arXiv:2301.01851v2 [quant-ph] 6 Mar 2023

综述文章

# Q量子机器学习：从物理学到软件工程 g

Alexey Melnikov[a] 和 Mohammad Kordzanganeh[a] 和 Alexander Alodjants[b] 和 Ray-Kuang Lee[c,d,e,f]

[a]瑞士圣加仑 9000，Terra Quantum AG；[b]俄罗斯圣彼得堡 197101，ITMO大学；[c]台湾新竹 300，国立清华大学光子技术研究所；[d]台湾新竹 300，国立清华大学物理系；[e]台湾台北 10617，国家理论科学研究中心物理部；[f]台湾新竹30013，量子技术中心

**文章历史**
编于2023年3月7日

**摘要**
量子机器学习是量子技术与人工智能交叉领域中迅速发展的研究方向。本综述从两个方面概述了若干关键方法，这些方法有望推动量子技术的发展，并提升人工智能的能力。其中包括量子增强算法：它将量子软件工程应用于经典信息处理，以改进关键的机器学习解决方案。在此背景下，我们探讨了量子-经典混合神经网络在改善模型泛化能力、提高准确度的同时减少计算资源消耗的潜力。我们还展示了如何利用机器学习减轻当前可用的含噪中等规模量子设备所受的误差影响，以及如何通过自动研究图上的量子行走过程来理解量子优势。此外，我们综述了如何将机器学习应用于基础与应用物理学问题、量子层析和光子学，从而提升量子硬件。我们旨在展示如何将物理学概念转化为实用的量子软件工程，以实现机器学习解决方案。

**关键词**
量子信息与计算、机器学习、量子技术、量子及量子启发算法、变分量子电路、量子神经网络、量子漫步、图论、量子层析、光子量子计算。

## 1. 引言

如今，随着信息量呈指数级增长、计算加速、信息传输和识别加快，现代社会涌现出许多关键的全球性跨学科

联系方式：Alexey Melnikov。电子邮件：alexey@melnikov.info。

请查看已发表版本，其中包含所有最新增补和修订：Alexey Melnikov、Mohammad Kordzanganeh、Alexander Alodjants、Ray-Kuang Lee（2023）《量子机器学习：从物理学到软件工程》，Advances in Physics: X，8:1，DOI：10.1080/23746149.2023.2165452

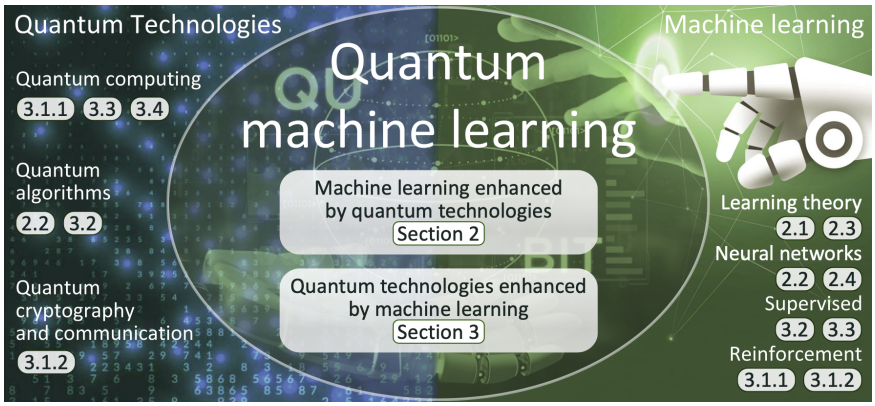



**图1.** 量子机器学习的跨学科范式，分别基于当前的经典信息、量子技术和人工智能（详情见正文）。

问题 [1]。在日常生活中，我们随处都面临着大数据问题。经典信息科学以及通信和计算领域的相关技术成果，使我们的社会能够从计算机互联网迈向物联网（IoT）：人类与空间分布式智能系统进行交互，这些系统包括高精度传感器，以及基于海量在线信息处理及其识别的各种推荐系统 [2]。人工智能（AI）和机器学习（ML）推动着社会在这一进程中不断发展。这些任务和设施需要在线信息识别，而这实际上只有借助并行信息处理才能实现。

如今，信息科学、物理学、数学和工程学领域已形成多个方向，旨在通过空间分布式系统采用各种信息并行处理方法来解决这些问题。我们在图1中以示意图的形式呈现对这一问题的看法，该图反映了本文的内容。如今，人工智能主要侧重于机器学习方法，用以解决大数据问题、数据挖掘问题、可解释人工智能和知识发现问题。因此，在日常生活中，我们可以看到分布式智能系统（DIS），它们由相互交互的自然智能体（人类）和人工智能体（聊天机器人、数字化身、推荐系统等）构成，参见例如 [3] 及其中的参考文献。这类系统需要新的数据处理方法，可借助具有人类认知能力的认知计算来描述，参见 [4]。与此同时，这类系统在诸多不确定因素的环境中运行，这可能会带来新的复杂性。那么，量子方法和量子技术又如何帮助我们应对这一问题呢?

当然，量子方法及相关量子技术是当前信息科学与人工智能发展进步的驱动力之一；二者的共同目标是实现高效计算、快速安全的通信以及智能物联网。如今，这三门开创性学科的相互交融已结出丰硕成果。在图1中椭圆的左半部分，我们列出了一些目前具有跨学科性质的量子技术研究重要主题。尤其是，量子计算为经典软件工程开辟了新的前景，参见例如 [5]。特别需要提及的是量子启发算法和量子启发方法，它们利用量子概率和量子测量理论来实现经典计算 [6]。Q

作为物理系统的量子计算机、生物神经元和人脑 re

能够以自然的方式并行处理信息。然而，在许多情况下，信息处理加速的充分判据仍然未知。

量子比特是量子信息科学中最基本的工具，它由希尔伯特空间中定义的两个清晰可区分的量子态叠加而成，是并行信息处理不可或缺的要素 [7]。多年前提出的量子算法（软件）利用量子比特的量子叠加与纠缠能力，实现所谓的量子霸权，并加速求解经典算法无法解决的NP难问题 [8]。作为物理设备的量子计算机（硬件）最初由理查德·费曼提出，它以简单的两能级系统作为物理量子比特来执行量子计算 [9,10]。尽管自首次成功演示量子门及其最简单操作以来已经过去了很长时间（参见例如 [11]），量子信息理论、量子算法与为执行这些算法而设计的量子计算机之间仍存在巨大差距。现有的量子计算机和模拟器距离在解决与日常生活相关的实际问题时展示量子霸权，仍相去甚远。这在一定程度上可以归因于量子技术发展的现代嘈杂中等规模量子（NISQ）时代 [12]。目前，量子计算机受限于量子比特数量较少，以及各种噪声水平相对较高；这些噪声包括退相干过程，会完全（或部分）破坏干涉和纠缠效应。鉴于此，特定任务中的量子霸权问题引发了激烈争论 [13–15]。

表面码和逻辑量子比特的构造旨在大幅减少计算错误 [16,17]。特别是，这类编码假定将某个物理量子比特图映射到逻辑量子比特上。通常，人们会为由逻辑量子比特组成的量子处理器设计特殊的网络状电路。然而，这种映射是否唯一，以及此类网络是否能适用于各种计算物理平台并达到最优，尚不清楚。

例如，对于基于超导量子硬件 [18]的量子退火计算机，通常采用次图嵌入过程。显然，目前用于量子计算研究的各种物理平台可能采用不同的映射过程，并依赖于特定量子比特网络的设计，以适应具体的噪声和退相干。因此，选择合适的网络架构是当前量子计算的关键问题，也与量子霸权的展示密切相关。

显然，这一问题的解决不仅与量子系统的性质有关，也取决于网络能否实现并行且稳健的信息处理。这里举一个重要的例子：人脑是由生物网络构成的复杂网络，能够快速处理信息。值得注意的是，这类计算的架构属于非冯·诺依曼架构。人脑能够通过联想进行模式检索。很久以前，霍普菲尔德提出了一个用于联想记忆的简单神经网络模型 [19]。随着时间推移，神经网络已成为并行经典计算不可或缺的工具。人工智能和机器学习范式、认知计算与神经形态计算，都运用神经网络的某些特定特性；这些特性代表了一种重要方法，可用于探索计算并行性的全部潜力 [1,20]。

量子机器学习（QML）是一种并行计算的新范式，融合了量子计算与网络理论，旨在提升计算速度，并利用当前 NISQ 时代量子技术设施，通过量子或经典

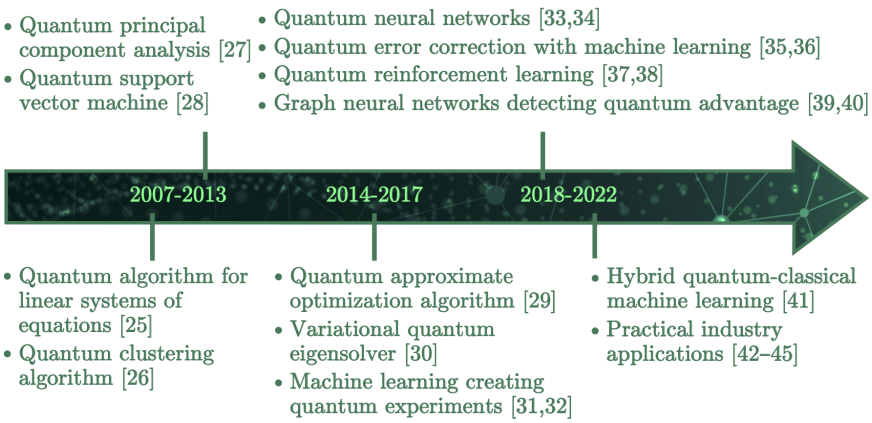


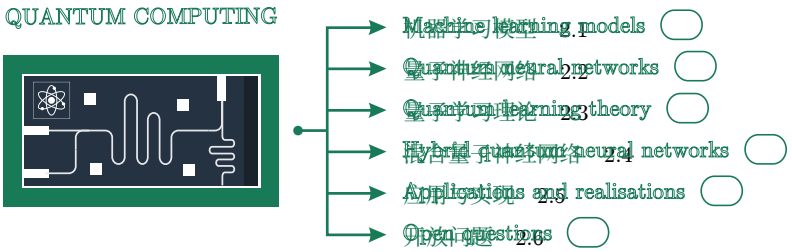

**图 2.** 量子机器学习成果里程碑时间线。

计算系统和算法 [21–24]。图 2 展示了若干重要算法 [25–45] 的出现与发展时间线，这些算法能够利用当前可用的各种硬件类型，提升计算复杂度、准确度和效率。本文将详细讨论其中大多数算法。

更广泛地说，如今，量子机器学习的研究领域处于量子技术与人工智能的交界处，涵盖了它们在信息处理方面的所有方法和途径，见图 1。该领域的出版物和综述数量迅速增长，表明科学界对其兴趣日益浓厚，参见例如 [46–53]。特别是，[21,46,50,53] 中介绍了算法理论中的一些重要问题，这些问题有望借助机器学习方法推动量子计算的发展。读者还可以分别在 [47–49,51,52],中找到机器学习方法在材料科学、光子学和物理化学中解决当前问题的一些应用。

值得注意的是，机器学习方法与现代基础物理学中的知识发现密切相关，而后者又与大数据及其识别问题紧密相连。为此，我们讨论自动化科学发现，它能够显著拓展我们对《自然》的认识，参见 [54,55]。特别值得一提的是大型强子对撞机（LHC）的研究，在这方面，数据挖掘有助于基础物理学领域的新发现 [56]。另一个重要例子是利用网络探测器开展的研究，以记录引力波和天文学中的极弱信号，参见例如 [57]。显然，该领域要取得进一步发现，就需要提高网络探测器（即干涉仪）的灵敏度，并对获得的数据进行数据挖掘；机器学习方法能够显著促进这一过程，参见[58]。

尽管此前的综述论文 [21,22,46,47,49–53] 从理论上证实并探讨了量子方法和量子算法在机器学习问题中的有效性，但在实践中，许多问题使我们无法在实验中看到量子霸权。在现代量子计算机和模拟器所处的含噪声中等规模量子时代，它们的能力尚不足以实现量子霸权，参见 [12]。因此，考虑量子计算机与经典计算机协同工作的混合信息处理算法应运而生。在这种情况下，量子-经典变分算法和量子近似优化算法（QAOA）非常实用且有效，例如参见 [59–62]。在这篇综述中，我们将探讨当前含噪声中等规模量子时代背景下用于量子机器学习范式的各种方法。




**Figu关于 3.** 量子技术有助于改进机器学习。讨论特定主题的章节 pic
被标 注。

在这一现实背景下，与此前的工作 [21,22,46,47,49–53]，不同，我们将重点关注可能有效的机器学习方法，尤其是适用于混合（量子-经典）算法的方法，参见图 2。

从最广义上讲，目前的研究可以分为两个大的部分，我们分别将其编排为第 2 节和第 3 节。具体而言，在第 2 节中，我们探讨了多种问题：如图 1 所示，机器学习方法可以借助量子技术得到增强。一般来说，我们在此讨论利用量子计算机和/或量子模拟器加速数据处理，以服务于经典机器学习，见图 3。这些研究的一个重要部分致力于最优编码，或将经典数据集嵌入量子设备 [63]，以及从量子态读出中识别数据集。我们全面分析了量子神经网络（QNN）的特征，将其视为量子机器学习中的一种新型模型，其参数通过经典方式更新。我们还讨论了如何在及时的量子-经典变分算法中使用此类模型。

相反，在第3节中，我们将介绍当前正在发展的量子机器学习热门方向：经典机器学习方法可用于解决 NISQ时代量子计算和量子技术中的任务，参见图1。尤其需要提及量子实验自动化、量子态层析、量子纠错等领域，在这些领域中可以应用经典机器学习技术。我们特别指出，在识别随机（经典或量子）游走在各种图上的量子加速问题时，机器学习算法可能会发挥作用。我们提出的这一问题的解决方案，对于当前量子计算硬件和软件开发都具有重要意义。

## 2. 量子技术增强的机器学习

本节讨论量子技术对机器学习的影响。主题概要见图3。

### *2.1.* 机器学习模型

从根本上说，机器学习是一种程序算法，通过提供外部数据来增强算法，以模拟特定的概率分布。这些数据可能仅由环境变量（特征）构成，$\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ - 无监督学习 - 特征及其对应的结果（标签），$\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ - 监督学习 - 或环境变量和针对特定操作的奖励，$R(a)$ -强化学习。

#### *2.1.1.* 无监督学习

无监督学习旨在推断一系列数据点的属性，通常是为了找出数据点与某种聚类体系的亲和性。一种广受欢迎的无监督学习方法称为K均值聚类 [64] ，它会将数据点分配到选定数量的簇中，并可对这些簇中心的位置进行训练。无监督学习应用于许多现实问题，从不同行业的客户细分 [65]到犯罪活动检测 [66]。

#### *2.1.2.* 监督学习

相比之下，监督学习致力于从所提供的数据中推断模式。这类模型的目标是将这种推断泛化到此前未见过的数据点。在线性回归场景中，这通常通过线性插值来实现 [67], ；但对于可能存在一定非线性的先验问题，监督学习可以训练非线性回归模型，并提供更好的替代方案。监督学习也用于逻辑学习，在这种情况下，需要学习的不是回归模型，而是分类概率分布。监督学习已在许多领域取得显著成功，从信用评级模型 [68] 到科学领域 [69]。

#### *2.1.3.* 强化学习

最后，强化学习是在环境中优化一组动作（策略）。环境允许采取动作，并在满足特定条件时提供奖励。智能体通过考察在当前状态下采取特定动作所产生的结果来探索环境，并据此优化其模型变量。强化学习常常受到游戏行业的广泛关注[70] ，但它也为投资组合管理 [71]等现实场景作出了贡献。

#### *2.1.4.* 实用机器学习模型的指数级增长

机器学习的三种模式有一个共同主题：其模型都具有很高的复杂度。这可能是由高维输入规模造成的，例如对高分辨率图像数据库进行分类 [72], ；也可能是由复杂问题造成的，例如图像分割 [73]。一种常用但已知并不准确 [74,75]的复杂度衡量指标是机器学习模型的参数数量。它就是模型中可训练参数的数量。最常见的例子是神经网络，其中的参数是与每个神经层相关联的权重和偏置。对于较简单的问题，参数数量可能只有几百个 [76,77], ；但 DALL-E 2 [78], 、Gopher [79],和 GPT-3 [80]等尖端人工智能模型的参数数量已达数百亿甚至数千亿，并且还在不断增加 [81,82]。如此高的维度带来了巨大的经济和环境成本。参考文献 [83]评估了 2019年 微调和训练多个大型机器学习模型所产生的碳排放量及经济成本。他们发现，在某些情况下，这些模型产生的二氧化碳排放量超过一辆普通美国汽车整个使用寿命的排放量，成本也可能超过 300 万美元。除了这些巨大的成本，人们还担忧其可扩展性，即计算能力的指数级增长——也就是摩尔定律 [84], ，在 [85] 中重新审视——其增速正在低于机器学习研究的发展速度 [86,87]。

### *2.1.5.* 量子增强机器学习

量子机器学习领域的核心理念，是利用量子计算机的能力，构建可扩展的机器学习模型，使其能够以更合理的成本，提供超越经典模型预期能力的机器学习能力。

量子计算机通过以量子二进制位（即量子比特）表示信息，相较于经典计算机具有指数级的计算空间优势。在经典计算机中，信息处理发生在布尔空间 $\mathbb{B}^{\otimes n}$；而量子比特则构成一个呈指数级增长的特殊酉空间 $\mathbb{SU}(2^n)$。这意味着，经典寄存器中的 $n$ 位可以存储一个 $n$位二进制字符串，而同等大小的量子寄存器则包含所有可能的同等长度字符串，因此相比其经典对应物，拥有指数数量的项 [7]。

除了解决可扩展性方面的顾虑，经典机器学习模型还基于经典统计理论运行，而在某些情况下，这种理论似乎与人类行为调查的结果不一致。文献 [88] 提出了确定性原则，说明无关的不确定性可能会影响人类的决策；经典统计模型则会将这些不确定性判定为互不相关并予以剔除。文献 [89,90] 表明，在某些情况下，人们往往会比单独发生的任一事件更相信两个事件同时发生，这与经典统计理论的观点相悖。文献 [6,91] 认为，可以通过采用量子统计表述来解决这些问题。此外，否定问题 [92]以及文献[93]中列出的其他类似问题，也被证明可以在量子理论中得到解决。语言的分布式组合范畴模型（Dis-CoCat） [94]可视为在理论上成功利用量子机器学习这一优势的首个尝试。

## *2.2.* 量子神经网络

对于给定的数据提供方式（例如监督学习），可以考虑许多不同的机器学习架构。机器学习架构包含一组可训练参数 $\theta$，这些参数可以基于初始概率分布加以实现。机器学习架构参数的任何一种具体实现都是一个模型。机器学习的目标是训练这些参数，使其概率分布更接近所研究问题的概率分布。每种架构经过充分训练后，都会产生性能各异的模型；通常，能够发现并推断数据中已有模式的架构被认为性能更优。避免模型发现并不存在的模式也很重要；这类模型被称为对所提供数据中的模式识别过拟合，在面对此前未见过的数据时，表现往往不佳。能够发现已有模式且不会对所提供的数据过拟合的模型，被认为具有较强的泛化能力。这一指标为模型选择提供了依据[1] [96]。

对于任何给定的问题，都有多种架构类别可供选择。最常用的架构包括多层感知器（神经网络）、用于图像处理的卷积网络，以及用于图结构数据的图神经网络。量子机器学习通过引入量子神经网络等量子模型，扩展了这一列表 [97]。

