结果如下。

定理 1.1. 令 $m\geq 2$ 为一个正整数。存在 $\rho_0>0$ 使得对所有 $0<\rho<\rho_0$ 都存在 $\epsilon=\epsilon(\rho)$ 充分小，使得问题 (1.1) 具有一个变号解 u_ρ 在 Ω_ϵ 于ξ 处爆破，其意义为

$$u_\rho=(-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)G(\cdot,\xi)+o(1) \tag{1.6}$$

在 $\bar{\Omega}\setminus\{\xi\}$ 中局部一致地，当 $\rho\to 0^+$。

这里，为简便起见，我们记

$$\nu(i)=\frac{1+(-1)^i}{2}=\begin{cases}0 & \text{if } i \text{ is odd}\\ 1 & \text{if } i \text{ is even}\end{cases}\quad\text{and}\quad \sigma(i)=\frac{1-(-1)^i}{2}=\begin{cases}1 & \text{if } i \text{ is odd}\\ 0 & \text{if } i \text{ is even}\end{cases}, \tag{1.7}$$

α_m 由（2.4）给出，其中 $i=m$ 和 $G(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\log|x-y|+H(x,y)$ 是 Ω 中 $-\Delta$的格林函数，而正则部分 H 是 Ω 中的调和函数，使得 $H(x,y)=\frac{1}{2\pi}\log|x-y|$ 在 Ω 的 ∂上。然而，后一结果可能无法告诉我们，对于某些参数值 $\lambda_0,\lambda_1,\tau>0$，(1.2) 是否存在变号泡塔解。因此，我们直接对问题 (1.2) 采用类似的步骤。反过来，下面的定理 1.2 可能无法告诉我们，对于所有充分小的 $\rho>0$，(1.1) 是否存在变号泡塔解。假设 λ_0 和 λ_1 可分解为某个 $\alpha_1>2$ （见（2.3））， 形式如下之一

$$\lambda_0=2\pi m\left[\alpha_1+(m-2)\Big(1+\frac{1}{\tau}\Big)\right],\quad \lambda_1\tau^2=2\pi m\left[\alpha_1\tau+m(1+\tau)\right],\quad \text{if } m \text{ even} \tag{1.8}$$

or

$$\lambda_0=2\pi(m+1)\left[\alpha_1+(m-1)\Big(1+\frac{1}{\tau}\Big)\right],\quad \lambda_1\tau^2=2\pi(m-1)\left[\alpha_1\tau+(m-1)(1+\tau)\right],\quad \text{if } m \text{ odd}. \tag{1.9}$$

特别地，若 $\tau=1$，我们选择 $\alpha_1>2$ 和 $\alpha_1\notin 2\mathbb{N}$。我们的第二个结果（不要求对称性假设）如下

定理 1.2. 若以下条件 (1.8) 或 (1.9) 对某个正整数 $m\geq 2$成立，则存在一个足够小的半径$\epsilon>0$，使得问题 (1.2) 存在一个变号解 u_ϵ，其定义于 Ω_ϵ 中，并在 ξ 处爆破，意义如 (1.6) 所述，且在 $\bar{\Omega}\setminus\{\xi\}$ 上局部一致地成立，当 $\epsilon\to 0^+$时。

我们的解对应于绕孔洞 $B(\xi,\ \epsilon)$ 周围交替取向的高度集中涡旋构型的叠加，并推广了一些关于对称区域的已知结果 [20, 30] 。我们还指出，本文的一个难点在于第 5 节发展的线性理论。与先前工作中发展的线性理论相比，这里需要稍复杂的分析 [1, 11, 13, 14, 16, 20, 30]。

不失一般性，在本文余下部分中，我们假设 $\xi=0\in\Omega$，从而 $\Omega_\epsilon=\Omega\setminus B(0,\epsilon)$，其中 $\epsilon>0$ 很小且 $\nu=1$，因为我们可以用 νV_2 替换 V_2。然而，在比较 (ν 与方程 (1.1) 和方程 (1.2) 时，我们需要保留。

最后，我们对定理的证明作几点说明。沿用 [20, 30] 中关于 sinh-Poisson 型方程的泡塔解的思路，以及 [1, 13, 16] 中关于在穿孔区域上构造解的思路，我们通过扰动方法求得一个解 u_ρ ； 具体而言，我们寻求方程 (1.1) 的解，其形式为

$$u_\rho=U+\phi, \tag{1.10}$$

其中 U 是一个适当的试探函数，它通过投影算子 P_ϵ 构造在 $H_0^1(\Omega_\epsilon)$上（见（2.1））， 而 $\phi\in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ 是一个较小的余项。令 $w_{\delta,\ \alpha}(x)=\log\frac{2\alpha^2\delta^\alpha}{(\delta^\alpha+|x|^\alpha)^2}$ 为~~奇异李乌~~维尔方程的一个解

$$\Delta u+|x|^{\alpha-2}e^u=0\quad\text{in } \mathbb{R}^2,\qquad \int_{\mathbb{R}^2}|x|^{\alpha-2}e^u<+\infty,$$

试探函数 U 定义如下

$$U(x)=\sum_{i\ \text{odd}}P_\epsilon w_i(x)-\frac{1}{\tau}\sum_{i\ \text{even}}P_\epsilon w_i(x)=\sum_{i=1}^m\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}P_\epsilon w_i(x), \tag{1.11}$$

其中 $w_j:=w_{\delta_j,\ \alpha_j}$ 当 $j=1,\ .....,\ m$。仔细选取参数 $\delta_j,\ \alpha_i$以及半径 ϵ，使其依赖于 $\rho>0$，并在第 2 节中（见（2.2）、（2.3）-（2.4）和（2.21））， 以使 U 成为一个良好的近似解。事实上，（R）对应于方程（1.1）的误差项为

$$R=\Delta U+\rho(V_0(x)e^U-V_1(x)e^{-\tau U}) \tag{1.12}$$

当 $p>1$ 接近 1 时，它在 L^p-范数下很小（见引理 3.1）。围绕 U 进行线性化过程后，我们将（1.1）重新表述为关于 ϕ 的一个非线性问题（见方程（3.13））。借助第 3.2 小节中的一些估计（见（3.20）和（3.21）），我们将通过不动点论证证明存在这样的解 ϕ，使其满足（3.13）。由于主阶项 U 的渐近性质（见引理 2.6 中的（2.23）），（1.10）中的相应解 u_ρ 表现为一列符号交替的 m 奇异刘维尔气泡。在第 5 节中，我们将证明命题 3.1 中所述、与该问题自然关联的线性算子（见（3.14））的可逆性。为证明定理 1.2，我们对方程（1.2）采用相同的过程和相同的试探函数，并假设（1.8）-（1.9）以及$\epsilon=\epsilon(\rho)$，其中误差项为

$$\mathcal{R}=\Delta U+\lambda_0\frac{V_0(x)e^U}{\int_{\Omega_\epsilon}V_0e^U}-\lambda_1\tau\frac{V_1(x)e^{-\tau U}}{\int_{\Omega_\epsilon}V_1e^{-\tau U}}. \tag{1.13}$$

2. Approximation of the solution

本节中，我们将选取参数 α_i's、 δ_j's 和 $\epsilon=\epsilon(\rho)$，以使 U 成为一个良好的近似。引入函数 $P_\epsilon w$，将其定义为以下方程的唯一解

$$\begin{cases}\Delta P_\epsilon w=\Delta w & \text{in } \Omega_\epsilon\\ P_\epsilon w=0, & \text{on } \partial\Omega_\epsilon.\end{cases} \tag{2.1}$$

为简单起见，我们将 $h_0=H(0,0)$ 记作。我们有 $Pw_{\delta,\,\alpha}$ 关于 $\delta\to0$ 的如下渐近展开，如 [1, 引理 2.1] 所示（另见 [13, 引理 2.1]）：

引理 2.1. 函数$P_\epsilon w_{\delta,\,\alpha}$ 满足

$$P_\epsilon w_{\delta,\alpha}(x)=w_{\delta,\alpha}(x)-\log(2\alpha^2\delta^\alpha)+4\pi\alpha H(x,0)-\gamma^\alpha_{\delta,\epsilon}G(x,0)+O\Big(\delta^\alpha+\Big(\frac{\epsilon}{\delta}\Big)^\alpha+\Big[1+\Big|\frac{\log\delta}{\log\epsilon}\Big|\Big]\epsilon\Big),$$

在 Ω_ϵ 中一致成立，其中 $\gamma^\alpha_{\delta,\,\epsilon}$由 $\gamma^\alpha_{\delta,\,\epsilon}=-2\alpha_{\text{对数}}-\frac{\delta+4\pi\alpha h_0}{\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\epsilon+h_0}{\text{对数}}}$给出。特别地，以下关系成立 $_S$

$$P_\epsilon w_{\delta,\alpha}(x)=[4\pi\alpha-\gamma^\alpha_{\delta,\epsilon}]G(x,0)+O\Big(\delta^\alpha+\Big(\frac{\epsilon}{\delta}\Big)^\alpha+\Big[1+\Big|\frac{\log\delta}{\log\epsilon}\Big|\Big]\epsilon\Big)$$

在 $\Omega\setminus\{0\}$ 中局部一致地趋于 $\epsilon\to0$。

取 $m\in\mathbb{N}$，满足 $m\geq2$，考虑 $\delta_j>0$和 $\alpha_j>2$, $j=1,\dots,m$，从而我们的近似解 U由 (1.11) 定义，并由 δ_j's 和 α_i's 参数化，其中 $\delta_j=\delta_j(\rho,\alpha_1)$（它还依赖于 τ,h_0, $V_0(0)$ 和 $V_1(0)$），这里 $\nu(i)$ 在 (1.7) 中定义，而 P_ϵ 是针对适当选取的 ϵ，由 (2.1) 定义的投影算子。为了获得良好的近似，对于任意 $i=1,\dots,m$，我们将假设

$$\delta_i^{\alpha_i}=d_i\rho^{\beta_i}, \tag{2.2}$$

当 $\rho>0$ 足够小时，其中 α_i's、 β_i's 和 d_i's 将在下文给出。我们取

$$\alpha_1>2,\quad\text{with}\quad\alpha_1\in\begin{cases}\bigcap_{k=0}^{(m-2)/2}\Big(2\mathbb{N}-\frac{4k}{\tau}\Big)^c\bigcap\Big[\bigcap_{k=1}^{m/2}\Big(\frac{2}{\tau}\mathbb{N}-4k+2\Big)^c\Big] & \text{if } m \text{ is even}\\ \bigcap_{k=0}^{(m-1)/2}\Big(2\mathbb{N}-\frac{4k}{\tau}\Big)^c\bigcap\Big[\bigcap_{k=1}^{(m-1)/2}\Big(\frac{2}{\tau}\mathbb{N}-4k+2\Big)^c\Big] & \text{if } m \text{ is odd}\end{cases}, \tag{2.3}$$

$$\text{and for } i\geq2\qquad\alpha_i=\begin{cases}\alpha_1+2(i-1)+\dfrac{2(i-1)}{\tau} & \text{if } i \text{ is odd}\\ \alpha_1\tau+2(i-1)\tau+2(i-1) & \text{if } i \text{ is even}\end{cases}. \tag{2.4}$$

注意

$$\alpha_i=\Big(\alpha_1+2i-2+\frac{2i-2}{\tau}\Big)\tau^{\nu(i)},\qquad\text{for } i\geq2 \tag{2.5}$$

以及 $\alpha_i>0$ 对所有 $i=1$、.....、 m。此外，为了得到良好的近似，还将证明 α_i的若干恒等式和性质， β_i 的若干恒等式和性质， d_i的若干恒等式和性质，以及 ϵ的若干恒等式和性质。由定义（2.4）可直接验证

对于 k, $\{\alpha_{2k+1}\}_k$ 和 $\{\alpha_{2k}\}_k$ 均递增。由于 $\alpha_1 > 2$ 和 $\alpha_2 = \alpha_1\tau + 2\tau + 2 > 2$, 可得对所有 $i = 1, \ldots\ldots, m$, 都有 $\alpha_i > 2$。注意, 所有这些集合都是可数的: 当 $k = 0, \ldots\ldots, \frac{m-2}{2}$ 时, $2\mathbb{N} - \frac{4k}{\tau}$; 当 $k = 1, \ldots\ldots, \frac{m}{2}$ 且 m 为偶数时, $\frac{2}{\tau}\mathbb{N} - 4k + 2$; 当 $k = 0, \ldots\ldots, \frac{m-1}{2}$ 时, $2\mathbb{N} - \frac{4k}{\tau}$; 当 $k = 1, \ldots\ldots, \frac{m-1}{2}$ 且 m 为奇数时, $\frac{2}{\tau}\mathbb{N} - 4k + 2$。因此, 它们的并集也是可数集, 且其并集的补集在 $\mathbb{R}$ 中稠密。因此, 存在满足 (2.3) 的 $\alpha_1 \in \mathbb{R}$。

引理 2.2. 若 α_i由 (2.4)给出, 则

$$\alpha_{j+1} = (\alpha_j + 2)\tau^{(-1)^{j+1}} + 2 = \begin{cases} (\alpha_j + 2)\tau + 2 & if\ j\ is\ odd \\ \dfrac{\alpha_j + 2}{\tau} + 2 & if\ j\ is\ even \end{cases} \tag{2.6}$$

and

$$\sum_{i=1}^{j} \frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\alpha_i = \begin{cases} -j - \frac{j}{\tau} & if\ j\ is\ even \\ \alpha_1 + j - 1 + \frac{j-1}{\tau} & if\ j\ is\ odd \end{cases} \tag{2.7}$$

对所有 $j \geq 1$均成立。若 α_1满足 (2.3), 则 $\alpha_i \notin 2\mathbb{N}$对所有 $i = 1, \ldots\ldots, m$均成立。

证明: 首先假设 i 为奇数。那么, $i + 1$ 为偶数; 由 (2.4) 可知, 当 i 为奇数时, $\alpha_i = \alpha_1 + 2i - 2 + \frac{2i-2}{\tau}$经过直接计算可得

$$(\alpha_i + 2)\tau + 2 = \left(\alpha_1 + 2i + \frac{2i-2}{\tau}\right)\tau + 2 = (\alpha_1 + 2i)\tau + 2i.$$

另一方面, 由 (2.4) 可知, 当 $i + 1$ 为偶数时, 我们得到 $\alpha_{i+1} = \alpha_1\tau + 2i\tau + 2i$, 因此 α_{i+1} $=(\alpha_i + 2)\tau + 2$。当 i 为偶数时, 直接计算可得出结论 (2.6)。

根据 α_i和 (2.5) 的选取, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j} \frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\alpha_i &= \sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+1}\left[\alpha_1 + 2i - 2 + \frac{2i-2}{\tau}\right] \\ &= \alpha_1 \sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+1} + 2\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+1}(i-1) + \frac{2}{\tau}\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+1}(i-1) \end{aligned}$$

由此我们得到 (2.7), 这是因为

$$\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+1}(i-1) = \sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+1}i - \sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+1} = \begin{cases} -\frac{j}{2} + 0 & \text{if } j \text{ is even} \\ \frac{j+1}{2} - 1 & \text{if } j \text{ is odd} \end{cases}.$$

最后, 假设 m 为偶数。若 α_1 满足 (2.3), 则有 $\alpha_1 \in \left(2\mathbb{N} - \frac{4k}{\tau}\right)^c$, k =0, 1, . . . , $\frac{m-2}{2}$且 $\alpha_1 \in \left(\frac{2}{\tau}\mathbb{N} - 4k + 2\right)^c$, $k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}$。也就是说, $\alpha_1 + \frac{4k}{\tau} \notin 2\mathbb{N}$, $k = 0, 1 \ldots, \frac{m-2}{2}$且 $\tau(\alpha_1 + 4k - 2) \notin 2\mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, \frac{m}{2}$。因此, $\alpha_{2k+1} = \alpha_1 + 4k + \frac{4k}{\tau} \notin 2\mathbb{N}$, $k = 0, \ldots, \frac{m-2}{2}$且 $\alpha_{2k} = \alpha_1\tau + (4k - 2)$ $\tau + 4k - 2 \notin 2\mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, \frac{m}{2}$。类似的论证可得, 若 m为奇数, 则对所有 $i = 1, \ldots, m$, $\alpha_i \notin 2\mathbb{N}$。□

特别地, 我们有 $\alpha_1 > 2$, $\alpha_2 = (\alpha_1 + 2)\tau + 2$, $\alpha_3 = \frac{\alpha_2+2}{\tau} + 2$, $\alpha_4 = (\alpha_3 + 2)\tau + 2$, $\alpha_5 = \frac{\alpha_4+2}{\tau} + 2$, ...此外, 我们有

$$4\pi\sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\alpha_i - 2\pi(\alpha_1 - 2) = (-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m + 2). \tag{2.8}$$

现在, 我们定义 β_i 如下: 若 m 为偶数, 则

$$\beta_l = \tau^{\nu(l)}\left[m - l + \frac{m-l+1}{\tau}\right] = \begin{cases} (m-l)\tau + m - l + 1, & \text{if } l \text{ is even} \\ m - l + \dfrac{m-l+1}{\tau} & \text{if } l \text{ is odd} \end{cases}, \tag{2.9}$$

对于 $l=1$、2、.....、m。若 m为奇数，则

$$\beta_l=\tau^{\nu(l)}\left[m-l+1+\frac{m-l}{\tau}\right]=\begin{cases}(m-l+1)\tau+m-l, & \text{if } l \text{ is even}\\ m-l+1+\dfrac{m-l}{\tau} & \text{if } l \text{ is odd}\end{cases} \tag{2.10}$$

对于 $l=1$、2、.....、m。无论如何，无论 m 是奇数还是偶数，都很容易验证，对于所有 $i=1$、.....、m， $\beta_m=1$ 和 $\beta_i>0$。注意，我们可以改写为

$$\beta_l=\tau^{\nu(l)}\left[\frac{m-l+1}{\tau^{\nu(m)}}+\frac{m-l}{\tau^{\nu(m+1)}}\right]. \tag{2.11}$$

因此，我们将根据定义证明以下有用性质（2.9）和（2.10）。注意$1-\sigma(i)=\nu(i)=\sigma(i+1)$ 和 $\sigma(i)=1-\nu(i)=\nu(i+1)$。

引理 2.3。 若 β_i由下列任一式给出：(2.9) 或 (2.10)，则对于任意 $l=2$、.....、m

$$\beta_l=\begin{cases}\tau\beta_{l-1}-\tau-1, & \textit{if } l \textit{ is even}\\ \dfrac{\beta_{l-1}}{\tau}-1-\dfrac{1}{\tau} & \textit{if } l \textit{ is odd}\end{cases} \tag{2.12}$$

并且对于任意 $l=1$、.....、$m-1$

$$\frac{\beta_l-1}{2\tau^{\nu(l)}}=(-1)^{\nu(l)}\sum_{j=l+1}^{m}\frac{(-1)^j}{\tau^{\nu(j)}}\beta_j. \tag{2.13}$$

此外 e，对于任意 $l=2,\ldots,m$，都有 $\frac{\beta_l}{\alpha_l}<\frac{\beta_{l-1}}{\alpha_{l-1}}$，因此，当 $\rho\to 0$时，对于任意 $i<j$， .

证明： 首先，假设 m 为偶数。因此， β_l由（2.9）给出。若 l 为偶数，则有 $l-1$为奇数，因此，

$$\beta_{l-1}=m-l+1+\frac{m-l+2}{\tau} \qquad \text{and}$$

$$\tau\beta_{l-1}-\tau-1=(m-l)\tau+\tau+m-l+2-\tau-1=\beta_l.$$

接下来，假设 l 为奇数（此时 m 仍为偶数）。与上文类似，可得 $\frac{\beta_{l-1}}{\tau}-1-\frac{1}{\tau}=\beta_l$。对于 β_l在 2.10）中给出的情形，若 m 为奇数，则用同样的方法推理，可得（2.12）。

现在，对于任意 m，我们将证明

$$\beta_l=\begin{cases}1+2\displaystyle\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}\tau^{\sigma(i)}\beta_{l+i}, & \text{if } l \text{ is even}\\ 1+2\displaystyle\sum_{i=1}^{m-l}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\sigma(i)}}\beta_{l+i} & \text{if } l \text{ is odd}\end{cases}. \tag{2.14}$$

假设 m 为偶数。若 l 为偶数，则 $\nu(i+l)=1-\sigma(i)$，由（2.11）可得

$$\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}\tau^{\sigma(i)}\beta_{l+i}=\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}\tau\left[\frac{\beta_l}{\tau}-\left(1+\frac{1}{\tau}\right)i\right]=\beta_l\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}-(\tau+1)\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}i$$

并且（2.14）由此可得，鉴于 $m-l$ 为偶数，$\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}=0$ 以及 $\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}i=-\frac{m-l}{2}$. 接下来，假设 l 为奇数（仍然 m 为偶数），因此 $\nu(i+l)=\sigma(i)$，与上文类似

$$\sum_{i=1}^{m-l}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\sigma(i)}}\beta_{l+i}=\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}\left[\beta_l-\left(1+\frac{1}{\tau}\right)i\right]=\beta_l\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}-\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}i=\frac{\beta_l-1}{2},$$

鉴于 $m-l$ 是奇数，$\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}=1$ 且 $\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}i=\frac{m-l+1}{2}$. 以同样的方式对$\beta_l$，其由 (2.10) 给出。当 m 是奇数时，我们得出 (2.14)。现在，由 (2.14) 取 $j=l+i$ 可得

若 l 是偶数，则

$$\beta_l = 1 + 2\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}\tau^{\sigma(i)}\beta_{l+i} = 1 + 2\sum_{j=l+1}^{m}(-1)^{j+1}\frac{\tau}{\tau^{\nu(j)}}\beta_j$$

鉴于 $\sigma(j-l) = \sigma(j) = 1-\nu(j)$，且如果 l 为奇数，则

$$\beta_l = 1 + 2\sum_{i=1}^{m-l}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\sigma(i)}}\beta_{l+i} = 1 + 2\sum_{j=l+1}^{m}\frac{(-1)^{j}}{\tau^{\nu(j)}}\beta_j,$$

鉴于 $\sigma(j-l) = \nu(j)$。因此，我们推得（2.13）。

现在，我们知道 $0 < \alpha_{l-1} + \alpha_{l-1}\tau + 2\beta_{l-1} + 2\beta_{l-1}\tau$ 对于任意 l。因此，对于 l 偶数，我们有 $\beta_l = \tau\beta_{l-1} - \tau - 1$ 以及 $\alpha_l = (\alpha_{l-1}+2)\tau + 2$ 分别利用（2.12）和（2.6），从而得到

$$\alpha_{l-1}[\tau\beta_{l-1} - \tau - 1] < [(\alpha_{l-1}+2)\tau + 2]\beta_{l-1} \iff \alpha_{l-1}\beta_l < \alpha_l\beta_{l-1}$$

