arXiv:2301.01866v1 [math.RT] 5 Jan 2023

有理舒尔超代数

Andrew Riesen

2023年1月6日

摘要

我们发展并研究了有理舒尔代数在超情形下的推广。与经典情形类似，这为研究一般线性超群 $GL(m|n)$ 的有理超模提供了一种新方法。此外，我们为有理 Schur 超代数建立了一个舒尔-韦伊尔对偶结果，并得出结论：在某些条件下，这些对象将是半单的。

1 引言

20世纪80年代，Green 证明了，要理解复数域 $GL(n)$ 上的多项式表示，与理解舒尔代数 [5] 的表示论密切相关。更确切地说，他证明了，复数域 $\mathbb{C}$ 上 $GL(n)$ 的任意有限维多项式表示都可以分解为齐次表示，而这类次数为 r 的齐次表示范畴等价于舒尔代数 $S(n,r)$ 的模范畴。在 [4], , Dotty 和 Dipper 提出了舒尔代数的一种推广，称为有理舒尔代数。这类代数定义在特征任意的域 k 上，并且证明了它们与 $GL(n)$ 的有理表示之间存在类似的联系。理解（有理）舒尔代数结构的关键，是证明三种定义等价。例如，舒尔代数 $S(n,r)$ 定义为 $GL(n)$ 上次数为 r 的齐次多项式的对偶。它同构于对称群 S_r 在 $(k^n)^{\otimes r}$ 上作用的中心化子，也同构于像 $\rho_r(U(\mathfrak{gl}(n)))$；其中 ρ_r 表示 $\mathfrak{gl}(n)$ 在 $(k^n)^{\otimes r}$ 上的典范表示。有理舒尔代数的相应定义也彼此等价。本文将有理舒尔代数与一般线性群之间的联系加以推广，并证明在超数学背景下，相应的定义也具有类似的等价性。

超数学最早于20世纪80年代开始受到研究，其源于物理学中超对称性所需的数学框架。现代数学一直致力于将表示论中的思想拓展到超情形，并研究相关性质如何变化或保持不变。我们延续这一研究主题，探讨超情形下的有理舒尔代数，并将其称为有理舒尔超代数。 [11]中也研究了类似的概念。

令 $m,n \geq 0$。一般线性群的超类比称为一般线性超群，记作 $GL(m|n)$。与经典情形不同，$GL(m|n)$ 只能描述为一种特殊的可表函子。此外，经典情形中成立的性质在超情形下可能失效，例如完全可约性。因此，一般线性超群的表示论更难理解。尽管仍可以考虑 $GL(m|n)$ 的多项式表示和有理表示的超类比，但与经典情形不同，并非所有有理

表示都能仅由多项式表示得到。这是因为行列式的超类比——Berezinian——并非 $GL(m|n)$ 上的多项式函数。因此，在超情形下，将有限维有理表示与行列式表示的高次幂作张量积这一经典论证，将不再产生多项式表示。基于此，我们认为，理解有理舒尔代数的超类比，将为研究 $GL(m|n)$ 的有理表示提供重要工具。

本文结构如下。首先，我们回顾超数学中的概念与定义。接着，我们引入一个超双代数 $\mathcal{A}(m|n)$，它在经典情形中将发挥多项式环 $k[x_{i,j}: 1 \leq i,j \leq n]$ 的作用，并研究其结构。由此超双代数，我们得到有理 Schur 超代数，引入其超模范畴，并阐明它们与一般线性超群表示之间的联系。本文其余部分致力于证明有理 Schur 超代数的一个半单性结果，以及三种定义的等价性。为解决这一问题，我们将证明 $\mathcal{A}(m|n)$ 与 $GL(m|n)$ 上正则函数构成的霍普夫超代数之间存在霍普夫超代数同构；该超代数由 Scheunnert 和 Zhang 在 [14] 中引入。借助这一同构，我们进而证明在某些条件下，定义之间的等价性以及有理 Schur 超代数的半单性。

在后续工作中，我们希望将本文的结果推广到所有固定 (m,n) 的有理舒尔超代数，这与舒尔超代数领域已经取得的成果类似。结合定理 3.1 与第 3.3 节中的评述，这应能为理解 $GL(m|n)$的表示论提供一种新方法。