[1]有时也称为奥卡姆因子 [95]。

量子神经网络是量子机器学习中的一种模型，其参数通过经典方式更新。训练流程包括向量子模型提供数据、计算目标（损失）值，然后调整量子神经网络参数，以降低目标函数。向量子模型提供数据的具体方法称为数据编码策略，它会对模型的函数表示产生重大影响。第 2.2.1 节介绍了各种数据编码方法，第 2.2.4 节则回顾了探索该表示解析形式的理论进展。在量子神经网络中，目标函数是（或包含）参数化量子电路（PQC）的期望值 [98]。参数化量子电路是采用连续变量群旋转的量子电路。对参数化量子电路的架构进行微调，可能会直接影响最终量子神经网络模型的性能。第 2.2.2 节回顾了文献中提出的各种参数化量子电路参数化方式。

损失函数的选择所带来的影响将在第 2.3.1 节中概述。做出选择后，可以评估参数化量子电路，并将结果传递给损失函数，以获得损失值。为了最小化损失值，必须调整可训练参数，使其尽可能降低该值。无论是在经典还是量子机器学习中，这都可以通过计算损失函数相对于模型参数的梯度来实现[2]。函数的梯度向量指向函数值增长最快的方向；若要尽可能降低损失函数的值，可以求出梯度并沿其反方向迈出一步。第 2.2.3 节回顾了有关量子神经网络梯度计算的文献。

### *2.2.1.* 数据编码策略

主要有三种数据编码策略 [100]:

- **状态嵌入：**将特征映射到计算基中。这种方法常用于类别数据；随着基的数量增加，数据点的数量也需要相应增加，否则编码将变得稀疏 [97]。

- **振幅嵌入：** 将数据集的特征映射到量子比特态的振幅上。这种嵌入可以重复进行，以提高编码的复杂度。对于 $n$ 个量子比特，这种方法最多可将$2^{n+1}$ 个特征编码到量子系统中。
- **可观测量嵌入：** 将特征编码在用于测量量子系统的哈密顿量中。这种编码通常用于量子原生问题——参见第 2.5.2 节——例如变分量子本征求解器（VQE） [30] 和量子微分方程求解器 [101,102]。

需要注意的是，状态嵌入是唯一一种与经典机器学习高度相似的离散变量编码；而另外两种是连续变量方法，可视为模拟机器学习[3]。

振幅嵌入可细分为以下几类：角度嵌入、态振幅嵌入、压缩嵌入和位移嵌入 [103, 104]。参考文献 [100]比较了这些编码方法的表达能力。 [101,105–107]分析了有效的编码策略。

[2]还有一些替代方法，称为无梯度优化方法 [99]。[3]这取决于所采用的输入方法。通常使用数字计算机来设置量子电路，在这种情况下，学习过程仍然完全是数字化的。

### *2.2.2.* 参数化架构

网络的具体参数化方式可能会显著改变电路的输出。在经典神经网络中，增加网络的参数可以提升模型的表达能力；而在量子电路中，过度参数化电路里的参数可能会变得冗余 [108]。此外，架构必须具备可训练性，但研究表明，在先验设定下不能假定这一点 [109] ——参见第 2.2.5 节。文献中提出了许多架构，而且量子机器学习软件包中也提供了许多现成的模板可供选择 [110–112]。

文献 [113]提出了一类硬件高效架构，并将其用作变分本征求解器——参见第 2.5.2 节。这些架构重复使用变分门，并使用 CNOT 门创建高度纠缠的系统。基于文献 [114] 中的离散模型，并在文献 [115]中将其连续化后，研究者设计了一种使用 RZZ 量子门的模型。研究表明，该模型在经典计算上难以模拟[116,117], ，并将其命名为瞬时多项式时间量子拟设（IQP）。

创建量子电路的另一种方法是从张量网络中汲取灵感 [118]。这一类中著名的架构包括张量树网络（TTN）、矩阵乘积态（MPS）和量子卷积神经网络（QCNN）[34,119–121]。

### *2.2.3.* 梯度计算

尽管内存开销过大 [122], ，经典机器学习中最主要的梯度计算方法仍是反向传播算法 [123]。该方法会计算每个可训练参数经过的所有函数的梯度以及这些函数的输出，并利用链式法则构建可自动微分的机器学习流程。反向传播方法也可以（且已经 [124]）用于量子机器学习，但由于它需要访问量子态向量，因此只能用于模拟器，不能用于真实的量子处理单元（QPU）。由于量子优势只可能在后一种场景中出现，因此寻找能够在 QPU 上运行的替代方法至关重要。

最早提出的算法称为有限差分求导法[125]。顾名思义，它按照求导的基本原理计算梯度，即每次对可训练参数逐一添加有限差分，并观察这一操作带来的变化。这种方法在含噪声中等规模量子时代容易出错。

作为替代方案，人们在 [126] 提出了一种称为参数位移规则的方法，指出只需针对每个可训练参数评估电路两次，就能计算出精确的解析导数。具体来说，电路相对于可训练参数 $\theta$ 的导数，等于电路在该参数位移 $\frac{\pi}{2}$后评估结果的一半，减去该参数位移 $-\frac{\pi}{2}$后电路评估结果的一半 $\theta$。这一方法最初仅适用于应用于泡利旋转的可训练参数，后续研究 [127–134] 将其扩展为当前形式，使其适用于任意参数化。参数位移规则是最先进的梯度计算方法，并且兼容量子处理单元，但其主要问题之一是可扩展性。如前所述，该方法所需的电路评估次数会随可训练参数的数量线性增加，这限制了量子模型的复杂程度。一项值得关注的缓解措施是并行化梯度计算；如今，在 AWS Braket 上使用 PennyLane 时，已原生支持这一功能[135]。

作为一种用于量子神经网络的过渡梯度计算方法，参考文献 [136] 介绍了伴随算法。与反向传播方法类似，伴随算法只能在模拟器上运行

，并通过对电路进行一次评估来计算整个梯度向量。不过，它的内存使用量高于前者。其工作原理是将量子态及其伴随态的副本保存在内存中，然后按相反顺序依次应用各个门，并在可能时计算梯度。这意味着需要对电路进行两次完整评估：第一次评估输出，第二次计算梯度。

也有其他建议提出，主张遵循群空间的几何结构来优化量子机器学习模型。文献 [137] 建议在希尔伯特空间上采用黎曼梯度流，并通过硬件实现展示了其出色的优化表现。

#### *2.2.4.* 量子神经网络作为通用傅里叶估计器

文献 [107] 探讨了数据编码对模型表达能力的影响。研究证明，文献 [138]提出的数据重上传技术会形成截断傅里叶级数，而其规模受编码门重复次数的限制。文献 [139] 还表明，量子神经网络可以成为通用傅里叶估计器——这与经典多层感知器中的通用性定理 [140]类似。文献 [107,138]还证明，通过重复编码策略（采用振幅嵌入，具体而言是角度嵌入），可以在电路的最终函数表示中增加更多傅里叶基。无论是在并行量子比特还是串联量子比特中添加重复操作，这一结论都成立。这引出了一个问题：这些傅里叶基是否可以访问？也就是说，它们的系数能否独立调整？截至本文发表时，这仍是一个尚未解决的问题。

#### *2.2.5.* 贫瘠高原与可训练性问题

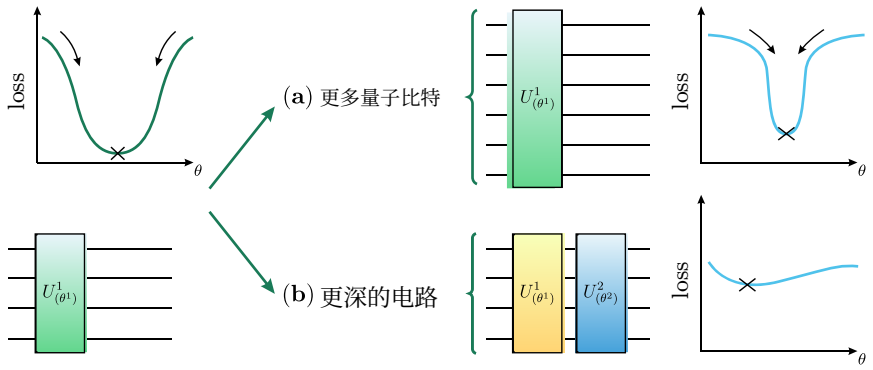
量子神经网络可能会受到梯度消失问题的影响。在训练过程中，模型的梯度往往会在所有方向上趋近于零。这可能会严重影响训练效率，甚至导致训练停止。这种现象称为贫瘠高原（BP）问题。

贫瘠高原通常并非经典机器学习关注的重点，但它们在量子架构中占据主导地位，因此成为选择电路时最重要的考量因素之一。文献 [109] 表明，参数化良好的量子电路的导数期望值等于零，且其方差会随着量子比特数量增加而呈指数衰减。文献 [142] 证实，贫瘠高原也存在于无梯度优化方法中。此外，文献 [143] 表明，在含噪声中等规模量子时代，使用深层电路会使整体损失景观变得平坦，从而产生噪声诱导的贫瘠高原。这些数学上不同类型的贫瘠高原会使整个损失景观变平。图 4 中的示意图总结了这些现象。

这两项发现为量子神经网络的未来描绘了一幅令人忧心的图景：量子神经网络必须足够浅、量子比特数量较少，才能进行训练，这与高维、百万量子比特量子机器学习模型的愿景相矛盾。

人们提出了许多补救方法：文献 [144] 建议，不要一次性训练所有参数，而是按层进行训练；文献 [145] 则表明，如果量子神经网络（QNN）的变分层深度为 $O(\log(n))$，其中 $n$ 为量子比特数，并且只进行局部测量，那么量子神经网络仍然可以训练。研究人员在最多包含 100 个量子比特的电路上对这一方法进行了测试，未发现贫瘠高原。其他补救方法还包括在可训练参数 [146,147]中引入关联

[4]形式上，当量子电路的变分架构接近 1-设计时[141]。




**Figu第 4 图。**无噪声情形（a）和噪声诱导情形（b）下贫瘠高原现象的可视化 s.

以及通过应用某些变分门的伴随算子，对电路的参数 [148] 进行特定的初始化。

针对特定架构进行了更多分析：文献 [149] 表明，在明确定义的弱条件下，张量网络架构不受贫瘠高原问题影响；文献 [150] 表明，文献 [34] 中介绍的量子卷积神经网络架构也不受贫瘠高原影响。文献 [151] 基于 ZX 演算 [5] 开发了一个平台，用于分析给定的量子神经网络是否会遭遇贫瘠高原问题。除了证实前两项研究的结果外，该研究还证明矩阵乘积态 [155] 和硬件高效强纠缠量子神经网络都会遭遇贫瘠高原问题。此外，文献 [156] 将贫瘠高原现象与系统中的纠缠度联系起来。

## *2.3.* 量子学习理论

### *2.3.1.* 监督式量子机器学习方法是核方法

文献 [100,157] 着重探讨了量子神经网络与核模型之间的相似性。核方法最初在文献 [158], 中提出，是成熟的机器学习技术，应用广泛。核方法通常与支持向量机（SVM）结合使用，其原理是通过函数 $\phi(\mathbf{x})$ 将数据集的特征映射到高维空间，然后使用核函数 $\mathcal{K}(x_1, x_2)$ 作为该高维空间中任意两个数据点之间的距离度量。这与量子神经网络中观察到的行为完全一致：首先将特征嵌入高维量子态向量中，再通过计算两个编码量子态的重叠程度，得出空间中两点的相似度。人们希望在这个高维空间中更好地洞察数据，在分类任务中，这通常体现为一个超平面形式的决策边界。文献 [159] 利用这种联系，构建了一个用于探索量子模型是否可能优于经典模型的框架。该文还指出，大型模型可能会将数据点分散得过远，以至于距离度量过大，不利于优化；并提出增加一个中间步骤，将高维空间映射到一个低维超平面，以提升模型的训练性能。

[5]ZX演算是量子信息理论中的一种图形语言 [152–154]。

### *2.3.2.* 贝叶斯推断

贝叶斯推断是统计学习理论的一种替代方法，它利用贝叶斯定理 [160] ，根据新获得的数据（证据）调整对问题的初始假设（先验分布），从而得到后验分布。将这一逻辑应用于机器学习，便称为贝叶斯学习。具体做法是为网络中的每个参数指定一个分布，并在训练过程中更新这些分布。计算后验分布通常需要大量计算，但可以利用一种称为变分推断的技巧来近似计算。文献 [161,162]成功地在贝叶斯神经网络（BNN）上演示了一种近似的反向传播算法，称为 Bayes-by-backprop。

贝叶斯量子神经网络最早的实现见文献 [163–165] ，这些工作试图将量子电路构建为精确的贝叶斯推断机。文献 [166]提出了两种高效但近似的方法——一种基于核理论，另一种利用经典对手——以使用量子神经网络执行变分推断。这项工作采用量子电路，通过利用量子力学的概率特性来对现象的概率分布进行建模，这种方法称为玻恩机 [167,168]或量子生成模型 [155,169–174]。之后还可以用它来量化单个数据点的预测误差，正如文献 [175] 中以经典方法所做的那样。

### *2.3.3.* 模型复杂度与泛化误差界

直观而言，复杂现象需要复杂的建模方式，但要量化给定模型的复杂度并非易事。定义模型复杂度的方法有多种：Vapnik-Chervonenkis（VC）维数 [176], 、Rademacher 复杂度 [177], 和有效维数 [178][6]。复杂度度量也与泛化误差相关，因为当模型对于问题而言过于复杂时，泛化效果预计会变差。

已有大量研究致力于量化量子神经网络的复杂度和泛化误差：文献 [179] 通过Rademacher复杂度探讨了泛化误差界，并明确考虑了编码策略；文献 [180] 采用有效维数——一种取决于样本量的度量——来界定量子神经网络的泛化误差，并证明在可训练参数数量相同的情况下，量子神经网络具有更高的表达能力。文献 [181–185][7]也尝试量化量子神经网络的复杂度（亦称表达能力）。值得注意的是，文献 [187]从理论上证明，量子神经网络的泛化误差随 $\mathcal{O}(\sqrt{T/N})$ 增长，其中 $T$表示量子神经网络中的参数化量子门数量， $N$ 表示数据集中的数据样本数量。后一项研究表明，量子机器学习模型能够利用更少的数据点实现更好的泛化。

## *2.4.* 混合量子神经网络

正如存在经典模型和量子模型一样，也可以将两者结合起来，创建混合模型——见图 5。可以设想，在含噪声中等规模量子时代，运用第 2.3 节所述对量子机器学习的理解，找到这样一种情形：量子模型能够覆盖经典模型无法处理的某些方面。文献 [41] 开发了一个平台

[6]有关复杂度度量的完整列表，请参见 [75][7]值得注意的是，参考文献 [186] 表明，尽管存在过拟合，一些模型仍具有更高的泛化能力。

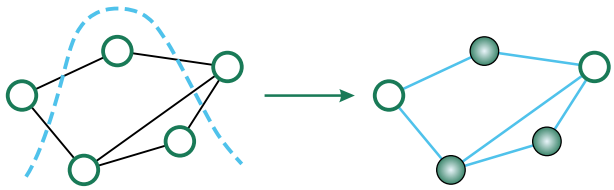


**图5.** 混合量子-经典机器学习模型的示例。在此案例中，输入被送入一个全连接经典多层感知机，其输出则输入量子电路的嵌入层。根据设置，会对该量子电路进行一些测量，然后将测量结果送入另一个全连接层，其输出可与标签进行比较。

，用于混合量子高性能计算（HQC）云，并将其部署在 QMware 硬件 [188,189]上。研究表明，对于高维数据，经典网络与量子网络相结合可带来两项优势：计算速度和解的质量。数据点首先被输入一个由 4 个量子比特组成的浅层[8] 量子电路，其中两个量子比特经过测量，其对应的值随后被传递给神经网络。研究选取了两个经典数据集，以探索混合解决方案的有效性，并将其与移除量子部分、仅保留经典网络的情况进行比较：scikit 圆形数据集 [190] 和波士顿房价数据集 [191]。前者是一个合成几何数据集，由边长为$x = 2\pi$的二维正方形中的两个同心圆组成；后者则涉及根据人口状况和房间数量来分析房产价值的分布。研究表明，在这两种情况下，混合网络的泛化能力都优于经典网络；当训练样本量极小时，这种差异在问题的极端情形下最为明显。然而，随着样本数量增加，这种差异会逐渐缩小。

随后，文献 [44] 提出了一种超参数优化方案，旨在进行混合网络的架构选择。该研究也实现了一个用于训练的混合网络，但采用了两种新方法：1）使用真实世界的图像识别数据集 [192]，；2）将混合网络的量子部分插入经典实现的中间。此外，量子部分的架构也纳入了超参数优化，即对所用量子比特的数量和包含的重复层数量进行优化。对该网络进行训练后发现，混合网络能够取得质量更好的解，尽管优势幅度较小。值得注意的是，通过这种架构优化，获得了显著改进的量子电路。通过应用 ZX 可约性 [152],、傅里叶分析 [107]，、费希尔信息 [108,193,194],和有效维数 [178,180]等分析方法，从理论上测量了该电路的性能。

### *2.5.* 应用与实现

量子机器学习自动继承了经典机器学习的所有问题和实现，因为它只是一种用于应对数据科学挑战的不同模型。除了这种继承之外，量子机器学习研究还提出了新颖的量子原生解决方案。无论在哪种情况下，迄今为止，量子机器学习都未能展现出相较于经典替代方案的明确实际优势，所有提出的优势都纯属理论上的。

[8]除了性能方面的考量，这也提供了一种有效的方法来避免第 2.2.5 节所述的贫瘠高原。

### *2.5.1.* 求解经典问题

量子机器学习应用于许多经典领域。值得关注的贡献包括科学领域 [195–201], 、金融领域 [42,202–204],、制药领域 [43,45],以及汽车行业 [44]。在许多情况下，这些模型取代了此前已知的经典设定 [205–208]。文献 [209]提出了量子生成对抗网络，随后文献 [210–217]也对此进行了研究。同样，文献 [218,219] 研究了量子循环神经网络，文献 [34,220]则提出了两种图像识别方法。文献 [221] 探讨了一种经典风格的量子自然语言处理方法。文献 [38,222–224][9]也探索了量子机器学习在强化学习中的应用。最后，一项广受关注的应用是量子自动编码器：它将数据压缩，再利用较少的信息重建数据；文献 [226]提出了一项值得关注的方案。

### *2.5.2.* 量子原生问题

量子原生问题是新颖的、受量子启发的机器学习问题，专门设计用于通过量子机器学习算法求解。

最广为人知的量子机器学习算法或许是变分量子本征求解器（VQE）。该问题的表述是：输入数据为一个哈密顿量，我们需要找到它的基态和基态能量。VQE 的求解方法包括构造一个含有可训练参数的参数化量子电路，并求取哈密顿量的期望值。这会得到所制备状态的能量期望值；其思路是通过最小化该期望值来获得基态能量，此时所制备的状态便代表问题的基态。该方法最初用于求解 $He$ $-H^+$ [30] 的基态能量，随后在参考文献 [59] 中得到了大幅拓展。VQE 仍然是量子机器学习最有前景的领域之一。

参考文献 [25] 表明，参数化量子电路可用于求解线性方程组（LSE）。他们提出了一种通常称为 Harrow、Hassidim 和 Lloyd（HHL算法）的方法。参考文献 [227–234] 改进了该算法，参考文献 [235] 则将其扩展到非线性微分方程。参考文献 [102] 表明，可以使用量子特征映射，在量子神经网络上求解非线性微分方程。这也是量子机器学习中一个令人振奋且前景广阔的领域。

一种重要的量子机器学习表述称为二次无约束二元优化（QUBO） [236,237]。这通常是一个经典问题，但借助伊辛模型（参见 [238]），可以在量子计算机上求解 [239,240]。后者的一个常见演示是最大割问题 [241] （参见图 6）。针对 QUBO 问题，基于门的量子计算机和量子退火器上都有相应的求解方案 [242–244], ，这一通用概念已应用于许多领域[245]。