利用（2.6）和（2.12），对于 l 奇数，我们有 $\beta_l = \frac{\beta_{l-1}}{\tau} - \frac{1}{\tau} - 1$ 以及 $\alpha_l = \frac{\alpha_{l-1}+2}{\tau} + 2$，容易验证 $\alpha_{l-1}\beta_l < \alpha_l\beta_{l-1}$。因此，我们推得 $\frac{\delta_i}{\delta_j} \to 0$ 当 $\rho \to 0$ 对于任意 $i < j$时，鉴于

$$\frac{\delta_i}{\delta_j} = \frac{d_i^{1/\alpha_i}\rho^{\beta_i/\alpha_i}}{d_j^{1/\alpha_j}\rho^{\beta_j/\alpha_j}} = \frac{d_i^{1/\alpha_i}}{d_j^{1/\alpha_j}}\rho^{\frac{\beta_i}{\alpha_i}-\frac{\beta_j}{\alpha_j}} \qquad \text{and} \qquad \frac{\beta_j}{\alpha_j} < \frac{\beta_i}{\alpha_i}.$$

至此，证明完成。 □

现在，我们定义 d_i's 如下:

$$\log d_m = a_m \quad \text{and} \quad \log d_l = a_l + 2\tau^{\nu(l)}\sum_{i=l+1}^{m}\frac{a_i}{\tau^{\nu(i)}} = \begin{cases} a_l + 2\displaystyle\sum_{i=l+1}^{m} a_i\tau^{\sigma(i)}, & \text{if } l \text{ is even} \\ a_l + 2\displaystyle\sum_{i=l+1}^{m}\frac{a_i}{\tau^{\nu(i)}} & \text{if } l \text{ is odd} \end{cases} \tag{2.15}$$

对于 $l = 1$、2、. . .、$m-1$，其中

$$a_l = \log\left(\frac{\tau^{\nu(l)}V_{\nu(l)}(0)}{2\alpha_l^2}\right) + \frac{(-1)^l}{\tau^{\sigma(l)}}2\pi(\alpha_m+2)h_0 = \begin{cases} \log\left(\dfrac{\tau V_1(0)}{2\alpha_l^2}\right) + 2\pi(\alpha_m+2)h_0, & \text{if } l \text{ is even} \\ \log\left(\dfrac{V_0(0)}{2\alpha_l^2}\right) - \dfrac{2\pi}{\tau}(\alpha_m+2)h_0 & \text{if } l \text{ is odd} \end{cases} \tag{2.16}$$

当 m 为偶数时，而当 m 为奇数时

$$\begin{aligned} a_l &= \log\left(\frac{\tau^{\nu(l)}V_{\nu(l)}(0)}{2\alpha_l^2}\right) + (-1)^{l+1}\tau^{\nu(l)}2\pi(\alpha_m+2)h_0 \\ &= \begin{cases} \log\left(\dfrac{\tau V_1(0)}{2\alpha_l^2}\right) - 2\pi(\alpha_m+2)\tau h_0, & \text{if } l \text{ is even} \\ \log\left(\dfrac{V_0(0)}{2\alpha_l^2}\right) + 2\pi(\alpha_m+2)h_0 & \text{if } l \text{ is odd} \end{cases}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

引理 2.4. 若 d_i由 (2.15) 给出，则对于任意 $l = 1$, ..., $m-1$

$$\log d_l = \begin{cases} a_l + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}\tau^{\sigma(i)}\log d_{l+i}, & \textit{if } l \textit{ is even} \\ a_l + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{m-l}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\sigma(i)}}\log d_{l+i} & \textit{if } l \textit{ is odd} \end{cases} \tag{2.18}$$

因此，

$$\frac{\log d_l - a_l}{2\tau^{\nu(l)}} = (-1)^{\nu(l)} \sum_{j=l+1}^{m} \frac{(-1)^j}{\tau^{\nu(j)}} \log d_j. \tag{2.19}$$

证明： 首先，假设 m 为偶数。因此， a_l由（2.16）给出。若 l 为偶数，则有$\nu（i+l）=1-\sigma（i）$，$\frac{\tau}{\tau^{\nu(j)}} = \tau^{\sigma(j)}$ 并且 $m-l$ 为偶数，因此， $\sigma（m-l）=0$ 以及

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m-l}(-1)^{i+1}\tau^{\sigma(i)}\log d_{l+i} &= \sum_{i=1}^{m-l-1}(-1)^{i+1}\tau^{\sigma(i)}\Big[a_{l+i} + 2\tau^{\nu(l+i)}\sum_{j=l+i+1}^{m}\frac{a_j}{\tau^{\nu(j)}}\Big] - a_m \\
&= \sum_{i=1}^{m-l-1}(-1)^{i+1}\tau^{\sigma(i)}a_{l+i} + 2\tau\sum_{i=1}^{m-l-1}\sum_{j=l+i+1}^{m}(-1)^{i+1}\frac{a_j}{\tau^{\nu(j)}} - a_m \\
&= \sum_{j=l+1}^{m-1}(-1)^{j+1}\tau^{\sigma(j)}a_j + \sum_{j=l+2}^{m}[1+(-1)^j]a_j\tau^{\sigma(j)} - a_m = \sum_{j=l+1}^{m} a_j\tau^{\sigma(j)}
\end{aligned}$$

并且（2.18）得证。与上述情况类似，若 l 为奇数，则有 $\nu（i+l）=\sigma（i）$，$\frac{\tau}{\tau^{\nu(j)}} = \tau^{\sigma(j)}$ 并且 $m-l+1$ 为偶数，因此， $\sigma（m-l+1）=0$ 以及

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m-l}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\sigma(i)}}\log d_{l+i} &= \sum_{i=1}^{m-l-1}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\sigma(i)}}a_{l+i} + 2\sum_{i=1}^{m-l-1}\sum_{j=l+i+1}^{m}(-1)^{i+1}\frac{a_j}{\tau^{\nu(j)}} + \frac{a_m}{\tau} \\
&= \sum_{j=l+1}^{m-1}\frac{(-1)^j}{\tau^{\nu(j)}}a_j + \sum_{j=l+2}^{m}[1+(-1)^{j+1}]\frac{a_j}{\tau^{\nu(j)}} + \frac{a_m}{\tau} = \sum_{j=l+1}^{m}\frac{a_j}{\tau^{\nu(j)}}
\end{aligned}$$

从而得出（2.18）。当 m 为奇数时，类似的论证同样成立。利用变换 $j=l+i$，可推出（2.19）。证明完毕。□

现在， $\epsilon=\epsilon(\rho)$ 选取为使得

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\gamma_i = 2\pi(\alpha_1-2), \qquad \text{where} \quad \gamma_j = \gamma_{\delta_j,\epsilon}^{\alpha_j}, \quad j=1,\dots,m \tag{2.20}$$

且 $\gamma_{\delta,\ \epsilon}^{\alpha}$ 见引理 2.1。具体而言， $\epsilon=\epsilon（\rho）$ 由下式给出

$$\epsilon^{\alpha_1-2} = \begin{cases} \dfrac{[V_0(0)]^m[\tau V_1(0)]^{\frac{m}{\tau}}}{\prod_{i=1}^{m}\alpha_i^{4/\tau^{\nu(i)}}} e^{\frac{2\pi}{\tau}(\alpha_m+2)h_0}\Big(\dfrac{\rho}{2}\Big)^{m+\frac{m}{\tau}} & \text{if } m \text{ is even} \\ \dfrac{[V_0(0)]^{m+1}[\tau V_1(0)]^{\frac{m-1}{\tau}}}{\prod_{i=1}^{m}\alpha_i^{4/\tau^{\nu(i)}}} e^{2\pi(\alpha_m+2)h_0}\Big(\dfrac{\rho}{2}\Big)^{m+1+\frac{m-1}{\tau}} & \text{if } m \text{ is odd} \end{cases} \tag{2.21}$$

容易验证，当 $\rho\to 0^+$ 时， $\epsilon(\rho)\to 0^+$。此外，根据 $\epsilon^{\alpha_1-2}\sim\rho^{\beta_1+1}$，有

$$\beta_1 = \begin{cases} m-1+\frac{m}{\tau} & \text{if } m \text{ is even} \\ m+\frac{m-1}{\tau} & \text{if } m \text{ is odd} \end{cases} \tag{2.22}$$

引理 2.5。 若 ϵ 由 （2.21）给出，则成立 （2.20），且 $\frac{\epsilon}{\delta_1}\to 0$ 当 $\rho\to 0$时成立。

证明： 首先，假设 m 为偶数，则由（2.21）可得

$$(\alpha_1-2)\log\epsilon = m\log V_0(0) + \frac{m}{\tau}\log[\tau V_1(0)] + \frac{2\pi}{\tau}(\alpha_m+2)h_0 - 4\sum_{i=1}^{m}\frac{\log\alpha_i}{\tau^{\nu(i)}} + \Big(m+\frac{m}{\tau}\Big)\log\Big(\frac{\rho}{2}\Big).$$

另一方面，根据 δ_i 和 γ_i 的定义可知

$$\Big[-\frac{1}{2\pi}\log\epsilon + h_0\Big]\gamma_i = -2\log d_i - 2\beta_i\log\rho + 4\pi\alpha_i h_0$$

因此，

$$\Big[-\frac{1}{2\pi}\log\epsilon+h_0\Big]\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\gamma_i=-2\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\log d_i-2\log\rho\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\beta_i+4\pi h_0\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\alpha_i.$$

因此，我们按如下方式计算所涉及的求和。由引理 2.4 可知，对于任意 m，无论是奇数还是偶数，

$$\log d_1=a_1+2\sum_{j=2}^{m}\frac{(-1)^j}{\tau^{\nu(j)}}\log d_j.$$

然后利用（2.15）以及 $m=2k$ 对某个 $k\in$ 属于 IN，我们得到

$$\begin{aligned}
&-\sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^j}{\tau^{\nu(j)}}\log d_j=\frac{a_1+\log d_1}{2}=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{\tau^{\nu(i)}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\tau}\left[\log[\tau V_1(0)]+2\pi(\alpha_m+2)h_0-\log(2\alpha_{2i}^2)\right]\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k}\left[\log V_0(0)-\frac{2\pi}{\tau}(\alpha_m+2)h_0-\log(2\alpha_{2i-1}^2)\right]\\
&=\frac{m}{2}\log V_0(0)+\frac{m}{2\tau}\log[\tau V_1(0)]-\Big(m+\frac{m}{\tau}\Big)\frac{\log 2}{2}-2\sum_{i=1}^{m}\frac{\log\alpha_i}{\tau^{\nu(i)}}.
\end{aligned}$$

此外，根据（ β_i在（2.9）中的取值，容易验证

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\beta_i=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\left[m+\frac{m+1}{\tau}-\Big(1+\frac{1}{\tau}\Big)i\right]=\frac{m}{2}+\frac{m}{2\tau}.$$

因此，利用（2.7）可得

$$\begin{aligned}
&\Big[-\frac{1}{2\pi}\log\epsilon+h_0\Big]\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\gamma_i=-m\log V_0(0)-\frac{m}{\tau}\log[\tau V_1(0)]+\Big(m+\frac{m}{\tau}\Big)\log 2+4\sum_{i=1}^{m}\frac{\log\alpha_i}{\tau^{\nu(i)}}\\
&\quad-\Big(m+\frac{m}{\tau}\Big)\log\rho+4\pi h_0\Big(-m-\frac{m}{\tau}\Big)=-(\alpha_1-2)\log\epsilon+\frac{2\pi}{\tau}(\alpha_m+2)h_0-4\pi h_0\Big(m+\frac{m}{\tau}\Big)\\
&=-(\alpha_1-2)\log\epsilon+2\pi(\alpha_1-2)h_0,
\end{aligned}$$

结合 $\frac{\alpha_m+2}{\tau}-2m-\frac{2m}{\tau}=\alpha_1-2$ 和（2.20），结论成立。类似地，当 m 为奇数时，可证明（2.20）。

最后，结合（2.22）、（2.21）以及 $\delta_1^{\alpha_1}=d_1\rho^{\beta_1}$，我们推得 $\frac{\epsilon}{\delta_1}\to 0\iff\frac{\beta_1+1}{\alpha_1-2}>\frac{\beta_1}{\alpha_1}$，根据 $\epsilon^{\alpha_1-2}\sim\rho^{\beta_1+1}$。事实上，很容易验证 $\frac{\beta_1+1}{\alpha_1-2}>\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}>\frac{\beta_1}{\alpha_1}$. 至此，证明完毕。□

我们强调， $\epsilon=\epsilon(\rho)$ 和 $\delta_j=\delta_j(\rho)$ 关于 ρ 的行为由下式给出

$$\frac{\epsilon}{\delta_j},\ \frac{\delta_i}{\delta_j}\to 0\quad\text{as}\quad\rho\to 0\ \text{ for }\ i<j\ \text{ and }\quad\epsilon\to 0\ \text{ as }\quad\rho\to 0.$$

假设 δ_i 由（2.2）给出，其中 α_i、 β_i 和 d_i 分别定义于（2.4）、（2.9）-（2.10）和（2.15），且 ϵ 由（2.21）给出。注意，对于所有 $j=1$、.....、 m，当 $\rho\to 0$ 时，$\frac{\log\delta_j}{\log\epsilon}=O(1)$。现在，定义收缩环域

$$A_i=\{x\in\Omega\mid\sqrt{\delta_{i-1}\delta_i}<|x|\le\sqrt{\delta_i\delta_{i+1}}\},\qquad j=1,\dots,m,$$

为简便起见，我们用 $M_0=\sup\{|x|:\ x\in\Omega\}$ 表示 $\delta_0=\frac{\epsilon^2}{\delta_1}$ 和 $\delta_{m+1}=\frac{M_0^2}{\delta_m}$，因此，当 $\rho\to 0$ 时，对于每个 $j=1,\dots,m$， $\Omega_\epsilon=\cup_{j=1}^{m}A_j$, $\cap_{j=1}^{m}A_j=\emptyset$ 和 $\frac{A_j}{\delta_j}$ 都趋近于 IR^2。

引理 2.6. 存在 $\eta > 0$，使得以下展开式成立

$$\begin{aligned} U(\delta_j y) = \frac{(-1)^{j+1}}{\tau^{\nu(j)}} \left[-2\log\delta_j - a_j - \log\rho + \log\frac{|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2} \right] \\ + (-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)H(\delta_j y, 0) + O\left(\rho^{\eta}\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

对于任意 $j = 1, \ldots, m$，关于 $\delta_j y \in A_j$, $j = 1, \ldots, m$ 一致成立。

证明：根据 $P_\epsilon w_j$、$j = 1$、……、m 以及引理 γ_j 中的定义 2.1，(2.8) 和 (2.20) 的展开式可得

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}} \left[w_i - \log(2\alpha_i^2 \delta_i^{\alpha_i}) \right] + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}} \gamma_i \log|x| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}} \left[4\pi\alpha_i - \gamma_i \right] H(x,0) + O\left(\sum_{j=1}^{m} \left[\delta_j^{\alpha_j} + \left(\frac{\epsilon}{\delta_j}\right)^{\alpha_j} \right] + \epsilon \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}} \log\frac{1}{(\delta_i^{\alpha_i} + |x|^{\alpha_i})^2} + (\alpha_1 - 2)\log|x| + (-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)H(x,0) \\ &\quad + O\left(\rho^{\eta}\right), \end{aligned} \tag{2.24}$$

其中我们取

$$0 < \eta \leq \min\left\{ 1, \frac{\beta_1+1}{\alpha_1-2}, \min\left\{ \alpha_j \left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1-2} - \frac{\beta_j}{\alpha_j} \right) \ : \ j = 1, \ldots, m \right\} \right\}, \tag{2.25}$$

鉴于 β_j 是递减的，因此 $\delta_j^{\alpha_j} = O(\rho)$ 对所有 $j = 1$、……、m，$\left(\frac{\epsilon}{\delta_j}\right)^{\alpha_j} = O\left(\rho^{\alpha_j(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1-2} - \frac{\beta_j}{\alpha_j})}\right)$ 和 $\epsilon = O\left(\rho^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1-2}}\right)$。现在，根据 (δ_i中的取值 2.2)、(2.13) 和 (2.19) 中对 j 为奇数

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=j+1}^{m} \frac{(-1)^i}{\tau^{\nu(i)}} \alpha_i \log\delta_i &= 2\sum_{i=j+1}^{m} \frac{(-1)^i}{\tau^{\nu(i)}} \log d_i + 2\log\rho \sum_{i=j+1}^{m} \frac{(-1)^i}{\tau^{\nu(i)}} \beta_i \\ &= 2\frac{\log d_j - a_j}{2} + 2\frac{\beta_j - 1}{2}\log\rho = \alpha_j\log\delta_j - a_j - \log\rho \end{aligned}$$

类似地，对于 j 偶数 $2\sum_{i=j+1}^{m}\frac{(-1)^i}{\tau^{\nu(i)}}\alpha_i)\log\delta_i = -\frac{1}{\tau}\left[\alpha_j \log\ \delta_j - a_j - \log\ \rho\right]$. 因此，我们改写为

$$2\sum_{i=j+1}^{m} \frac{(-1)^i}{\tau^{\nu(i)}} \alpha_i \log\delta_i = \frac{(-1)^{j+1}}{\tau^{\nu(j)}} \left[\alpha_j \log\delta_j - a_j - \log\rho \right]. \tag{2.26}$$

另一方面，对于任意 $y \in \frac{A_1}{\delta_1}$，有

$$\begin{aligned} U(\delta_1 y) =& -2\alpha_1 \log \delta_1 + \log \frac{1}{(1+|y|^{\alpha_1})^2} + (\alpha_1 - 2)\log(\delta_1|y|) \\ &+ \sum_{i=2}^{m} \frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}} \log \frac{1}{(\delta_i^{\alpha_i} + \delta_1^{\alpha_i}|y|^{\alpha_i})^2} + (-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)H(\delta_1 y, 0) + O\left(\rho^{\eta}\right) \\ =& -(\alpha_1+2)\log\delta_1 + \sum_{i=2}^{m}(-1)^i \frac{2\alpha_i}{\tau^{\nu(i)}}\log\delta_i + \log\frac{|y|^{\alpha_1-2}}{(1+|y|^{\alpha_1})^2} \\ &+ \sum_{i=2}^{m}\frac{(-1)^i}{\tau^{\nu(i)}} 2\log\left(1+\left(\frac{\delta_1|y|}{\delta_i}\right)^{\alpha_i}\right) + (-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)H(\delta_1 y,0) + O\left(\rho^{\eta}\right) \\ =& -2\log\delta_1 - a_1 - \log\rho + \log\frac{|y|^{\alpha_1-2}}{(1+|y|^{\alpha_1})^2} + (-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)H(\delta_1 y,0) \\ &+ O\left(\sum_{j=2}^{m}\left(\frac{\delta_1}{\delta_j}\right)^{\frac{\alpha_j}{2}} + \rho^{\eta}\right), \end{aligned} \tag{2.27}$$

鉴于（2.26）和

$$\log\left(1+\left(\frac{\delta_1|y|}{\delta_i}\right)^{\alpha_i}\right) = O\left(\left(\frac{\delta_1|y|}{\delta_i}\right)^{\alpha_i}\right) = O\left(\left(\frac{\delta_1}{\delta_i}\right)^{\frac{\alpha_i}{2}}\right), \quad i = 2,\dots,m.$$

选取 $\eta > 0$ 满足（2.25）和

$$0 < \eta \le \frac{1}{2}\min\left\{\alpha_i\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} - \frac{\beta_i}{\alpha_i}\right) \ : \ 1 < i\right\} \tag{2.28}$$

我们得到 $\left(\frac{\delta_1}{\delta_i}\right)^{\frac{\alpha_i}{2}} = O(\rho^{\eta})$、$i = 2$、……、$m$.。类似地，对于 $y \in \frac{A_j}{\delta_j}$，$1 < j < m$，我们发现

$$\begin{aligned} U(\delta_j y) =& \sum_{i=1}^{j-1}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\left[-2\alpha_i\log(\delta_j|y|) - 2\log\left(1+\left(\frac{\delta_i}{\delta_j|y|}\right)^{\alpha_i}\right)\right] + (\alpha_1-2)\log(\delta_j|y|) \\ &+ \frac{(-1)^{j+1}}{\tau^{\nu(j)}}\left[-2\alpha_j\log\delta_j + \log\frac{1}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\right] + \sum_{i=j+1}^{m}\frac{(-1)^i}{\tau^{\nu(i)}}2\alpha_i\log\delta_i \\ &+ \sum_{i=j+1}^{m}\frac{(-1)^i}{\tau^{\nu(i)}}2\log\left(1+\left(\frac{\delta_j|y|}{\delta_i}\right)^{\alpha_i}\right) + (-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)H(\delta_j y,0) + O\left(\rho^{\eta}\right) \\ =& -2\log\delta_j\sum_{i=1}^{j}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\alpha_i + 2\sum_{i=j+1}^{m}\frac{(-1)^i}{\tau^{\nu(i)}}\alpha_i\log\delta_i + (\alpha_1-2)\log\delta_j + (\alpha_1-2)\log|y| \\ &- 2\log|y|\sum_{i=1}^{j-1}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\alpha_i + \frac{(-1)^{j+1}}{\tau^{\nu(j)}}\log\frac{1}{(1+|y|^{\alpha_j})^2} \\ &+ (-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)H(\delta_j y,0) + O\left(\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{\delta_i}{\delta_j}\right)^{\frac{\alpha_i}{2}} + \sum_{i=j+1}^{m}\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\frac{\alpha_i}{2}} + \rho^{\eta}\right), \end{aligned} \tag{2.29}$$

鉴于

$$\log\left(1+\left(\frac{\delta_i}{\delta_j|y|}\right)^{\alpha_i}\right) = O\left(\left(\frac{\delta_i}{\delta_j|y|}\right)^{\alpha_i}\right) = O\left(\left(\frac{\delta_i}{\delta_j}\right)^{\frac{\alpha_i}{2}}\right), \quad i < j,$$

$$\log\left(1+\left(\frac{\delta_j|y|}{\delta_i}\right)^{\alpha_i}\right) = O\left(\left(\frac{\delta_j|y|}{\delta_i}\right)^{\alpha_i}\right) = O\left(\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\frac{\alpha_i}{2}}\right), \quad j < i,$$