2 预备知识

首先，回顾一下，域 k 上的超空间 V 是带有 $\mathbb{Z}/2$分次的 k-向量空间。也就是说，$V = V_0 \oplus V_1$，其中 V_0 中的元素称为偶元素，而 V_1 中的元素称为奇元素。若$x \in V_0$ 或 $x \in V_1$，则称其为齐次，其奇偶性定义为

$$|x| = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in V_0 \\ 1 & \text{if } x \in V_1 \end{cases}$$

若 V是有限维超空间，且 $\dim(V_0) = m$、$\dim(V_1) = n$，则称其超维数为 $(m|n)$。例如，标准的 $(m|n)$-维超空间 $k^{m|n}$定义为 $k^m \oplus k^n$。

超空间 V和 W 之间的态射是一个 k-线性映射 ϕ: $V \to W$，满足 $\phi(V_i) \subseteq W_i$，其中 $i = 0, 1$。此类态射称为偶线性映射。

给定超空间 V和 W，我们可以通过将偶分量和奇分量定义为以下形式，为它们的张量积 $V \otimes_k W$ 赋予超空间结构

$$(V \otimes_k W)_0 = (V_0 \otimes_k W_0) \oplus (V_1 \otimes_k W_1)$$

$$(V \otimes_k W)_1 = (V_0 \otimes_k W_1) \oplus (V_1 \otimes_k W_0)$$

于是，结合 k-超代数是一个超空间 A，它也是一个结合 k-代数，并且其结构映射:

$$\Delta : A \otimes_k A \to A, \quad \eta : k \to A$$

是偶线性映射。由于我们将只研究结合 k-超代数，因此简称为超代数。超代数同态 ϕ： $A \to B$ 是

一个结合代数同态，且 ϕ 是偶线性映射。如果对所有齐次的 x、 $y \in A$ ，以下关系都成立，我们就称超代数 A 为超交换:

$$xy = (-1)^{|x|\cdot|y|}yx$$

此外，若 A、 B 是超代数，那么 $A \otimes_k B$ 也是超代数，其乘法在齐次元素 x、 $w \in A$ 和 y、 $z \in B$ 上定义为

$$(x \otimes y) \cdot (w \otimes z) = (-1)^{|y||w|}((xw) \otimes (yz))$$

然后再线性扩张到 $A \otimes_k B$的所有元素。

超余代数、超模、超余模及其态射的定义方式与经典对应对象完全相同，区别在于结构映射必须尊重 $\mathbb{Z}/2$-分次，正如上文超代数的定义所示。详情请参见 [3] 。

2.1 一般线性超群

本节为求完整，回顾一些关于一般线性超群的定义和事实。假设所有超空间和超代数都定义在固定的域 k上。更完整的论述请参见 [16, 9] 的导言。

与经典情形不同，超空间的一般线性超群最自然的定义方式是将其定义为一个函子，具体如下。设 M 是有限维超空间，并固定一个齐次基 $\{m_1, \ldots, m_t\}$。那么 $M \otimes_k A$ 是一个右 A-超模，并且有一个 A-线性基: $\mathcal{C} = \{m_i \otimes 1 : \ 1 \leq i \leq t\}$。一般线性超群 $GL(M)$是从有限维超交换超代数范畴到群范畴的函子。它将每个超交换超代数 A 关联到 $M \otimes_k A$上所有可逆的偶 A-线性映射，我们将其记作 $GL(M)(A)$。此外，若 $f : \ A \to B$ 是超交换超代数态射，则 $GL(M)$将其映射为 $GL(M)(f)$: $GL(M)(A) \to GL(M)(B)$；其定义方式是将 $T \in GL(M)(A)$中的元素写成一个 $t \times t$ 矩阵（相对于基 $\mathcal{C}$），其元素取自 A ，并对每个元素应用 f 。用符号表示，一般线性超群 $GL(M)$是将对象映射为

$$A \mapsto (\mathrm{End}_A(M \otimes_k A))^\times$$

以及态射

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{superalg}}(A, B) \ \text{ to } \ GL(M)(f)((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq t}) = (f(a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq t}$$

此定义与 M 所选的基无关。

一般来说， $GL(M)$ 是一个可表函子，但我们尤其关注 $M = k^{m|n}$ 的情形。 $GL(k^{m|n})$ 的表示对象称为其坐标超代数，定义如下。

定义 2.1. *[16]*令 $\mathcal{A}(m|n) = k[x_{ij} : \ 1 \leq i, j \leq m+n]$ 为由 $(m+n) \times (m+n)$ 个变量生成的自由超交换超代数，变量的奇偶性规定如下:

$$|x_{ij}| := \overline{i} + \overline{j} \mod 2, \ \textit{where } \overline{i} = \begin{cases} \overline{0} & \textit{if } 1 \leq i \leq m \\ \overline{1} & \textit{if } m+1 \leq i \leq m+n \end{cases}$$