最后，另一种量子原生表述出现在自然语言处理中。文献 [94] 开发了一个平台，利用 J. Lambek 的研究成果 [246]，将合乎语法的句子转换为量子范畴。文献 [247–249] 在量子硬件上测试了这一算法，后来又开发了完整的量子自然语言处理软件包 [250]。量子自然语言处理的这一初始价值主张在于，该算法原生具备语法感知能力；但鉴于大型经典语言模型已被证明能够推断语法 [80], ，这种方法的真正优势或许在于其他方面，例如文本分类中可能实现类似 Grover 算法的 [251]加速。

[9]值得注意的是，首个光子连续变量策略网络发表于参考文献 [225]。

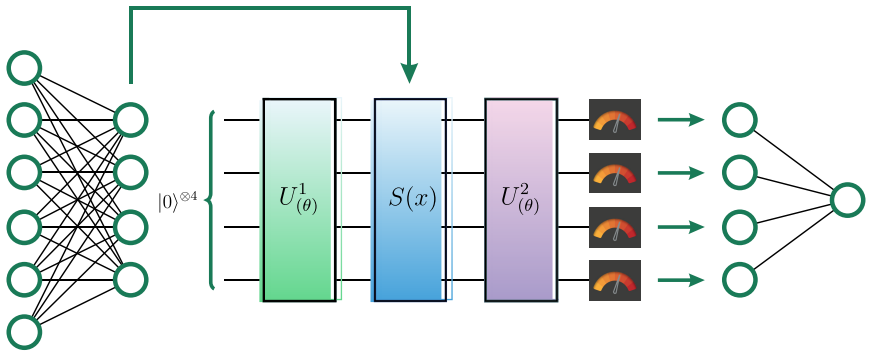



**图 6.** 最大割问题。该问题的抽象形式是一般图，我们希望找到一种顶点划分，使连接所得图与其补图的边数最大。

## *2.6.* 开放问题

### *2.6.1.* 量子优势

尽管第 2.3.3 节中的理论发现颇具启发性，但机器学习在现实问题中的应用仍鲜有可证明的成功，这并非完全归咎于硬件的不足。文献 [252] 指出，存在一类能够展现量子优势的数据集；文献 [159] 则找到了一个数学表述，用以确定我们可以在哪些情况下期待这种优势。文献 [253–255]也尝试制定一套规则，以判断何时可能出现量子优势。然而，文献 [256] 认为，将关注点从量子优势转向其他研究问题，或许有助于更深入地理解量子机器学习。提出的研究问题包括：为量子机器学习寻找高效的构件，搭建统计学习理论与量子计算之间的桥梁，以及使量子机器学习软件为可扩展机器学习做好准备[10]。

### *2.6.2.* 最优参数化

在第 2.2.2 节中，我们了解了具有特定性质的各种量子神经网络（QNN）参数化。一个开放问题是，如何对电路进行最优参数化，以避免贫瘠高原、尽可能增强表达能力，并消除冗余。如第 2.2.4 节所述，此类参数化的一项潜在特征是具有较高的傅里叶可及性，这可能需要对这种可及性进行量化衡量。

### *2.6.3.* 混合模型理论

尽管第 2.4 节概述了这些模型取得的成功，但它们的理论基础仍然有限。我们看到，如果将量子部分置于模型架构的开头 [41]或中间 [44]，混合网络都表现良好。从信息论视角来看，还需要对此进行更深入的研究，以阐明混合化的影响。此类研究或可确定是否存在这样的领域：引入量子部分能够通过设置信息瓶颈来防止过拟合，或构建高维模型，从而补充经典电路。

[10] Ot她的示例包括量子联邦（分布式）学习（QFL） [257]。值得注意的是，对于格 er, 参考文献 [ 258] 提出了首个分布式安全量子机器学习模型

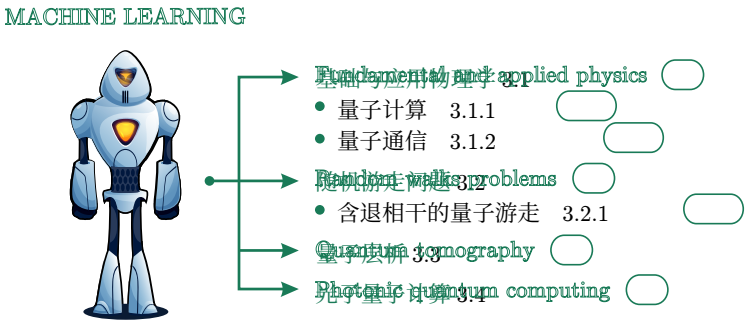



**图7**。 机器学习有助于解决基础与应用量子物理学中的问题。讨论特定问题的章节均已标注。

*2.6.4.* 高效优化方法

目前的梯度计算方法要么仅适用于模拟器，要么需要数量随规模线性增长的电路评估——参见第 2.2.3 节。这两者都无法适用于包含十亿个参数和百万个量子比特的场景。这阻碍了量子机器学习的未来发展，因此从长远来看，需要一种高效优化方法。

## 3. 机器学习增强的量子技术

本节探讨机器学习对量子技术的影响。图7概述了相关主题。如今，机器学习通过自主学习如何控制 [35,259–262],纠错 [36,263–265],并测量量子器件 [266]，被用于在量子设备中实现算法和协议。给定实验数据，机器学习可以重建物理系统的量子态 [267–270], 、学习这些量子态的紧凑表示 [271,272],，并验证实验 [273]。本节将讨论机器学习对基础与应用物理学的影响，并介绍量子计算和量子通信领域的具体实例。

### *3.1.* 基础与应用量子物理学中的机器学习 *s*

自20世纪20年代中期发展成熟以来，一个世纪后的今天，量子力学仍被视为最强大的理论，能够以最高的准确度描述从亚原子到宇宙学尺度的各种物理现象。尽管测量问题和量子引力曾使许多物理学家得出结论，认为量子力学并非完备理论，但爱因斯坦-波多尔斯基-罗森对 [274], 中纠缠的诡异作用，为量子信息处理任务提供了资源。借助机器学习，人们或许能够利用人工神经网络对不同的物理系统（例如量子、统计和引力系统）进行建模，这可能促成基础物理学新框架的发展。

即使无法精确描述物理装置，仅凭测量数据，也可以通过贝尔非定域性的设备无关检验证明某些观测到的关联具有量子性 [275]。具体而言，通过使用生成算法自动融合多个多层感知机（MLP），一种机器

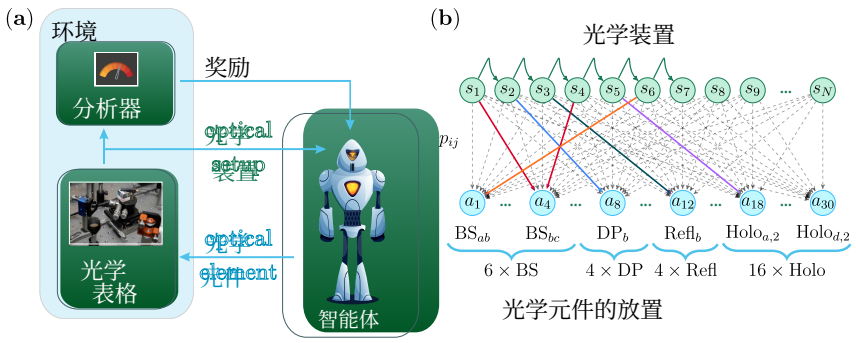



**图8.** 一种用于设计量子实验的强化学习算法。这里以光学平台上的实验为例。(a) 学习方案展示了智能体（即强化学习算法）如何学习设计量子实验。(b) 强化学习算法——投影模拟——以双层片段网络形式呈现。

学习方法或许能够检测和量化非定域性，并判定其量子（或后量子）性质 [276–278]。

### *3.1.1.* 量子计算中的机器学习

机器学习也已成为应用量子信息科学和量子技术中的重要组成部分。受自动化设计成功的启发，机器学习 [31], 被证明能够设计新的量子实验 [32]。

量子实验是实现量子计算机的重要一步。更具体地说，例如，三粒子光子量子态是光子量子计算架构的构建模块。参考文献 [32] 中使用的机器学习算法是一种基于投影模拟模型 [279–284]的强化学习算法。智能体（即强化学习算法）会将光学元件放置在（模拟的）光学平台上。每个动作都会向现有装置中添加一个光学元件。如果所得装置实现了目标，例如生成所需的多光子纠缠态，智能体就会获得奖励。图8(a)展示了上述学习方案。

初始光子装置是两个非线性晶体中双自发参量下转换（SPDC）过程的输出。忽略下转换中的这些高阶项，初始态 $|\psi(0)\rangle$ 可写成两个轨道角动量纠缠光子的张量积，

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{3}\left(\sum_{m=-1}^{1}|m\rangle_a|-m\rangle_b\right)\otimes\left(\sum_{m=-1}^{1}|m\rangle_c|-m\rangle_d\right), \tag{1}$$

其中，指标 $a$, $b$, $c$ 和 $d$ 指定光学装置中的四条路径。智能体可执行的操作包括分束器（BS）、反射镜（Refl）、位移参数化全息图（Holo）和道威棱镜（DP）。最终光子态 $|\psi_f\rangle$ 通过测量路径 $a$ 获得，并根据 $a$ 中的测量结果，对其他路径中的态进行后选择。

实现实验设计的强化学习算法如图 8(b) 所示。它是一个投影模拟智能体，由一个包含两层片段的网络表示。第一层对应于光学装置的当前状态，

而第二层是动作层。层与层之间的连接定义了智能体的记忆，并会在学习过程中发生变化。这些连接对应于在量子光学装置的给定状态下采取特定动作的概率。在学习过程中，智能体会自动调整连接，从而优先选择某些动作，而非其他动作。如参考文献 [32] 所示，这使得智能体能够生成多种纠缠态，并提高其制备效率。

### *3.1.2.* 量子通信中的机器学习

除了设计新实验外，机器学习还有助于设计新的量子算法 [285] 和协议 [286]。设计新算法和协议与实验设计有相似之处。具体而言，与实验设计类似，每个协议都可以拆解为各个独立的操作。以量子通信协议为例，这些操作包括：对第二个量子比特施加 $T$ 门，对第一个量子比特施加 $H$ 门，将第三个量子比特发送到位置 $B$，以及在 $Z$ 基下测量第一个量子比特。由于设计问题具有组合性质，可能的协议数量会随着可用操作数量的增加而呈指数增长。因此，对于估计出的量子通信环境可能状态数量 $0.6 \times 10^{12}$ [286]，不可能通过穷举搜索找到解决方案。

文献 [286]，首次提出了将强化学习用于量子协议设计的方法，并证明该方法适用于多种量子通信任务：量子隐形传态、纠缠纯化和量子中继器。图 9 展示了该学习设置的方案。智能体感知量子环境状态，并根据投影模拟的决策过程选择操作。本研究所用的投影模拟网络与图 8(b) 中的网络类似，但增加了层次化技能获取。这项技能对于远距离量子通信尤为重要，因为这类通信必须包含多个中继方案。

借助投影模拟，人们证明强化学习可以在量子通信协议的设计中发挥有益的辅助作用。研究表明，在协议设计中使用机器学习并不局限于重新发现已有协议。当最优情形缺少已知基本协议所假设的某些对称性时，智能体能够找到优于已有协议的新协议[11]。

## *3.2.* 随机游走问题中的机器学习

随机游走范式在许多与电荷、能源或信息传输相关的科学领域中发挥着重要作用 [288–292]。图上的随机（经典）游走是许多计算算法子程序不可或缺的工具 [293–295]。量子漫步（QW）是经典游走向量子领域的推广，它使用量子粒子而非经典粒子 [296,297]。由此产生、支配量子漫步物理学的量子干涉图样，从根本上不同于经典情形 [298]。对于量子信息科学而言，至关重要的是，量子粒子能够展现量子并行性，而这种并行性源于不同路径之间的干涉与纠缠。已有研究表明，量子粒子的传播

[11]参考文献 [287] 使用强化学习（DPPO）来设计量子虚时间演化的最优路径，从而能够始终高效地找到一个高效的量子电路。

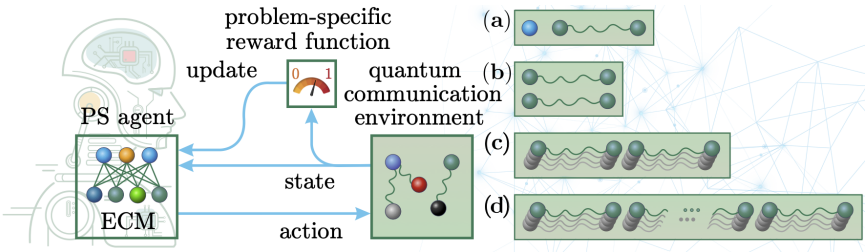



**图 9.** 一种用于设计远距离量子通信协议的强化学习算法。该算法基于具有情景与组合记忆（ECM）的投影模拟。给定量子通信环境的状态，算法通过作用于环境来选择如何修改该状态。PS 智能体的目标包括：（a）隐形传态协议；（b）纠缠纯化协议；（c）量子中继协议；（d）用于远距离量子通信的量子中继协议。

在某些图上比经典粒子快一倍以上，这些图分别是路径图[299],环图[300,301]，超立方体[302,303]，和粘合树图 [304]，。人们预期，基于量子漫步的算法应能实现二次加速，即$O(\sqrt{N})$。这种并行性可能有助于量子信息处理及量子算法 [304–306]。特别值得注意的是，量子漫步已被用于量子搜索算法，而后者是加速量子机器学习算法的重要工具 [21,307–309]。

值得注意的是，任意图上的量子游走（QW）加速演示仍是一个开放问题 [310]。标准方法是在给定图上模拟量子和经典动力学，从而判断粒子是否能更快到达目标顶点。然而，对于顶点数较多的图，这种方法在计算中可能难以应用（且成本高昂）；传播时间随图的规模呈多项式增长。其次，我们通常关注一组图，在这些图上，模拟结果无法揭示量子优势的一些一般特征。

在多项研究中，我们通过机器学习方法 [39,40,311] 攻克了这一问题。我们探索了一种监督学习方法，仅通过观察图来预测量子加速。具体而言，我们设计了一种经典-量子卷积神经网络（CQCNN），它从图样本中学习，以识别随机游走的量子加速。

我们在文献 [39,40,311]中使用的 CQCNN 基本概念分别如图10和图11所示。具体而言，我们在文献 [39,40,311–313]中研究了连续时间随机游走，并假设经典随机游走表示定义在连通图上的随机（马尔可夫）过程。该过程从时间 $t = 0$ 开始，初始节点为 $i$，并到达目标顶点 $t$。与经典情形不同，由于干涉现象，量子粒子会“弥散”到图的所有顶点。因此，在量子情形下，我们提出增加一个（汇）顶点 $s$，将其与目标顶点连接起来，使量子粒子因能量从 $t$ 顶点向 $s$ 顶点弛豫而局域化，弛豫速率为 $\gamma$。换言之，可以持续监测位于汇点中的量子粒子。从数学上说，图由其加权邻接矩阵 $A$ 表征，该矩阵与哈密顿量$\mathcal{H} = \hbar A$相关。请注意，对于手征量子漫步，可以通过使用复数邻接矩阵元 [311]获得时间非对称性。我们通过戈里尼–科索夫斯基–苏达尔尚–林德布拉德方程刻画量子输运，其形式如下（参见 [314]）：

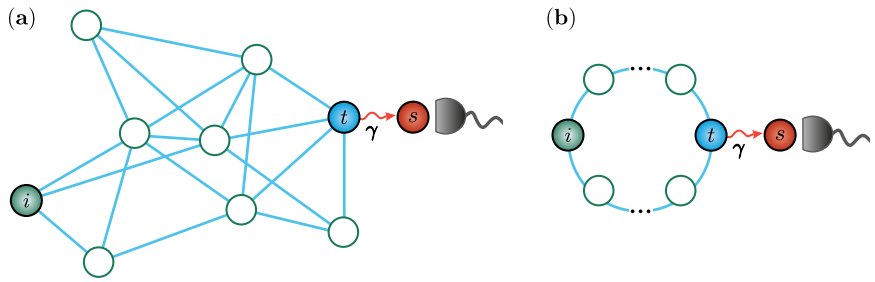



**图10.** 文献 [39,40]中所研究的随机游走示意图：(a) 连通随机图，(b) 环图。标签 ($i$) 和 ($t$) 分别表示初始顶点和目标顶点； $s$ 是用于定位和检测量子粒子的汇点。 $\gamma$ 是目标顶点与汇点之间的耦合参数。

$$\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}(1-p)\left[\mathcal{H},\rho(t)\right] + p\sum_{mk}\left(L_{mk}\rho(t)L_{mk}^{\dagger} - \frac{1}{2}\left\{L_{mk}^{\dagger}L_{mk},\rho(t)\right\}\right)$$
$$+\gamma\left(L_s\rho(t)L_s^{\dagger} - \frac{1}{2}\left\{L_s^{\dagger}L_s,\rho(t)\right\}\right), \tag{2}$$

其中， $\rho\ (t)$ 是随时间变化的密度算符， $L_{mk} = T_{mk}\left|m\right\rangle\left\langle k\right|$ 和 $L_s = \left|s\right\rangle\left\langle t\right|$算符分别表征从顶点 $k$ 到 $m$ 以及从 $t$ （目标顶点）到 $s$ （汇点）的跃迁； $\gamma$ 是目标顶点与汇点之间的耦合参数。参数$p$ 满足 $0 \le p \le 1$ 条件，并决定退相干程度；取值 $p = 0$ 对应纯量子输运，而 $p = 1$ 则对应完全经典的随机游走。

方程 (2) 的解给出了量子概率 $\mathrm{P^q}(t) \equiv \rho_{(n+1)(n+1)}(t)$（$n$ 是顶点总数），该概率与所选图上的量子游走有关。经典随机游走可由如下概率分布建立

$$\mathrm{P(t)} = \mathrm{e}^{-It}\mathrm{e}^{Tt}\mathrm{P}(0), \tag{3}$$

其中 $\mathrm{P}(t)$ 是概率向量，其分量 $\mathrm{P}_v(t)$ 表示在图的顶点$v \in \mathcal{V}$处检测到经典粒子的概率； $I$是大小为 $n \times n$ 的单位矩阵。转移矩阵 $T$是一个概率矩阵，其元素 $T_{vu}$ 表示粒子从 $u$ 跳转到 $v$的概率。在这种情况下，不需要汇点，我们可以假设 $\gamma = 0$。我们关注在目标顶点（或汇点）找到粒子的概率，该概率由方程 (2) 和 (3) 的解描述。

接下来，可以将 $\mathrm{P^q}(t) \equiv \rho_{(n+1)(n+1)}(t)$ 和 $\mathrm{P^c}(t) \equiv \mathrm{P}_n(t)$ 与 $\mathrm{P}_{th} = 1/\log\ n$ 进行比较，后者决定给定图的概率阈值。如果该概率大于 $\mathrm{P}_{th}$，我们就可以得出结论：粒子到达了目标。满足不等式 $\mathrm{P^q}(t) > \mathrm{P}_{th}$ 或 $\mathrm{P^c}(t) > \mathrm{P}_{th}$ 的时刻，分别称为量子粒子或经典粒子的命中时间。因此，通过比较方程（2）和（3）的解，我们可以定义粒子传输效率：如果量子粒子先到达目标，则效率为 1；否则为 0。

图11示意性地总结了所提出的用于检测量子游走加速的 CQCNN 方法。首先，图 11(a)展示了 CQCNN 的架构。它由一个二维输入层组成，该输入层接收一个以邻接矩阵表示的图$A$。该层连接到若干卷积层，其数量取决于