并通过使用 再次（2.20）。现在，我们选择 η 使其满足（2.25）、（2.28），并在必要时取更小的值，以便 t

$$0<\eta\le\frac{1}{2}\min\Big\{\alpha_i\Big(\frac{\beta_i}{\alpha_i}-\frac{\beta_j}{\alpha_j}\Big)\ :\ i<j\Big\},\quad j=2,\dots,m$$

and

$$0<\eta\le\frac{1}{2}\min\Big\{\alpha_i\Big(\frac{\beta_j}{\alpha_j}-\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big)\ :\ j<i\Big\},\quad j=1,\dots,m-1$$

因此，$\big(\frac{\delta_i}{\delta_j}\big)^{\frac{\alpha_j}{2}}=O(\rho^\eta)$，$i<j$且$\big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\big)^{\frac{\alpha_j}{2}}=O(\rho^\eta)$，$j<i$。因此，利用 (2.7) 和 (2.26) 对于 j偶数情形，我们得到

$$\begin{aligned}U(\delta_j y)&=-2\log\delta_j\Big[-j-\frac{j}{\tau}\Big]-\frac{1}{\tau}\left[\alpha_j\log\delta_j-a_j-\log\rho\right]+(\alpha_1-2)\log\delta_j+(\alpha_1-2)\log|y|\\&-2\log|y|\left[\alpha_1+j-2+\frac{j-2}{\tau}\right]-\frac{1}{\tau}\log\frac{1}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}+(-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)H(\delta_j y,0)+O\left(\rho^\eta\right)\end{aligned}$$

并得出 (2.23)。类似地，对于 j 奇数情形，我们得到

$$\begin{aligned}U(\delta_j y)&=-2\log\delta_j\Big[\alpha_1+j-1+\frac{j-1}{\tau}\Big]+\alpha_j\log\delta_j-a_j-\log\rho+(\alpha_1-2)\log\delta_j+(\alpha_1-2)\log|y|\\&-2\log|y|\left[-j+1-\frac{j-1}{\tau}\right]+\log\frac{1}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}+(-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)H(\delta_j y,0)+O(\rho^\eta)\end{aligned}$$

并得到 (2.23)。此外，对于任意 $y\in\frac{A_m}{\delta_m}$

$$\begin{aligned}U(\delta_m y)&=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(-1)^{i+1}}{\tau^{\nu(i)}}\left[-2\alpha_i\log(\delta_m|y|)-2\log\left(1+\Big(\frac{\delta_i}{\delta_m|y|}\Big)^{\alpha_i}\right)\right]+(\alpha_1-2)\log(\delta_m|y|)\\&+\frac{(-1)^{m+1}}{\tau^{\nu(m)}}\left[-2\alpha_m\log\delta_m+\log\frac{1}{(1+|y|^{\alpha_m})^2}\right]+(-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)H(\delta_m y,0)+O(\rho^\eta)\\&=\frac{(-1)^{m+1}}{\tau^{\nu(m)}}\left[-2\log\delta_m-a_m-\log\rho+\log\frac{|y|^{\alpha_m-2}}{(1+|y|^{\alpha_m})^2}+2\pi(\alpha_m+2)H(\delta_m y,0)\right]+O(\rho^\eta).\end{aligned}\tag{2.30}$$

证明至此完成。 □

3. Problem in Liouville form (1.1)

3.1. 误差估计。 为了评估近似 U 满足方程（1.1）（并得到线性化算子的可逆性）的程度，我们将使用以下范数

$$\|h\|_p=\left(\int_{\Omega_\epsilon}|h(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\qquad\text{and}\qquad\|h\|=\left(\int_{\Omega_\epsilon}|\nabla h(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

Banach空间 $L^p(\Omega_\epsilon)$ 和 $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ 中的通常范数。假设 δ_i由（2.2）给出，其中 α_i、 β_i和 d_i分别由（2.4）、（2.9）-（2.10）和（2.15）定义，而 ϵ 由（2.21）给出。接下来评估 U在 $\|\cdot\|_p$中的近似阶，如（1.12）所示

引理 3.1。存在 $\rho_0>0$、常数 $C>0$ 和 $1<p_0<2$，使得对于任意 $\rho\in(0,\rho_0)$ 和$p\in(1,p_0)$，均有

$$\|R\|_p\le C\rho^{\eta_p}\tag{3.1}$$

其中某个 $\eta_p>0$。

证明：首先，注意到 $\Delta U=\sum_{i=1}^m\frac{(-1\ ^i}{\tau^{\nu(i)}}|x|^{\alpha_i-2}e^{w_i}\ )$，因此对于任意 $1<j<m$ 和 $y\in\frac{A_j}{\delta_j}$，我们有

$$\Delta U(\delta_j y)=\frac{(-1)^j}{\tau^{\nu(j)}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{\delta_j^2(1+|y|^{\alpha_j})^2}+O\Big(\sum_{i=1}^{j-1}\Big(\frac{\delta_i}{\delta_j}\Big)^{\alpha_i}\frac{1}{\delta_j^2|y|^{\alpha_i+2}}+\sum_{i=j+1}^{m}\Big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_i}\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\delta_j^2}\Big).\tag{3.2}$$

类似地，我们得到

$$\Delta U(\delta_1 y)=-\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{\delta_j^2(1+|y|^{\alpha_j})^2}+O\Big(\sum_{i=2}^{m}\Big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_i}\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\delta_j^2}\Big),\qquad y\in\frac{A_1}{\delta_1} \tag{3.3}$$

and

$$\Delta U(\delta_m y)=\frac{(-1)^m}{\tau^{\nu(m)}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{\delta_j^2(1+|y|^{\alpha_j})^2}+O\Big(\sum_{i=1}^{m-1}\Big(\frac{\delta_i}{\delta_j}\Big)^{\alpha_i}\frac{1}{\delta_j^2|y|^{\alpha_i+2}}\Big),\qquad y\in\frac{A_m}{\delta_m} \tag{3.4}$$

利用 (2.16) 和 (2.23)（引理 2.6）可得，对于 $y\in\frac{A_j}{\delta_j}$ 以及任意 j 奇数，我们有

$$\begin{aligned}\rho V_0(\delta_j y)e^{U(\delta_j y)}&=\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{\delta_j^2(1+|y|^{\alpha_j})^2}\frac{V_0(\delta_j y)}{V_0(0)}\exp\Big((-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)[H(\delta_j y,0)-h_0]+O(\rho^\eta)\Big)\\&=\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{\delta_j^2(1+|y|^{\alpha_j})^2}\left[1+O(\delta_j|y|+\rho^\eta)\right]\end{aligned} \tag{3.5}$$

and

$$\begin{aligned}&\rho V_1(\delta_j y)e^{-\tau U(\delta_j y)}=\rho V_1(\delta_j y)\exp\Big(-\tau\Big[-2\log\delta_j-a_j-\log\rho+\log\frac{|y|^{\alpha_j-2}}{\delta_j^2(1+|y|^{\alpha_j})^2}\\&+(-1)^{m+1}\frac{2\pi}{\tau^{\nu(m)}}(\alpha_m+2)H(\delta_j y,0)\Big]+O(\rho^\eta)\Big)=O\Big(\rho^{1+\tau}\delta_j^{2\tau}\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)\tau}}\Big),\end{aligned} \tag{3.6}$$

类似地，利用 (2.17) 以及 $1-\nu(m)=\sigma(m)$，对于 $y\in\frac{A_j}{\delta_j}$和 j 偶数

$$\begin{aligned}\rho V_1(\delta_j y)e^{-\tau U(\delta_j y)}&=\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{\delta_j^2\tau(1+|y|^{\alpha_j})^2}\frac{V_1(\delta_j y)}{V_1(0)}\exp\Big((-1)^m 2\pi\tau^{\sigma(m)}(\alpha_m+2)[H(\delta_j y,0)-h_0]+O(\rho^\eta)\Big)\\&=\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{\delta_j^2\tau(1+|y|^{\alpha_j})^2}\left[1+O(\delta_j|y|+\rho^\eta)\right]\end{aligned} \tag{3.7}$$

and

$$\rho V_0(\delta_j y)e^{U(\delta_j y)}=O\Big(\rho^{1+1/\tau}\delta_j^{2/\tau}\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2/\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)/\tau}}\Big). \tag{3.8}$$

因此，利用 (3.3)、(3.5) 和 (3.6)，对于 $\delta_1 y\in A_1$ 可得

$$R(\delta_1 y)=\frac{1}{\delta_1^2}\frac{2\alpha_1^2|y|^{\alpha_1-2}}{(1+|y|^{\alpha_1})^2}O(\delta_1|y|+\rho^\eta)+O\Big(\rho^{1+\tau}\delta_1^{2\tau}\frac{(1+|y|^{\alpha_1})^{2\tau}}{|y|^{(\alpha_1-2)\tau}}+\sum_{i=2}^{m}\Big(\frac{\delta_1}{\delta_i}\Big)^{\alpha_i}\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\delta_1^2}\Big), \tag{3.9}$$

利用 (3.2)、(3.5) 和 (3.6)，对于 $1<j<m$，j 奇数以及 $\delta_j y\in A_j$

$$\begin{aligned}R(\delta_j y)=&\frac{1}{\delta_j^2}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}O(\delta_j|y|+\rho^\eta)\\&+O\Big(\rho^{1+\tau}\delta_j^{2\tau}\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)\tau}}+\sum_{i=1}^{j-1}\Big(\frac{\delta_i}{\delta_j}\Big)^{\alpha_i}\frac{1}{\delta_j^2|y|^{\alpha_i+2}}+\sum_{i=j+1}^{m}\Big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_i}\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\delta_j^2}\Big),\end{aligned} \tag{3.10}$$

利用（3.2）、（3.7）和（3.8），对于 $1<j<m$，j 为偶数且 $\delta_j y\in A_j$

$$\begin{aligned}R(\delta_j y)=&\frac{1}{\delta_j^2\tau}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}O(\delta_j|y|+\rho^\eta)\\&+O\Big(\rho^{1+1/\tau}\delta_j^{2/\tau}\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2/\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)/\tau}}+\sum_{i=1}^{j-1}\Big(\frac{\delta_i}{\delta_j}\Big)^{\alpha_i}\frac{1}{\delta_j^2|y|^{\alpha_i+2}}+\sum_{i=j+1}^{m}\Big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_i}\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\delta_j^2}\Big)\end{aligned} \tag{3.11}$$

并利用（3.4），对于 $\delta_m y \in A_m$

$$\begin{aligned} R(\delta_m y) = & \frac{1}{\delta_m^2 \tau^{\nu(m)}} \frac{2\alpha_m^2 |y|^{\alpha_m - 2}}{(1+|y|^{\alpha_m})^2} O(\delta_m |y| + \rho^\eta) \\ & + O\left(\rho^{1+\tau^{(-1)^{m+1}}} \delta_m^{2\tau^{(-1)^{m+1}}} \frac{(1+|y|^{\alpha_m})^{2\tau^{(-1)^{m+1}}}}{|y|^{(\alpha_m-2)\tau^{(-1)^{m+1}}}} + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\delta_i}{\delta_m}\right)^{\alpha_i} \frac{1}{\delta_m^2 |y|^{\alpha_i+2}} \right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

由（3.9）-（3.12），我们最终得到，存在 $\rho_0 > 0$ 足够小且 $p_0 > 1$ 接近于 1，使得对于所有 $0 < \rho \le \rho_0$ 和 $1 < p \le p_0$

$$\int_{\Omega_\epsilon} |R(x)|^p \, dx = \sum_{j=1}^m \int_{A_j} |R(x)|^p \, dx = \sum_{j=1}^m \delta_j^2 \int_{A_j} |R(\delta_j y)|^p \, dy = O\left(\rho^{p\eta_p}\right),$$

对于某个 $\eta_p > 0$，更多细节请参见附录引理A.1 。证明至此完成 f. □

3.2. 非线性问题及定理**1.1**的证明。 在本小节中，我们将寻找（ u ）的一个解1.1，其形式为 $u = U + \phi$，其中余项 ϕ足够小。关于 ϕ，问题（1.1）等价于求 $\phi \in H_0^1(\Omega_\epsilon$，使得

$$\begin{cases} L(\phi) = -[R + \Lambda(\phi) + N(\phi)], & \text{in } \Omega_\epsilon, \\ \phi = 0, & \text{on } \partial\Omega_\epsilon. \end{cases} \tag{3.13}$$

其中线性算子 L 和 Λ 定义如下

$$L(\phi) = \Delta\phi + K(x)\phi, \quad K(x) = \sum_{i=1}^m |x|^{\alpha_i - 2} e^{w_i} \tag{3.14}$$

and

$$\Lambda(\phi) = \rho[V_0(x)e^U + \tau V_1(x)e^{-\tau U}]\phi - K\phi \tag{3.15}$$

非线性部分 N 由下式给出

$$N(\phi) = \rho V_0(x) e^U \left(e^\phi - \phi - 1\right) - \rho V_1(x) e^{-\tau U}\left(e^{-\tau\phi} + \tau\phi - 1\right). \tag{3.16}$$

命题 3.1. 对任意 $p > 1$，存在 $\rho_0 > 0$，使得对于所有 $0 < \rho \le \rho_0$，$h \in L^p(\Omega_\epsilon)$ 中存在唯一解 $\phi \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$，满足

$$\begin{cases} L(\phi) = h & \text{在 } \Omega_\epsilon \text{ 中} \\ \phi = 0 & \text{在 } \partial\Omega_\epsilon \text{ 上} \end{cases} \tag{3.17}$$

此外，存在一个与 ρ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\|\phi\| \le C |\log \rho| \|h\|_p. \tag{3.18}$$

后一个命题意味着，方程（ $\phi = T$（h）3.17）的唯一解定义了一个从 $L^p(\Omega_\epsilon)$ 到 $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ 的连续线性映射，其范数有界于 $C|\log \rho|$。现在我们可以研究这个非线性问题了。

命题 3.2. 存在 $p_0 > 1$ 和 $\rho_0 > 0$，使得对任意 $1 < p < p_0$ 及所有 $0 < \rho \le \rho_0$，问题

$$\begin{cases} L(\phi) = -[R + \Lambda(\phi) + N(\phi)], & in\ \Omega_\epsilon \\ \phi = 0, & on\ \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \tag{3.19}$$

存在唯一解 $\phi(\rho) \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$，其中 N， Λ和 R分别由 (3.16)、(3.15)和 (1.12)给出。此外，存在一个常数 $C > 0$，使得对于某个 $\eta_p > 0$

$$\|\phi\|_\infty \le C\rho^{\eta_p} |\log \rho|$$

这里， η_p 与（3.1）中的相同。我们将使用以下估计。

引理 3.2. 存在 $p_0 > 1$ 和 $\rho_0 > 0$，使得对任意 $1 < p < p_0$ 及所有 $0 < \rho \le \rho_0$，有

$$\|\Lambda(\phi)\|_p \le C\rho^{\eta_p'} \|\phi\|, \tag{3.20}$$

对于所有满足 $\|\phi\| \le M\rho^{\eta_p}|\log \rho|$的 $\phi \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$，其中某个 $\eta_p' > 0$。

证明： 以与 [13,引理 33],相同的方式推理，为简单起见，记 $W=\rho[V_0e^U+\tau V_1e^{-\tau U}]$，于是线性算子 Λ 可重写为 $\Lambda(\phi)=(W-K)\phi$。利用 (3.5)-(3.6) 以及 (3.7)-(3.8)，我们发现，当 i 为奇数时

$$\delta_i^2W(\delta_iy)=\frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|_i^{\alpha})^2}\left[1+O(|\delta_iy|+\rho^{\eta})\right]+O\Big(\rho^{1+\tau}\delta_i^{2+2\tau}\frac{(1+|y|^{\alpha_i})^{2\tau}}{|y|^{(\alpha_i-2)\tau}}\Big)$$

对 $\delta_iy\in A_i$ 和 i （偶数），一致地

$$\delta_i^2W(\delta_iy)=\frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|_i^{\alpha})^2}\left[1+O(|\delta_iy|+\rho^{\eta})\right]+O\Big(\rho^{1+1/\tau}\delta_i^{2+2/\tau}\frac{(1+|y|^{\alpha_i})^{2/\tau}}{|y|^{(\alpha_i-2)/\tau}}\Big)$$

对 $x\in A_i$ 和 i （偶数），一致地。因此，对于任意 $q\geq1$，以及对于 i （奇数），有

$$\begin{aligned}\|W-K\|^q_{L^q(A_i)}\leq C\Bigg[&\delta_i^{2-q}\int_{\frac{A_i}{\delta_i}}\left|\frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-1}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\right|^q dy+\rho^{\eta q}\delta_i^{2-2q}\int_{\frac{A_i}{\delta_i}}\left|\frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\right|^q dy\\&+\rho^{(1+\tau)q}\delta_i^{2+2\tau q}\int_{\frac{A_i}{\delta_i}}\left|\frac{(1+|y|^{\alpha_i})^{2\tau}}{|y|^{(\alpha_i-2)\tau}}\right|^q dy+\sum_{j<i}\delta_i^{2-2q}\Big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_jq}\int_{\frac{A_i}{\delta_i}}\left|\frac{1}{|y|^{\alpha_j+2}}\right|^q dy\\&+\sum_{j>i}\delta_i^{2-2q}\Big(\frac{\delta_i}{\delta_j}\Big)^{\alpha_jq}\int_{\frac{A_i}{\delta_i}}|y|^{(\alpha_j-2)q}dy\Bigg]\leq C\rho^{q\eta'_{1,q}}\end{aligned}$$

对于某个 $\eta'_{1,\ q}>0$，见引理 A.1。类似地，对于任意 $q\geq1$，且对于某个 $\eta'_{2,\ q}>0$，当 i 为偶数时，有 $\|W-K\|^q_{L^q(A_i)}\leq C\rho^{q\eta'_{2,\ q}}$。因此，我们得到

$$\|\Lambda(\phi)\|_p\leq\|(W-K)\,\phi\|_p\leq\|W-K\|_{pr}\,\|\phi\|_{ps}\leq C\rho^{\eta'_p}\|\phi\|,$$

其中 $\eta'_p=\min\left\{\eta'_{1,pr},\eta'_{2,ps}\right\}$，且 $r,\,s$ 满足 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$。此外，我们使用了 H¨older 不等式 $\|uv\|_q\leq\|u\|_{qr}\|v\|_{qs}$，其中 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$，以及对于任意 $r>1$，有包含关系 $L^p(\Omega_\epsilon)\hookrightarrow L^{pr}(\Omega_\epsilon)$，并且对于任意 $q>1$，有 $H_0^1(\Omega_\epsilon)\hookrightarrow L^q(\Omega_\epsilon)$。需要强调的是，我们可以选取 p、r 和 s，使它们充分接近 1，从而满足 $\eta'_p>0$。□

引理 3.3 。存在 $p_0>1$ 和 $\rho_0>0$，使得对于任意 $1<p<p_0$ 以及所有 $0<\rho\leq\rho_0$，它成立 ds

$$\|N(\phi_1)-N(\phi_2)\|_p\leq C\rho^{\eta''_p}\|\phi_1-\phi_2\| \tag{3.21}$$

对于所有满足 $\|\phi_i\|\leq M\rho^{\eta_p}|\log\ \rho|$ 的 $\phi_i\in H_0^1(\Omega_\epsilon)$，$i=1$、2，并且对于某个 $\eta''_p>0$。特别地，我们有

$$\|N(\phi)\|_p\leq C\rho^{\eta''_p}\ \|\phi\| \tag{3.22}$$

对于所有满足 $\|\phi\|\leq M\rho^{\eta_p}|\log\ \rho|$ 的 $\phi\in H_0^1(\Omega_\epsilon)$。

证明：我们将采用与 [1, 引理 5.1], 相同的方法进行论证，另见 [13, 引理 3.4]。首先，记$f_i(\phi)=V_i(x)e^{(-\tau)^i(U+\phi)}$，我们指出

$$N(\phi)=\sum_{i=0}^{1}\rho\left\{f_i(\phi)-f_i(0)-f_i'(0)[\phi]\right\}\quad\text{and}\quad N(\phi_1)-N(\phi_2)=\sum_{i=0}^{1}\rho f_i''(\tilde{\phi}_{\mu_i})[\phi_{\theta_i},\phi_1-\phi_2], \tag{3.23}$$

˜根据中值定理，其中 $\phi_{\theta_i}=\theta_i\phi_1+(1-\theta_i)\phi_2$，$\phi_{\mu_i}=\mu_i\phi_{\theta_i}$对于某个 θ_i、$\mu_i\in[0,1]$、$i=0$，1，且

$f_i''(\phi)[\psi,v]=\tau^{2i}V_i(x)e^{(-\tau)^i(U+\phi)}\psi v$. 利用 H¨older 不等式可得

$$\|f_i''(\phi)[\psi,v]\|_p\leq|\tau|^{2i}\|V_ie^{(-\tau)^i(U+\phi)}\|_{pr_i}\|\psi\|_{ps_i}\|v\|_{pt_i} \tag{3.24}$$

其中 $\frac{1}{r_i}+\frac{1}{s_i}+\frac{1}{t_i}=1$。我们使用了 H¨older 不等式，并且 $\|uvw\|_q\leq\|u\|_{qr}\|v\|_{qs}\|w\|_{qt}$ 其中 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1$。现在，我们来估计 $\|V_ie^{(-\tau)^i(U+\phi)}\|_{pr_i}$，其中 $\phi=\tilde{\phi}_{\mu_i}$，$i=0$，1。由（3.5）及变量替换 $x=\delta_iy$，我们来估计

$$\int_{A_i}\left|V_0e^U\right|^q dx=O\left(\rho^{-q}\delta_i^{2-2q}\int_{\frac{A_i}{\delta_i}}\left|\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\right|^q\left[1+O\big(\rho^{\eta}+\delta_i|y|\big)\right]^q\right)=O\left(\rho^{\frac{\beta_i}{\alpha_i}(2-2q)-q}\right) \tag{3.25}$$

对于任意 i 奇数，类似地，由（3.7）可得

$$\int_{A_i} \left|V_1 e^{-\tau U}\right|^q dx = O\left(\rho^{\frac{\beta_i}{\alpha_i}(2-2q)-q}\right) \tag{3.26}$$

对于任意 i 偶数，鉴于（2.2），由（3.6）可得估计

$$\int_{A_i} \left|V_0 e^{U}\right|^q dx \quad = \quad O\left(\rho^{\frac{q}{\tau}}\delta_i^{2+\frac{2q}{\tau}} \int\limits_{\frac{A_i}{\delta_i}} \left[\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\right]^{-\frac{q}{\tau}} dy\right) = O\big(\rho^{-q+q\eta_q}\big)$$

对于所有 i 偶数，鉴于引理 A.1。类似地，由（3.8）可推得

$$\int_{A_i} \left|V_1 e^{-\tau U}\right|^q dx = O(\rho^{-q+q\eta_q}) \tag{3.27}$$