令 $d_1 = \det(x_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$ 和 $d_2 = \det(x_{ij})_{m+1\leq i,j\leq m+n}$，它们是 $\mathcal{A}(m|n)$ 中的偶元素。因此， $GL(k^{m|n})$ 的坐标超代数定义为将 $\mathcal{A}(m|n)$ 在 $d_1 d_2$ 处局部化所得。

从现在起，我们用 $GL(m|n)$ 表示 $GL(k^{m|n})$，用 $k[GL(m|n)]$ 表示其坐标超代数。由于一般线性超群定义为一个函子，因此将其超模视为函子态射是自然的。

定义 2.2. 设 M 是一个有限维超空间。若存在自然变换 $p: GL(m|n) \to GL(M)$，则称其为左 $GL(m|n)$-超模。

$GL(m|n)$的坐标超代数也是一个霍普夫超代数，其余乘法和余单位结构映射分别为:

$$\Delta(x_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n+m} x_{i,k} \otimes x_{k,j}, \quad \epsilon(x_{i,j}) = \delta_{i,j}$$

如 [1] 所述，左 $GL(m|n)$-超模范畴与右 $k[GL(m|n)]$-超余模范畴等价。从现在起，在讨论 $GL(m|n)$-超模时，我们将默认使用这一对应。

以下定义和事实将用于定义有理 Schur 超代数 s.

定义 2.3. 设 M 是 $k[GL(m|n)]$, 的有限维右超余模，其结构映射为 $\tau: M \to M \otimes_k k[GL(m|n)]$。设 $\{v_1, .., v_r\}$ 是 M的齐次基。则$\tau(v_j) = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes a_{ij}$，其中 $a_{ij} \in k[GL(m|n)]$。由这些 $k[GL(m|n)]$系数构成的矩阵 $A := (a_{ij})_{1 \le i,\ j \le r}$称为该表示的定义矩阵。

定义 2.4. 设 M 是 $k[GL(m|n)]$的右超余模。那么 M 的系数空间记作 $cf(M)$，它是由其定义矩阵的各项张成的超空间。

这些构造与基的选择无关。此外，若 M、N 是 $GL(m|n)$ 的表示，则 $M \otimes_k N$ 也是表示，且以下等式在 $k[GL(m|n)]$ 中成立:

$$cf(M \otimes_k N) = cf(M) \cdot cf(N)$$

2.2 超代数的系数空间

以下结果将在第 4 节中用到。

设 M 是有限维超空间， A 是超代数。利用对应 $M \otimes_k M^* \cong \mathrm{End}_k(M)$，我们可以赋予 $\mathrm{End}_k(M)$ 超空间结构。容易验证，复合运算使 $\mathrm{End}_k(M)$ 成为超代数。因此，称超代数同态 $\rho: A \to \mathrm{End}_k(M)$ 为 A 的表示 M。

定义 2.5. 设 M 是一个有限维超空间，其齐次基为 $B_M = \{v_1, ..., v_\ell\}$。若 $\rho: A \to \mathrm{End}_k(M)$ 是 A 的一个表示，则相对于基 B_M， $\rho(a)$ 是一个元素取自 k 的 $\ell \times \ell$ 矩阵。设 $1 \le i,\ j \le \ell$。那么 $\rho(a)$ 的第 $(i,\ j)$ 个条目关于 a 线性，因此定义了 A^* 的一个元素，记作 $a_{i,\ j}$。 ρ 的定义矩阵是矩阵 $(a_{i,\ j})_{1 \le i,\ j \le \ell} \in \mathrm{Mat}_{\ell \times \ell}(A^*)$。

定义 2.6. 设 A、M、ρ 如上所述。那么 M 的系数空间为

$$cf_A(M) = \mathrm{span}_k\{a_{i,j} : 1 \le i, j \le l\}$$

众所周知， $cf_A(M)$ 与 M 的基的选取无关，因此 $cf_A(M)$ 定义良好。我们还需要以下在 [14, Pg. 53] 中指出的事实。

引理 2.1. 设 $\rho: A \to \mathrm{End}_k(M)$ 是 A 的一个有限维表示。那么 $(cf_A(M))^*$ 是一个与 $\rho(A)$ 同构的超代数。