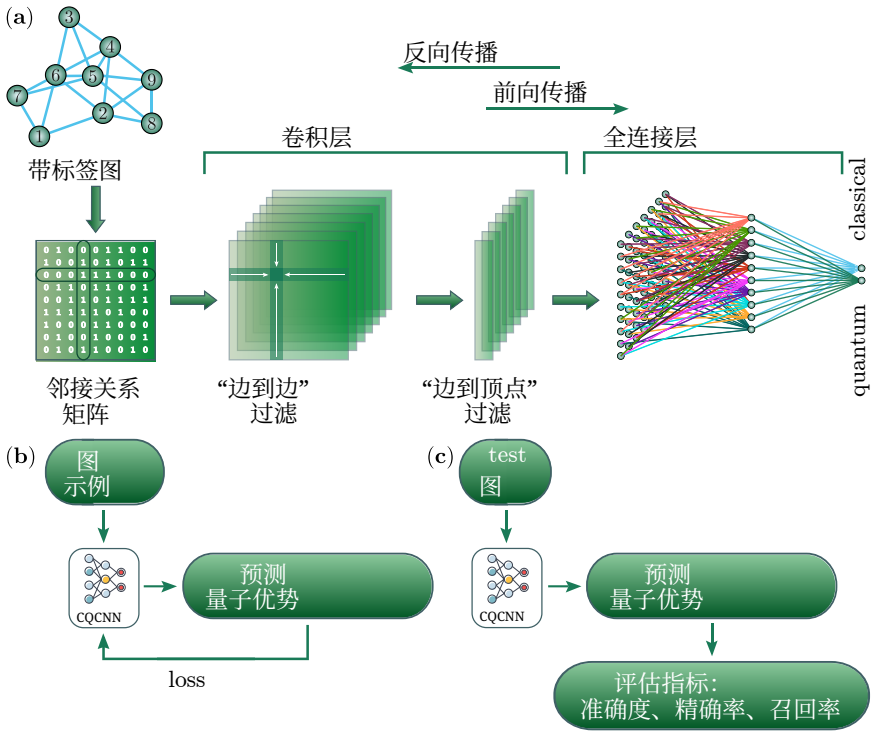



**图11.** 用于预测图10所示图上量子加速的 CQCNN 方法示意图。(a)——CQCNN架构示意图。神经网络将带标签图以邻接矩阵的形式作为输入 $A$ 。随后， $A$ 由卷积层处理，这些卷积层分别采用图特定的“边到边”和“边到顶点”滤波器。这些滤波器的作用是对每个顶点的相邻顶点加权总数进行函数处理。卷积层与用于分类输入图的全连接层相连。数据和误差传播以箭头表示。(b) 和 (c) 分别展示了 CQCNN训练和测试过程。

输入图的顶点数 $n$ 。对于所有图规模，层数都相同。CQCNN 的布局包含卷积层和全连接层，以及两个用于指定两种可能输出类别的输出神经元。卷积层用于提取图的特征，并降低输入的维度。

通过实证我们发现，相关特征位于邻接矩阵的行和列中。第一卷积层包含六个滤波器（或特征检测器），它们定义了三种不同的输入图处理方式。这三种方式在图11(a)中分别以绿色、红色和蓝色标示。构建的滤波器呈“十字形”，如图11(a)所示，可捕获列元素和行元素的加权和。这些滤波器的作用是对每个顶点的相邻顶点加权总数进行函数处理。因此，“边到边”和“边到顶点”十字滤波器对所设计的 CQCNN 至关重要；它们能够预测量子游走带来的量子优势。

图11(b)示意了训练过程：使用由邻接矩阵构建的若干图样本作为输入 $A$ 。CQCNN 根据两个输出神经元的取值进行预测，从而确定经典类或量子类。预测类别由输出值最大的神经元的索引确定，类别为 $=\text{argmax}_m y(m)$。获得正确标签后，计算损失值。

我们在 CQCNN 中构建的滤波器对学习的成功至关重要。

CQCNN 通过采用交叉熵损失函数的随机梯度下降算法进行学习。测试样本 $i$ 上的损失是相对于该样本的正确类别 $\text{class}_i$（经典或量子，0 或 1）定义的：

$$\text{loss}_i = -\kappa(\text{class}_i)\log\left(\frac{\mathrm{e}^{x(\text{class}_i)}}{\mathrm{e}^{x(0)}+\mathrm{e}^{x(1)}}\right), \tag{4}$$

其中，我们将输出神经元的值定义为 $x(0)$ 和 $x(1)$； $\kappa(\text{class}_i)$ 是数据集中属于该类别的样本总比例。正如我们在参考文献 [39] 中所示，CQCNN 构建了一个能够从已见图推广到未见图的函数，因此分类准确率（可定义为正确预测所占的比例）会提高。

如图11(c)所示，CQCNN 的测试过程与训练过程在本质上并无不同，参见图11(b)。在这种情况下，CQCNN 不会收到关于其预测结果的任何反馈，网络也不会被修改。

我们将所述机器学习方法应用于不同的图集合。具体而言，为了系统地理解该方法的工作原理，我们首先分析了包含至多10个顶点的路径图上的 CQCNN。CQCNN 经过了2000个训练轮次，每个训练轮次使用一个包含3个示例的批次。

随后，我们模拟了 CQCNN 对随机图的学习过程，每个随机图都从具有 $n$ 个顶点和 $m$ 条边的所有可能图组成的集合中均匀抽样得到。不存在退相干时（$p = 0$）的学习性能结果如图12所示，适用于$n = 15$，20，25； $m$ 从 $n-1$ 到（$n^2-n$）/2 均匀选取。模拟结果显示，训练后的损失趋于零；对于所有这些随机图，损失都低于 $3\times10^{-3}$。从图12(a)可以看出，对于集合中“经典”部分，召回率和精确率均约为90%；对于“量子”部分，二者则处于 25 – 35%的范围内。n[12] 因此可以看出，无需进行任何量子行走动力学模拟，CQCNN 就能比随机猜测更准确地对随机图进行分类。图12(b)-(c)展示了正确分类的图样本。

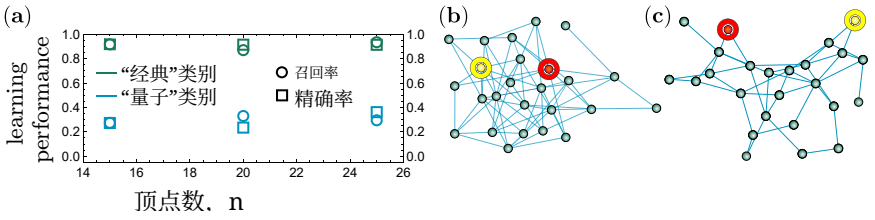



**图12**。 (a) CQCNN 的学习性能。数据集由包含 $n = 15$、20 和 25 个顶点的随机图组成，每个 $n$包含 1000 个样本，以及相应的经典标签和量子标签。CQCNN 在 3000 个训练轮次中进行模拟，每个训练轮次包含 100 个小批次，每个批次的批量大小为 3 个样本。网络在每个 $n$的 1000 个随机图上进行了测试。(b)、(c) 展示了从测试集中选取的、被 CQCNN 正确分类的随机图示例（初始顶点和目标顶点分别以黄色和红色标记）。在图 (b) 中，经典粒子速度更快，而在图 (c) 中，量子粒子速度更快。

### *3.2.1.* 含退相干的量子游走

在存在退相干的情况下，即对于 $p > 0$ ，物理图景会更加丰富。图 13 展示了由 6 个顶点组成的环图上的量子游走动力学模拟结果

[12]召回率量化了某一类别中正确预测所占的比例，而精确率则表示被预测为某一类别的样本中实际正确的比例。

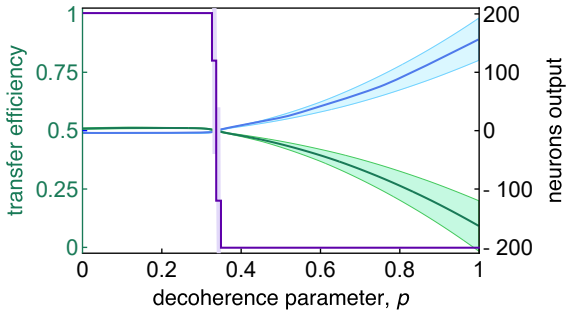



**图13**。6环图的传输效率预测（紫色曲线）与退相干参数 $p$ 的关系。输出神经元的激活值以蓝色和绿色显示。结果由对5个 CQCNN 网络取平均得到。标准差以阴影区域标示。

；传输效率是在图的两个相对顶点之间测量的，如图 10(b) 所示。我们对退相干参数 $p$ 的 1000 个随机采样值进行了模拟，并用这些结果训练 CQCNN。训练过程结束后，我们让 CQCNN 预测，对于一个给定的新参数 $p$，量子游走是否能够带来优势。图 13 中，传输效率预测结果以紫色曲线表示。从图 13 可以清楚地看到，当退相干参数取值为 $p \simeq 0.34$ 时，传输机制会从量子态（$p \simeq 1$）骤然转变为经典态（$p \simeq 0$）。因此，可以预期，在 $p < 0.34$ 范围内，量子游走的传输具有优势。从物理上看，这种转变可能与耗散存在时的量子隧穿特征有关，参见 [315,316]。注意，参数 $p$ 通常取决于温度，参见 [317]。在这种情况下，我们可以将观察到的转变视为量子态向经典（热激活）态转变的（二级）相变，该相变会在某个有限温度下发生于图上。

图13展示了 CQCNN 基于输出神经元学习值所作的预测；图13中分别以蓝色和绿色表示经典类和量子类。CQCNN 根据输出神经元激活值的最大值来判定类别。从图13可以清楚地看出，对量子类的“投票”逐渐升至最大值 $p \simeq 0.2$，这对应于对量子类最高的置信度。与此同时，随着退相干参数 $p$ 增大，对经典类的置信度也随之提高。经过 $p \simeq 0.34$ 这一交叉点后，类别之间的区分变得更加明显。

因此，所得结果对于开发以图方法为基础的软件和硬件系统具有重要作用。我们在此提出的 CQCNN 有助于找出哪些图以及在何种退相干条件下能够实现量子优势。这对于含噪声中等规模量子时代量子器件的研发尤为重要。

### *3.3.* 量子层析中的机器学习

机器学习能够利用有限的参数，对任意复杂的数据模式进行最佳拟合，因此为量子层析提供了一种强大的方法。这里，量子层析或量子态层析（QST）指的是通过对一组相同的量子态进行测量，从而重构量子态的完整信息 [318–324]。然而，$N$ 个量子比特态的希尔伯特空间中基的数量呈指数增长，这意味着精确的层析技术需要指数级的测量——

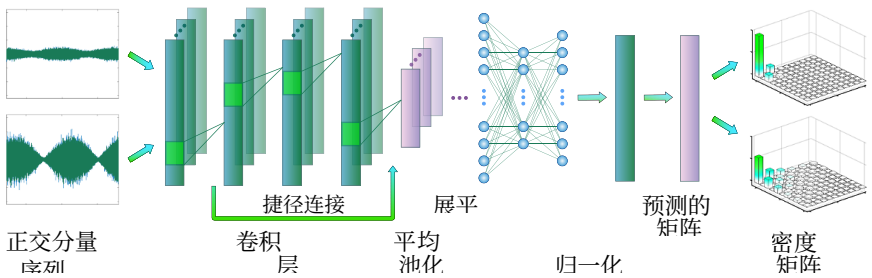



**图14.** 利用卷积神经网络（CNN）增强量子态层析的示意图。此处，将通过量子同频层析单次扫描获得的求积序列噪声数据输入卷积层，并在架构中采用捷径连接和平均池化。随后，经过展平和归一化后，对预测矩阵进行求逆，以在截断条件下重构密度矩阵。

次数和／或计算。为了充分发挥量子态及相关量子过程的全部潜力，必须对大型量子系统进行良好的表征和验证，而这仍是一项重要挑战 [325]。

传统上，最大似然估计（MLE）方法通过为任意量子态估计与数据最接近的概率分布，用于量子层析 [326,327]。然而，MLE 方法需要指数级于 $N$ 的数据量，以及指数级于 $N$ 的处理时间。尽管处理的是高斯量子态，噪声环境带来的不可避免的耦合，使得几乎无法在大型希尔伯特空间中精确表征量子特征。此外，随着基底数量增加，MLE 还会面临过拟合问题。为了让量子态层析更易于应用，研究者提出了若干替代算法，这些算法假设待研究状态受到某些物理限制，例如自适应量子层析 [328], 、置换不变层析 [329], 、量子压缩感知 [330–333], 、张量网络 [334,335],、生成模型 [336], 、前馈神经网络 [337],以及变分自编码器 [338]。

为减少最大似然估计中的过拟合问题，受限玻尔兹曼机（RBM） [339–342] 为量子态层析提供了一种强大的解决方案。借助由随机二值单元组成的两层结构——可见层和隐藏层，RBM 可作为通用函数逼近器。对于 IBMQ量子计算机上的量子比特，研究人员已展示了通过机器学习进行量子态重构的结果，涉及四个量子比特 [343]。对于连续变量，卷积神经网络（CNN）已在连续变量量子同频层析中得到实验实现 [269,344,345]。

如图 14 所示，光学零差测量获得的时间序列数据与语音（声音）模式识别 [346,347]具有相似性。在这里，求积序列的含噪数据被输入一个由总计 30 个卷积层组成的卷积神经网络。应用卷积神经网络时，我们利用其良好的泛化能力，从时间序列数据中提取相应的密度矩阵 [346]。在我们的深度卷积神经网络中，使用了四个卷积块，每个卷积块包含 1 至 9 个尺寸各异的卷积层（滤波器）。此外，还在卷积块之间引入了五个捷径连接，以解决梯度消失问题。我们没有采用最大池化，而是使用平均池化来获得更高的保真度结果，因为所有层析数据都应具有相同的权重。最后，在展平两个全连接层并进行归一化后，对预测得到的矩阵进行求逆，以重构截断后的密度矩阵。

此处，我们要最小化的损失函数是均方误差（MSE）；

训练时使用的优化器是 Adam。训练过程中，我们将批量大小设为 32。通过这一设置，网络经过 70 个训练轮次后，将损失（MSE）降至 $5 \times 10^{-6}$。实际操作中，我们不对光子数基进行无限求和，而是通过截断光子数，使概率中的求和上限达到 0。9999。此处，所得密度矩阵以光子数基表示，并根据最高 20 dB 的反压缩程度截断至 $35 \times 35$。

为避免出现非物理态，我们对预测的密度矩阵施加半正定约束。在此，我们在通过 Cholesky 分解生成预测的因式分解密度矩阵之前，引入一个辅助（下三角）矩阵。在训练过程中，归一化还确保输出密度矩阵的迹保持为 1。我们向卷积神经网络中输入了超过一百万个数据集，涵盖不同压缩程度、正交分量角度和热库温度下的压缩态（$\rho^{sq}$）、压缩热态（$\rho_{th}^{sq}$）和热态（$\rho_{th}$），即：

$$\rho^{sq} = \hat{S}\rho_0\hat{S}^{\dagger}; \tag{5}$$

$$\rho_{th}^{sq} = \hat{S}\rho_{th}\hat{S}^{\dagger}. \tag{6}$$

此处，$\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$ 与真空态 $|0\rangle$，$\rho_{th} = \sum_n P$（$n$） $|n\rangle\langle n|$，其概率分布函数为 $P$（$n$） $= \frac{1}{\bar{n}+1}$（$\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}$）$^n$，由平均光子数 $\bar{n} = \frac{1}{\exp[\hbar\omega/k_B T]-1}$ 在拟合温度 $T$ 下定义；而 $\hat{S}$（$\xi$） $=$ exp$[\frac{1}{2}\xi^{*}\hat{a}^2 - \frac{1}{2}\xi\hat{a}^{\dagger 2}]$ 表示压缩算符，其压缩参数 $\xi \equiv r$exp$(i\phi)$ 由压缩因子 $r$ 和压缩角 $\phi$ 表征。所有训练均使用 Python 包 *tensorflow.keras* 完成，并在图形处理器（Nvidia Titan RTX）上运行。

通过计算量子态的纯度，即纯度 $\equiv$ tr$(\rho^2)$，并比较最大似然估计和卷积神经网络所获得的平均保真度，利用模拟数据集验证了机器学习增强量子态层析的有效性。与耗时的最大似然估计方法相比，即使考虑 20 dB 的反压缩程度，机器学习增强量子态层析仍能将保真度保持在 0.99。利用有关压缩态的先验知识，可以在很短时间内（通常不到一小时）训练出这样的监督式卷积神经网络，从而针对特定问题构建专用的机器学习模型。训练完成后，在标准 GPU服务器上，平均耗时约为 38.1 毫秒（取 100 次的平均值）。机器学习增强量子态层析的一项独特优势是，在提取退化信息时，可以精确识别纯压缩部分和噪声部分。通过对预测的密度矩阵直接进行奇异值分解，即 $\rho = \sigma_1\,\rho^{sq} + c_1\,\rho_{th}^{sq} + d_1\,\rho_{th}$，即可得到理想（纯）压缩态、压缩热态和热态各自的权重比。通过这种识别，人们应能在更高压缩程度下抑制和/或控制退化，并将其立即应用于引力波探测器和量子光子计算。

为了实现实时量子态层析，从而对量子噪声中观测到的每种特征进行物理描述，本文还展示了在此类卷积神经网络配置中直接预测物理参数的特征模型 [348]。无需处理高维希尔伯特空间中的密度矩阵，特征模型预测得到的物理参数与重构模型生成的结果一样准确。机器学习用于量子态层析最有前景的优势之一是只需较少的测量设置 [349]。研究还根据部分测量结果证明，即使投影测量并不完整，基于机器学习的量子态估计技术仍具有鲁棒性 [350]。此外，这种高性能、轻量级的，

且易于安装的基于监督特征模型的机器学习量子态层析，可轻松安装在现场可编程门阵列等边缘设备上，作为适用于所有压缩态应用的在线诊断工具箱。

除了此处展示的压缩态之外，类似的机器学习概念也可轻易应用于特定的连续变量族，例如非高斯态。当然，处理单光子态、薛定谔猫态 [351,352], 以及用于量子纠错码纠正的 Gottesman-Kitaev-Preskill 态时，应采用不同的学习（适应）过程 [353]。另外，也可以借助机器学习中开发的更优内核，使用较少的训练数据，例如采用强化学习、生成对抗网络和深度强化学习来解决优化问题 [268,354–360]。即使没有任何先验信息，信息完备性认证网络（ICCNet）与保真度预测网络（FidNet）也已被用于唯一重构任意给定的量子态 [361]。

这些数据驱动的学习和/或适应性机器学习的应用并不局限于量子态层析。量子过程层析、哈密顿量层析和量子信道层析的识别与估计，以及量子相位估计，也正在取得进展 [362–365]。此外，量子层析中的机器学习还可用于量子态制备，以及通用的单次制备量子信息处理（SIPQIP）框架 [366]。

### *3.4.* 光子量子计算

除了经典信息处理之外，光子量子计算也是展示量子优势的潜在技术之一 [14,367,368], ，即量子系统已被证明在某些定义明确的信息处理任务上优于经典系统。尽管光子玻色子采样的实现所涉及的计算任务并非通用 [369], ，这意味着它无法执行任意量子操作，但在非通用光子系统受到严格限制的范围内是否存在任何有用的应用，仍是一个悬而未决的问题。尽管如此，与其他平台相比，光子学作为量子技术平台的优势在于能够与成熟的经典光子技术高度集成，而且相关光子电路可以在室温下运行 [370,371]。

关于机器学习，尤其是深度学习在光子结构设计和光学数据分析中的最新进展，以及相关挑战和前景，可参见文献 [48,372–374]。针对光子晶体、等离激元纳米结构、可编程超材料和超表面的逆向设计与优化，已得到积极探索，应用方向包括高速光通信与计算、超灵敏生化检测、高效太阳能采集和超分辨成像 [375]。通过采用自适应线性光学，研究者提出了量子机器学习方法，用于执行量子变分分类和量子核估计 [376]。

为实现片上量子光子学这一目标，由于与传统 CMOS制造工艺兼容，硅基材料已得到广泛探索。与使用光学参量过程产生的光子或纠缠光子对不同，后者受限于后选择中概率低、成功事件罕见的问题；芯片上的量子光学微谐振器利用克尔非线性，相较于基于光子量子比特的方法具有优势 [377–381]。不同于