对于 i 奇数，同样鉴于引理 A.1。因此，利用（3.25）和（3.27），并注意到 $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$ 是递减的，可推得

$$\left\|V_0 e^{U}\right\|_q^q = \sum_{\substack{i=1\\ i \text{ odd}}}^{m} O\left(\rho^{\frac{\beta_i}{\alpha_i}(2-2q)-q}\right) + O\big(\rho^{-q+q\eta_q}\big) = O\left(\rho^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}(2-2q)-q}\right) \quad \text{for any } q \geq 1 \tag{3.28}$$

并且，利用（3.26）和（3.27）可得

$$\left\|V_1 e^{-\tau U}\right\|_q^q = O\left(\rho^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}(2-2q)-q}\right) \quad \text{for any } q \geq 1. \tag{3.29}$$

另一方面，将估计 $|e^a - 1| \leq C|a|$ 应用于任意 a 的紧子集（范围为 IR）时，结合 H¨older 不等式（其中 $\frac{1}{s_i'} + \frac{1}{t_i'} = 1$、 $i = 0$、1、 $\|\tilde{\phi}_{\mu_i}\| \leq M\rho^{\eta_p}|\log\ \rho| \leq C$、 $i = 0$、1）以及三角不等式，可得

$$\left\|V_i e^{(-\tau)^i(U+\tilde{\phi}_{\mu_i})}\right\|_q = O\big(\rho^{\eta_{0,qs_i'}-1+\eta_p}|\log\rho| + \rho^{\eta_{0,q}-1}\big), \tag{3.30}$$

其中 $q > 1$ 我们记 $\eta_{0,\ q} = \frac{\beta_1}{(2-2q)\ \alpha_1 q}$（沿用 [17, 引理 3 的证明中式 (3.14) 的思路3]）。注意到$\eta_{0,\ q} < 0$ 对任意 $q > 1$。此外，取 q 和 s_i'，$i = 0$，1，且充分接近 1，可得 $0 < \eta_p + \eta_{0,\ qs_i'}$。现在，我们可以利用式 (3.23)-(3.30) 得出该估计：

$$\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_p \leq C\sum_{i=0}^{1} \rho\|V_i e^{(-\tau)^i(U+\tilde{\phi}_{\mu_i})}\|_{pr_i}\|\phi_{\theta_i}\|\|\phi_1 - \phi_2\| \leq C\sum_{i=0}^{1} \rho^{\eta_p+\eta_{0,pr_i}}|\log\rho|\|\phi_1 - \phi_2\|$$

并且 (3.21) 随之成立，其中 $\eta_p'' = \frac{1}{2}\min\{\eta_p + \eta_{0,pr_i} : \ i = 0,1\} > 0$ 取 r_i 接近 1，使得$\eta_p + \eta_{0,\ pr_i} > 0$ 对于 $i = 0$，1。需要强调的是，$p > 1$ 的选取满足 $\eta_p > 0$ 和 $\eta_p' > 0$。□

命题 3.2 的证明。结合命题 3.1、估计 (3.1)、(3.20)、(3.21)、(3.22) 及标准论证可知，对所有充分小的 $\rho > 0$，$\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{F}_M$ 上的压缩映射（当 M 足够大时），因此 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{F}_M$ 中存在唯一不动点，其中$\mathcal{A}(\phi) := -T(R + \Lambda(\phi) + N(\phi))$ 且 $\mathcal{F}_M = \{\phi \in H_0^1(\Omega_\epsilon) : \|\phi\| \leq M\rho^{\eta_p}|\log\ \rho|\}$。更多细节请参见 [13] 中命题 3.2 的证明。□

定理的证明 **1.1**。结合（1.10）以及 U 的定义，方程（1.1）存在解可由命题3.2直接推出。u_ρ 当 $\rho \to 0^+$ 时的渐近行为由引理 2.6 中的（2.23）以及命题 ϕ 3.2中的估计可得。此外，我们有 u_ρ当 1.6）时具有所需的集中性质 $\rho \to 0^+$，在 $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$ 中局部一致收敛。□

4. Problem in mean field form（1.2）

4.1. 误差估计。假设 δ_i由（2.2）给出，其中 α_i、 β_i和 d_i分别由（2.4）、（2.9）-（2.10）以及（2.15）定义，且 ϵ 由（2.21）给出。我们来估计 $\|\cdot\|_p$中的误差项，其在（1.13）中表示。

引理4.1。存在 $\rho_0>0$、一个常数 $C>0$ 和 $1<p_0<2$，使得对于任意 $\rho\in(0,\rho_0)$ 和$p\in(1,p_0)$，均有

$$\|\mathcal{R}\|_p\le C\rho^{\eta_p} \tag{4.1}$$

对于某个 $\eta_p>0$。

证明：利用（3.5）和（3.8），我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\epsilon}V_0(x)e^U&=\sum_{j=1}^m\int_{\frac{A_j}{\delta_j}}\delta_j^2V_0(\delta_jy)e^{U(\delta_jy)}dy=\sum_{\substack{j=1\\ j\text{ odd}}}^m\frac{1}{\rho}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\left[1+O(\delta_j|y|+\rho^\eta)\right]dy\\&+\sum_{\substack{j=1\\ j\text{ even}}}^m O\left(\rho^{1/\tau}\delta_j^{2+2/\tau}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}}\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2/\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)/\tau}}dy\right)=\frac{1}{\rho}\left[4\pi\sum_{\substack{j=1\\ j\text{ odd}}}^m\alpha_j+O(\rho^\eta)\right]\end{aligned} \tag{4.2}$$

类似地，由（3.6）和（3.7）可得

$$\int_{\Omega_\epsilon}V_1(x)e^{-\tau U}=\frac{1}{\rho\tau}\left[4\pi\sum_{\substack{j=1\\ j\text{ even}}}^m\alpha_j+O(\rho^\eta)\right], \tag{4.3}$$

鉴于 $\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{1+|y|^{\alpha_i}}()^2dy=\frac{2\pi}{\alpha_i}$. 由假设（1.8）-（1.9）可知 $\lambda_0=4\pi\sum_{j\text{为奇数}}^{j=1}{}^m\alpha_j$ 且 $\lambda_1\tau^2=4\pi\sum_{j\text{为偶数}}^{j=1}{}^m\alpha_j$ 因此，利用（4.2）-（4.3），可得当 $y\in\frac{A_j}{\delta_j}$ 以及任意 j 奇数

$$\lambda_0\frac{V_0(\delta_jy)e^{U(\delta_jy)}}{\int_{\Omega_\epsilon}V_0(x)e^U}=\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{\delta_j^2(1+|y|^{\alpha_j})^2}\left[1+O(\delta_j|y|+\rho^\eta)\right] \tag{4.4}$$

and

$$\lambda_1\tau\frac{V_1(\delta_jy)e^{-\tau U(\delta_jy)}}{\int_{\Omega_\epsilon}V_1(x)e^{-\tau U}}=O\left(\rho^{1+\tau}\delta_j^{2\tau}\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)\tau}}\right). \tag{4.5}$$

类似地，对于任意 $y\in\frac{A_j}{\delta_j}$ 以及 j 偶数

$$\lambda_0\frac{V_0(\delta_jy)e^{U(\delta_jy)}}{\int_{\Omega_\epsilon}V_0(x)e^U}=O\left(\rho^{1+1/\tau}\delta_j^{2/\tau}\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2/\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)/\tau}}\right) \tag{4.6}$$

and

$$\lambda_1\tau\frac{V_1(\delta_jy)e^{-\tau U(\delta_jy)}}{\int_{\Omega_\epsilon}V_1(x)e^{-\tau U}}=\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{\delta_j^2\tau(1+|y|^{\alpha_j})^2}\left[1+O(\delta_j|y|+\rho^\eta)\right]. \tag{4.7}$$

因此，类似于 引理 3.1 的证明，利用（3.2）-（3.4）以及（4.4）-（4.7），对于 $\delta_1y\in A_1$ 我们得到 t

$$\mathcal{R}(\delta_1y)=\frac{1}{\delta_1^2}\frac{2\alpha_1^2|y|^{\alpha_1-2}}{(1+|y|^{\alpha_1})^2}O(\delta_1|y|+\rho^\eta)+O\left(\rho^{1+\tau}\delta_1^{2\tau}\frac{(1+|y|^{\alpha_1})^{2\tau}}{|y|^{(\alpha_1-2)\tau}}+\sum_{i=2}^m\left(\frac{\delta_1}{\delta_i}\right)^{\alpha_i}\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\delta_1^2}\right), \tag{4.8}$$

对于 $1<j<m$、j 为奇数且 $\delta_jy\in A_j$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\delta_jy)=&\frac{1}{\delta_j^2}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}O(\delta_j|y|+\rho^\eta)\\&+O\left(\rho^{1+\tau}\delta_j^{2\tau}\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)\tau}}+\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{\delta_i}{\delta_j}\right)^{\alpha_i}\frac{1}{\delta_j^2|y|^{\alpha_i+2}}+\sum_{i=j+1}^m\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_i}\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\delta_j^2}\right)\end{aligned} \tag{4.9}$$

对于 $1<j<m$、j 为偶数且 $\delta_jy\in A_j$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\delta_jy)=&\frac{1}{\delta_j^2\tau}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}O(\delta_j|y|+\rho^\eta)\\&+O\left(\rho^{1+1/\tau}\delta_j^{2/\tau}\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2/\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)/\tau}}+\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{\delta_i}{\delta_j}\right)^{\alpha_i}\frac{1}{\delta_j^2|y|^{\alpha_i+2}}+\sum_{i=j+1}^m\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_i}\frac{|y|^{\alpha_i-2}}{\delta_j^2}\right)\end{aligned} \tag{4.10}$$

以及对于 $\delta_m y \in A_m$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\delta_m y) =& \frac{1}{\delta_m^2 \tau^{\nu(m)}} \frac{2\alpha_m^2 |y|^{\alpha_m - 2}}{(1+|y|^{\alpha_m})^2} O(\delta_m |y| + \rho^\eta) \\ &+ O\left(\rho^{1+\tau^{(-1)^{m+1}}} \delta_m^{2\tau^{(-1)^{m+1}}} \frac{(1+|y|^{\alpha_m})^{2\tau^{(-1)^{m+1}}}}{|y|^{(\alpha_m-2)\tau^{(-1)^{m+1}}}} + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\delta_i}{\delta_m}\right)^{\alpha_i} \frac{1}{\delta_m^2 |y|^{\alpha_i+2}} \right)\end{aligned} \tag{4.11}$$

由（4.8）-（4.11）以及附录中的引理A.1，可得（4.1），由此证明得证。 □

4.2. 非线性问题及定理**1.2**的证明。 本节将研究以下非线性问题：

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\phi) = -[\mathcal{R} + \Lambda_0(\phi) + \mathcal{N}(\phi)] & \text{in } \Omega_\epsilon \\ \phi = 0, & \text{on } \partial\Omega_\epsilon, \end{cases} \tag{4.12}$$

其中，线性算子 $\mathcal{L}, \Lambda_0$ 定义为

$$\mathcal{L}(\phi) = \Delta\phi + K_0 \left(\phi - \frac{1}{\lambda_0} \int_{\Omega_\epsilon} K_0 \phi dx \right) + K_1 \left(\phi - \frac{1}{\lambda_1 \tau^2} \int_{\Omega_\epsilon} K_1 \phi dx \right) \tag{4.13}$$

and

$$\begin{aligned}\Lambda_0(\phi) =& \lambda_0 \frac{V_0 e^U}{\int_{\Omega_\epsilon} V_0 e^U dx} \left(\phi - \frac{\int_{\Omega_\epsilon} V_0 e^U \phi dx}{\int_{\Omega_\epsilon} V_0 e^U dx} \right) + \lambda_1 \tau^2 \frac{V_1 e^{-\tau U}}{\int_{\Omega_\epsilon} V_1 e^{-\tau U} dx} \left(\phi - \frac{\int_{\Omega_\epsilon} V_1 e^{-\tau U} \phi dx}{\int_{\Omega_\epsilon} V_1(x) e^{-\tau U} dx} \right) \\ &- K_0 \left(\phi - \frac{1}{\lambda_0} \int_{\Omega_\epsilon} K_0 \phi dx \right) - K_1 \left(\phi - \frac{1}{\lambda_1 \tau^2} \int_{\Omega_\epsilon} K_1 \phi dx \right)\end{aligned} \tag{4.14}$$

with

$$K_0 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^{m} |x|^{\alpha_k - 2} e^{w_k}, \quad K_1 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ even}}}^{m} |x|^{\alpha_k - 2} e^{w_k}. \tag{4.15}$$

非线性项 $\mathcal{N}(\phi)$ 给定为

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\phi) =& \lambda_0 \left[\frac{V_0 e^{U+\phi}}{\int_{\Omega_\epsilon} V_0 e^{U+\phi} dx} - \frac{V_0 e^U}{\int_{\Omega_\epsilon} V_0 e^U dx} - \frac{V_0 e^U}{\int_{\Omega_\epsilon} V_0 e^U dx} \left(\phi - \frac{\int_{\Omega_\epsilon} V_0 e^U \phi dx}{\int_{\Omega_\epsilon} V_0 e^U dx} \right) \right] \\ &- \lambda_1 \tau \left[\frac{V_1 e^{-\tau(U+\phi)}}{\int_{\Omega_\epsilon} V_1 e^{-\tau(U+\phi)} dx} - \frac{V_1 e^{-\tau U}}{\int_{\Omega_\epsilon} V_1 e^{-\tau U} dx} + \tau \frac{V_1 e^{-\tau U}}{\int_{\Omega_\epsilon} V_1 e^{-\tau U} dx} \left(\phi - \frac{\int_{\Omega_\epsilon} V_1 e^{-\tau U} \phi dx}{\int_{\Omega_\epsilon} V_1 e^{-\tau U} dx} \right) \right].\end{aligned} \tag{4.16}$$

容易验证 ϕ 是（4.12）的解，当且仅当 u_ϵ 由（1.10）给出，是（1.2）的解。第5 节将证明以下结果。

命题 4.1. 对于任意 $p > 1$，存在 $\rho_0 > 0$ 和 $C > 0$，使得对于任意 $\rho \in (0, \rho_0)$ 和$h \in L^p(\Omega_\epsilon)$，存在唯一的 $\phi \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ 解满足

$$\mathcal{L}(\phi) = h \quad in \quad \Omega_\epsilon, \quad \phi = 0 \quad on \quad \partial\Omega_\epsilon, \tag{4.17}$$

其满足

$$\|\phi\| \le C |\log \rho| \, \|h\|_p. \tag{4.18}$$

引理 4.2. 存在 $p_0 > 1$ 和 $\rho_0 > 0$，使得对于任意 $1 < p < p_0$ 以及所有 $0 < \rho \le \rho_0$，有

$$\|\Lambda_0(\phi)\|_p \le C \rho^{\sigma_p'} \|\phi\|, \tag{4.19}$$

对于所有带有 $\|\phi\| \le M \rho^{\sigma_p} |\log \rho|$ 的 $\phi \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$，其中某个 $\sigma_p' > 0$。

证明：仿照[13, 引理 3.3], 中的论证，记 $W_i = \frac{\lambda_i \tau^{2i} V_i e^{(-\tau)^i U}}{\int_{\Omega_\epsilon} V_i e^{(-\tau)^i U} dx}$ 为 $i = 0, 1$。利用（4.4）、（4.6）、引理A.1 以及证明（3.20）时的类似计算，我们得到$\|W_0 - K_0\|_{L^q(A_i)}^q \le C \rho^{q\sigma_{0,q}'}$ 对任意 i，存在某个$\sigma_{0,q}'$。类似地，我们得到$\|W_1 - K_1\|_{L^q(A_i)}^q \le C \rho^{q\sigma_{1,q}'}$ 对任意 i，存在某个$\sigma_{1,q}'$。可以看出，将 $q > 1$ 取为充分接近 1 时，我们得到$\sigma_{i,q}' > 0$ 对 $i = 0, 1$。

注意， Λ_0 是一个线性算子，我们将 $\Lambda_0(\phi)$重写为

$$\Lambda_0(\phi)=\sum_{i=0}^{1}\left[(W_i-K_i)\,\phi-\frac{1}{\lambda_i\tau^{2i}}(W_i-K_i)\int_{\Omega_\epsilon}W_i\phi+\frac{1}{\lambda_i\tau^{2i}}K_i\int_{\Omega_\epsilon}(K_i-W_i)\,\phi\right].$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\|\Lambda_0(\phi)\|_p&\le\sum_{i=0}^{1}\left[\|W_i-K_i\|_{pr_{i0}}\|\phi\|_{ps_{i0}}+\frac{\|W_i\|_{r_{i1}}}{\lambda_i\tau^{2i}}\|W_i-K_i\|_p\|\phi\|_{s_{i1}}+\frac{\|K_i\|_p}{\lambda_i\tau^{2(i-1)}}\|K_i-W_i\|_{r_{i2}}\|\phi\|_{s_{i2}}\right]\\&\le C\sum_{i=0}^{1}\left[\rho^{\sigma'_{i,pr_{i0}}}\|\phi\|+\rho^{\sigma'_{i,p}+\sigma_{3,r_{i1}}}\|\phi\|+\rho^{\sigma'_{i,r_{i2}}+\sigma_{3,p}}\|\phi\|\right]\end{aligned}$$

以及（4.19）成立，其中 $\sigma'_p=$最小 $\{\sigma'_{i,pr_{i0}};\ \sigma'_{i,\ p}+\sigma_{3,\ r_{i1}};\ \sigma'_{i,\ r_{i2}}+\sigma_{3,\ p}\mid i=0,\ 1\}$其中 r_{ij}、s_{ij}、 $i=0$、1、$j=0$、1、2 满足$\frac{1}{r_{ij}}+\frac{1}{s_{ij}}=1$。我们用到了

$$\begin{aligned}\|W_0\|_{r_{01}}^{r_{01}}&\le C\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\ \text{odd}}}^{m}\delta_j^{2-2r_{01}}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}}\left|\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\right|^{r_{01}}+\sum_{\substack{j=1\\ j\ \text{even}}}^{m}\rho^{(1+1/\tau)r_{01}}\delta_j^{2+2\frac{r_{01}}{\tau}}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}}\left|\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2/\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)/\tau}}\right|^{r_{01}}\right]\\&\le C\rho^{\sigma_{3,r_{01}}}\end{aligned}$$

类似地，$\|W_1\|_{r_{11}}^{r_{11}}\le C\rho^{\sigma_{3,\ r_{11}}}$，其中$\sigma_{3,\ q}=\frac{\beta_1}{\alpha_1}(2-2q)$，并且同样有$\|K_i\|_p^p\le C\rho^{\sigma_{3,\ p}}$、 $i=0$、1。注意，对于任意 $j=1$，.....， m。此外，我们用到了 H¨older 不等式 $\|uv\|_q\le\|u\|_{qr}\|v\|_{qs}$，其中 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$，以及嵌入关系 $L^p(\Omega_\epsilon)\hookrightarrow L^{pr}(\Omega_\epsilon)$（对任意 $r>1$）和 $H_0^1(\Omega_\epsilon)\hookrightarrow L^q(\Omega_\epsilon)$（对任意 $q>1$）。需要强调的是，我们可以将 p、 r_{ij} 以及 s_{ij}、 $i=1$、2、 $j=0$、1、2 取得足够接近 1，使得 $\sigma'_p>0$。□

引理4.3. 存在 $p_0>1$ 和 $\rho_0>0$，使得对任意 $1<p<p_0$ 以及所有 $0<\rho\le\rho_0$，均有

$$\|\mathcal{N}(\phi_1)-\mathcal{N}(\phi_2)\|_p\le C\rho^{\sigma''_p}\|\phi_1-\phi_2\| \tag{4.20}$$

对所有满足 $\|\phi_i\|\le M\rho^{\sigma_p}|\log\ \rho|$的 $\phi_i\in H_0^1(\Omega_\epsilon)$， $i=1$、2，且对于某个 $\sigma''_p>0$。特别地，我们有

$$\|\mathcal{N}(\phi)\|_p\le C\rho^{\sigma''_p}\ \|\phi\| \tag{4.21}$$

对所有满足 $\|\phi\|\le M\rho^{\sigma_p}|\log\ \rho|$的 $\phi\in H_0^1(\Omega_\epsilon)$，均有。

证明：按照[1, 引理5.1]，中相同的方式进行论证，我们记 $g_i(\phi)=\ ^{V_i(\frac{x\ e^{(-\tau)^i(U+\phi)}}{\int_{\ \epsilon}V_i\ x\ e^{(-\tau)^i(U+\phi)}})\Omega()}$，并指出

$$\mathcal{N}(\phi)=\sum_{i=0}^{1}\lambda_i(-\tau)^i\left\{g_i(\phi)-g_i(0)-g_i'(0)[\phi]\right\}\quad\text{and by the mean value theorem we get that}$$

$$\mathcal{N}(\phi_1)-\mathcal{N}(\phi_2)=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i(-\tau)^i g_i''(\tilde{\phi}_{\mu_i})[\phi_{\theta_i},\phi_1-\phi_2], \tag{4.22}$$

˜其中 $\phi_{\theta_i}=\theta_i\phi_1+(1-\theta_i)\phi_2$, $\phi_{\mu_i}=\mu_i\phi_{\theta_i}$对于某些 $\theta_i,\mu_i\in[0,1]$, $i=0,1$， 且

$$\begin{aligned}g_i''(\phi)[\psi,v]=\tau^{2i}\Bigg[&\frac{V_i(x)e^{u_i}\psi v}{\int_{\Omega_\epsilon}V_i(x)e^{u_i}}-\frac{V_i(x)e^{u_i}v\int_{\Omega_\epsilon}V_i(x)e^{u_i}\psi}{\left(\int_{\Omega_\epsilon}V_i(x)e^{u_i}\right)^2}-\frac{V_i(x)e^{u_i}\psi\int_{\Omega_\epsilon}V_i(x)e^{u_i}v}{\left(\int_{\Omega_\epsilon}V_i(x)e^{u_i}\right)^2}\\&-\frac{V_i(x)e^{u_i}\int_{\Omega_\epsilon}V_i(x)e^{u_i}\psi v}{\left(\int_{\Omega_\epsilon}V_i(x)e^{u_i}\right)^2}+2\frac{V_i(x)e^{u_i}\int_{\Omega_\epsilon}V_i(x)e^{u_i}v\int_{\Omega_\epsilon}V_i(x)e^{u_i}\psi}{\left(\int_{\Omega_\epsilon}V_i(x)e^{u_i}\right)^3}\Bigg],\end{aligned}$$

wh这里为简便起见，我们记 $u_i = (-\tau)^i(U+\phi)$。利用 H¨older 不等式可得 t

$$\|g_i''(\phi)[\psi,v]\|_p \le C\left[\frac{\|V_i e^{u_i}\|_{pr_i}}{\|V_i e^{u_i}\|_1} + \frac{\|V_i e^{u_i}\|_{pr_i}^2}{\|V_i e^{u_i}\|_1^2} + \frac{\|V_i e^{u_i}\|_{pr_i}^3}{\|V_i e^{u_i}\|_1^3}\right]\|\psi\|\|v\|, \tag{4.23}$$