3 超模范畴

在本节中，k 表示一个特征不等于 2 的代数闭域，所有 $GL(m|n)$-超模都是左 $GL(m|n)$-超模。

3.1 $GL(m|n)$ 的多项式表示

为了引出关于 $GL(m|n)$ 的有理表示的结果，我们回顾 $\mathcal{A}(m|n)$ 的一些基本事实，并定义 $GL(m|n)$ 的多项式表示。

设 $\mathcal{A}(m|n)$ 如定义 2.1 所述。与坐标超代数 $k[GL(m|n)]$，一样，它是一个超双代数 [12]。

定义 3.1. 对于正整数 r，将 $\mathcal{A}(m|n)$ 中次数为 r 的齐次多项式定义为:

$$\mathcal{A}(m|n;r) := \mathrm{span}_k\{x_{i_i,j_1}...x_{i_r,j_r} : 1 \le i_r, j_r \le m+n\}$$

若 $r=0$，则 $\mathcal{A}(m|n;0) := k$。

由 $k[GL(m|n)]$ 中余乘法的定义容易推出，$\mathcal{A}(m|n;r)$ 是 $k[GL(m|n)]$ 的一个子超余代数。与经典情形一样，我们有如下超余代数分解:

$$\mathcal{A}(m|n) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathcal{A}(m|n;r)$$

定义 3.2. 设 M 是一个 $GL(m|n)$-超模。若 M 满足 $cf(M) \subseteq \mathcal{A}(m|n)$，则称其为多项式表示。

$GL(m|n)$ 的一个次数为 r 的齐次表示，是指一个 $GL(m|n)$-超模 M，满足 $cf(M) \subseteq \mathcal{A}(m|n;r)$。

3.2 双次数为 (r,s) 的有理表示

设 M 是一个左 $GL(m|n)$-超模，并令

$$i : GL(m|n) \to GL(m|n)$$

为求逆态射。它诱导出一个对偶映射 $i^*: k[GL(m|n)] \to k[GL(m|n)]$，即 $k[GL(m|n)]$ 的对偶映射。由于定义有理舒尔超代数需要用到来自对偶表示的映射 i^* 和系数空间，我们将更详细地讨论这些对象。考虑一个 $(m+n)\times(m+n)$ 矩阵 $(x_{k,\ell})_{1\le k,\ell\le m+n}$，其元素属于 $k[GL(m|n)]$。那么 $i^*(x_{p,q})$ 是 $((x_{k,\ell})_{1\le k,\ell\le m+n})^{-1}$ 的 $(p,q)th$ 元素，这些元素属于 $k[GL(m|n)]$。若 C 是 $k[GL(m|n)]$，的一个超余模 M 的定义矩阵，则 M^* 是 $k[GL(m|n)]$ 的一个超余模，而 $(C^{-1})^{\mathbf{st}}$ 是其定义矩阵 [16] 。此处 st 表示超转置:

定义 3.3. 设 V 是一个有限维的 A-超模，其有序齐次基为 $B_V = (v_1,...,v_\ell|\overline{v_1},...,\overline{v_{\ell'}})$，且 $T \in \mathrm{End}_A(V)$为偶的。记 $[T]_{B_V} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}$。则 $[T]_{B_V}$ 的超转置为

$$[T]^{st}_{B_V} = \begin{bmatrix} (T_1)^t & (T_3)^t \\ -(T_2)^t & (T_4)^t \end{bmatrix}$$

为简洁起见，记 $V = k^{m|n}$ 和 $W = V^*$。那么 V 是一个左 $GL(m|n)$-超模，其结构映射为

$$\tau(e_i) = \sum_{k=1}^{m+n} e_k \otimes x_{ki}$$

显然， $cf(V^{\otimes r}) = \mathcal{A}(m|n;\ r)$.