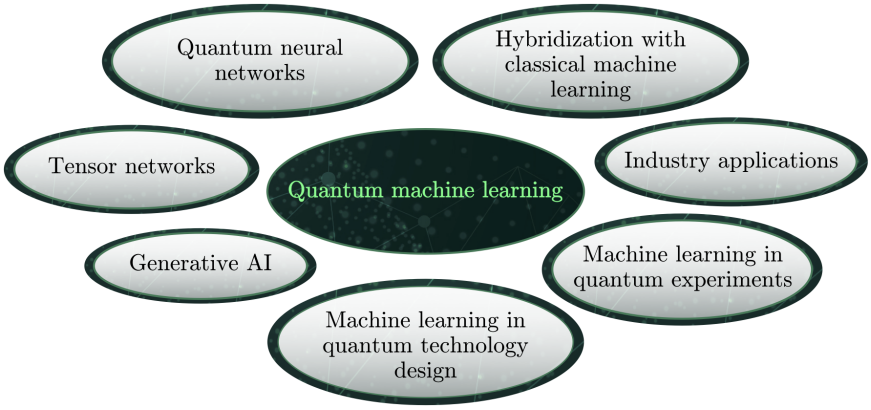



**图15.** 未来十年的量子机器学习生态系统。请参阅已发表论文版本中的参考文献：AlexeyMelnikov, MohammadKordzanganeh,AlexanderAlodjants,Ray-KuangLee (2023) 量子机器学习：从物理学到软件工程, Advances in Physics: X, 8:1, DOI: 10.1080/23746149.2023.2165452

所有基于门的量子计算都以单量子比特门和纠缠门为基础，而光子量子计算在计算过程中不依赖任何物理门，而是依赖量子模式的制备，例如利用时域和/或频域复用制备簇态 [382,383]。

关于集成量子光子学以及混合量子器件的进展，机器学习方法也已得到广泛应用，可为光子结构设计以及光与物质相互作用的定制提供高效手段 [384]。对于新兴的机器学习量子光子学领域，我们不仅需要利用机器学习自动化设计量子光学实验 [385], ，例如第3.2节中展示的基于图态的量子行走；还需要机器学习增强的量子技术，例如第3.3节中展示的量子层析中的机器学习，以实现机器学习辅助的量子测量。沿着这一方向，量子光学神经网络（QONN）应运而生，旨在利用集成量子光子学的进展 [386]。随着量子网络中的量子光学态压缩和黑盒量子模拟等新协议的发展，数以千计的光电子元件需要集成到单片集成电路中。预计，将量子测量、量子计量学与片上及自由空间超构器件优化相结合，将成为光子量子计算中实现量子实验自动化的一条有前景的途径。

## 4. 结论

人工智能和机器学习目前是推动现代社会发展的关键因素。如今，很难找到一个生活领域完全没有应用人工智能领域的成果。然而，这些成功在很大程度上得益于经典信息技术在硬件方面的发展，而这类技术存在固有局限。量子计算机和量子网络的出现，有望在不同领域突破这些限制。量子机器学习是一个快速发展的新兴研究领域，处于人工智能、量子信息科学和量子技术的交叉地带。

T迄今已发展起来、并将在 or

未来十年受到需求的量子机器学习生态系统如图15所示。这里，我们基于这样一个事实展开讨论：在不久的将来，各种用于大量信息传输、处理和智能识别的（张量）网络系统将在我们的日常生活中发挥主要作用。有鉴于此，我们确信，具有实际意义的量子计算机将嵌入大型分布式智能系统环境中，并环绕在我们周围。

在本综述中，我们概述了富有前景的人工智能方法与现代量子计算之间相互作用的热点问题。这些问题主要与含噪声中等规模量子时代量子计算机的有限能力有关，并分别采用变分本征求解器和量子近似优化算法等多种变分算法。所谓量子神经网络在本综述中占据特殊地位，它们代表了新型量子机器学习模型，其参数由经典方式更新，并可用于变分电路的量子-经典训练算法。在此意义上，我们讨论了富有前景的混合信息处理方法，这些方法同时使用经典机器学习算法和量子器件。训练过程包括向量子模型提供数据、计算目标（损失）值，然后调整量子神经网络参数。因此，整个过程代表了一种量子-经典混合算法。在本文中，我们还讨论了混合计算的另一种可能应用，即采用经典-量子卷积神经网络，以解决选定图上的随机游走加速问题。我们的方法基于对 CQCNN 的训练，该网络学习从结合退相干参数的图的邻接矩阵中提取特征向量。我们已经证明，即使不存在任何退相干，随机游走的加速总体上也很大程度取决于图的拓扑性质，即取决于邻接矩阵的特征。我们的研究结果为量子-经典算法开辟了新的视角，这些算法将随机游走作为子程序加以探索。

## 5. 致谢

A.P.A 获得俄罗斯联邦科学和高等教育部国家任务编号 2019-1339 项目的资助。
R.-K.L. 部分获得台湾国家科学及技术委员会（编号：110-2123-M-007-002）的资助。

## 参考资料

[1] Ahmed K. Noor. 认知计算与认知系统的潜力。《开放工程》，5:75–88，2015年。[2] M. Friedemann 和 Ch. Floerkemeier。从计算机互联网到物联网（德语）。《信息学光谱》，33:107，2010年。[3] V. Guleva、E. Shikov、K. Bochenina、S. Kovalchuk、A. Alodjants 和 Boukhanovsky A.。分布式智能系统中涌现的复杂性。*Entropy*，22:1437，2020年。[4] M. Mittal、R.R. Shah 和 S. Roy。人机交互认知计算：原理与实践。爱思唯尔，2021年。[5] E. R. Johnston、N. Harrigan 和 M. Gimeno-Segovia。量子计算机编程：基本算法与代码示例。O'Reilly Media, Inc.，2019年。[6] A Khrennikov。《无处不在的量子结构：从心理学到金融》。施普林格，柏林、海德堡，第7.2版，2010年。[7] Michael A. Nielsen 和 Isaac L. Chuang。《量子计算与量子信息：十周年纪念版》。剑桥大学出版社，2011年。

[8] Jack D. Hidary。《量子计算：一种应用方法》。施普林格，2019年。[9]Richard P. Feynman。用计算机模拟物理。《国际理论物理学杂志》，21:467–488，1982年。[10] Yu. Manin。《可计算与不可计算》。苏维埃无线电出版社，莫斯科，1980年。[11] T. D. Ladd、F. Jelezko、R. Laflamme、Y. Nakamura、C. Monroe 和 J.L. O'Brien。量子计算机。《自然》，464:45–53，2010年。[12] John Preskill。NISQ时代及之后的量子计算。Quantum，2:79，2018年。[13] A. Harrow 和 A Montanaro。量子计算优越性。《自然》，574:203，2017年。[14] F. Arute、K. Arya、R. Babbush 等。利用可编程超导处理器实现量子优越性。《自然》，574:505，2019年。[15] M. R. Perelshtein、A. I. Pakhomchik、A. A. Melnikov、A. A. Novikov、A. Glatz、G. S. Paraoanu、V. M. Vinokur 和 G. B. Lesovik。用量子混合算法求解大规模线性方程组。《物理年刊》，第2200082页，2022年。[16] Daniel Gottesman。技术视角：解码错误以降低量子计算成本。《美国计算机学会通讯》，64:105，2021年。[17] Barbara Terhal。量子存储器的量子纠错。《现代物理评论》，87:307，2015年。[18] Vicky Choi。绝热量子计算中的小图嵌入：II. 小图通用图设计。《量子信息处理》，10:343，2011年。[19] J Hopfield。具有涌现集体计算能力的神经网络与物理系统。《美国国家科学院院刊》，79:2554，1982年。[20] Jack Kendall 和 Suhas Kumar。量子存储器的量子纠错。《应用物理评论》，7:011305，2020年。[21] J. Biamonte、P. Wittek、N. Pancotti、P. Rebentrost 和 N. Wiebe。量子机器学习。《自然》，549:195–202，2017年。[22] M. Schuld、I. Sinayskiy 和 F. Petruccione。量子机器学习导论。《当代物理学》，56(2):172–185，2015年。[23] Vedran Dunjko 和 Hans J Briegel。量子领域中的机器学习与人工智能：近期进展综述。《物理学进展报告》，81(7):074001，2018年。[24] Giuseppe Carleo、Ignacio Cirac、Kyle Cranmer、Laurent Daudet、Maria Schuld、Naftali Tishby、Leslie Vogt-Maranto 和 Lenka Zdeborov´a。机器学习与物理科学。《现代物理评论》，91:045002，2019年。[25] Aram W. Harrow、Avinatan Hassidim 和 Seth Lloyd。线性方程组量子算法。《物理评论快报》，103:150502，2009年。[26] E A¨ımeur、G Brassard 和 Gambs S.。量子聚类算法。载于 ICML '07：第24届国际机器学习会议论文集，第1–8页，2007年。[27] Seth Lloyd、Masoud Mohseni 和 Patrick Rebentrost。量子主成分分析。《自然·物理》，10(9):631–633，2014年。[28] Patrick Rebentrost、Masoud Mohseni 和 Seth Lloyd。用于大数据分类的量子支持向量机。《物理评论快报》，113:130503，2014年。[29] Edward Farhi、Jeffrey Goldstone 和 Sam Gutmann。一种量子近似优化算法。arXiv:1411.4028，2014年。[30] Alberto Peruzzo、Jarrod McClean、Peter Shadbolt、Man-Hong Yung、Xiao-Qi Zhou、Pe- ter J. Love、Al´an Aspuru-Guzik 和 Jeremy L. O'Brien。在光子量子处理器上实现的变分本征值求解器。《自然·通讯》，5:4213，2014年7月。[31] Mario Krenn、Mehul Malik、Robert Fickler、Radek Lapkiewicz 和 Anton Zeilinger。自动化搜索新的量子实验。《物理评论快报》，116:090405，2016年。[32] Alexey A. Melnikov、Hendrik Poulsen Nautrup、Mario Krenn、Vedran Dunjko、Markus Tiersch、Anton Zeilinger 和 Hans J. Briegel。主动学习机器学会创建新的量子实验。《美国国家科学院院刊》，115(6):1221–1226，2018年。[33] E Farhi 和 H Neven。利用近期开期处理器和量子神经网络进行分类。arXiv:1802.06002，2018年。[34] Iris Cong、Soonwon Choi 和 Mikhail D. Lukin。量子卷积神经

作品。《自然·物理》，15(12):1273–1278，2019年。[35] Thomas F¨osel、Petru Tighineanu、Talitha Weiss 和 Florian Marquardt。利用神经网络进行量子反馈的强化学习。《物理评论X》，8:031084，2018年。[36] Hendrik Poulsen Nautrup、Nicolas Delfosse、Vedran Dunjko、Hans J. Briegel 和 Nico- lai Friis。利用强化学习优化量子纠错码。Quantum，3:215，2019年。[37]Sofiene Jerbi、Casper Gyurik、Simon Marshall、Hans Briegel 和 Vedran Dunjko。用于强化学习的参数化量子策略。《神经信息处理系统进展》，34:28362–28375，2021年。[38] V. Saggio、B. E. Asenbeck、A. Hamann、T. Str¨omberg、P. Schiansky、V. Dunjko、N. Friis、N. C. Harris、M. Hochberg、D. Englund 等。强化学习智能体的实验性量子加速。《自然》，591:229–233，2021年3月。[39] A. A. Melnikov、L. E. Fedichkin 和 A. Alodjants。利用卷积神经网络通过量子漫步预测量子优势。《新物理学杂志》，21(12):125002，2019年。[40] Alexey A. Melnikov、Leonid E. Fedichkin、Ray-Kuang Lee 和 Alexander Alodjants。含噪量子漫步的机器学习迁移效率。《先进量子技术》，3(4):1900115，2020年。[41] Michael Perelshtein、Asel Sagingalieva、Karan Pinto、Vishal Shete、Alexey Pakhom- chik、Artem Melnikov、Florian Neukart、Georg Gesek、Alexey Melnikov 和 Valerii Vinokur。通过混合量子计算实现切实的特定应用优势。arXiv:2205.04858，2022年。[42] Javier Alcazar、Vicente Leyton-Ortega 和 Alejandro Perdomo-Ortiz。机器学习中的经典模型与量子模型：来自金融应用的见解。《机器学习：科学与技术》，1(3):035003，2020年。[43] Kushal Batra、Kimberley M Zorn、Daniel H Foil、Eni Minerali、Victor O Gawriljuk、Thomas R Lane 和 Sean Ekins。用于药物发现应用的量子机器学习算法。《化学信息与建模杂志》，61(6):2641–2647，2021年。[44]Asel Sagingalieva、Andrii Kurkin、Artem Melnikov、Daniil Kuhmistrov、Michael Perelshtein、Alexey Melnikov、Andrea Skolik 和 David Von Dollen。用于汽车分类的混合量子神经网络超参数优化。arXiv:2205.04878，2022年。[45] Asel Sagingalieva、Mohammad Kordzanganeh、Nurbolat Kenbayev、Daria Kosichkina、Tatiana Tomashuk 和 Alexey Melnikov。用于药物反应预测的混合量子神经网络。arXiv:2211.05777，2022年。[46] E. DeBenedictis。量子机器学习的未来。《计算机》，51:68，2018年。[47] M. Sajjan、Junxu. Li、R. Selvarajan、S.H. Sureshbabu、S.S. Kale、R. Singh、V. Gupta 和 S. Kais。用于化学和物理学的量子机器学习。《化学学会评论》，51:6475，2022年。[48] Wei. Ma、Zh. Liu、Z.A. Kudyshev、A. Boltasseva、W. Cai 和 Y. Liu。用于光子结构设计的深度学习。《自然·光子学》，15:77，2021年。[49] Z. Chen 和 M. Segev。聚焦光子学：展望下一个十年。《eLight》，1:2，2021年。[50] C. Ciliberto、M. Herbster、A.D. Ialongo、M. Pontil、A. Rocchetto、S. Severini 和 L. Wossnig。量子机器学习：经典视角。《英国皇家学会学报A辑》，474:20170551，2018年。[51] Y. Zhang 和 Q. Ni。量子机器学习的最新进展。《量子工程》，2:e34，2020年。[52] J. Allcock 和 S. Zhang。量子机器学习。《自然科学评论》，6:26，2019年。[53] J.D. Mart´ín-Guerrero 和 L. Lamata。量子机器学习：教程。《神经计算》，470:457，2022年。[54] Louis Vervoort、Alexey A. Melnikov、Munesh Chauhan 和 Vitaly Nikolaev。人工意识、超级智能与机器人伦理：如何实现？《心灵与物质》，19(1):7–43，2021年。

[55] L. Vervoort、H. Shevlin、A. Melnikov 和 A. Alodjants。应用于科学发现的深度学习：与科学哲学的热门交汇点。《科学哲学杂志》，已接收，2022年。[56] Georgia Karagiorgi、Gregor Kasieczka、Scott Kravitz、Benjamin Nachman 和 David Shih。机器学习在寻找新基础物理学中的应用。《自然综述：物理》，4:399，2022年。[57] R. Abbott、T.D. Abbott、S Abraham、F Acernese 等。观测到来自两次中子星—黑洞并合的引力波。《天体物理学杂志快报》，915:L5，2021年。[58] G. Vajente。数据挖掘和机器学习提高了引力波探测器的灵敏度。《物理评论D》，105:102005，2022年。[59] Jarrod R McClean、Jonathan Romero、Ryan Babbush 和 Al´an Aspuru-Guzik。变分量子-经典混合算法理论。《新物理学杂志》，18:023023，2016年2月。[60] Leo Zhou、Sheng-Tao Wang、Soonwon Choi、Hannes Pichler 和 Mikhail D. Lukin。量子近似优化算法：近期设备上的性能、机制与实现。《物理评论X》，10:021067，2020年。[61] M. Cerezo、A. Arrasmith、R. Babbush、S.C. Benjamin 等。变分量子算法。《自然综述：物理》，3:625–644，2021年。[62] Ajinkya Deshpande 和 Alexey Melnikov。利用图神经网络捕捉量子优化算法的对称性。《Symmetry》，14(12):2593，2022年。[63] Mohammad Kordzanganeh、Pavel Sekatski、Leonid Fedichkin 和 Alexey Melnikov。呈指数增长的通用量子电路族。arXiv:2212.00736，2022年。[64] S. Lloyd。脉冲编码调制中的最小二乘量化。《IEEE信息论汇刊》，28(2):129–137，1982年。[65] Mihai Bacila、Radulescu Adrian 和 Marar Ioan。使用K均值算法对预付费电信客户进行细分。《奥拉迪亚大学年刊》，21:1112–1118，2012年7月。[66] Muhammad Zulfadhilah、Yudi Prayudi 和 Imam Riadi。利用日志分析和K均值聚类进行网络画像：印度尼西亚高等教育领域的案例研究。《国际先进计算机科学与应用杂志》，7:430–435，2016年。[67] Alejandro L. Garcia。《物理数值方法》（第2版）。Prentice-Hall, Inc.，美国，第2版，1999年。[68] Zongrui Dai、Zhang Yuchen、Aya Li 和 Guobin Qian。机器学习在银行信用评级预测和风险评估中的应用。载于《2021年IEEE第二届大数据、人工智能与物联网工程国际会议（ICBAIE）》，第986–989页，2021年。[69] Chunming Xu 和 Scott A. Jackson。机器学习与复杂生物数据。《基因组生物学》，20，2019年。[70] Christopher Berner、Greg Brockman、Brooke Chan、Vicki Cheung、Przemys·law Debiak、Christy Dennison、David Farhi、Quirin Fischer、Shariq Hashme、Chris Hesse 等。大规模深度强化学习玩《Dota 2》。arXiv:1912.06680，2019年。[71] Zhengyao Jiang、Dixing Xu 和 Jinjun Liang。针对金融投资组合管理问题的深度强化学习框架。arXiv:1706.10059，2017年。[72] Emmanuel Maggiori、Yuliya Tarabalka、Guillaume Charpiat 和 Pierre Alliez。利用卷积网络进行高分辨率图像分类。载于《2017年IEEE国际地球科学与遥感研讨会（IGARSS）》，第5157–5160页，2017年。[73] Feng Li、Hao Zhang、Huaizhe xu、Shilong Liu、Lei Zhang、Lionel M. Ni 和 Heung-Yeung Shum。Mask dino：面向目标检测和图像分割的统一基于Transformer的框架。arXiv:2206.02777，2022年。[74] Wesley J. Maddox、Gregory Benton 和 Andrew Gordon Wilson。重新思考深度模型中的参数计数：重新审视有效维数。arXiv:2003.02139，2020年。[75] Amira Abbas、David Sutter、Alessio Figalli 和 Stefan Woerner。机器学习模型的有效维数。arXiv:2112.04807，2021年。[76] Forrest N. Iandola、Song Han、Matthew W. Moskewicz、Khalid Ashraf、William J. Dally 和 Kurt Keutzer。SqueezeNet：达到 AlexNet 级别的准确度，参数数量减少 50 倍，并