当 $\frac{1}{r_i}+\frac{1}{s_i}+\frac{1}{t_i}=1$, $\frac{1}{r_i}+\frac{1}{q_i}=1$, $\frac{1}{pr_i}+\frac{1}{\tilde r_i}=1$. 我们使用了 H¨older 不等式、前述引理中给出的嵌入关系以及 $\|uvw\|_q \le \|u\|_{qr}\|v\|_{qs}\|w\|_{qt}$ 当 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1$. 现在，让我们估计 $\frac{\|V_i e^{u_i}\|_{pr_i}}{\|V_i e^{u_i}\|_1}$当 $\phi=\tilde\phi_{\mu_i}$, $i=0,1$。考虑到 (3.28)-(3.29) 和 (4.2)-(4.3)，我们得到，对于 $i=0,1$

$$\left\|V_i e^{(-\tau)^i U}\right\|_q^q = O\left(\rho^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}(2-2q)-q}\right) \quad \text{for any } q\ge 1 \quad \text{and} \quad \left\|V_i e^{(-\tau)^i U}\right\|_1 \ge \frac{C_i}{\rho} \quad \text{for some } C_i>0.$$

注意，对任意 $i = 1,\dots,m$, 都有 $\sigma_{3,q} - 1 \le {}^{2-}{}_{(\alpha_i+2)_{\alpha_i q}}{}^{q}$。根据前面的估计，我们得到 $\left\|V_i e^{(-\tau)^i U+\tilde\phi_{\mu_i}}\right\|_q = O\big(\rho^{\eta_{0,qs_i'}-1+\eta_p}|\log\rho| + \rho^{\eta_{0,q}-1}\big)$ (沿着 [17, 等式 (3.14) 的思路，见引理 3.3] 的证明。另取足够接近 1 的 s_i, $i=0,1$，可得 $\sigma_p+\eta_{0,s_i}>0$ 并且

$$\left\|V_i e^{(-\tau)^i(U+\tilde\phi_{\mu_i})}\right\|_1 \ge \frac{C_i}{\rho} - C\rho^{\eta_{0,s_i}-1+\sigma_p}|\log\rho| \ge \frac{1}{\rho}\left(C_i - C\rho^{\eta_{0,s_i}+\sigma_p}|\log\rho|\right) \ge \frac{C_i}{2\rho}.$$

取 $q=pr_i$，我们得到关于 $i=0$ 的估计，1

$$\frac{\|V_i e^{(-\tau)^i(U+\tilde\phi_{\mu_i})}\|_{pr_i}}{\|V_i e^{(-\tau)^i(U+\tilde\phi_{\mu_i})}\|_1} = O\left(\rho^{\sigma_{3,pr_i}}\left[\rho^{\sigma_p+\sigma_{3,pr_i s_i}-\sigma_{pr_i}}|\log\rho|+1\right]\right) = O\left(\rho^{\sigma_{3,pr_i}}\right) \tag{4.24}$$

选取 $s_i>1$ 使其足够接近 1，从而 $\sigma_p+\sigma_{3,\ pr_i s_i}-\sigma_{pr_i}>0$, $i=1$, 2. 现在，利用 (4.22)-(4.24)即可得出该估计

$$\|\mathcal{N}(\phi_1)-\mathcal{N}(\phi_2)\|_p \le C\sum_{i=0}^{1}\lambda_i\rho^{\sigma_p+3\sigma_{3,pr_i}}|\log\rho|\|\phi_1-\phi_2\| \le C\rho^{\sigma_p''}\|\phi_1-\phi_2\|,$$

其中 $\sigma_p'' = \frac{1}{2}\min\{\sigma_p+3\sigma_{3,pr_i}: \ i=0,1\}>0$ 选取 r_i 使其接近 1，从而 $\sigma_p+3\sigma_{3,\ pr_i}>0$ 对于 $i=0$, 1。需要强调的是， $p>1$ 的选取满足 $\sigma_p>0$。□

考虑到前面的估计 (4.1)、(4.19)、(4.20) 和 (4.21)，并采用命题 3.2 证明中的相同论证，我们得到以下结论

命题 4.2. 存在 $p_0>1$ 和 $\rho_0>0$，使得对任意 $1<p<p_0$ 及所有 $0<\rho\le\rho_0$，问题 (4.12) 存在唯一解 $\phi(\rho)\in H_0^1(\Omega_\epsilon)$，其中 $\mathcal{L}$、 $\mathcal{R}$、 $\Lambda_0(\phi)$ 和 $\mathcal{N}$ 分别由 (4.13)、(1.13)、(4.14) 和 (4.16) 给出。此外，存在一个常数 $C>0$，使得

$$\|\phi\|_\infty \le C\rho^{\sigma_p}|\log\rho|,$$

对某个 $\sigma_p>0$。

定理 **1.2** 的证明。 仿照定理 1.1 的证明，方程 (1.10) 的解 1.2) 由命题 4.2 以及 U 在 (1.11) 中的定义可直接推出。□

5. The linear theory

本节将介绍分别定义于（ L 和 $\mathcal{L}$ ）中的线性算子3.14以及（4.13）。粗略地说，在尺度环域 $\frac{A_j}{\delta_j}$ 中，算子 L 趋近于 IR 中的以下线性算子[2]

$$L_j(\phi) = \Delta\phi + \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\phi, \qquad j=1,\dots,m.$$

众所周知，在 $\alpha_j \in 2\mathbb{N}$ 的情况下， $L_j(\phi) = 0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的有界解恰好是以下函数的线性组合

$$Y_{1j}(y) = \frac{|y|^{\frac{\alpha_j}{2}}}{1+|y|^{\alpha_j}} \cos\left(\frac{\alpha_j}{2}\theta\right), \quad Y_{2j}(y) = \frac{|y|^{\frac{\alpha_j}{2}}}{1+|y|^{\alpha_j}} \sin\left(\frac{\alpha_j}{2}\theta\right) \quad \text{and} \quad Y_{0j}(y) = \frac{1-|y|^{\alpha_j}}{1+|y|^{\alpha_j}},$$

对于 $j = 1, \dots, m$，它们以极坐标表示。参见 [10] 以获取证明。在我们的情形中，我们将考虑 $L_j(\phi) = 0$ 的解，其中 $\alpha_j \notin 2\mathbb{N}$ 对所有 $j = 1, \dots, m$ 均成立，并且满足 $\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \phi(y)|^2 \, dy < +\infty$，它们是 Y_{0j} 的倍数；证明见 [1, 定理 A.1] 。研究 $\mathcal{L}$ 的另一个关键要素（其中展示了技术细节）是消除.....的存在

$$\tilde{c}_j(\phi) = -\frac{1}{\lambda_j \tau^{2j}} \int_{\Omega_\epsilon} K_j \phi \qquad j = 0, 1. \tag{5.1}$$

我们引入以下 Banach空间，适用于 $j = 1, 2, \dots, m$

$$L_{\alpha_j}(\mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \ : \ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|y|^{\alpha_j - 2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2} |u(y)|^2 \, dy < +\infty \right\} \tag{5.2}$$

and

$$H_{\alpha_j}(\mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \ : \ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y)|^2 \, dy + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|y|^{\alpha_j - 2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2} |u(y)|^2 \, dy < +\infty \right\} \tag{5.3}$$

赋予范数

$$\|u\|_{L_{\alpha_j}} := \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|y|^{\alpha_j - 2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2} |u(y)|^2 \, dy \right)^{1/2}$$

and

$$\|u\|_{H_{\alpha_j}} := \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y)|^2 \, dy + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|y|^{\alpha_j - 2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2} |u(y)|^2 \, dy \right)^{1/2}.$$

我们指出，嵌入 i_{α_j}: $H_{\alpha_j}(\mathbb{R}^2) \to L_{\alpha_j}(\mathbb{R}^2)$ 是紧的（例如参见 [20]）。

命题 **3.1**的证明。 假设存在 $p > 1$、序列 $\rho_n \to 0$、 $\epsilon_n = \epsilon(\rho_n) \to 0$、函数 $h_n \in L^p(\Omega_{\epsilon_n})$、 $\phi_n \in H^1_0(\Omega_{\epsilon_n})$，使得

$$L(\phi_n) = h_n \ \text{ in } \ \Omega_{\epsilon_n}, \ \ \phi_n = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega_{\epsilon_n}$$

$\|\phi_n\| = 1$ 以及 $|\log \rho_n| \, \|h_n\|_p = o(1)$ 当 $n \to +\infty$ 时。我们将省略 δ_i 中的下标 n，$\delta_i = \delta_{i,n}$。回忆 $\delta_i^{\alpha_i} = d_i \rho_n^{\beta_i}$。现在，定义 $\Phi_{i,n}(y) := \phi_{i,n}(\delta_i y)$，其中 $y \in \Omega_{i,n} := \delta_i^{-1} \Omega_{\epsilon_n}$。因此，将 $\phi_n = 0$ 延拓到 $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{\epsilon_n}$ 中，并以与 [17, 断言 1，第 4] 节相同的方式进行论证，我们可以证明以下事实。下面给出证明的概要。

断言 5.1. 序列 $\Phi_{i,n}$ 收敛（取子列后）至 $\Phi_i^* = a_i Y_{0i}$ ，对于$i = 1, \dots, m$，在 $H_{\alpha_i}(\mathbb{R}^2)$ 中弱收敛，并在 $L_{\alpha_i}(\mathbb{R}^2)$ 中强收敛，当 $n \to +\infty$ 时，其中某个常数 $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$。

证明：首先，注意到 $\|\Phi_{i,n}\|_{H^1_0(\Omega_{i,n})} = 1$，对于 $i = 1, \dots, m$。接下来，我们要证明存在一个常数 $M > 0$，使得对所有 n（取子列后），都有 $\|\Phi_{i,n}\|^2_{L_{\alpha_i}} \le M$。注意，对于任意 $i \in \{1, \dots, m\}$，我们发现，在 $\Omega_{i,n}$

$$\Delta \Phi_{i,n} + \delta_i^2 K(\delta_i y) \Phi_{i,n} = \delta_i^2 h_n(\delta_i y). \tag{5.4}$$

此外可得，对于任意 K 紧集 $\mathbb{R}^2$，$\Phi_{i,n} \to \Phi_i^*$ 在 $H^1_0(\Omega_{i,n})$ 中弱收敛，并在 $L^p(K)$ 中强收敛。现在，我们将（5.4）乘以 $\Phi_{i,n}$ （对任意 $i \in \{1, \dots, m\}$），分部积分后得到

$$\sum_{i=1}^m 2\alpha_i^2 \|\Phi_{i,n}\|^2_{L_{\alpha_i}} = 1 + o(1) \tag{5.5}$$

因为

$$\delta_i^2 K(\delta_i y) = \frac{2\alpha_i^2 |y|^{\alpha_i - 2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2} + O\left(\sum_{j<i} \left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j} + \sum_{i<j} \left(\frac{\delta_i}{\delta_j}\right)^{\alpha_j} \right) \quad \text{for all } i = 1, \dots, m \tag{5.6}$$

在 y 上的 IR 紧子集上一致$^2 \setminus \{0\}$。因此，我们推得$\|\Phi_{i,\ n}\|^2_{L_{\alpha_i}} = O(1)$。因此，序列 $\{\Phi_{i,n}\}_n$ 在 H_{α_i} (IR^2 中有界，故存在子列 $\{\Phi_{i,n}\}_n$ 以及函数 Φ_i^*，$i = 1$，2，使得 $\{\Phi_{i,n}\}_n$ 收敛到 Φ_i^*在 H_{α_i}(IR^2 中弱收敛，并在 L_{α_i}(IR^2 中强收敛。因此，结合（5.4）和（5.6），我们推得 Φ_i^* 是一个解

$$\Delta\Phi + \frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\Phi = 0, \qquad i = 1,\dots,m, \qquad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

众所周知， Φ_i^*、 $i = 1$、.....、 m 可延拓为整个 IR^2 上的解。因此，在必要时利用对称性假设，我们得到 $\Phi_i^* = a_i Y_{0i}$，其中 $a_i \in$ IR 是某个常数， $i = 1$、.....、 m。□

对于下一步，任取 $j \in \{1,\dots,m\}$ 考虑函数 Z_{0j}（x） $= Y_{0j}$（$\delta_j^{-1}x$） $= \frac{\delta_j^{\alpha_j}-|x|^{\alpha_j}}{\delta_j^{\alpha_j}+|x|^{\alpha_j}}$使得

$-\Delta Z_{0j} = |x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}Z_{0j}$. 通过与引理 2.1 中获得展开式的类似论证，可得 $P_\epsilon Z_{0j} = Z_{0j} + 1 - \gamma_0 G$（$x$，0） $+ O$（$\rho^{\tilde\sigma}$）在 Ω 中一致成立$_\epsilon$ 对于某个 $\tilde\sigma > 0$，这是 [13,引理 4.1] 与 $m = 1$ 和 $\xi_1 = 0$的结果。现在，引入系数 γ_0 如下

$$\gamma_0\left[-\frac{1}{2\pi}\log\epsilon + H(0,0)\right] = 2, \tag{5.7}$$

因此，由（2.21），$\gamma_0 = -\frac{4\pi(\alpha_1-2)}{\beta_1+1}\frac{1}{\text{对数}}$ $_\rho + O\big(\frac{1}{|\text{对数 }\rho|^2}\big)$。

为简便起见，我们将 $\Pi_i(y) = \frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}$，记作， $i = 1$，…， m。

断言 5.2. 对所有 $j = 1$，…， m，存在极限（在子列意义下），

$$\mu_j = \lim_{n\to+\infty}\log\rho_n\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j(y)\Phi_{j,n}(y)\,dy. \tag{5.8}$$

此外，有

$$2\sum_{i=1}^m a_i = \Big(-\frac{\beta_1+1}{4\pi(\alpha_1-2)} + \sum_{i=1}^m(-1)^{i+1}\frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i}\Big)\mu_1, \tag{5.9}$$

且对所有 $j = 1$，…， $m-1$。

$$\mu_j = (-1)^{j-1}\mu_1. \tag{5.10}$$

证明： 考虑测试函数 $\gamma_0^{-1}PZ_{0j}$的以及关于 h_n， $|$对数 $\rho_n|\,\|h_n\|_* = o(1)$。因此，将方程（5.4）乘以 $P_\epsilon Z_{0j}$ 并分部积分，可得

$$\int_{\Omega_\epsilon} hPZ_{0j} = -\int_{\Omega_\epsilon}\phi|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}Z_{0j} + \int_{\Omega_\epsilon}K\phi P_\epsilon Z_{0j} = \int_{\Omega_\epsilon}\left(K - |x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\right)P_\epsilon Z_{0j}\phi$$

$$+\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\left(PZ_{0j} - Z_{0j}\right)\phi = \int_{\Omega_\epsilon}\phi\sum_{i=1}^m|x|^{\alpha_i-2}e^{w_i}PZ_{0j} + \int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\left[1-\gamma_0 G(x,0)+O(\rho^{\tilde\sigma})\right]\phi$$

鉴于 $P_\epsilon Z_{0j} = 0$ 在 $\partial\Omega_{\epsilon_n}$ 和 $\int_{\Omega_\epsilon}\Delta\phi P_\epsilon Z_{0j} = \int_{\Omega_\epsilon}\phi\,\Delta P_\epsilon Z_{0j} = \int_{\Omega_\epsilon}\phi\,\Delta Z_{0j}$上。现在，乘以$\gamma_0^{-1}$并估计每个积分项，我们得到 $\gamma_0^{-1}\int_{\Omega_\epsilon}hPZ_{0j} = O(|\log\rho|\,\|h\|_p) = o(1)$，鉴于 $PZ_{0j} = O(1)$和 $\gamma_0^{-1} = -\frac{\beta_1+1}{4\pi}(\alpha_1-2)\log\rho + O(1) = O(|\log\rho|)$见(5.7)。接下来，进行缩放可得

$$\gamma_0^{-1}\int_{\Omega_\epsilon}\phi|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j} = -\frac{\beta_1+1}{4\pi(\alpha_1-2)}\log\rho\int_{\Omega_{j,n}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\Phi_{j,n}\,dy + o(1),$$

鉴于

$$\lim\int_{\Omega_{j,n}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\Phi_{j,n}\,dy = a_j\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}Y_{0,j}\,dy = 0$$

此外，利用（5.7）以及 $P_\epsilon Z_{0j}$ 的展开，可得对于 $i<j$

$$\gamma_0^{-1}\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_i-2}e^{w_i}\phi PZ_{0j}=\int_{\Omega_{i,n}}\frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}\Phi_{i,n}\left[\frac{2\gamma_0^{-1}}{1+(\frac{\delta_i|y|}{\delta_j})^{\alpha_j}}+\frac{1}{2\pi}\log(\delta_i|y|)-H(\delta_i|y|,0)\right]dy$$
$$+O(\rho^{\tilde\sigma}|\log\rho|)=2\gamma_0^{-1}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}(y)\,dy+\frac{1}{2\pi}\log\delta_i\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}(y)\,dy$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}(y)\log|y|\,dy+o(1),$$

并且对于 $i>j$，我们有

$$\gamma_0^{-1}\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_i-2}e^{w_i}\phi PZ_{0j}=\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}\left[\Big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_j}\frac{2\gamma_0^{-1}}{(\frac{\delta_j}{\delta_i})^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}}+\frac{1}{2\pi}\log(\delta_i|y|)-H(\delta_i|y|,0)\right]dy$$
$$+O(\rho^{\tilde\sigma}|\log\rho|)=\frac{1}{2\pi}\log\delta_i\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}(y)\,dy+\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}(y)\log|y|\,dy+o(1),$$

鉴于 $\big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\big)^{\alpha_j}\gamma_0^{-1}=o(1)$。此外，可得

$$\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}G(x,0)\phi=-\frac{1}{2\pi}\log\delta_j\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j(y)\Phi_{j,n}(y)\,dy-\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j(y)\Phi_{j,n}(y)\log|y|\,dy+o(1).$$

由 δ_j 在 (2.2) 中的选取可得 $\log\delta_j=\frac{1}{\alpha_j}\big[\log\,d_j+\beta_j\log\,\rho\big]$ 并且根据先前的展开式，我们推得对所有 $j=2,\dots,m-1$

$$\gamma_0^{-1}\int_{\Omega_\epsilon}hPZ_{0j}=\sum_{i<j}\left[\Big(-\frac{\beta_1+1}{2\pi(\alpha_1-2)}+\frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i}\Big)\log\rho\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}\,dy+\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}(y)\log|y|\,dy\right]$$
$$+\sum_{i>j}\left[\frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i}\log\rho\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}(y)\,dy+\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}(y)\log|y|\,dy\right]-\frac{\beta_1+1}{4\pi(\alpha_1-2)}\log\rho\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_{j,n}\,dy$$
$$+\frac{\beta_j}{2\pi\alpha_j}\log\rho\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j(y)\Phi_{j,n}\,dy+\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j(y)\Phi_{j,n}(y)\log|y|\,dy+o(1),$$

由于对所有 $i=1,\dots,m$

$$\lim\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}(y)\log|y|\,dy=a_i\int_{\mathbb{R}^2}\Pi_iY_{0,i}(y)\log|y|\,dy=-4\pi a_i \tag{5.11}$$

我们得到，对所有 $i=2,\dots,m-1$

$$2\sum_{i=1}^m a_i=\sum_{i<j}\left[\Big(-\frac{\beta_1+1}{2\pi(\alpha_1-2)}+\frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i}\Big)\log\rho\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}\,dy\right]+\sum_{i>j}\left[\frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i}\log\rho\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}(y)\,dy\right]$$
$$+\Big(-\frac{\beta_1+1}{4\pi(\alpha_1-2)}+\frac{\beta_j}{2\pi\alpha_j}\Big)\log\rho\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j(y)\Phi_{j,n}\,dy+o(1). \tag{5.12}$$

取 $j\in\{2,\dots,m-2\}$ 后，我们将 $j+1$ 的前一个表达式改写为

$$2\sum_{i=1}^m a_i=\sum_{i<j}\left[\Big(-\frac{\beta_1+1}{2\pi(\alpha_1-2)}+\frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i}\Big)\log\rho\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}\right]+\Big(-\frac{\beta_1+1}{2\pi(\alpha_1-2)}+\frac{\beta_j}{2\pi\alpha_j}\Big)\log\rho\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_{j,n}$$
$$+\sum_{i>j+1}\left[\frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i}\log\rho\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_{i,n}\right]+\Big(-\frac{\beta_1+1}{4\pi(\alpha_1-2)}+\frac{\beta_{j+1}}{2\pi\alpha_{j+1}}\Big)\log\rho\int_{\Omega_{j+1,n}}\Pi_{j+1}\Phi_{j+1,n}+o(1). \tag{5.13}$$

因此，从（5.12）中减去（5.13），可得

$$0=-\frac{\beta_1+1}{4\pi(\alpha_1-2)}\log\rho\left[\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j(y)\Phi_{j,n}\,dy+\int_{\Omega_{j+1,n}}\Pi_{j+1}(y)\Phi_{j+1,n}\,dy\right]+o(1),$$

因此，对于所有的 $j=2,\dots,m-2$

$$\lim \log \rho_n \left[\int_{\Omega_{j,n}} \Pi_j(y)\Phi_{j,n}\,dy + \int_{\Omega_{j+1,n}} \Pi_{j+1}(y)\Phi_{j+1,n}\,dy \right] = 0. \tag{5.14}$$

与上述情况类似，它延伸至 $j=1$

$$2\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i>1} \left[\frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i} \log\rho \int_{\Omega_{i,n}} \Pi_i\Phi_{i,n} dy \right] + \Big(-\frac{\beta_1+1}{4\pi(\alpha_1-2)} + \frac{\beta_1}{2\pi\alpha_1} \Big) \log\rho \int_{\Omega_{1,n}} \Pi_1\Phi_{1,n} dy + o(1)$$

and

$$\lim \log \rho_n \left[\int_{\Omega_{1,n}} \Pi_1(y)\Phi_{1,n}\,dy + \int_{\Omega_{2,n}} \Pi_2(y)\Phi_{2,n}\,dy \right] = 0;$$