模型大小不到 0.5MB。arXiv:1602.07360，2016年。[77] Salma Abdel Magid、Francesco Petrini 和 Behnam Dezfouli。物联网边缘设备上的图像分类：性能分析与建模。《Cluster Computing》，23(2):1025–1043，2020年。[78] Aditya Ramesh、Prafulla Dhariwal、Alex Nichol、Casey Chu 和 Mark Chen。基于 CLIP 潜变量的分层文本条件图像生成。arXiv:2204.06125，2022年。[79]Jack W Rae、Sebastian Borgeaud、Trevor Cai、Katie Millican、Jordan Hoffmann、Francis Song、John Aslanides、Sarah Henderson、Roman Ring、Susannah Young 等。扩展语言模型：Gopher 训练方法、分析与见解。arXiv:2112.11446，2021年。[80] Tom Brown、Benjamin Mann、Nick Ryder、Melanie Subbiah、Jared D Kaplan、Prafulla Dhariwal、Arvind Neelakantan、Pranav Shyam、Girish Sastry、Amanda Askell 等。语言模型是少样本学习者。arXiv:2005.14165，2020年。[81] Radosvet Desislavov、Fernando Mart´ınez-Plumed 和 Jos´e Hern´andez-Orallo。深度学习推理中的计算与能耗趋势。arXiv:2109.05472，2021年。[82] Jaime Sevilla 和 Pablo Villalobos。机器学习中的参数数量——AI Alignment Forum，2021年6月。[83] Emma Strubell、Ananya Ganesh 和 Andrew McCallum。深度学习自然语言处理中的能源与策略考量。arXiv:1906.02243，2019年。[84] Gordon E. Moore。将更多元件塞进集成电路：重印自 Electronics，第38卷第8期，1965年4月19日，第114页及以后。IEEE 固态电路学会通讯，11(3):33–35，2006年。[85] David Burg 和 Jesse H. Ausubel。通过英特尔芯片密度重新审视摩尔定律。PLOS ONE，16(8):1–18，2021年。[86] Dario Amodei 和 Danny Hernandez。人工智能与计算，2018年5月。[87] Jaime Sevilla、Lennart Heim、Anson Ho、Tamay Besiroglu、Marius Hobbhahn 和 Pablo Villalobos。机器学习三个时代的计算趋势。arXiv:2202.05924，2022年。[88] Michel Verhulst 和 Leonard J. Savage。统计学基础。《Revue ´economique》，7:1042，1956年11月。[89] Amos Tversky 和 Daniel Kahneman。外延推理与直觉推理：概率判断中的合取谬误。Psychological Review，90:293–315，1983年。[90] Amos Tversky 和 Eldar Shafir。不确定条件下选择中的析取效应。Psychological Science，3:305–310，1992年9月。[91] Emmanuel M. Pothos 和 Jerome R. Busemeyer。对违背“理性”决策理论现象的量子概率解释。Proceedings of t he Royal Society B: Biological Sciences，276:2171–2178，2009年3月。[92] Martha Lewis。迈向组合分布语义学中的逻辑否定。arXiv:2005.04929，2020年。[93] Martha Lewis。“量子计算与认知模拟”一章，收录于《量子计算在人文艺术领域》一书。施普林格，2022年。[94] Bob Coecke、Mehrnoosh Sadrzadeh 和 Stephen Clark。意义组合分布模型的数学基础。arXiv:1003.4394，2010年。[95] David MacKay。贝叶斯模型比较与反向传播网络。载于 J. Moody、S. Hanson 和 R.P. Lippmann 编，《神经信息处理系统进展》第4卷，页码 Morgan-Kaufmann，1991年。[96] David J C Mackay。信息论、推断与学习算法。剑桥大学出版社，（Imp，第7.2版，2003年。[97] Maria Schuld 和 Francesco Petruccione。《使用量子计算机进行监督学习》。Cham：Springer International Publishing，2018年。[98]Marcello Benedetti、Erika Lloyd、Stefan Sack 和 Mattia Fiorentini。作为机器学习模型的参数化量子电路。Quantum Science and Technology，4:043001，2019年11月。[99] Jeffrey Larson、Matt Menickelly 和 Stefan M. Wild。无导数优化方法。Acta Numerica，28:287–404，2019年。

[100]Maria Schuld。监督式量子机器学习模型是核方法。arXiv:2101.11020，2021年。[101] Seth Lloyd、Maria Schuld、Aroosa Ijaz、Josh Izaac 和 Nathan Killoran。用于机器学习的量子嵌入。arXiv:2001.03622，2020年。[102] Oleksandr Kyriienko、Annie E. Paine 和 Vincent E. Elfving。使用可微量子电路求解非线性微分方程。Physical Review A，103(5)，2021年。[103] Maria Schuld、Alex Bocharov、Krysta M. Svore 和 Nathan Wiebe。以电路为中心的量子分类器。物理评论 A，101:032308，2020年。[104] Maria Schuld 和 Nathan Killoran。特征希尔伯特空间中的量子机器学习。《物理评论快报》，122(4)，2019年。[105] Ryan LaRose 和 Brian Coyle。面向量子分类器的稳健数据编码。Physical Review A，102(3):032420，2020年。[106] Francisco Javier Gil Vidal 和 Dirk Oliver Theis。参数化量子电路的输入冗余。《物理学前沿》，8:297，2020年。[107] Maria Schuld、Ryan Sweke 和 Johannes Jakob Meyer。数据编码对变分量子机器学习模型表达能力的影响。Physical Review A，103(3)，2021年。[108] Martin Larocca、Nathan Ju、Diego Garc´ıa-Mart´ın、Patrick J. Coles 和 M. Cerezo。量子神经网络中过度参数化的理论。arXiv:2109.11676，2021年。[109] Jarrod R. McClean、Sergio Boixo、Vadim N. Smelyanskiy、Ryan Babbush 和 Hart- mut Neven。量子神经网络训练景观中的贫瘠高原。《自然·通讯》，9，2018年11月。[110] 模板 — PennyLane 0.23.1 文档，[111] MSC。Software Corporation。量子卷积神经网络 — TensorFlow Quantum，2 访问日期：2022年6月17日。[112] 机器学习教程 — Qiskit Machine Learning 0.4.0 文档。https:// qiskit.org/documentation/machine-learning/tutorials/index.html，访问日期：2022年6月17日。[113] Abhinav Kandala、Antonio Mezzacapo、Kristan Temme、Maika Takita、Markus Brink、Jerry M. Chow 和 Jay M. Gambetta。适用于小分子和量子磁体的硬件高效变分量子本征求解器。《自然》，549:242–246，2017年9月。[114] Dan Shepherd 和 Michael J. Bremner。时间无结构量子计算。《皇家学会会刊 A 辑：数学、物理与工程科学》，465:1413–1439，2009年2月。[115] I. V. Oseledets 和 E. E. Tyrtyshnikov。打破维数灾难，或如何在多维情形下使用奇异值分解。《SIAM 科学计算杂志》，31(5):3744–3759，2009年。[116] T. Douce、D. Markham、E. Kashefi、E. Diamanti、T. Coudreau、P. Milman、P. van Loock 和 G. Ferrini。连续变量瞬时量子计算难以采样。《物理评论快报》，118(7)，2017年。[117] Vojtˇech Havl´ıˇcek、Antonio D. C´orcoles、Kristan Temme、Aram W. Harrow、Abhinav Kandala、Jerry M. Chow 和 Jay M. Gambetta。使用量子增强特征空间进行监督学习。《自然》，567(7747):209–212，2019年。[118] Jacob Biamonte 和 Ville Bergholm。张量网络简明指南。arXiv:1708.00006，2017年。[119] Michael L. Wall 和 Giuseppe D'Aguanno。用于机器学习的树张量网络分类器：从量子启发到量子辅助。Physical Review A，104(4)，2021年。[120] Amandeep Singh Bhatia、Mandeep Kaur Saggi、Ajay Kumar 和 Sushma Jain。基于矩阵乘积态的量子分类器。arXiv:1905.01426，2019年。[121] Andrey Kardashin、Alexey Uvarov 和 Jacob Biamonte。量子机器学习张量网络态。《物理学前沿》，8，2021年。[122]Audr¯unas Gruslys、Remi Munos、Ivo Danihelka、Marc Lanctot 和 Alex Graves。内存高效的时间反向传播。arXiv:1606.03401，2016年。[123] David E. Rumelhart、Geoffrey E. Hinton 和 Ronald J. Williams。学习表征

通过反向传播误差进行……。《自然》，323:533–536，10 1986。[124] 通过反向传播计算量子梯度——PennyLane，[125] Ville Bergholm、Josh Izaac、Maria Schuld、Christian Gogolin、M Sohaib Alam、Shahnawaz Ahmed、Juan Miguel Arrazola、Carsten Blank、Alain Delgado、Soran Jahangiri 等。PennyLane：混合量子-经典计算的自动微分。arXiv:1811.04968，2018年。[126] Maria Schuld、Ville Bergholm、Christian Gogolin、Josh Izaac 和 Nathan Killoran。在量子硬件上计算解析梯度。《物理评论A》，99(3)，2019年。[127] Gavin E. Crooks。使用参数位移规则和量子门分解计算参数化量子门的梯度。arXiv:1905.13311，2019年。[128] Leonardo Banchi 和 Gavin E. Crooks。使用随机参数位移规则测量一般量子演化的解析梯度。Quantum，5:386，01 2021年。[129] Jakob S. Kottmann、Abhinav Anand 和 Al´an Aspuru-Guzik。一种在量子计算机上自动微分幺正耦合簇的可行方法。《化学科学》，12:3497–3508，2021年。[130] Javier Gil Vidal 和 Dirk Oliver Theis。参数化量子电路上的微积分。arXiv:1812.06323，2018年。[131] Artur F. Izmaylov、Robert A. Lang 和 Tzu-Ching Yen。变分量子算法中的解析梯度：将参数位移规则代数扩展至一般幺正变换。Physical Review A，104，12 2021年。[132] Andrea Mari、Thomas R. Bromley 和 Nathan Killoran。在量子硬件上估算梯度和高阶导数。Physical Review A，103，01 2021年。[133] Oleksandr Kyriienko 和 Vincent E. Elfving。广义量子电路微分规则。Physical Review A，104(5)，2021年。[134] David Wierichs、Josh Izaac、Cody Wang 和 Cedric Yen-Yu Lin。量子梯度的一般参数位移规则。Quantum，6:677，03 2022年。[135] Josh Izaac。PennyLaneAI/QML，06 2022年。[136] Tyson Jones 和 Julien Gacon。变分量子算法经典模拟中的梯度高效计算。arXiv:2009.02823，2020年。[137] Roeland Wiersema 和 Nathan Killoran。利用黎曼梯度流优化量子电路。arXiv:2202.06976，2022年。[138] Adri´a n P´erez-Salinas、Alba Cervera-Lierta、Elies Gil-Fuster 和 Jos´e I. Latorre。用于通用量子分类器的数据重上传。Quantum，4:226，2020年。[139] Jacob Biamonte。通用变分量子计算。Physical Review A，103(3):L030401，2021年。[140] Kurt Hornik、Maxwell Stinchcombe 和 Halbert White。多层前馈网络是通用逼近器。Neural Networks，2(5):359–366，1989年。[141] Andris Ambainis 和 Joseph Emerson。量子 t-设计：量子世界中的 t-重独立性。arXiv:0701126，2007年。[142] Andrew Arrasmith、M. Cerezo、Piotr Czarnik、Lukasz Cincio 和 Patrick J. Coles。贫瘠高原对无梯度优化的影响。Quantum，5:558，10 2021年。[143] Samson Wang、Enrico Fontana、M. Cerezo、Kunal Sharma、Akira Sone、Lukasz Cincio 和 Patrick J. Coles。变分量子算法中的噪声诱导贫瘠高原。《自然·通讯》，12，11 2021年。[144] Andrea Skolik、Jarrod R. McClean、Masoud Mohseni、Patrick van der Smagt 和 Martin Leib。量子神经网络的逐层学习。Quantum Machine Intelligence，3，01 2021年。[145] M. Cerezo、Akira Sone、Tyler Volkoff、Lukasz Cincio 和 Patrick J. Coles。浅层参数化量子电路中依赖于代价函数的贫瘠高原。《自然·通讯》，12，03 2021年。[146] Zo¨e Holmes、Kunal S harma、M. Cerezo 和 Patrick J. Coles。将拟设可表达性与梯度幅值及贫瘠高原联系起来。PRX Quantum，3(1)，2022年。[147] Tyler Volkoff 和 Patrick J Coles。随机参数化量子电路中的关联可产生大梯度。Quantum Science and Technology，6(2):025008，2021年。

[148] Edward Grant、Leonard Wossnig、Mateusz Ostaszewski 和 Marcello Benedetti。一种应对参数化量子电路中贫瘠高原的初始化策略。Quantum，3:214，12 2019年。[149] Kaining Zhang、Min-Hsiu Hsieh、Liu Liu 和 Dacheng Tao。迈向量子神经网络的可训练性。arXiv:2011.06258，2020年。[150] Arthur Pesah、M. Cerezo、Samson Wang、Tyler Volkoff、Andrew T. Sornborger 和 Patrick J. Coles。量子卷积神经网络中不存在贫瘠高原。Phys. Rev. X，11:041011，2021年。[151] Chen Zhao 和 Xiao-Shan Gao。利用ZX演算分析量子神经网络训练中的贫瘠高原现象。Quantum，5:466，2021年。[152] Bob Coecke 和 Ross Duncan。量子可观测量的图示演算。预印本，2007年。[153] Bob Coecke。量子图像主义。Contemporary Physics，51(1):59–83，2010年。[154] Bob Coecke 和 Ross Duncan。相互作用的量子可观测量：范畴代数与图示演算。《新物理学杂志》，13(4):043016，2011年。[155] Zhao-Yu Han、Jun Wang、Heng Fan、Lei Wang 和 Pan Zhang。使用矩阵乘积态进行无监督生成建模。Phys. Rev. X，8(3):031012，2018年。[156] Carlos Ortiz Marrero、M´aria Kieferov´a 和 Nathan Wiebe。纠缠诱导的贫瘠高原。PRX Quantum，2:040316，2021年。[157] Maria Schuld 和 Nathan Killoran。特征希尔伯特空间中的量子机器学习。《物理评论快报》，122:040504，2019年。[158] Bernhard E. Boser、Isabelle M. Guyon 和 Vladimir N. Vapnik。最优间隔分类器的训练算法。载于《第五届计算学习理论年会论文集》，COLT '92，第144–152页，纽约，美国，1992年。计算机协会。[159] Hsin-Yuan Huang、Michael Broughton、Masoud Mohseni、Ryan Babbush、Sergio Boixo、Hartmut Neven 和 Jarrod R. McClean。数据在量子机器学习中的力量。《自然·通讯》，12，05 2021年。[160] Thomas Bayes。试论解决概率论中的一个问题。已故牧师托马斯·贝叶斯先生所作，由普赖斯先生通过致约翰·坎顿的信函传达。伦敦皇家学会哲学汇刊，53:370–418，12 1763年。[161] Alex Graves。神经网络的实用变分推断。载于 J. Shawe-Taylor、R. Zemel、P. Bartlett、F. Pereira 和 K. Q. Weinberger 编，《神经信息处理系统进展》第24卷，第2348–2356页。Curran Associates, Inc.，2011年。[162] Charles Blundell、Julien Cornebise、Koray Kavukcuoglu 和 Daan Wierstra。神经网络中的权重不确定性。arXiv:1505.05424，2015年。[163] Guang Hao Low、Theodore J. Yoder 和 Isaac L. Chuang。贝叶斯网络上的量子推断。Physical Review A，89，06 2014年。[164] Sima E. Borujeni、Saideep Nannapaneni、Nam H. Nguyen、Elizabeth C. Behrman 和 James E. Steck。贝叶斯网络的量子电路表示。Expert Systems with Applications，176:114768，08 2021年。[165] Robert R. Tucci。量子贝叶斯网络。International Journal of Modern Physics B，09:295–337，01 1995年。[166] Marcello Benedetti、Brian Coyle、Mattia Fiorentini、Michael Lubasch 和 Matthias Rosenkranz。使用量子计算机进行变分推断。Phys. Rev. Applied，16:044057，2021年。[167] Song Cheng、Jing Chen 和 Lei Wang。概率建模的信息视角：玻尔兹曼机与玻恩机。Entropy，20(8)，2018年。[168] Brian Coyle、Daniel Mills、Vincent Danos 和 Elham Kashefi。玻恩优势：量子优势与伊辛玻恩机的训练。npj Quantum Information，6(1):60，2020年。[169] Jin-Guo Liu 和 Lei Wang。量子电路玻恩机的可微学习。Physical Review A，98(6):062324，2018年。

[170] Ieva ˇCepait˙e、Brian Coyle 和 Elham Kashefi。《连续变量玻恩机》。arXiv:2011.00904，2020年。[171] Vicente Leyton-Ortega、Alejandro Perdomo-Ortiz 和 Oscar Perdomo。《使用参数化量子电路稳健地实现生成建模》。Quantum Machine Intelligence，3(1):17，2021年。[172] Kathleen E. Hamilton、Eugene F. Dumitrescu 和 Raphael C. Pooser。《超导量子比特的生成模型基准测试》。Physical Review A，99(6):062323，2019年。[173] Xun Gao、Eric R Anschuetz、Sheng-Tao Wang、J Ignacio Cirac 和 Mikhail D Lukin。《通过量子关联增强生成模型》。arXiv:2101.08354，2021年。[174] Marcello Benedetti、Delfina Garcia-Pintos、Oscar Perdomo、Vicente Leyton-Ortega、Yun-seong Nam 和 Alejandro Perdomo-Ortiz。《一种用于浅层量子电路基准测试与训练的生成建模方法》。npj Quantum Information，5(1):45，2019年。[175] Alex Kendall 和 Yarin Gal。《计算机视觉贝叶斯深度学习需要哪些不确定性？》arXiv:1703.04977，2017年。[176] V. N. Vapnik 和 A. Ya. Chervonenkis。《关于事件相对频率一致收敛至其概率》。Theory of Probability & Its Applications，16(2):264–280，1971年。[177] Peter L. Bartlett 和 Shahar Mendelson。《拉德马赫复杂度与高斯复杂度：风险界和结构性结果》。Lecture Notes in Computer Science，2111:224–240，2001年。[178] Oksana Berezniuk、Alessio Figalli、Raffaele Ghigliazza 和 Kharen Musaelian。《一种依赖尺度的有效维数概念》。arXiv:2001.10872，2020年。[179] Matthias C. Caro、Elies Gil-Fuster、Johannes Jakob Meyer、Jens Eisert 和 Ryan Sweke。《参数化量子电路的编码依赖型泛化界》。Quantum，5:582，2021年。[180] Amira Abbas、David Sutter、Christa Zoufal、Aur´elien Lucchi、Alessio Figalli 和 Stefan Woerner。《量子神经网络的力量》。arXiv:2011.00027，2020年。[181] Sukin Sim、Peter D. Johnson 和 Al´an Aspuru-Guzik。《用于量子-经典混合算法的参数化量子电路的表达能力与纠缠能力》。Advanced Quantum Technologies，2(12):1900070，2019年。[182] Adam Bouland、Bill Fefferman、Chinmay Nirkhe 和 Umesh Vazirani。《量子随机线路采样的复杂性与验证》。Nature Physics，15(2):159–163，2019年。[183] Yuxuan Du、Min-Hsiu Hsieh、Tongliang Liu 和 Dacheng Tao。《参数化量子电路的表达能力》。Physical Review Research，2(3):033125，2020年。[184] Matthias C. Caro 和 Ishaun Datta。《量子电路的伪维数》。Quantum Machine Intelligence，2(2):14，2020年。[185] Zo¨e Holmes、Kunal Sharma、M Cerezo 和 Patrick J Coles。《将 ansatz 表达能力与梯度幅值及贫瘠高原联系起来》。arXiv:2101.02138，2021年。[186] Evan Peters 和 Maria Schuld。《量子机器学习模型中过拟合仍能实现泛化》。arXiv:2209.05523，2022年。[187] Matthias C. Caro、Hsin-Yuan Huang、M. Cerezo、Kunal Sharma、Andrew Sornborger、Lukasz Cincio 和 Patrick J. Coles。《少量训练数据下量子机器学习的泛化》。arXiv:2111.05292，2021年。[188] QMware——首个全球量子云，[189] Mohammad Kordzanganeh、Markus Buchberger、Maxim Povolotskii、Wilhelm Fischer、Andrii Kurkin、Wilfrid Somogyi、Asel Sagingalieva、Markus Pflitsch 和 Alexey Melnikov。《使用量子算法与混合算法对模拟和物理量子处理单元进行基准测试》。arXiv:2211.15631，2022年。[190] sklearn.datasets.make circles，访问日期：2022年6月17日。[191] David Harrison 和 Daniel Rubinfeld。《享乐型住房价格与清洁空气需求》。Journal of Environmental Economics and Management，5:81–102，1978年3月。[192] Jonathan Krause、Michael Stark、Jia Deng 和 Li Fei-Fei。《用于细粒度分类的三维物体表示》。载于2013 IEEE International Conference on Computer