并延伸至 $j=m$

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i<m} \left[\Big(-\frac{\beta_1+1}{2\pi(\alpha_1-2)} + \frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i} \Big) \log\rho \int_{\Omega_{i,n}} \Pi_i\Phi_{i,n}\,dy \right] \\ + \Big(-\frac{\beta_1+1}{4\pi(\alpha_1-2)} + \frac{\beta_m}{2\pi\alpha_m} \Big) \log\rho \int_{\Omega_{m,n}} \Pi_m(y)\Phi_{m,n}\,dy + o(1) \end{aligned}$$

and

$$\lim \log \rho_n \left[\int_{\Omega_{m-1,n}} \Pi_{m-1}(y)\Phi_{m-1,n}\,dy + \int_{\Omega_{m,n}} \Pi_m(y)\Phi_{m,n}\,dy \right] = 0.$$

现在，注意到对于 $j=1$，我们可推得

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{m} a_i &= \lim \left[\sum_{i=2}^{m} \frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i} \log\rho \int_{\Omega_{i,n}} \Pi_i\Phi_{i,n} dy + \Big(-\frac{\beta_1+1}{4\pi(\alpha_1-2)} + \frac{\beta_1}{2\pi\alpha_1} \Big) \log\rho \int_{\Omega_{1,n}} \Pi_1\Phi_{1,n} dy \right] \\ &= \lim \Big(-\frac{\beta_1+1}{4\pi(\alpha_1-2)} + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i} \Big) \log\rho \int_{\Omega_{1,n}} \Pi_1\Phi_{1,n}\,dy = \Big(-\frac{\beta_1+1}{4\pi(\alpha_1-2)} + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i} \Big)\mu_1, \end{aligned}$$

并且存在 $\mu_1 = \text{极限}\ \log^{i\overline{p}_n^1} \int_{\Omega_{1,\ n}} \Pi_1(y)\Phi_{1,\ n}\,dy$。事实上，利用（5.14）可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i} \log\rho \int_{\Omega_{i,n}} \Pi_i\Phi_{i,n}(y)\,dy \\ &= \sum_{i=1}^{m-2} \frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i} \log\rho \int_{\Omega_{i,n}} \Pi_i\Phi_{i,n}(y)\,dy + \Big(\frac{\beta_{m-1}}{2\pi\alpha_{m-1}} - \frac{\beta_m}{2\pi\alpha_m} \Big) \log\rho \int_{\Omega_{m-1,n}} \Pi_{m-1}(y)\Phi_{m-1,n}\,dy \\ &\quad + \frac{\beta_m}{2\pi\alpha_m} \underbrace{\log\rho \Big(\int_{\Omega_{m-1,n}} \Pi_{m-1}(y)\Phi_{m-1,n}\,dy + \int_{\Omega_{m,n}} \Pi_m(y)\Phi_{m,n}\,dy \Big)}_{=o(1)} \\ &= \sum_{i=1}^{m-3} \frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i} \log\rho \int_{\Omega_{i,n}} \Pi_i\Phi_{i,n}(y)\,dy + \frac{1}{2\pi} \Big(\frac{\beta_{m-2}}{\alpha_{m-2}} - \frac{\beta_{m-1}}{\alpha_{m-1}} + \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Big) \log\rho \int_{\Omega_{m-2,n}} \Pi_{m-2}(y)\Phi_{m-2}(y)\,dy \\ &\quad + \Big(\frac{\beta_{m-1}}{2\pi\alpha_{m-1}} - \frac{\beta_m}{2\pi\alpha_m} \Big) \underbrace{\log\rho \Big(\int_{\Omega_{m-2,n}} \Pi_{m-2}(y)\Phi_{m-2}(y)\,dy + \int_{\Omega_{m-1,n}} \Pi_{m-1}(y)\Phi_{m-1,n}\,dy \Big)}_{=o(1)} + o(1) \\ &\ \ \vdots \\ &= \frac{1}{2\pi} \Big(\frac{\beta_1}{\alpha_1} - \frac{\beta_2}{\alpha_2} + \frac{\beta_3}{\alpha_3} + \cdots + (-1)^{m+1} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Big) \log\rho \int_{\Omega_{1,n}} \Pi_1(y)\Phi_{1,n}(y)\,dy + o(1). \end{aligned}$$

因此，我们得到（5.9）。由 μ_1 的存在以及（5.14），可知存在 μ_2，……，μ_m 满足 $\mu_j + \mu_{j+1} = 0$ 对所有 $j=1$，……，$m-1$。因此，容易验证（5.10）成立。□

断言 5.3. 对所有 $j=1$、……、m，都有 $a_j = 0$。

证明： 为此，我们将取以下函数作为测试函数 $P_\epsilon w_j$并使用关于 h_n、 $|\log\ \rho_n|\ \|h_n\|_* = o(1)$ 的假设。因此，将方程（5.4）乘以 $P_\epsilon w_j$ 并分部积分，我们得到

$$\int_{\Omega_\epsilon} hPw_j = \int_{\Omega_\epsilon} \Delta w_j \phi + \int_{\Omega_\epsilon} K\phi P_\epsilon w_j = -\int_{\Omega_\epsilon} \phi|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j} + \int_{\Omega_\epsilon} K\phi P_\epsilon w_j = -\int_{\Omega_\epsilon} \phi|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega_\epsilon} |x|^{\alpha_i-2}e^{w_i}\phi\left[-2\log\left(\delta_j^{\alpha_j}+|x|^{\alpha_j}\right)+(4\pi\alpha_j-\gamma_j)H(x,0)+\frac{\gamma_j}{2\pi}\log|x|+O(\rho^\eta)\right]$$

鉴于 $P_\epsilon w_j = 0$ on $\partial\Omega_{\epsilon_n}$ and $\int_{\Omega_\epsilon}\Delta\phi P_\epsilon w_j = \int_{\Omega_\epsilon}\phi\ \Delta P_\epsilon w_j$。现在，对每一项积分进行估计，我们得到

$$\int_{\Omega_\epsilon} hPw_j = O\left(|\log\rho|\ \|h\|_p\right) = o\left(1\right),$$

鉴于 $Pw_j = O(|\log\ \rho|)$ and $G(x,0) = O(|\log\ \epsilon|) = O(|\log\ \rho|)$。接下来，经过缩放，我们得到

$$\int_{\Omega_\epsilon}\phi|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j} = \int_{\Omega_{j,n}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\Phi_{j,n} = a_j\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}Y_{0j}\,dy + o(1) = o(1).$$

对于 $i=j$，我们有

$$\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\phi P_\epsilon w_j = \int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_j\Big[-2\alpha_j\log\delta_j - 2\log(1+|y|^{\alpha_j}) + (4\pi\alpha_j-\gamma_j)H(\delta_j y,0) + \frac{\gamma_j}{2\pi}\log|\delta_j y|$$
$$+O(\rho^\eta)\Big] = -2\alpha_j\log\delta_j\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_j - 2\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_j\log(1+|y|^{\alpha_j}) + (4\pi\alpha_j-\gamma_j)\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_j H(\delta_j y,0)$$
$$+\frac{\gamma_j\log\delta_j}{2\pi}\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_j + \frac{\gamma_j}{2\pi}\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_j\log|y| + o(1),$$

类似地，对于 $i>j$，我们得到

$$\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_i-2}e^{w_i}\phi P_\epsilon w_j = \int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i\Big[-2\alpha_j\log\delta_i - 2\log\left(\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}\right) + (4\pi\alpha_j-\gamma_j)H(\delta_i y,0)$$
$$+\frac{\gamma_j}{2\pi}\log|\delta_i y| + O(\rho^\eta)\Big] = -2\alpha_j\log\delta_i\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i - 2\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i\log\left(\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}\right)$$
$$+(4\pi\alpha_j-\gamma_j)\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i H(\delta_i y,0) + \frac{\gamma_j\log\delta_i}{2\pi}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i + \frac{\gamma_j}{2\pi}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i\log|y| + o(1),$$

并且对于 $i<j$

$$\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_i-2}e^{w_i}\phi P_\epsilon w_j = \int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i\Big[-2\alpha_j\log\delta_j - 2\log\left(1+\left(\frac{\delta_i|y|}{\delta_j}\right)^{\alpha_j}\right) + (4\pi\alpha_j-\gamma_j)H(\delta_i y,0) + \frac{\gamma_j}{2\pi}\log|\delta_i y|$$
$$+O(\rho^\eta)\Big] = -2\alpha_j\log\delta_j\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i - 2\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i\log\left(1+\left(\frac{\delta_i|y|}{\delta_j}\right)^{\alpha_j}\right) + (4\pi\alpha_j-\gamma_j)\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i H(\delta_i y,0)$$
$$+\frac{\gamma_j\log\delta_i}{2\pi}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i + \frac{\gamma_j}{2\pi}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i\log|y| + o(1),$$

现在，利用（2.20）中 γ_j's 的定义以及引理 2.1，我们得到$\frac{\gamma_j}{2\pi} = 2\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1} + O\left(|\ ^{1}_{\text{对数}}\ \rho|\right)$，因此根据 δ_j's 的选取可得$\frac{\gamma_j}{2\pi}$对数 $\delta_i = 2\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}$对数 $\rho + O(1)$。于是，由前面的

展开式可推得，对所有 $j=2,\dots,m-1$

$$\begin{aligned}
o(1)=&\sum_{i<j}\Big[\Big(-2\alpha_j\log\delta_j+\frac{\gamma_j\log\delta_i}{2\pi}\Big)\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i+\frac{\gamma_j}{2\pi}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i\log|y|\Big]\\
&+\Big(-2\alpha_j\log\delta_j+\frac{\gamma_j\log\delta_j}{2\pi}\Big)\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_j+\frac{\gamma_j}{2\pi}\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_j\log|y|-2\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_j\log(1+|y|^{\alpha_j})\\
&+\sum_{i>j}\Big[\Big(-2\alpha_j\log\delta_i+\frac{\gamma_j\log\delta_i}{2\pi}\Big)\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i+\frac{\gamma_j}{2\pi}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i\log|y|\\
&-2\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i\log\Big(\Big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}\Big)\Big]=-2\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_j\log(1+|y|^{\alpha_j})\\
&+\sum_{i\le j}\Big(-2\beta_j+2\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big)\log\rho\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i+\sum_{i=1}^m2\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i\log|y|+o(1)\\
&+\sum_{i>j}\Big[\Big(-2\alpha_j\frac{\beta_i}{\alpha_i}+2\beta_j\ \frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big)\log\rho\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i-2\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i\log\Big(\Big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}\Big)\Big].
\end{aligned}\tag{5.15}$$

由于对所有 $j=1,\dots,m$

$$\lim\int_{\Omega_{j,n}}\Pi_j\Phi_j\log(1+|y|^{\alpha_j})=a_j\int_{\mathbb{R}^2}\Pi_jY_{0j}\log(1+|y|^{\alpha_j})=-2\pi\alpha_ja_j,\tag{5.16}$$

利用（5.8）

$$\lim\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Phi_i\log\Big(\Big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}\Big)=\alpha_ja_i\int_{\mathbb{R}^2}\Pi_iY_{0i}\log|y|=-4\pi\alpha_ja_i,$$

鉴于 $\frac{\delta_j}{\delta_i}=o(1)$，以及（5.11），由 $n\to+\infty$ 可得

$$\begin{aligned}
0=&4\pi\alpha_ja_j+\sum_{i\le j}\Big(-2\beta_j+2\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big)\mu_i+\sum_{i=1}^m2\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}(-4\pi a_i)\\
&+\sum_{i>j}\Big[\Big(-2\alpha_j\frac{\beta_i}{\alpha_i}+2\beta_j\ \frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big)\mu_i-2(-4\pi\alpha_ja_i)\Big]
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
0=&4\pi\alpha_ja_j+\sum_{i\le j}\Big(-2\beta_j+2\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big)\mu_i-8\pi\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\sum_{i=1}^ma_i\\
&+\sum_{i>j}\Big(-2\alpha_j\frac{\beta_i}{\alpha_i}+2\beta_j\ \frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big)\mu_i+8\pi\alpha_j\sum_{i>j}a_i.
\end{aligned}$$

容易验证 $8\pi\alpha_j\sum_{i>j}a_i=4\pi\alpha_j\sum_{i>j}a_i+4\pi\alpha_j\sum_{i\ge j+1}a_i$，因此我们改写

$$\begin{aligned}
0=&4\pi\alpha_j\sum_{i\ge j}a_i+4\pi\alpha_j\sum_{i\ge j+1}a_i-8\pi\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\sum_{i=1}^ma_i-2\beta_j\mu_1\sum_{i\le j}(-1)^{i+1}-2\alpha_j\mu_1\sum_{i>j}(-1)^{i+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\\
&+2\beta_j\ \frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\mu_1\sum_{i=1}^m(-1)^{i+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}=4\pi\alpha_j\sum_{i\ge j}a_i+4\pi\alpha_j\sum_{i\ge j+1}a_i-8\pi\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\sum_{i=1}^ma_i\\
&+\mu_1\Big[-2\beta_j\frac{1+(-1)^{j+1}}{2}-2\alpha_j\sum_{i>j}(-1)^{i+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}+2\beta_j\ \frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\sum_{i=1}^m(-1)^{i+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big],
\end{aligned}$$

鉴于（5.10）。为简便起见，我们将 $j=1$，……， m

$$x_j=\sum_{i=j}^ma_i,\qquad A_j=-\frac{\beta_j}{2\pi}\frac{1+(-1)^{j+1}}{2}-\frac{\alpha_j}{2\pi}\sum_{i>j}(-1)^{i+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}+\frac{\beta_j}{2\pi}\ \frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}B,$$

$$\text{and}\quad A_{m+1}=-\frac{1}{2\pi}\Big(-\frac{\beta_1+1}{\alpha_1-2}+B\Big),\quad \text{with}\quad B=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}.$$

因此，考虑到（5.9）并除以 4π，可得关于 $m+1$个变量 $X=[x_2\ x_3\ \dots\ x_m\ x_1\ \mu_1]^T$的如下线性方程组

$$\begin{aligned}
0&=\alpha_j x_j+\alpha_j x_{j+1}-2\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}x_1+A_j\mu_1,\quad j=2,\dots,m-1\\
0&=\alpha_m x_m-2\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}x_1+A_m\mu_m\\
0&=\alpha_1 x_2+\Big(\alpha_1-2\beta_1\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\Big)x_1+A_1\mu_1\\
0&=2x_1+A_{m+1}\mu_1
\end{aligned}$$

其矩阵形式为 $AX=\vec{0}$，其中

$$A=\begin{bmatrix}
\alpha_2 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & -2\beta_2\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1} & A_2\\
0 & \alpha_3 & \alpha_3 & \cdots & 0 & -2\beta_3\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1} & A_3\\
0 & 0 & \alpha_4 & \cdots & 0 & -2\beta_4\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1} & A_4\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_m & -2\beta_m\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1} & A_m\\
\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1-2\beta_1\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1} & A_1\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & A_{m+1}
\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_m\\ f_{m+1}\end{bmatrix}$$

对以下形式的 A 的行 f_j'进行运算

$$f_m\to f_m+(-1)^j\frac{\alpha_1}{\alpha_{j+1}}f_j,\qquad j=1,\dots,m-1$$

我们需要考虑矩阵

$$\begin{bmatrix}
\alpha_2 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & -2\beta_2\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1} & A_2\\
0 & \alpha_3 & \alpha_3 & \cdots & 0 & -2\beta_3\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1} & A_3\\
0 & 0 & \alpha_4 & \cdots & 0 & -2\beta_4\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1} & A_4\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_m & -2\beta_m\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1} & A_m\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1-2\alpha_1B\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1} & \frac{\alpha_1}{2\pi}\Big(-1+\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}B\Big)\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & A_{m+1}
\end{bmatrix}$$

因为

$$\alpha_1-2\beta_1\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}+\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{\alpha_1}{\alpha_{j+1}}(-2\beta_{j+1})\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}=\alpha_1-2\alpha_1B\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}$$

and

$$A_1+\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{\alpha_1}{\alpha_{j+1}}A_{j+1}=\underbrace{-\frac{\alpha_1}{2\pi}\Big(\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big)}_{=B}+\underbrace{\frac{\beta_1}{2\pi}\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}B+\frac{\alpha_1}{2\pi}\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}B\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\frac{\beta_{j+1}}{\alpha_{j+1}}}_{=\frac{\alpha_1}{2\pi}\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}B^2}$$

$$+\underbrace{\frac{\alpha_1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\Big[-\frac{\beta_{j+1}}{\alpha_{j+1}}\frac{1+(-1)^j}{2}+\sum_{i>j+1}(-1)^i\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big]}_{=0}=\frac{\alpha_1}{2\pi}B\Big(-1+\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}B\Big).$$

注意，A 可逆，因为

$$\det\begin{bmatrix}\alpha_1-2\alpha_1B\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1} & \frac{\alpha_1}{2\pi}\Big(-1+\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}B\Big)\\ 2 & A_{m+1}\end{bmatrix}=\frac{\alpha_1}{4\pi}\cdot\frac{\beta_1+1}{\alpha_1-2}>0.$$

因此，$x_2=x_3=\cdots=x_m=x_1=\mu_1=0$，这就证明了我们的结论。 □

现在，利用命题 5.1-5.3，我们可推得 $\Phi_{j,\,n}$ 在 $H_{\alpha_j}(\mathrm{IR}^2)$ 中弱收敛于零，并在 $L_{\alpha_j}(\mathrm{IR}^2)$ 中强收敛于零，当 $n\to+\infty$ 时。因此，这与（5.5）矛盾，从而得到先验估计$\|\phi\|\le C|\log\,\rho|\,\|h\|_p$。剩下的只是证明可解性断言。照常，借助里斯表示定理和弗雷德霍姆择一定理，将（3.17）写成弱形式，由先验估计（3.18）可得唯一解的存在性。命题3.1的证明至此完成。□

命题 **4.1** 的证明。按照上文的论证，只需证明先验估计 (4.18)。反设存在 $p>1$、序列 $\rho_n\to 0$、函数 $h_n\in L^p(\Omega_{\epsilon_n})$,$\phi_n\in W^{2,2}(\Omega_{\epsilon_n})$，使得

$$\mathcal{L}(\phi_n)=h_n\ \text{ in }\ \Omega_{\epsilon_n},\quad \phi_n=0\ \text{ on }\ \partial\Omega_{\epsilon_n},\tag{5.17}$$

其中 $\|\phi_n\|=1$ 且 $|\log\,\rho_n|\,\|h_n\|_p=o(1)$ 当 $n\to+\infty$ 时成立。我们省略 $\delta_{i,n}=\delta_i$ 中的下标 n。回忆 $\delta_i^{\alpha_i}=d_{i,n}\rho_n^{\beta_i}$。现在，定义 $\Phi_{i,n}(y):=\phi_n(\delta_i y)$，其中 $y\in\Omega_{i,n}:=\delta_i^{-1}\Omega_{\epsilon_n}$, $i=1,\dots,m$，并将其延拓至 $\mathrm{IR}^2\setminus\Omega_{\epsilon_n}$ 中。采用与 [13, 断言 1 的第 4], 节相同的论证，可证明以下事实。我们给出证明概要。

断言 5.4. 序列 $\{\Phi_{i,n}\}_n$ （取一个子列后）在 $H_{\alpha_i}(\mathrm{IR}^2)$ 中弱收敛到 Φ_i^*，并在 $L_{\alpha_i}(\mathrm{IR}^2)$ 中强收敛。

证明：首先，我们将证明序列 $\{\Phi_{i,n}\}_n$ 在 $H_{\alpha_i}(\mathrm{IR}^2)$ 中有界。注意到$\|\Phi_{i,\,n}\|_{H_0^1(\Omega_{i,\,n})}=1$ 对于 $i=1,\dots,m$。因此，我们要证明存在一个常数 $M>0$，使得对所有 n （取一个子列后）都有 $\|\Phi_{i,\,n}\|^2_{L_{\alpha_i}}\le M.$。注意，对任意 $i\in\{1,\dots,m\}$，我们有 $\Omega_{i,\,n}$

$$\Delta\Phi_{i,n}+\delta_i^2K_0(\delta_i y)\,(\Phi_{i,n}+\tilde c_{0,n})+\delta_i^2K_1(\delta_i y)\,(\Phi_{i,n}+\tilde c_{1,n})=\delta_i^2h_n(\delta_i y),\tag{5.18}$$

为简便起见，我们记 $\tilde c_{j,\,n}=\tilde c_j(\phi_n)$，其中 $\tilde c_j$ 由（5.1）给出。此外，可得$\Phi_{i,\,n}\to\Phi_i^*$ 在 $H_0^1(\Omega_{i,\,n})$ 中弱收敛，并且在任意 $L^p(K)$ 中强收敛，其中 K 是 $\mathbb{R}^2$中的紧集。现在，设 χ 为 $\mathbb{R}^2$. 中的光滑紧支撑函数。将（5.18）乘以 χ，分部积分后得到

$$\begin{aligned}&-\int_{\Omega_{i,n}}\nabla\Phi_{i,n}\nabla\chi+\int_{\Omega_{i,n}}\left[\frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}+o(1)\right]\Phi_{i,n}\chi+\tilde c_{0,n}\int_{\Omega_{i,n}}\left[\frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}+o(1)\right]\chi\\&\quad+\int_{\Omega_{i,n}}o(1)\Phi_{i,n}\chi+\tilde c_{1,n}\int_{\Omega_{i,n}}o(1)\chi=\int_{\Omega_{i,n}}\delta_i^2h_n(\delta_i y)\chi\end{aligned}$$

对于 i 奇数且

$$\begin{aligned}&-\int_{\Omega_{i,n}}\nabla\Phi_{i,n}\nabla\chi+\int_{\Omega_{i,n}}o(1)\Phi_{i,n}\chi+\tilde c_{0,n}\int_{\Omega_{i,n}}o(1)\chi+\int_{\Omega_{i,n}}\left[\frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}+o(1)\right]\Phi_{i,n}\chi\\&\quad+\tilde c_{1,n}\int_{\Omega_{i,n}}\left[\frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}+o(1)\right]\chi=\int_{\Omega_{i,n}}\delta_i^2h_n(\delta_i y)\chi\end{aligned}$$

对于偶数 i，鉴于

$$\delta_i^2K_0(\delta_i y)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}+O\Big(\sum\limits_{\substack{j<i\\ j\text{ odd}}}\Big(\dfrac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_j}+\sum\limits_{\substack{i<j\\ j\text{ odd}}}\Big(\dfrac{\delta_i}{\delta_j}\Big)^{\alpha_j}\Big) & \text{if } i \text{ is odd}\\ O\Big(\sum\limits_{\substack{j<i\\ j\text{ odd}}}\Big(\dfrac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_j}+\sum\limits_{\substack{i<j\\ j\text{ odd}}}\Big(\dfrac{\delta_i}{\delta_j}\Big)^{\alpha_j}\Big) & \text{if } i \text{ is even}\end{cases}\tag{5.19}$$

and

$$\delta_i^2K_1(\delta_i y)=\begin{cases}O\Big(\sum\limits_{\substack{j<i\\ j\text{ even}}}\Big(\dfrac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_j}+\sum\limits_{\substack{i<j\\ j\text{ even}}}\Big(\dfrac{\delta_i}{\delta_j}\Big)^{\alpha_j}\Big) & \text{if } i \text{ is odd}\\ \dfrac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}+O\Big(\sum\limits_{\substack{j<i\\ j\text{ even}}}\Big(\dfrac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_j}+\sum\limits_{\substack{i<j\\ j\text{ even}}}\Big(\dfrac{\delta_i}{\delta_j}\Big)^{\alpha_j}\Big) & \text{if } i \text{ is even}\end{cases}\tag{5.20}$$

在 $\mathrm{IR}^2\setminus\{0\}$ 的紧子集上一致收敛。我们将关于 $\tilde{c}_{0,\,n}$ 和 $\tilde{c}_{1,\,n}$ 的系统改写为对角占优形式，即 $n\to+\infty$

$$\tilde{c}_{0,n}\int_{\Omega_{i,n}}\left[\frac{2\alpha_i^2|y|^{\alpha_i-2}}{(1+|y|^{\alpha_i})^2}+o(1)\right]\chi+o(1)\tilde{c}_{1,n}=O(1)$$

$$o(1)\ \tilde{c}_{0,n}+\tilde{c}_{1,n}\int_{\Omega_{j,n}}\left[\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}+o(1)\right]\chi=O(1),$$

选择 i 奇数和 j 偶数。因此，若我们选择 χ 使得 $\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2\alpha_k^2|y|^{\alpha_k-2}}{(1+|y|^{\alpha_k})^2}\,\chi\,dy\neq 0$ 对于 $k=i,\ j$ 则可得 $\tilde{c}_{i,\,n}=O(1)$，对于 $i=0,\ 1$。现在，我们将（5.18）乘以 $\Phi_{i,\,n}$ 对任意 $i\in\{1,\dots,m\}$，分部积分后得到

$$\sum_{i=1}^{m}2\alpha_i^2\|\Phi_{i,n}\|^2_{L_{\alpha_i}}=1+\lambda_0(\tilde{c}_{0,n})^2+\lambda_1\tau^2(\tilde{c}_{1,n})^2+o(1).\tag{5.21}$$

因此，序列 $\{\Phi_{i,n}\}_n$ 在 $H_{\alpha_i}(\mathrm{IR}^2)$ 中有界，故存在一个子列 $\{\Phi_{i,n}\}_n$ 以及函数 Φ_i^*，$i=1,\dots,m$，使得 $\{\Phi_{i,n}\}_n$ 在 $H_{\alpha_i}(\mathrm{IR}^2)$ 中弱收敛于 Φ_i^*，并在$L_{\alpha_i}(\mathrm{IR}^2)$ 中强收敛于 Φ_i^*。这就证明了我们的断言。□

定义序列 $\psi_{i,\,n}=\phi_n+\tilde{c}_{i,\,n}$, $i=0,1$。显然可以看出

$$\Delta\psi_{i,n}+K_0\psi_{1,n}+K_1\psi_{2,n}=h_n\quad\text{in}\quad\Omega_{\epsilon_n},\qquad i=0,1.\tag{5.22}$$

现在，定义 $\Psi_{i,\,j,\,n}(y):=\psi_{i,\,n}(\delta_j y)$，其中 $y\in\Omega_{j,\,n}$, $i=0,1$ 且 $j=1,\dots,m$。注意到 $\Psi_{i,\,j,\,n}=\Phi_{j,\,n}+\tilde{c}_{i,\,n}$。因此，我们可以证明以下事实。

断言5.5. $\Psi_{0,\,j,\,n}\to a_jY_{0j}$ 当 j 为奇数时，以及 $\Psi_{1,\,j,\,n}\to a_jY_{0j}$ 当 j 为偶数时，在 $H_{\alpha_j}(\mathrm{IR}^2)$ 中弱收敛，并在 $L_{\alpha_j}(\mathrm{IR}^2)$ 中强收敛，当 $n\to+\infty$，其中某个常数 $a_j\in\mathrm{IR}$，$j=1,\dots,m$。

证明：根据前面的计算，显然在 $\Omega_{j,\,n}$

$$\Delta\Psi_{0,j,n}+\delta_j^2K_0(\delta_jy)\Psi_{0,j,n}+\delta_j^2K_1(\delta_jy)\left(\Psi_{0,j,n}-\tilde{c}_{0,n}+\tilde{c}_{1,n}\right)=\delta_j^2h_n(\delta_jy)$$

and

$$\Delta\Psi_{1,j,n}+\delta_j^2K_0(\delta_jy)\left(\Psi_{1,n}-\tilde{c}_{1,n}+\tilde{c}_{0,n}\right)+\delta_j^2K_1(\delta_jy)\Psi_{1,j,n}=\delta_j^2h_n(\delta_jy).$$

此外，$\{\tilde{c}_{i,n}\}$ 是 IR 中的有界序列，因此可得，对于 $i=1,2$ 和 $j=1,\dots,m$，$\{\Psi_{i,j,n}\}_n$ 在 $H_{\alpha_j}(\mathrm{IR}^2)$ 中有界。我们还有

$$\int_{\Omega_{j,n}}(\delta_j^2|h_n(\delta_jy)|)^p\,dy=\delta_j^{2p-2}\int_{\Omega_{\epsilon_n}}|h_n(x)|^p\,dx=\delta_i^{2p-2}\|h_n\|_p^p=o(1).$$

因此，考虑到（5.19）和（5.20），我们推得 $\Psi_{i,\,j,\,n}\to\Psi_j^*$ 当 $n\to+\infty$ 时，且若$j=1$则有 $i=1$，……，m_1；若 $j=m_1+1$则有 $i=2$，……，m，其中 Ψ_j^*是下列方程的一个解：

$$\Delta\Psi+\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\Psi=0,\qquad j=1,\dots,m,\qquad\text{in }\mathbb{R}^2\setminus\{0\}.$$

众所周知，Ψ_j^*, $j=1,\dots,m$可延拓为整个 IR^2上的一个解。因此，必要时利用对称性假设，我们得到，对于某个常数 $a_j\in\mathrm{IR}$，$\Psi_j^*=a_jY_{0j}$，$j=1,\dots,m$。□

记 $\tilde{c}_i=\lim_{n\to+\infty}\tilde{c}_{i,\,n}$，其中 $i=0,\ 1$；必要时取一个子列。因此，我们得到

$$\Phi_{j,n}\to a_jY_{0j}-\tilde{c}_0,\quad\text{for } j\text{ odd}\quad\text{and}\quad\Phi_{j,n}\to a_jY_{0j}-\tilde{c}_1,\quad\text{for } j\text{ even},\tag{5.23}$$

在 $H_{\alpha_j}(\mathrm{IR}^2)$ 中弱收敛，并在 $L_{\alpha_j}(\mathrm{IR}^2)$ 中强收敛，因为 $\Phi_{j,n}=\Psi_{i,j,n}-\tilde{c}_{i,n}$。

断言 5.6. 对于所有 $j=1,\dots,m$，存在极限（在子列意义下），

$$\mu_j = \lim_{n\to+\infty} \log \rho_n \int_{\Omega_{j,n}} \Pi_j(y)\Psi_{l,j,n}(y)\,dy = 0, \tag{5.24}$$

其中，$l=0$ 在 j 为奇数时成立，$l=1$ 在 j 为偶数时成立。此外，有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 0. \tag{5.25}$$

证明：为此，我们使用测试函数 $P_\epsilon Z_{0j}$，其中 Z_{0j} 如断言 5.3所示。因此，根据关于 h_n的假设，$\|\log \rho_n|\,\|h_n\|_* = o(1)$，我们得到（5.24）-（5.25）。

假设对于所有 $l=0$，j 均为奇数，或者对于所有 $l=1$，j 均为偶数。将方程（5.17）乘以 $P_\epsilon Z_{0j}$并分部积分，我们得到

$$\int_{\Omega_\epsilon} hP_\epsilon Z_{0j} = \int_{\Omega_\epsilon} \Delta Z_{0j}\left[\psi_l - \tilde{c}_{l,n}\right] + \int_{\Omega_\epsilon} \left[K_0\psi_0 + K_1\psi_1\right] P_\epsilon Z_{0j},$$

鉴于 $P_\epsilon Z_{0j}=0$ 和$\psi_l = \tilde{c}_{l,\,n}$ 在 $\partial\Omega_\epsilon$ 上，并且

$$\int_{\Omega_\epsilon} \Delta\psi_l P_\epsilon Z_{0j} = \int_{\Omega_\epsilon} \psi_l \Delta P_\epsilon Z_{0j} - \psi_l\Big|_{\partial\Omega_\epsilon} \int_{\Omega_\epsilon} \Delta P Z_{0j} = \int_{\Omega_\epsilon} \Delta Z_{0j}\left[\psi_l - \tilde{c}_{l,n}\right].$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\epsilon} hPZ_{0j} = -\int_{\Omega_\epsilon} \left[\psi_l - \tilde{c}_{l,n}\right]|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}Z_{0j} + \int_{\Omega_\epsilon}\left[K_0\psi_0 + K_1\psi_1\right]P_\epsilon Z_{0j}\\
&= \int_{\Omega_\epsilon} |x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\psi_l\left(PZ_{0j} - Z_{0j}\right), + \tilde{c}_{l,n}\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}Z_{0j} + \int_{\Omega_\epsilon}\left(K_0\psi_0 + K_1\psi_1 - |x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\psi_l\right)P_\epsilon Z_{0j}.
\end{aligned}$$

两边乘以 γ_0^{-1}并按照命题 5.2 中的相同方法推导（将 $\Psi_{l,\,i,\,n}$ 替换为 $\Phi_{i,\,n}$，其中 $l=0$对应于 j 为奇数的情形，$l=1$ 对应于 j 为偶数的情形，并在（5.12）和（5.13）中作相应替换），可得

$$2\sum_{i=1}^{m} a_i = \left(-\frac{\beta_1+1}{4\pi(\alpha_1-2)} + \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\frac{\beta_i}{2\pi\alpha_i}\right)\mu_1,$$

并且对于所有的 $j=1,\dots,m-1$，都有 $\mu_j = (-1)^{j-1}\mu_1$，鉴于

$$\gamma_0^{-1}\int_{\Omega_\epsilon} hPZ_{0j} = O\left(|\log\rho|\,\|h\|_p\right) = o(1) \quad \text{and} \quad \gamma_0^{-1}\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}Z_{0j} = O(\rho^{\tilde{\sigma}}|\log\rho|).$$

另一方面，容易验证

$$\int_{\Omega_\epsilon} K_0 = \sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{odd}}}^{m}\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_k-2}e^{w_k}\,dx = \sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{odd}}}^{m}\left[4\pi\alpha_k + O(\delta_k^{\alpha_k}) + O\Big(\frac{\epsilon^2}{\delta_k^2}\Big)\right] = \lambda_0 + O(\rho^{\tilde{\sigma}})$$

类似地，对于某个 $\tilde{\sigma}>0$，有 $\int_{\Omega_\epsilon} K_1 = \lambda_2\tau^2 + O(\rho^{\tilde{\sigma}})$，因此当 ψ_0 且 ψ_1 时，我们有

$$\int_{\Omega_\epsilon} K_i\psi_i = \left(1 - \frac{1}{\lambda_i\tau^{2i}}\int_{\Omega_\epsilon} K_i\right)\int_{\Omega_\epsilon} K_i\phi = O(\rho^{\tilde{\sigma}})\int_{\Omega_\epsilon} K_i\phi = O(\rho^{\tilde{\sigma}}).$$

此外，我们得到

$$\int_{\Omega_\epsilon} K_0\psi_0 = \sum_{\substack{j=1\\ j\ \text{odd}}}^{m}\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\psi_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\ \text{odd}}}^{m_1}\int_{\Omega_{j,n}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\Psi_{0,j,n}(y)\,dy$$

and

$$\int_{\Omega_\epsilon} K_1\psi_1 = \sum_{\substack{j=1\\ j\ \text{even}}}^{m}\int_{\Omega_{j,n}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\Psi_{1,j,n}(y)\,dy.$$

因此，可得

$$\lim_{n\to+\infty}\log\rho_n\int_{\Omega_{\epsilon_n}}K_0\psi_0=0=\sum_{\substack{j=1\\ j\ \text{odd}}}^{m}\mu_j=\mu_1\sum_{\substack{j=1\\ j\ \text{odd}}}^{m}1,$$

使得，对于所有 $j=1$，.....，m，$\mu_j=0$。 □

断言 5.7. 有如下结论：

$$0=\tilde{c}_l+a_j+2\sum_{i>j}a_i, \tag{5.26}$$

其中，$l=0$ 适用于奇数 j，而 $l=1$ 适用于偶数 j。

证明：为此，我们将以下函数作为测试函数：$P_\epsilon w_j$。因此，将方程（5.4）乘以 $P_\epsilon w_j$并像前一个断言中那样分部积分，可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\epsilon}hPw_j&=-\int_{\Omega_\epsilon}[\psi_l-\tilde{c}_{l,n}]|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}+\int_{\Omega_\epsilon}[K_0\psi_0+K_1\psi_j]P_\epsilon w_j\\&=-\int_{\Omega_\epsilon}\psi_l|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}+\tilde{c}_{l,n}\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}+\int_{\Omega_\epsilon}[K_0\psi_0+K_1\psi_1]P_\epsilon w_j\end{aligned}$$

鉴于 $P_\epsilon w_j=0$ 在 $\partial\Omega_{\epsilon_n}$ 以及 $\int_{\Omega_\epsilon}\Delta\psi_l P_\epsilon w_j=\int_{\Omega_\epsilon}\psi_l\,\Delta P_\epsilon w_j$。仿照断言5.3（在（$\Psi_{l,\ i,\ n}$ 中将其替换为 $\Phi_{i,\ n}$，其中 $l=0$ 在 j 为奇数时取值，而 $l=1$ 在 j 为偶数时取值，并应用于（5.15）和（5.16）），可得

$$\begin{aligned}0=&4\pi\alpha_j\tilde{c}_l+4\pi\alpha_j a_j+\sum_{i\le j}\Big(-2\beta_j+2\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big)\mu_i-8\pi\beta_j\frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\sum_{i=1}^{m}a_i\\&+\sum_{i>j}\Big(-2\alpha_j\frac{\beta_i}{\alpha_i}+2\beta_j\ \frac{\alpha_1-2}{\beta_1+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big)\mu_i+8\pi\alpha_j\sum_{i>j}a_i,\end{aligned}$$

鉴于

$$\int_{\Omega_\epsilon}hPw_j=O\left(|\log\rho|\,\|h\|_p\right)=o\left(1\right),$$

$$\int_{\Omega_\epsilon}\psi_l|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}=\int_{\Omega_{j,n}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\Psi_{l,j,n}=a_j\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}Y_{0j}\,dy+o(1)=o(1)$$

and

$$\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}=\int_{\Omega_{j,n}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\,dy=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\,dy+o(1)=4\pi\alpha_j+o(1).$$

利用（5.24）和（5.25），可得（5.26）对于 $l=0$，其中 j 为奇数，且 $l=1$，其中 j 为偶数。 □

下一步，考虑函数 $\eta_j(x)=\frac{4}{3}\log(\delta_j^{\alpha_j}+|x|^{\alpha_j})\frac{\delta_j^{\alpha_j}-|x|^{\alpha_j}}{\delta_j^{\alpha_j}+|x|^{\alpha_j}}+\frac{8}{3}\frac{\delta_j^{\alpha_j}}{\delta_j^{\alpha_j}+|x|^{\alpha_j}}$，对于任意$j\in\{1,\dots,m\}$使得 $\Delta\eta_j+|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\eta_j=|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}Z_{0j}$. 注意到

$$P_\epsilon\eta_j=\eta_j+\frac{8\pi}{3}\alpha_jH(x,0)-\tilde{\gamma}_jG(x,0)+O(\rho^{\tilde{\sigma}})\quad\text{uniformly in }\Omega_\epsilon\text{ for some }\tilde{\sigma}>0,$$

通过与引理中推导展开式类似的论证，见引理 2.1，如 [13, 引理 4。1] 其中$m=1$且 $\xi=0$，系数 $\tilde{\gamma}_i$的，$i=1$，.....，m，由下式给出

$$\tilde{\gamma}_i\left[-\frac{1}{2\pi}\log\epsilon+H(0,0)\right]=\frac{4}{3}\alpha_i\log\delta_i+\frac{8}{3}+\frac{8\pi}{3}\alpha_iH(0,0) \tag{5.27}$$

由（2.2）可得 $\tilde{\gamma}_i=-\frac{8\pi(\alpha_1-2)}{\beta_1+1}\frac{\beta_i}{\alpha_i}+O\left(\frac{1}{|\text{对数 }\rho|}\right)$.

断言 5.8. 有 $a_j+4\sum_{i>j}a_i+2\tilde{c}_l=0$ 其中 $l=0$ 对所有 j 奇数且 $l=1$ 对所有 j 偶数。因此，结合 (5.26) 可得 $a_i=0$ 对所有 $i=1,\dots,m$。

证明： 我们使用以下测试函数 $P_\epsilon\eta_{j\circ}$ 因此，根据关于 h_n, 对数 $\rho_n|\ \|h_n\|_* = o(1)$，我们得到 a_j 与 $\tilde{c}_i$ 之间的上述关系，对于 $l=0$ 及所有 j 奇数，或对于 $l=1$ 及所有 j偶数。假设 $l=0$ 对所有 j 奇数，或 $l=1$ 对所有 j 偶数。将方程（5.17）乘以 $P_\epsilon\eta_j$ ，并再次分部积分，得到

$$\int_{\Omega_\epsilon} hP\eta_j = \int_{\Omega_\epsilon} [\psi_l - \tilde{c}_{l,n}] \left[|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}Z_{0j} - |x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\eta_j\right] + \int_{\Omega_\epsilon} [K_0\psi_0 + K_1\psi_1]\, P_\epsilon\eta_j = \int_{\Omega_\epsilon} \psi_i|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}Z_{0j}$$
$$+ \int_{\Omega_\epsilon} |x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\psi_l\,(P\eta_j - \eta_j) + \int_{\Omega_\epsilon} \left(K_0\psi_0 + K_1\psi_1 - |x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\psi_l\right) P_\epsilon\eta_j - \tilde{c}_{l,n}\int_{\Omega_\epsilon} |x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\,(Z_{0j} - \eta_j)\,,$$

现在，对每个积分项进行估计可得 $\int_{\Omega_\epsilon} hP\eta_j = O(|\log\rho|\,\|h\|_p) = o(1)$，对于所有 $j=1,\dots,m$ 均成立，这是因为 $P\eta_j = O(|\log\rho|)$ 且 $G(x,0) = O(|\log\rho|)$。接下来，通过缩放可得，要么对于 $l=0$ 且所有 j 为奇数，要么对于 $l=1$ 且所有 j 为偶数，下式成立

$$\int_{\Omega_\epsilon} \psi_l|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}Z_{0j} = \int_{\Omega_{j,n}} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\Psi_{l,j,n}Y_{0j}\,dy = a_j\int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}Y_{0j}^2\,dy + o(1).$$

注意

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}Y_{0j}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\left(\frac{1-|y|^{\alpha_j}}{1+|y|^{\alpha_j}}\right)^2 dy = \frac{4\pi}{3}\alpha_j$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}Y_{0j}\log|y| = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\,\frac{1-|y|^{\alpha_j}}{1+|y|^{\alpha_j}}\,\log|y|\,dy = -4\pi.$$

此外，利用（5.27）可得

$$\int_{\Omega_\epsilon} |x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\psi_l\,(P_\epsilon\eta_j - \eta_j) = \int_{\Omega_\epsilon} |x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\psi_l\left[\left(\frac{8\pi}{3}\alpha_j - \tilde{\gamma}_j\right)H(x,0) + \frac{1}{2\pi}\tilde{\gamma}_j\log|x| + O(\rho^{\tilde{\sigma}})\right]$$
$$= \left(\frac{8\pi}{3}\alpha_j - \tilde{\gamma}_j\right)\int_{\Omega_{j,n}} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\Psi_{l,j,n}H(\delta_j y,0)\,dy + \frac{\tilde{\gamma}_j}{2\pi}\log\delta_j\int_{\Omega_{j,n}} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\Psi_{l,j,n}\,dy$$
$$+ \frac{\tilde{\gamma}_j}{2\pi}\int_{\Omega_{j,n}} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\Psi_{l,j,n}\log|y|dy + O(\rho^{\tilde{\sigma}}) = -\frac{4(\alpha_1-2)\beta_j}{3(\beta_!+1)}a_j\int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}Y_{0j}\log|y|dy + o(1),$$

由（5.24）可知。此外，利用（4.15）可得

注意

$$\int_{\Omega_{j,n}} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\Psi_{i,j,n}(y)\,dy = a_j\int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}Y_{0j}(y)\,dy + o(1) = o(1),$$

由于

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}Y_{0j}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\cdot\frac{1-|y|^{\alpha_j}}{1+|y|^{\alpha_j}}\,dy = 0.$$

如果 $i<j$ 则

$$P_\epsilon\eta_j(\delta_i y) = \left[\frac{4}{3}\alpha_j\log\delta_j + \frac{4}{3}\log\left(1+\left(\frac{\delta_i|y|}{\delta_j}\right)^{\alpha_j}\right)\right]\frac{1-\left(\frac{\delta_i|y|}{\delta_j}\right)^{\alpha_j}}{1+\left(\frac{\delta_i|y|}{\delta_j}\right)^{\alpha_j}} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\delta_i|y|}{\delta_j}\right)^{\alpha_j}}$$
$$+ \frac{\tilde{\gamma}_j}{2\pi}\log(\delta_i|y|) + \left(\frac{8\pi}{3}\alpha_j - \tilde{\gamma}_j\right)H(\delta_i y,0) + O(\rho^{\tilde{\sigma}})$$

and

$$\int_{\Omega_\epsilon} |x|^{\alpha_i-2}e^{w_i}\psi_l P_\epsilon\eta_j = \int_{\Omega_{i,n}} \Pi_i\Psi_{l,i,n}P_\epsilon\eta_j(\delta_i y) = \frac{\tilde{\gamma}_j}{2\pi}\int_{\Omega_{i,n}} \Pi_i\Psi_{l,i,n}(y)\log|y| + o(1)$$
$$= \frac{16\pi(\alpha_1-2)\beta_j}{3(\beta_1+1)}a_i + o(1)$$