视觉研讨会，页码554–561，2013年。[193] D. Petz 和 C. Ghinea。《量子费希尔信息导论》。载于 Quantum Probability and Related Topics，第abs/1008.2417卷，页码2011。[194] Jing Liu、Haidong Yuan、卢晓明和王晓光。《量子费希尔信息矩阵与多参数估计》。Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical，53，2019年11月。[195] Mohammad Kordzanganeh、Aydin Utting 和 Anna Scaife。《用于射电天文学的量子机器学习》。arXiv:2112.02655，2021年。[196] 李俊德、Rasit Topaloglu 和 Swaroop Ghosh。《用于小分子药物发现的量子生成模型》。arXiv:2101.03438，2021年。[197] G De las Cuevas、W D¨ur、M Van den Nest 和 M A Martin-Delgado。《用于经典晶格模型的量子算法》。New Journal of Physics，13(9):093021，2011年。[198] Lucas Lamata。《量子机器学习与量子仿生学：一种展望》。Machine Learning: Science and Technology，1(3):033002，2020年。[199] Giacomo Nannicini。《用于组合优化的量子-经典混合变分启发式算法的性能》。Physical Review E，99(1):013304，2019年。[200] Koji Terashi、Michiru Kaneda、Tomoe Kishimoto、Masahiko Saito、Ryu Sawada 和 Junichi Tanaka。《高能物理中的量子机器学习事件分类》。Computing and Software for Big Science，5(1):2，2021年。[201] Wen Guan、Gabriel Perdue、Arthur Pesah、Maria Schuld、Koji Terashi、Sofia Vallecorsa 和 Jean-Roch Vlimant。《高能物理中的量子机器学习》。Machine Learning: Science and Technology，2(1):011003，2021年。[202] Brian Coyle、Maxwell Henderson、Justin Chan Jin Le、Niraj Kumar、Marco Paini 和 Elham Kashefi。《金融领域的量子与经典生成建模》。Quantum Science and Technology，6(2):024013，2021年。[203] Dimitrios Emmanoulopoulos 和 Sofija Dimoska。《金融领域的量子机器学习：时间序列预测》。arXiv:2202.00599，2022年。[204] Marco Pistoia、Syed Farhan Ahmad、Akshay Ajagekar、Alexander Buts、Shouvanik Chakrabarti、Dylan Herman、Shaohan Hu、Andrew Jena、Pierre Minssen、Pradeep Niroula 等。《金融领域的量子机器学习》。arXiv:2109.04298，2021年。[205] X. Gao、Z.-Y. Zhang 和 L.-M. Duan。《一种基于生成模型的量子机器学习算法》。Science Advances，4(12):eaat9004，2018年。[206] Marcello Benedetti、John Realpe-G´omez 和 Alejandro Perdomo-Ortiz。《量子辅助 Helmholtz 机：一种面向近期设备工业数据集的量子-经典深度学习框架》。Quantum Science and Technology，3(3):034007，2018年。[207]Sonika Johri、Shantanu Debnath、Avinash Mocherla、Alexandros Singh、Anupam Prakash、Jungsang Kim 和 Iordanis Kerenidis。《囚禁离子量子计算机上的最近质心分类》。arXiv:2012.04145，2020年。[208] Yuta Shingu、Yuya Seki、Shohei Watabe、Suguru Endo、Yuichiro Matsuzaki、Shiro Kawabata、Tetsuro Nikuni 和 Hideaki Hakoshima。《使用变分量子算法进行玻尔兹曼机学习》。Physical Review A，104(3):032413，2021年。[209] Seth Lloyd 和 Christian Weedbrook。《量子生成对抗学习》。Physical Review Letters，121(4):040502，2018年。[210] Pierre-Luc Dallaire-Demers 和 Nathan Killoran。《量子生成对抗网络》。Physical Review A，98(1):012324，2018年。[211] Marcello Benedetti、Edward Grant、Leonard Wossnig 和 Simone Severini。《用于纯态近似的对抗式量子电路学习》。New Journal of Physics，21(4):043023，2019年。[212] 曾金峰、吴宇峰、Jin-Guo Liu、Lei Wang 和胡江平。《生成对抗量子电路上的学习与推断》。Physical Review A，99(5):052306，2019年。[213] Manuel S Rudolph、Ntwali Bashige Toussaint、Amara Katabarwa、Sonika Johri、Borja Peropadre 和 Alejandro Perdomo-Ortiz。《使用离子阱量子计算机生成高清手写数字》。arXiv:2012.03924，2020年。

[214] Haozhen Situ、Zhimin He、Yuyi Wang、Lvzhou Li 和 Shenggen Zheng。用于生成离散分布的量子生成对抗网络。*Information Sciences*，538:193–208，2020年。[215] Daniel Herr、Benjamin Obert 和 Matthias Rosenkranz。利用变分量子生成对抗网络进行异常检测。*Quantum Science and Technology*，6(4):045004，2021年。[216] He-Liang Huang、Yuxuan Du、Ming Gong、Youwei Zhao、Yulin Wu、Chaoyue Wang、Shaowei Li、Futian Liang、Jin Lin、Yu Xu 等。用于图像生成的实验性量子生成对抗网络。*Physical Review Applied*，16(2):024051，2021年。[217] Samuel A. Stein、Betis Baheri、Daniel Chen、Ying Mao、Qiang Guan、Ang Li、Bo Fang 和 Shuai Xu。QuGAN：基于量子态保真度的生成对抗网络。*2021年IEEE量子计算与工程国际会议*，00:71–81，2021年。[218] Johannes Bausch。循环量子神经网络。载于 H. Larochelle、M. Ranzato、R. Hadsell、M.F. Balcan 和 H. Lin（编），*神经信息处理系统进展*，第33卷，第1368–1379页。Curran Associates, Inc.，2020年。[219] Yuto Takaki、Kosuke Mitarai、Makoto Negoro、Keisuke Fujii 和 Masahiro Kitagawa。利用变分量子循环神经网络学习时间序列数据。*Physical Review A*，103:052414，2021年。[220] Maxwell Henderson、Samriddhi Shakya、Shashindra Pradhan 和 Tristan Cook。量子卷积神经网络：利用量子电路推动图像识别。*arXiv:1904.04767*，2019年。[221] Lee J O'Riordan、Myles Doyle、Fabio Baruffa 和 Venkatesh Kannan。用于自然语言处理的混合经典—量子工作流。《机器学习：科学与技术》，2(1):015011，2020年。[222] Daoyi Dong、Chunlin Chen、Hanxiong Li 和 Tzyh-Jong Tarn。量子强化学习。*IEEE Transactions on Systems, Man,and Cybernetics,Part B (Cybernetics)*，38(5):1207–1220，2008年。[223] Ji-An Li、Daoyi Dong、Zhengde Wei、Ying Liu、Yu Pan、Franco Nori 和 Xiaochu Zhang。人类决策过程中的量子强化学习。*Nature HumanBehaviour*，01 2020年。[224] Lucas Lamata。利用量子光子学进行量子强化学习。光子学，8:33，01 2021年。[225] D. Nagy、Z. Tabi、P. Haga、Z. Kallus 和 Z. Zimboras。在 OpenAI Gym 中进行光子量子策略学习。第123–129页，2021年10月。[226] Amir Khoshaman、Walter Vinci、Brandon Denis、Evgeny Andriyash、Hossein Sadeghi 和 Mohammad H Amin。量子变分自编码器。*Quantum Science andTechnology*，4(1):014001，2019年。[227] Dorit Aharonov 和 Amnon Ta-Shma。绝热量子态生成与统计零知识。*arXiv:quant-ph/0301023*，quant-ph/0301023，2003年。[228] Dominic W. Berry、Graeme Ahokas、Richard Cleve 和 Barry C. Sanders。用于模拟稀疏哈密顿量的高效量子算法。*Communications in Mathe-matical Physics*，270(2):359–371，2007年。[229] Sarah K Leyton 和 Tobias J Osborne。一种求解非线性微分方程的量子算法。*arXiv:0812.4423*，2008年。[230] Dominic W Berry。求解线性微分方程的高阶量子算法。*Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*，47(10):105301，2014年。[231] Dominic W. Berry、Andrew M. Childs、Aaron Ostrander 和 Guoming Wang。一种求解线性微分方程的量子算法，其精确率依赖性获得指数级改进。*Communications in Mathematical Physics*，356(3):1057–1081，2017年。[232] Bobak T Kiani、Giacomo De Palma、Dirk Englund、William Kaminsky、Milad Marvian 和 Seth Lloyd。微分方程分析中的量子优势。*arXiv:2010.15776*，2020年。

[233] Andrew MacGregor Childs。博士论文：连续时间量子信息处理 Andrew MacGregor Childs。麻省理工学院，[234] David Shmoys、Dominic W Berry、Andrew M Childs、Richard Cleve、Robin Kothari 和 Rolando D Somma。模拟稀疏哈密顿量时精确率的指数级改进。第四十六届 ACM计算理论研讨会论文集，第283–292页，2014年。[235] Seth Lloyd、Giacomo De Palma、Can Gokler、Bobak Kiani、Zi-Wen Liu、Milad Marvian、Felix Tennie 和 Tim Palmer。非线性微分方程量子算法。arXiv:2011.06571，2020年。[236] Stanley Zionts、Peter L. Hammer (Ivanescu) 和 Sergiu Rudeanu。运筹学及相关领域中的布尔方法。计量经济学，40:777，1972年7月。[237] D. J. Laughhunn。应用于资本预算问题的二次二元规划。运筹学，18:454–461，1970年6月。[238] L. W. McKeehan。对铁磁性理论的贡献。物理评论，26:274–279，1925年。[239] Troels F. Rønnow、Zhihui Wang、Joshua Job、Sergio Boixo、Sergei V. Isakov、David Wecker、John M. Martinis、Daniel A. Lidar 和 Matthias Troyer。量子加速的定义与检测。《科学》，345(6195):420–424，2014年。[240] Michael Booth、Jesse Berwald、Uchenna Chukwu、John Dawson、Raouf Dridi、DeYung Le、Mark Wainger 和 Steven P. Reinhardt。Qci qbsolv 为量子就绪建模带来强大的经典性能。arXiv:2005.11294，2020年。[241] Xin Wang。通过量子比特旋转算法高效求解最大割问题。arXiv:2110.08016，2021年。[242] Issei Sato、Kenichi Kurihara、Shu Tanaka、Hiroshi Nakagawa 和 Seiji Miyashita。用于变分贝叶斯推断的量子退火。arXiv:1408.2037，2014年。[243] B. O'Gorman、R. Babbush、A. Perdomo-Ortiz、A. Aspuru-Guzik 和 V. Smelyanskiy。利用量子退火进行贝叶斯网络结构学习。欧洲物理学期刊专题，224(1):163–188，2015年。[244] Max Wilson、Thomas Vandal、Tad Hogg 和 Eleanor G. Rieffel。量子辅助联想对抗网络：在深度学习中应用量子退火。Quantum Machine Intelligence，3(1):19，2021年。[245] Fernando Hern´andez、Kenny D´ıaz、Marcelo Forets 和 Rafael Sotelo。将量子优化技术（QUBO方法）应用于船舶和飞机货物物流。载于2020年IEEE阿根廷双年会（ARGENCON），第1–1页，2020年。[246] Joachim Lambek。句子结构的数学。美国数学月刊，65:154，1958年3月。[247] Robin Lorenz、Anna Pearson、Konstantinos Meichanetzidis、Dimitri Kartsaklis 和 Bob Coecke。实践中的量子自然语言处理：在量子计算机上运行意义组合模型。arXiv:2102.12846，2021年。[248]Konstantinos Meichanetzidis、Alexis Toumi、Giovanni de Felice 和 Bob Coecke。量子计算机上的语法感知问答。arXiv:2012.03756，2020年。[249] Bob Coecke、Giovanni de Felice、Konstantinos Meichanetzidis 和 Alexis Toumi。近期量子自然语言处理的基础。arXiv:2012.03755，2020年。[250] Richi Yeung、Ian Fan 和 Charlie London。lambeq，2022年6月。[251]Lov K. Grover。一种快速的量子力学数据库搜索算法。arXiv:9605043，1996年。[252] Yunchao Liu、Srinivasan Arunachalam 和 Kristan Temme。监督学习中严谨且稳健的量子加速。《自然·物理》，17:1–5，2021年7月。[253] Rocco A. Servedio 和 Steven J. Gortler。量子可学习性与经典可学习性的等价和差异。SIAM计算期刊，33(5):1067–1092，2004年。[254] Diego Rist`e、Marcus P. da Silva、Colm A. Ryan、Andrew W. Cross、Antonio D. C´orcoles、John A. Smolin、Jay M. Gambetta、Jerry M. Chow 和 Blake R. Johnson。量子机器学习优势的展示。npj Quantum Information，3(1):16，2017年。

[255] Sergio Boixo、Sergei V. Isakov、Vadim N. Smelyanskiy、Ryan Babbush、Nan Ding、Zhang Jiang、Michael J. Bremner、John M. Martinis 和 Hartmut Neven。《近期设备中的量子霸权表征》。《自然·物理》，14(6):595–600，2018年。[256] Maria Schuld 和 Nathan Killoran。量子优势是量子机器学习的恰当目标吗？arXiv:2203.01340，2022年。[257] Mahdi Chehimi 和 Walid Saad。基于量子数据的量子联邦学习。ICASSP 2022 - 2022 IEEE声学、语音与信号处理国际会议（ICASSP），第8617–8621页，2022年。[258] Yu-Bo Sheng 和 Lan Zhou。分布式安全量子机器学习。《科学通报》，62(14):1025–1029，2017年。[259] Marin Bukov、Alexandre G. R. Day、Dries Sels、Phillip Weinberg、Anatoli Polkovnikov 和 Pankaj Mehta。量子控制不同阶段中的强化学习。Phys. Rev. X，8:031086，2018年。[260] Han Xu、Junning Li、Liqiang Liu、Yu Wang、Haidong Yuan 和 Xin Wang。通过强化学习实现可泛化的量子参数估计控制。《npj量子信息》，5(1):82，2019年。[261] I. A. Luchnikov、S. V. Vintskevich、D. A. Grigoriev 和 S. N. Filippov。利用机器学习研究非马尔可夫量子动力学。《物理评论快报》，124:140502，2020年。[262] Frank Sch¨afer、Michal Kloc、Christoph Bruder 和 Niels L¨orch。一种用于量子控制的可微编程方法。《机器学习：科学与技术》，1(3):035009，2020年。[263] Markus Tiersch、Emanuel J. Ganahl 和 Hans J. Briegel。利用投影模拟在变化环境中进行自适应量子计算。《科学报告》，5:12874，2015年。[264] Ryan Sweke、Markus S Kesselring、Evert PL van Nieuwenburg 和 Jens Eisert。用于容错量子计算的强化学习解码器。《机器学习：科学与技术》，2(2):025005，2020年。[265] Agnes Valenti、Evert van Nieuwenburg、Sebastian Huber 和 Eliska Greplova。用于量子纠错的哈密顿量学习。《物理评论研究》，1:033092，2019年。[266] Genyue Liu、Mo Chen、Yi-Xiang Liu、David Layden 和 Paola Cappellaro。机器学习增强的重复读出。《机器学习：科学与技术》，1(1):015003，2020年。[267] Shang Yu、Francisco Albarr´an-Arriagada、Juan Carlos Retamal、Yi-Tao Wang、Wei Liu、Zhi-Jin Ke、Yu Meng、Zhi-Peng Li、Jian-Shun Tang、Enrique Solano 等。利用强化学习重建光子量子比特态。《先进量子技术》，2(7-8):1800074，2019年。[268] Giacomo Torlai、Brian Timar、Evert P. L. van Nieuwenburg、Harry Levine、Ahmed Omran、Alexander Keesling、Hannes Bernien、Markus Greiner、Vladan Vuleti´c、Mikhail D. Lukin 等。将神经网络与量子模拟器相结合以重建量子态。《物理评论快报》，123:230504，2019年。[269] Adriano Macarone Palmieri、Egor Kovlakov、Federico Bianchi、Dmitry Yudin、Stanislav Straupe、Jacob D. Biamonte 和 Sergei Kulik。实验中利用神经网络增强量子层析。《npj量子信息》，6(1):20，2020年。[270] Yongcheng Ding、Jos´e D. Mart´ın-Guerrero、Mikel Sanz、Rafael Magdalena-Benedicto、Xi Chen 和 Enrique Solano。利用主动学习获取量子信息。《物理评论快报》，124:140504，2020年。[271] Giuseppe Carleo 和 Matthias Troyer。利用人工神经网络求解量子多体问题。《科学》，355(6325):602–606，2017年。[272] Xun Gao 和 Lu-Ming Duan。利用深度神经网络高效表示量子多体态。《自然·通讯》，8(1):662，2017年。[273] Iris Agresti、Niko Viggianiello、Fulvio Flamini、Nicol`o Spagnolo、Andrea Crespi、Roberto Osellame、Nathan Wiebe 和 Fabio Sciarrino。用于玻色子采样验证的模式识别技术。Phys. Rev. X，9:011013，2019年。[274] A. Einstein、B. Podolsky 和 N. Rosen。量子力学对物理实在的描述能否被认为是完备的？物理评论，47:777–780，1935年。[275] Pavel Sekatski、Jean-Daniel Bancal、Xavier Valcarce、Ernest Y.-Z. Tan、Renato Renner 和 Nicolas Sangouard。基于广义

CHSH不等式的设备无关量子密钥分发。Quantum，5:444，2021年。[276] Askery Canabarro、Samura´ı Brito 和 Rafael Chaves。机器学习与非局域关联。《物理评论快报》，122:200401，2019年。[277] Alexey A. Melnikov、Pavel Sekatski 和 Nicolas Sangouard。利用强化学习设计贝尔测试实验。《物理评论快报》，125:160401，2020年。[278] Xavier Valcarce、Pavel Sekastki、Elie Gouzien、Alexey Melnikov、Jea n-Daniel Bancal 和 Nicolas Sangouard。为设备无关量子密钥分发自动化设计量子光学实验。arXiv:2209.06468，2022年。[279] Hans J. Briegel 和 Gemma De las Cuevas。面向人工智能的投影模拟。《科学报告》，2:400，2012年。[280] Julian Mautner、Adi Makmal、Daniel Manzano、Markus Tiersch 和 Hans J. Briegel。面向经典学习智能体的投影模拟：全面研究。《新一代计算》，33(1):69–114，2015年。[281] Adi Makmal、Alexey A. Melnikov、Vedran Dunjko 和 Hans J. Briegel。投影模拟中的元学习。《I EEE Access》，4:2110–2122，2016年。[282] Alexey A. Melnikov、Adi Makmal、Vedran Dunjko 和 Hans J. Briegel。具备泛化能力的投影模拟。《科学报告》，7:14430，2017年。[283] Alexey A Melnikov、Adi Makmal 和 Hans J Briegel。导航问题中的投影模拟基准测试。《IEEE Access》，6:64639–64648，2018年。[284]投影模拟GitHub代码库。github.com/qic-ibk/ projectivesimulation。访问日期：2022-04-05。[285] Lukasz Cincio、Yi˘git Suba¸sı、Andrew T Sornborger 和 Patrick J Coles。学习用于计算态重叠的量子算法。《新物理学杂志》，20(11):113022，2018年。[286] Julius Walln¨ofer、Alexey A. Melnikov、Wolfgang D¨ur 和 Hans J. Briegel。用于远距离量子通信的机器学习。PRX Quantum，1:010301，2020年。[287] Chenfeng Cao、Zheng An、Shi-Yao Hou、D. L. Zhou 和 Bei Zeng。由强化学习引导的量子虚时间演化。《通讯物理》，5，2022年03月。[288] B. Giese、J. Amaudrut、A.-K. K¨ohler、M. Spormann 和 S. Wessely。直接观察到DNA中的空穴转移：通过腺嘌呤碱基间跳跃和隧穿实现。《自然》，412:318–320，2001年。[289] H. Lee、Y.-C. Cheng 和 G. R. Fleming。光合作用中的相干动力学：蛋白质对激子相干性的保护。《科学》，316:1462–1465，2007年。[290] E. Farhi 和 S. Gutmann。量子计算与决策树。Physical Review A，58:1462–1465，1998 年。[291] Mark Kac。随机游走与布朗运动理论。《美国数学月刊》，54(7P1):369–391，1947年。[292] M. Gr¨afe、R. Heilmann、M. Lebugle、D. Guzman-Silva、A. Perez-Leija 和 A. Szameit。集成光子量子游走。《光学杂志》，18:103002，2018年。[293] Rajeev Motwani 和 Prabhakar Raghavan。《随机算法》。剑桥大学出版社，纽约，美国，1995年。[294] L Grady。用于图像分割的随机游走。《IEEE模式分析与机器智能汇刊》，28(11):1768–1783，2006年。[295] C. Gkantsidis 和 A. Milena, M.and Saberi。对等网络中的随机游走：算法与评估。《性能评估》，63(3):241–263，2006年。[296] Y. Aharonov、L. Davidovich 和 N. Zagury。量子随机游走。Physical Review A，48:1687–1690，1993年。[297]J. Kempe。量子随机游走：入门综述。《当代物理学》，44(4):307–327，2003年。[298] Y. Bromberg、Y. Lahini、R. Morandotti 和 Y. Silberberg。波导晶格中的量子与经典关联。《物理评论快报》，102:253904，2009年。[299] Andris Ambainis、Eric Bach、Ashwin Nayak、Ashvin Vishwanath 和 John Watrous。一维量子游走。载于《第33届ACM年度计算理论研讨会论文集》，STOC ’01，第37–49页，纽约，美国，2001年。ACM。[300] Dmitry Solenov 和 Leonid Fedichkin。环图上的连续时间量子游走。

物理评论 A，73:012313，2006年。[301] Alexey A Melnikov 和 Leonid E Fedichkin。环图上相互作用费米子的量子漫步。《科学报告》，6(1):1–13，2016年。[302] Julia Kempe。离散量子漫步的命中速度快几个数量级。《概率论及其相关领域》，133(2):215–235，2005年。[303] Hari Krovi 和 Todd A. Brun。超立方体上量子漫步的命中时间。Physical Review A，73:032341，2006年。[304] Andrew M. Childs、Richard Cleve、Enrico Deotto、Edward Farhi、Sam Gutmann 和 Daniel A. Spielman。量子漫步带来的指数级算法加速。载于第35届年度ACM计算理论研讨会论文集，STOC '03，第59–68页，纽约，美国，2003年。ACM。[305] Andris Ambainis。量子漫步及其算法应用。《国际量子信息杂志》，(4):507–518，2003年。[306] Salvador Elias Venegas-Andraca。《面向计算机科学家的量子漫步》，《量子计算综合讲座》第1卷。Morgan & Claypool出版社，2008年。[307] Renato Portugal。《量子漫步与搜索算法》。施普林格，2013年。[308] Giuseppe Davide Paparo、Vedran Dunjko、Adi Makmal、Miguel Angel Martin-Delgado 和 Hans J. Briegel。主动学习智能体的量子加速。Phys. Rev. X，4:031002，2014年。[309] Shantanav Chakraborty、Leonardo Novo、Andris Ambainis 和 Yasser Omar。量子漫步空间搜索对几乎所有图都是最优的。《物理评论快报》，116:100501，2016年。[310] Alexey A. Melnikov、Aleksandr P. Alodjants 和 Leonid E. Fedichkin。全同粒子的量子漫步命中时间。载于SPIE会议录，《2018年微纳电子国际会议》，第11022卷，第110222J页，2019年。[311] A. Kryukov、R. Abramov、L.E. Fedichkin、A. Alodjants 和 A.A. Melnikov。手性量子漫步的监督式图分类。Physical Review A，105:022208，2022年。[312] Alexey A Melnikov、Leonid E Fedichkin 和 Alexander Alodjants。量子漫步命中时间分类器的训练。载于AIP会议录，第2241卷，第020029页。AIP出版有限责任公司，2020年。[313] Alexey A Melnikov、Leonid E Fedichkin、Ray-Kuang Lee 和 Alexander Alodjants。对复杂网络中传输效率进行分类的深度神经网络。载于2020年光电子与通信会议（OECC），第1–3页。IEEE，2020年。[314] D. Manzano。Lindblad主方程简介。《AIP进展》，10:025106，2020年。[315] A. L. Larkin 和 Yu. N. Ovchinnikov。耗散系统中的量子隧穿。《JETP快报》，37(7):382–385，1983年。[316] Hermann Grabert、Ulrich Weiss 和 Peter Hanggi。有限温度下耗散系统中的量子隧穿。《物理评论快报》，52:2193–2196，1984年。[317] M. E. Lebedev、D. A. Dolinina、Kuo-Bin Hong、Tien-Chang Lu、A. V. Kavokin 和 A. P. Alodjants。有限温度下的激子-极化激元约瑟夫森结。《科学报告》，7:9515，2017年。[318] Z. Hradil。量子态估计。Physical Review A，55:R1561–R1564，1997年。[319] J. ˇReh´aˇcek、Z. Hradil 和 M. Jeˇzek。纠缠态重构的迭代算法。Physical Review A，63:040303，2001年。[320] Daniel F. V. James、Paul G. Kwiat、William J. Munro 和 Andrew G. White。量子比特的测量。Physical Review A，64:052312，2001年。[321] Robin Blume-Kohout。量子态的最优可靠估计。《新物理学杂志》，12(4):043034，2010年。[322] Miroslav Jeˇzek、Jarom´ır Fiur´aˇsek 和 Zden ˇek Hradil。量子态与过程的推断。Physical Review A，68:012305，2003年。[323] Ulf Leonhardt。采用等间距参考角的量子与经典层析。《现代光学杂志》，44(11-12):2271–2280，1997年。[324] A. I. Lvovsky 和 M. G. Raymer。连续变量光学量子态层析：

《现代物理评论》，81:299–332，2009年。[325] Juan Carrasquilla 和 Giacomo Torlai。如何利用神经网络研究量子多体物理。PRX Quantum，2:040201，2021年。[326] A I Lvovsky。量子同频层析中的迭代最大似然重构。《光学杂志B：量子与半经典光学》，6(6):S556–S559，2004年。[327] John A. Smolin、Jay M. Gambetta 和 Graeme Smith。利用加性高斯噪声测量，高效计算量子态最大似然估计的方法。《物理评论快报》，108:070502，2012年。[328] Christopher Granade、Christopher Ferrie 和 Steven T Flammia。实用的自适应量子层析。《新物理学杂志》，19(11):113017，2017年。[329] G. T´oth、W. Wieczorek、D. Gross、R. Krischek、C. Schwemmer 和 H. Weinfurter。置换不变量子层析。《物理评论快报》，105:250403，2010年。[330] Steven T Flammia、David Gross、Yi-Kai Liu 和 Jens Eisert。基于压缩感知的量子层析：误差界、样本复杂度与高效估计量。《新物理学杂志》，14(9):095022，2012年。[331] David Gross、Yi-Kai Liu、Steven T. Flammia、Stephen Becker 和 Jens Eisert。基于压缩感知的量子态层析。《物理评论快报》，105:150401，2010年。[332] A. Shabani、R. L. Kosut、M. Mohseni、H. Rabitz、M. A. Broome、M. P. Almeida、A. Fedrizzi 和 A. G. White。利用压缩感知高效测量量子动力学。《物理评论快报》，106:100401，2011年。[333] C. A. Riofr´ıo、D. Gross、S. T. Flammia、T. Monz、D. Nigg、R. Blatt 和 J. Eisert。七量子比特系统的实验性量子压缩感知。《自然·通讯》，8:15305，2017年。[334] Marcus Cramer、Martin B. Plenio、Steven T. Flammia、Rolando Somma、David Gross、Stephen D. Bartlett、Olivier Landon-Cardinal、David Poulin 和 Yi-Kai Liu。高效量子态层析。《自然·通讯》，1:149，2010年。[335] B. P. Lanyon、C. Maier、M. Holz¨apfel、T. Baumgratz、P. Hempel、C. and. Jurcevic、I. Dhand、A. S. Buyskikh、A. J. Daley、M. Cramer、M. B. Plenio 等。量子多体系统的高效层析。《自然·物理》，13:1158，2017年。[336] Juan Carrasquilla、Giacomo Torlai、Roger G. Melko 和 Leandro Aolita。利用生成模型重构量子态。自然·机器智能，1(3):155–161，2019年。[337] Tao Xin、Sirui Lu、Ningping Cao、Galit Anikeeva、Dawei Lu、Jun Li、Guilu Long 和 Bei Zeng。基于局部测量的量子态层析：神经网络方法。npj Quantum Information，5:109，2019年。[338] Andrea Rocchetto、Edward Grant、Sergii Strelchuk、Giuseppe Carleo 和 Simone Sev- erini。利用变分自编码器学习难以处理的量子分布。npj Quantum Information，4:28，2018年。[339] E. S. Tiunov、V. V. Tiunova、A. E. Ulanov、A. I. Lvovsky 和 A. K. Fedorov。基于机器学习的实验性量子同频层析。Optica，7(5):448–454，2020年。[340] Nicolas Le Roux 和 Yoshua Bengio。受限玻尔兹曼机与深度信念网络的表征能力。神经计算，20(6):1631–1649，2008年。[341] David H. Ackley、Geoffrey E. Hinton 和 Terrence J. Sejnowski。玻尔兹曼机的一种学习算法*。《认知科学》，9(1):147–169，1985年。[342] Dan Sehayek、Anna Golubeva、Michael S. Albergo、Bohdan Kulchytskyy、Giacomo Tor- lai 和 Roger G. Melko。量子态的可学习性标度：受限玻尔兹曼机。物理评论B，100:195125，2019 年。[343] Sanjaya Lohani 、 Thomas A. Searles 、 Brian T. Kirby 和 Ryan T. Glasser。关于通过机器学习进行量子态重构的实验可行性。IEEE 量子工程汇刊，2:1–10，2021年。[344] Abhijeet Melkani、Clemens Gneiting 和 Franco Nori。利用神经网络层析提取本征态。Physical Review A，102:022412，2020年。[345] Hsien-Yi Hsieh、Yi-Ru Chen、Hsun-Chung Wu、Hua Li Chen、Jingyu Ning、Yao-Chin

Huang、Chien-Ming Wu 和 Ray-Kuang Lee。利用机器学习提取压缩态中的退化信息。《物理评论快报》，128:073604，2022年。[346] Alex Krizhevsky、Ilya Sutskever 和 Geoffrey E. Hinton。利用深度卷积神经网络进行 ImageNet 分类。《美国计算机学会通讯》，60(6):84–90，2017年。[347] Kaiming He、Xiangyu Zhang、Shaoqing Ren 和 Jian Sun。用于图像识别的深度残差学习。载于：2016年 IEEE 计算机视觉与模式识别会议（CVPR）论文集，第 770–778 页，2016年。[348] Hsien-Yi Hsieh、Jingyu Ning、Yi-Ru Chen、Hsun-Chung Wu、Hua Li Chen、Chien-Ming Wu 和 Ray-Kuang Lee。基于机器学习增强的量子态层析直接进行参数估计。《Symmetry》，14(5)，2022年。[349] Xiaoqian Zhang、Maolin Luo、Zhaodi Wen、Qin Feng、Shengshi Pang、Weiqi Luo 和 Xiaoqi Zhou。利用机器学习直接估计量子态保真度。《物理评论快报》，127:130503，2021年。[350] Onur Danaci、Sanjaya Lohani、Brian T Kirby 和 Ryan T Glasser。基于不完整测量进行量子态估计的机器学习流程。《机器学习：科学与技术》，2(3):035014，2021年。[351] Serge Haroche。诺贝尔演讲：控制盒中光子，探索量子到经典的边界。《现代物理评论》，85:1083–1102，2013年。[352]David J. Wineland。诺贝尔演讲：叠加、纠缠与薛定谔的猫。《现代物理评论》，85:1103–1114，2013年。[353] Daniel Gottesman、Alexei Kitaev 和 John Preskill。在振子中编码量子比特。Physical Review A，64:012310，2001年。[354] Shahnawaz Ahmed、Carlos S´anchez Mu˜noz、Franco Nori 和 Anton Frisk Kockum。利用条件生成对抗网络进行量子态层析。《物理评论快报》，127:140502，2021年。[355] Shahnawaz Ahmed、Carlos S´anchez Mu˜noz、Franco Nori 和 Anton Frisk Kockum。利用深度神经网络对光学量子态进行分类与重构。《物理评论研究》，3:033278，2021年。[356] Yihui Quek、Stanislav Fort 和 Hui Khoon Ng。利用神经网络进行自适应量子态层析。npj Quantum Information，7:105，2021年。[357] Kouhei Nakaji 和 Naoki Yamamoto。用于增强数据分类的量子半监督生成对抗网络。《科学报告》，11:19649，2021年。[358] Tobias Haug、Wai-Keong Mok、Jia-Bin You、Wenzu Z hang、Ching Eng Png 和 Leong-Chuan Kwek。通过深度强化学习对全局态制备进行分类。《机器学习：科学与技术》，2(1):01LT02，2020年。[359] Dominik Koutn´y、Libor Motka、Zden ˇek Hradil、Jaroslav ˇReh´aˇcek 和 Luis L. S´anchez- Soto。神经网络量子态层析。Physical Review A，106:012409，2022年。[360] Peter Cha、Paul Ginsparg、Felix Wu、Juan Carrasquilla、Peter L McMahon 和 Eun-Ah Kim。基于注意力的量子层析。《机器学习：科学与技术》，3(1):01LT01，2021年。[361] Yong Siah Teo、Seongwook Shin、Hyunseok Jeong、Yosep Kim、Yoon-Ho Kim、Gleb I Struchalin、Egor V Kovlakov、Stanislav S Straupe、Sergei P Kulik、Gerd Leuchs 等。利用机器学习对量子层析完备性和保真度进行基准测试。《新物理学杂志》，23(10):103021，2021年。[362] Nir Navon、Nitzan Akerman、Shlomi Kotler、Yinnon Glickman 和 Roee Ozeri。对 Mølmer–Sørensen 相互作用进行量子过程层析。Physical Review A，90:010103，2014年。[363] Maki Takahashi、Stephen D. Bartlett 和 Andrew C. Doherty。双量子点中自旋量子比特的层析。Physical Review A，88:022120，2013年。[364] J. L. O’Brien、G. J. Pryde、A. Gilchrist、D. F. V. James、N. K. Langford、T. C. Ralph 和 A. G. White。对受控非门进行量子过程层析。《物理评论快报》，93:080502，2004年。[365] Chen-Di Han、Bryan Glaz、Mulugeta Haile 和 Ying-Cheng Lai。利用机器学习对随时间变化的量子哈密顿量进行层析。Physical Review A，104:062404，

2021年。[366] Yannick Deville 和 Alain Deville。无监督量子机器学习问题的新型单次制备方法。IEEE 量子工程汇刊，2:1–24，2021年。[367] Han-Sen Zhong、Hui Wang、Yu-Hao Deng、Ming-Cheng Chen、Li-Chao Peng、Yi-Han Luo、Jian Qin、Dian Wu、Xing Ding、Yi Hu 等。利用光子实现量子计算优势。《科学》，370(6523):1460–1463，2020年。[368] Han-Sen Zhong、Yu-Hao Deng、Jian Qin、Hui Wang、Ming-Cheng Chen、Li-Chao Peng、Yi-Han Luo、Dian Wu、Si-Qiu Gong、Hao Su 等。利用受激压缩光进行相位可编程高斯玻色采样。《物理评论快报》，127:180502，2021年。[369] Scott Aaronson 和 Alex Arkhipov。线性光学的计算复杂度。载于：第四十三届 ACM计算理论研讨会论文集（STOC '11），第 333–342 页，美国纽约州纽约，2011年。计算机协会。[370] J. Wang、F. Sciarrino、A. Laing 和 M. G. Thompson。集成光子量子技术。《自然·光子学》，14:273–284，2020年。[371] A.W. Elshaari、W. Pernice、K. Srinivasan、O. Benson 和 V. Zwiller。混合集成量子光子电路。《自然·光子学》，14:285–298，2020年。[372] Duan B.、Wu B.、Chen J.-h.、Chen H. 和 Yang D.-Q.。光子设计与分析的深度学习：原理与应用。《Front. Mater.》，8:791296，2022年1月。[373] Xiubao Sui、Qiuhao Wu、Ji a Liu、Qian Chen 和 Guohua Gu。光学神经网络综述。《IEEE Access》，8:70773–70783，2020年。[374] Wei Ma、Feng Cheng、Yihao Xu、Qinlong Wen 和 Yongmin Liu。基于半监督学习策略的深度生成模型对超材料进行概率表示与逆向设计。《Advanced Materials》，31(35):1901111，2019年。[375] Antonio Manzalini。量子光学中的复杂深度学习。《Quantum Reports》，1(1):107–118，2019年。[376] Ulysse Chabaud、Damian Markham 和 Adel Sohbi。利用自适应线性光学进行量子机器学习。《Quantum》，5:496，2021年。[377] Christian Reimer、Michael Kues、Piotr Roztocki、Benjamin Wetzel、Fabio Grazioso、Brent E Little、Sai T Chu、Tudor Johnston、Yaron Bromberg、Lucia Caspani 等。利用集成频率梳生成多光子纠缠量子态。《科学》，351(6278):1176–1180，2016年。[378] Michael Kues、Christian Reimer、Piotr Roztocki、Luis Romero Cort´es、Stefania Sciara、Benjamin Wetzel、Yanbing Zhang、Alfonso Cino、Sai T Chu、Brent E Little 等。芯片上高维纠缠量子态的生成及其相干控制。《自然》，546:622–626，2017年。[379] M. Kues、C. Reimer、J.M. Lukens、W.J. Munro、A.M. Weiner、D.J. Moss 和 R. Moran- dotti。量子光学微梳。《自然·光子学》，13:170，2019年。[380] Z. Yang、M. Jahanbozorgi、D. Jeong、S. Sun、O. Pfister、H. Lee 和 X. Yi。芯片上的压缩量子微梳。《自然·通讯》，12:4781，2021年。[381] M. A. Guidry、D. M. Lukin、K. Y. Yang、R. Trivedi 和 J. Vu˘ckovi´c。孤子微梳量子光学。《自然·光子学》，16:52，2022年。[382] Warit Asavanant、Yu Shiozawa、Shota Yokoyama、Baramee Charoensombutamon、Hiroki Emura、Rafael N Alexander、Shuntaro Takeda、Jun-ichi Yoshikawa、Nicolas C Menicucci、Hidehiro Yonezawa 等。时域复用二维簇态的生成。《科学》，366(6463):373–376，2019年。[383] Mikkel V. Larsen、Xueshi Guo、Casper R. Breum、Jonas S. Neergaard-Nielsen 和 Ulrik L. Andersen。确定性生成二维簇态。《科学》，366(6463):369–372，2019年。[384] Zhaxylyk A. Kudyshev、Vladimir M. Shalaev 和 Alexandra Boltasseva。集成量子光子学中的机器学习。《ACS Photonics》，8(1):34–46，2021年。[385] Mario Krenn、Jakob S. Kottmann、Nora Tischler 和 Al´an Aspuru-Guzik。通过高效的量子光学实验自动化设计实现概念理解。Phys. Rev. X，11:031044，2021年。

[386] G. R. Steinbrecher、J. P. Olson、D. Englund 和 J. Carolan。量子光学神经网络。*npj Quantum Information*，5:60，2019年。