鉴于 $\frac{\delta_i|y|}{\delta_j}=o$对 y 在紧子集上一致成立，（5.24）以及控制收敛。同样，若 $i>j$ 则

$$P_\epsilon\eta_j(\delta_i y)=\left[\frac{4}{3}\alpha_j\log\delta_j+\frac{4}{3}\log\left(\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}\right)\right]\frac{\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}-|y|^{\alpha_j}}{\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}}+\frac{8}{3}\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}}$$
$$+\frac{\tilde\gamma_j}{2\pi}\log(\delta_i|y|)+\left(\frac{8\pi}{3}\alpha_j-\tilde\gamma_j\right)H(\delta_i y,0)+O(\rho^{\tilde\sigma})$$

and

$$\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_i-2}e^{w_i}\psi_l P_\epsilon\eta_j=\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Psi_{l,i,n}P_\epsilon\eta_j(\delta_i y)=\frac{4}{3}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Psi_{l,i,n}\log\left(\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}\right)\frac{\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}-|y|^{\alpha_j}}{\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}}$$
$$+\frac{\tilde\gamma_j}{2\pi}\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Psi_{l,i,n}(y)\log|y|+o(1)=-\frac{4}{3}\alpha_j a_i(-4\pi)+\frac{16\pi(\alpha_1-2)\beta_j}{3(\beta_1+1)}a_i+o(1)$$

根据 $\frac{\delta_j}{\delta_i}=o(1)$,

$$\frac{4}{3}\alpha_j\log\delta_j\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Psi_{l,i,n}\frac{\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}-|y|^{\alpha_j}}{\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}}=\frac{4}{3}\log d_j\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Psi_{l,i,n}\frac{\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}-|y|^{\alpha_j}}{\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}}-\frac{4}{3}\beta_j\log\rho\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Psi_{l,i,n}$$
$$+\frac{8}{3}\beta_j\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}\log\rho\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Psi_{l,i,n}\frac{1}{\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}}=o(1),$$

$$\int_{\Omega_{i,n}}\Pi_i\Psi_{l,i,n}\log\left(\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}\right)\frac{\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}-|y|^{\alpha_j}}{\left(\frac{\delta_j}{\delta_i}\right)^{\alpha_j}+|y|^{\alpha_j}}=-\alpha_j a_i\int_{\mathbb{R}^2}\Pi_i Y_{0i}\log|y|+o(1),$$

(5.24) 以及控制收敛。如果 $l=0$ 当 j 为奇数且 $l=1$ 当 j 为偶数时，我们得到

$$\int_{\Omega_\epsilon}\left[K_0\psi_0+K_1\psi_1-|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\psi_l\right]P_\epsilon\eta_j=\sum_{i<j}\frac{16\pi(\alpha_1-2)\beta_j}{3(\beta_1+1)}a_i+\frac{16\pi(\alpha_1-2)\beta_j}{3(\beta_1+1)}a_j$$
$$+\sum_{i>j}\left[\frac{16\pi(\alpha_1-2)\beta_j}{3(\beta_1+1)}a_i+\frac{16\pi}{3}\alpha_j a_i\right]+o(1)=\frac{16\pi(\alpha_1-2)\beta_j}{3(\beta_1+1)}\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}a_i+\frac{16\pi}{3}\alpha_j\sum_{i>j}a_i+o(1).$$

此外，类似于上面的论证，我们得到

$$\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\left(Z_{0j}-\eta_j\right)=\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}Z_{0j}-\int_{\Omega_\epsilon}|x|^{\alpha_j-2}e^{w_j}\eta_j=\int_{B_{\frac{r}{\delta_j}}(0)\setminus B_{\frac{\epsilon_j}{\delta_j}}(0)}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\frac{1-|y|^{\alpha_j}}{1+|y|^{\alpha_j}}$$
$$-\int_{\Omega_{j,n}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\left[\frac{4}{3}\log\left(\delta_j^{\alpha_j}+\delta_j^{\alpha_j}|y|^{\alpha_j}\right)Y_{0j}(y)+\frac{8}{3}\frac{1}{1+|y|^{\alpha_j}}\right]dy+O(\delta_j^{\alpha_j})$$
$$=O(\rho^{\tilde\sigma}|\log\rho|)-\frac{4}{3}\alpha_j\log\delta_j\int_{\Omega_{j,n}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}Y_{0j}(y)\,dy-\frac{4}{3}\int_{\Omega_{j,n}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}Y_{0j}(y)\log\left(1+|y|^{\alpha_j}\right)dy$$
$$-\frac{8}{3}\int_{\Omega_{j,n}}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\frac{1}{1+|y|^{\alpha_j}}dy=-\frac{8\pi}{3}\alpha_j+o(1),$$

根据

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}Y_{0j}(y)\log\left(1+|y|^{\alpha_j}\right)dy=-2\pi\alpha_j\qquad\text{and}\qquad\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2\alpha_j^2|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\frac{1}{1+|y|^{\alpha_j}}dy=2\pi\alpha_j.$$

因此，我们得出

$$o(1)=a_j\left(\frac{4\pi}{3}\alpha_j+o(1)\right)+\frac{16\pi(\alpha_1-2)\beta_j}{3(\beta_1+1)}a_j+\frac{16\pi(\alpha_1-2)\beta_j}{3(\beta_1+1)}\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}a_i+\frac{16\pi}{3}\alpha_j\sum_{i>j}a_i-\tilde c_{l,n}\left(-\frac{8\pi}{3}\alpha_j+o(1)\right),$$

由此即可得出结论。 □

现在，利用断言 5.4-5.8 并仿照命题3.1的证明进行论证，我们可以推出先验估计（4.18）。至此，证明完毕。□

Appendix A.

引理 A.1. 存在接近 1 的 $p_0 > 1$，使得对于任意 $1 < p \le p_0$ 以及某个 $\eta_p > 0$，以下所有积分的阶均为 $O(\rho^{p\eta_p})$: (i) $\delta_j^{2-p}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}} \Big| \frac{|y|^{\alpha_j-1}}{1+|y|^{\alpha_j}()^2}\Big|^p dy$; (ii) $\rho^\eta\delta_j^{2-2p}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}} \Big| \frac{|y|^{\alpha_j-2}}{1+|y|^{\alpha_j}()^2}\Big|^p dy$; (iii) $\delta_j^{2-2p}\big(\frac{\delta_i}{\delta_j}\big)^{\alpha_i p}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}} \Big|\frac{1}{|y|^{\alpha_j+2}}\Big|^p dy$, 当 $i<j$ 时; (iv) $\delta_j^{2-2p}\big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\big)^{\alpha_i p}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}} \big||y|^{\alpha_j-2}\big|^p dy$, 当 $j<i$ 时; (v) $\rho^{(1+\tau)p}\delta_j^{2+2\tau p}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}} \Big|\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)\tau}}\Big|^p dy)$, 当 j 为奇数时; 以及 (vi) $\rho^{(1+1/\tau)p}\delta_j^{2+2p/\tau}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}} \Big|\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2/\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)/\tau}}\Big|^p dy)$, 当 j 为偶数时。

证明: 容易验证，对于任意 $1<p$ 和任意 $j=1,\ .....,\ m$

$$\delta_j^{2-p}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}} \left|\frac{|y|^{\alpha_j-1}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\right|^p dy = O(\delta_j^{2-p}) = O(\rho^{(2-p)\beta_j/\alpha_j})$$

and

$$\rho^\eta\delta_j^{2-2p}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}} \left|\frac{|y|^{\alpha_j-2}}{(1+|y|^{\alpha_j})^2}\right|^p dy = O(\rho^\eta\delta_j^{2-2p}) = O(\rho^{\eta+(2-2p)\beta_j/\alpha_j}).$$

此外，固定 $j=1,\ .....,$ 对于任意 m， $i<j$，我们有

$$\int_{\frac{A_j}{\delta_j}} \left|\frac{1}{|y|^{\alpha_j+2}}\right|^p dy = O\Big(\Big(\frac{\delta_{j-1}}{\delta_j}\Big)^{1-p-\frac{\alpha_j p}{2}}\Big).$$

因此，存在 $\eta_p>0$ 使得 $\delta_j^{2-2p}\big(\frac{\delta_i}{\delta_j}\big)^{\alpha_i p}\big(\frac{\delta_{j-1}}{\delta_j}\big)^{1-p-\frac{\alpha_i}{2}} = O\ (\rho^{p\eta_p})$，因为对于 $p=1$，我们有

$$\Big(\frac{\delta_i}{\delta_j}\Big)^{\alpha_i}\Big(\frac{\delta_{j-1}}{\delta_j}\Big)^{-\frac{\alpha_i}{2}} = \Big(\frac{\delta_i}{\delta_{j-1}}\Big)^{\alpha_i}\Big(\frac{\delta_{j-1}}{\delta_j}\Big)^{\frac{\alpha_i}{2}} = O\big(\rho^{\alpha_i(\frac{\beta_i}{\alpha_i}-\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}})+\frac{\alpha_i}{2}(\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}-\frac{\beta_j}{\alpha_j})}\big)$$

并且 $\alpha_i\Big(\frac{\beta_i}{\alpha_i}-\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}\Big)+\frac{\alpha_i}{2}\Big(\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}-\frac{\beta_j}{\alpha_j}\Big)>0$，鉴于 $i\le j-1<j$，且 $\frac{\beta_l}{\alpha_l}$ 在 l 上递减。类似地，对于 $j<i$，我们有

$$\delta_j^{2-2p}\Big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_i p}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}} \big||y|^{\alpha_j-2}\big|^p\, dy = O\Big(\delta_j^{2-2p}\Big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\Big)^{\alpha_i p}\Big(\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j}\Big)^{1-p+\frac{\alpha_i}{2}}\Big)$$

并且对于 $p=1$，我们得到 $\big(\frac{\delta_j}{\delta_i}\big)^{\alpha_i}\big(\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j}\big)^{\frac{\alpha_i}{2}} = \big(\frac{\delta_{j+1}}{\delta_i}\big)^{\alpha_i}\big(\frac{\delta_j}{\delta_{j+1}}\big)^{\frac{\alpha_i}{2}} = O\big(\rho^{\alpha_i(\frac{\beta_{j+1}}{\alpha_{j+1}}-\frac{\beta_i}{\alpha_i})+\frac{\alpha_i}{2}(\frac{\beta_j}{\alpha_j}-\frac{\beta_{j+1}}{\alpha_{j+1}})}\big)$.。现在，若 j 为奇数，则有

$$\int_{\frac{A_j}{\delta_j}} \left|\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)\tau}}\right|^p dy = O\Big(\Big(\frac{\delta_{j-1}}{\delta_j}\Big)^{1+p\tau-\frac{\alpha_j p\tau}{2}} + \Big(\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j}\Big)^{1+p\tau+\frac{\alpha_j p\tau}{2}}\Big).$$

于是，我们得到 $\rho^{(1+\tau)p}\delta_j^{2+2\tau p}\Big(\frac{\delta_{j-1}}{\delta_j}\Big)^{1+p\tau-\frac{\alpha_j p\tau}{2}} = O\big(\rho^{(1+\tau)p+\frac{\beta_j}{\alpha_j}(1+\tau p+\frac{\alpha_j p\tau}{2})+\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}(1+p\tau-\frac{\alpha_j p\tau}{2})}\big)$，并且对于 $p=1$，我们得到

$$1+\tau+\frac{\beta_j}{\alpha_j}\Big(1+\tau+\frac{\alpha_j\tau}{2}\Big)+\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}\Big(1+\tau-\frac{\alpha_j\tau}{2}\Big)>0. \tag{A.1}$$

事实上，$\alpha_j = \frac{\alpha_{j-1}+2}{\tau} + 2$ 蕴含 $\frac{\alpha_j\beta_{j-1}\tau}{2\alpha_{j-1}} = \frac{\beta_{j-1}}{2} + \frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}(1+\tau)$。此外，$\beta_{j-1} = \frac{\tau\beta_j+\tau+1}{\tau}$和12(1+τ)+βjαj(1+τ) >0蕴含

$$\begin{aligned}1+\tau+\frac{\beta_j}{\alpha_j}\Big(1+\tau+\frac{\alpha_j\tau}{2}\Big) &= 1+\tau+\frac{\beta_j}{\alpha_j}(1+\tau)+\frac{\beta_j\tau}{2} > \frac{\beta_j\tau}{2}+\frac{1}{2}(1+\tau)\\ &\ge \frac{\beta_{j-1}}{2} = \frac{\alpha_j\beta_{j-1}\tau}{2\alpha_{j-1}} - \frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}(1+\tau) = -\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}\Big(1+\tau-\frac{\alpha_j\tau}{2}\Big)\end{aligned}$$

以及（A.1）成立。同理，我们得到

$$\rho^{(1+\tau)p}\delta_j^{2+2\tau p}\Big(\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j}\Big)^{1+p\tau+\frac{\alpha_j p\tau}{2}} = O\big(\rho^{(1+\tau)p+\frac{\beta_j}{\alpha_j}(1+\tau p-\frac{\alpha_j p\tau}{2})+\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}(1+p\tau+\frac{\alpha_j p\tau}{2})}\big),$$

并且对于 $p=1$, $1+\tau+\frac{\beta_j}{\alpha_j}\big(1+\tau-\frac{\alpha_j\tau}{2}\big)+\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}\big(1+\tau+\frac{\alpha_j\tau}{2}\big)>0$，利用 $\alpha_j=\frac{\alpha_{j+1}-2}{\tau}-2$ 和 $\beta_{j+1}=\tau\beta_j-\tau-1$。因此，存在 $\eta_p>0$，使得

$$\rho^{(1+\tau)p}\delta_j^{2+2p\tau}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}}\left|\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)\tau}}\right|^p dy = O\big(\rho^{p\eta_p}\big).$$

接下来，类似于上述的论证可得，对于偶数 j，

$$1+\frac{1}{\tau}+\frac{\beta_j}{\alpha_j}\Big(1+\frac{1}{\tau}+\frac{\alpha_j}{2\tau}\Big)+\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}\Big(1+\frac{1}{\tau}-\frac{\alpha_j}{2\tau}\Big)>0,$$

利用 $\alpha_j=(\alpha_{j-1}+2)\tau+2$ 和 $\beta_{j-1}=\frac{\beta_j+\tau+1}{\tau}$。此外，利用 $\alpha_j=(\alpha_{j+1}-2)\tau-2$ 和 $\beta_j=\tau\beta_{j+1}+\tau+1$，可得 $1+\frac{1}{\tau}+\frac{\beta_j}{\alpha_j}\big(1+\frac{1}{\tau}-\frac{\alpha_j}{2\tau}\big)+\frac{\beta_{j+1}}{\alpha_{j+1}}\big(1+\frac{1}{\tau}+\frac{\alpha_j}{2\tau}\big)>0.$。因此，存在$\eta_p>0$，使得

$$\rho^{(1+1/\tau)p}\delta_j^{2+2p/\tau}\int_{\frac{A_j}{\delta_j}}\left|\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2/\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)/\tau}}\right|^p dy = O\big(\rho^{p\eta_p}\big)$$

鉴于

$$\int_{\frac{A_j}{\delta_j}}\left|\frac{(1+|y|^{\alpha_j})^{2/\tau}}{|y|^{(\alpha_j-2)/\tau}}\right|^p dy = O\bigg(\Big(\frac{\delta_{j-1}}{\delta_j}\Big)^{1+\frac{p}{\tau}-\frac{\alpha_j p}{2\tau}}+\Big(\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j}\Big)^{1+\frac{p}{\tau}+\frac{\alpha_j p}{2\tau}}\bigg).$$

证明至此完成。 □

致谢

作者谨向Angela Pistoia教授（意大利罗马“智慧”大学）表示感谢，感谢她指出了问题（1.2）。此外，作者还要感谢Angela Pistoia和Pierpaolo Esposito教授（意大利罗马第三大学），感谢他们就这一问题及相关问题进行了许多富有启发性的讨论。本研究得到智利Fondecyt常规º 1201884项目的资助。

References

[1] M. Ahmedou、A. Pistoia、 *On the supercritical mean field equation on pierced domains*, 《美国数学会会刊》143（9 2015 3969 3984）（），– D. Bartolucci、C.S. Lin、

[2] *Existence and uniqueness for mean field equations on multiply connected domains at the critical parameter* **359** 2014 1 44 ，《数学年刊》（），–.

[3] D. Bartolucci、A. Pistoia、*Existence and qualitative properties of concentrating solutions for the sinh-Poisson equation* **72** 2007 6, 706 729 ，《IMA 应用数学杂志》（），第 - 期。[4] T. Bartsch、A. Pistoia、T. Weth、*N-vortex equilibria for ideal fluids in bounded planar domains and new nodal solutions of the sinh-Poisson and the Lane-Emden-Fowler equations* **297** 2010 3, 653 。《数学物理通讯》（），第 – 686 期。[5] L. Battaglia、A. Jevnikar、A. Malchiodi、D. Ruiz、 *A general existence result for the Toda system on compact surfaces*, 《数学进展》 285 2015 937 979（），– E. Caglioti、P.L. Lions、C. Marchioro、M. Pulvirenti、

[6] *A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: a statistical mechanics description* **143** 1992 501 ，《数学物理通讯》（），– 525

[7] E. Caglioti、P.L. Lions、C. Marchioro、M. Pulvirenti、*A special class of stationery flows for two-dimensional Euler equations: A statistical mechanics description part II* **174** 1995 229 260 ，，《数学物理通讯》（），–.[8] C.C. Chen、C.S. Lin、 *Sharp estimates for solutions of multi-bubbles in compact Riemann surfaces*, 《纯粹与应用数学通讯》55（2002），728–771。[9] C.C. Chen、C.S. Lin、 *Topological Degree for a mean field equation on Riemann surface*, 《纯粹与应用数学通讯》56（2003），1667–1727。[10] M. del Pino、P. Esposito 和 M. Musso、*Linearized theory for entire solutions of a singular Liouville equation*, 《美国数学会会刊》140（2）（2012），581–588。[11] M. del Pino、M. Kowalczyk、M. Musso、 *Singular limits in Liouville-type equations*, 《变分法与偏微分方程》，24（2005），47–81。

[12] Z. Djadli, *Existence result for the mean field problem on Riemann surfaces of all genuses*, Commun. Contemp. Math. 10 (2008), 205-220. [13] P. Esposito, P. Figueroa, A. Pistoia, *On the mean field equation with variable intensities on pierced domains*, Nonlinear Analysis 190 (2020) 111597. [14] P. Esposito, M. Grossi,A. Pistoia,
On the existence of blowing-up solutions for a mean field equation. Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire 22 (2005), no. 2, 227–257. [15] P. Esposito, J. Wei, *Non-simple blow-up solutions for the Neumann two-dimensional sinh-Gordon equation*. Calc. Var. Partial Differential Equations 34 (2009), no. 3, 341–375. [16] P. Figueroa,
Singular limits for Liouville-type equations on the flat two-torus **49** 2014 1 2, , Calc. Var. P. 613 647
D.E ( ), no- – – .[17] P. Figueroa, *A note on sinh-Poisson equation with variable intensities on pierced domains*, Asymptotic Analysis, 122 (2021) 327–348. [18] P. Figueroa,
Bubbling solutions for mean field equations with variable intensities on compact Riemann surfaces, arXiv:2203.09731, 已被 Journal D'Analyse Mathematique 接收发表。[19] P. Figueroa, L. Iturriaga, E. Topp,
Sign-changing solutions for the sinh–Poisson equation with Robin Boundary , 准备中。[20]
condition
M. Grossi, A. Pistoia, *Multiple Blow-Up Phenomena for the Sinh-Poisson Equation*, Arch. Rational Mech. Anal. 209 (2013) 287–320. [21] A. Jevnikar, *An existence result for the mean field equation on compact surfaces in a doubly supercritical regime*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A 143 (2013), 1021–1045. [22] A. Jevnikar,
Blow-up analysis and existence results in the supercritical case for an asymmetric mean field equation with variable intensities 263 2017 2, 972 , J. Diff. Eq. ( ), 1008
no. -[23] A. Jevnikar, J. Wei, W. Yang,
Classification of blow-up limits for the sinh-Gordon equation, Differential Integral Equations 31 (2018), 657–684. [24] A. Jevnikar, J. Wei, W. Yang, *On the topological degree of the mean field equation with two parameters*, Indiana Univ. Math. J. 67 (2018), no. 1, 29–88. [25] J. Jost, G. Wang, D. Ye, C. Zhou, *The blow up of solutions of the elliptic sinh-Gordon equation*, Calc. Var. Partial Differential Equations 31 (2008) no. 2, 263–276. [26] A. Malchiodi, *Morse theory and a scalar field equation on compact surfaces*, Adv. Differential Equations 13 (2008), 1109–1129.[27] H. Ohtsuka, T. Suzuki,
Mean field equation for the equilibrium turbulence and a related functional inequality, Adv. Differential Equations 11 (2006), 281–304. [28] L. Onsager, *Statistical hydrodynamics*, Nuovo Cimento (9) 6 (1949), 279–287.[29] A. Pistoia, T. Ricciardi,
Concentrating solutions for a Liouville type equation with variable intensities in 2D-turbulence **29** 2016 2, 271 297 , Nonlinearity ( ),
no. – . [30] A. Pistoia, T. Ricciardi, *Sign-changing tower of bubbles for a sinh-Poisson equation with asymmetric exponents*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 37 (2017), 5651–5692. [31] T. Ricciardi,
Mountain pass solutions for a mean field equation from two-dimensional turbulence, Diff. Int. Eqs. 20 (2007), 561–575. [32] T. Ricciardi, R. Takahashi, *Blow-up behavior for a degenerate elliptic sinh-Poisson equation with variable intensities*, Calc. Var. Partial Differential Equations 55 (2016), Paper No. 152, 25 pp. [33] T. Ricciardi, R. Takahashi, G. Zecca, X. Zhang,
On the existence and blow-up of solutions for a mean field equation with variable intensities **27** 2016 413 429 , Atti Accad.
Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. ( ), – . [34] T. Ricciardi, G. Zecca,
Minimal blow-up masses and existence of solutions for an asymmetric sinh- Poisson equation, Math. Nachr.
290 2017 14 15, 2375 2387 ( ), no. - - K. Sawada, T. Suzuki,
[35]
Derivation of the equilibrium mean field equations of point vortex and vortex filament system, Theoret. Appl. Mech. Japan 56 (2008), 285–290.

Pablo Figueroa
Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas
Facultad de CienciasUniversidad Austral de Chile
Campus Isla Teja s/n, Valdivia, Chile*Email address*:
pablo.figueroa@uach.cl