定义 3.4. 设 V 和 W 如上所述。那么， $k[GL(m|n)]$的（r, s）齐次分量为

$$\tilde{\mathcal{A}}(m|n; r, s) := cf(V^{\otimes r} \otimes_k W^{\otimes s}) = cf(V)^r cf(W)^s$$

由所有此类分量生成的空间为

$$\tilde{\mathcal{A}}(m|n) := \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}} \tilde{\mathcal{A}}(m|n; r, s)$$

˜我们希望描述固定（r, s）时， $\mathcal{A}(m|n;\ r, s)$中的元素是什么样的。为此，我们需要奇偶函子以及行列式的超类比——Berezinian 的概念。奇偶函子 Π 是超空间上的一个函子，它将超空间 $V = V_0 \oplus V_1$ 映射为超空间 $\Pi(V)$，其偶分量为 V_1，奇分量为 V_0，同时保持所有偶线性映射不变。换句话说，它会切换超空间的奇偶性。

定义 3.5. 设 T, V如定义 3.3 中所述，并令 $B_{\Pi(V)} = (\overline{v_1}, ..., \overline{v_{\ell'}}|v_1, ..., v_\ell)$。那么 Berezinian 为

$$Ber(T) := \det(T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3) \det(T_4)^{-1}$$

若 T是偶的 A-线性映射，则 $[\Pi(T)]_{B_{\Pi(V)}} = \begin{bmatrix} T_4 & T_3 \\ T_2 & T_1 \end{bmatrix}$，并且

$$Ber^*(T) := Ber(\Pi(T))$$

此定义与为 V选取的齐次基无关。

命题 3.1. *[8]*

1. $Ber(ST) = Ber(S)Ber(T)$
2. $Ber^*(ST) = Ber^*(S)Ber^*(T)$

回忆一下， $\mathcal{A}(m|n) = k[x_{ij}\colon 1 \leq i, j \leq m + n]$，并考虑矩阵 $A = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq m+n}$。那么 Ber, Ber^* 是 $k[GL(m|n)]$ 中的元素，由 $Ber(A)$ $Ber^*(A)$表示。令 $D(i, j)$为这样一个矩阵：将 A 的第 i行替换为零，但 (i, j)位置上的元素为 1。显然， $Ber(D(i, j))$ $Ber^*(D(i, j)) \in k[GL(m|n)]$, , 我们分别将这些元素记作 $Ber_{i,j}, Ber^*_{i,j}$。最后，用 $\tilde{x}_{i,j}$ 表示 A^{-1}的 (i, j)位置上的元素。

˜现在我们可以对 $\mathcal{A}(m|n)$ 给出明确描述。

引理 3.1。以下性质成立：

˜1. $\mathcal{A}(m|n)$ 由元素 $x_{i、\ j}, \tilde{x}_{i、\ j}$生成，是一个 k-超代数

2. 根据超克莱姆法则， *[8]*, $cf(W)$ 是由 $\tilde{x}_{i,\ j}$张成的 k-空间，其中

$$\tilde{x}_{i,j} = \begin{cases} Ber_{i,j}(Ber)^{-1} & when\ i \in \{1, ..., m\} \\ Ber^*_{i,j}(Ber^*)^{-1} & when\ i \in \{m+1, ..., m+n\} \end{cases}$$

˜3. $\mathcal{A}(m|n;\ r, s)$ 是以下集合的张成空间

$$\{x^{m_1}_{i_1,j_1} \dots x^{m_t}_{i_t,j_t} \tilde{x}^{m_{t+1}}_{i_{t+1},j_{t+1}} \dots \tilde{x}^{m_{t+k}}_{i_{t+k},j_{t+k}} : 1 \le i_l, j_l \le m+n,\ m_1+...+m_t = r, m_{t+1}+...+m_{t+k} = s\}$$

4.

$$\sum_{k=1}^{m+n} x_{i,k}\tilde{x}_{k,j} = \delta_{i,j} \qquad and \qquad \sum_{k=1}^{m+n} \tilde{x}_{i,k}x_{k,j} = \delta_{i,j}$$

注意， Ber^* 是 Ber的乘法逆元，但一般而言， $Ber^*_{i,j}$ 和$Ber_{i,j}$ 不可逆（参见 [8]第八节末尾的例子）。

我们希望建立一个超余代数分解类似。为此，我们需要证明 $\mathcal{A}(m|n;\ r, s)$ 是一个超余代数，为此我们证明以下结论：

引理 3.2。（参见 *[4,* 公式 2.2。*2]*）

$$\Delta(\tilde{x}_{i,j}) = \sum_{k=1}^{m+n} (-1)^{(|i|+|k|)(|k|+|j|)} (\tilde{x}_{k,j} \otimes \tilde{x}_{i,k}) \quad \epsilon(\tilde{x}_{i,j}) = \delta_{i,j}$$

证明。Su 设 $1 \le i, j, s, t \le m+n$，并令 $C_{i,j} := \sum_{k=1}^{m+n} (-1)^{(|i|+|k|)(|k|+|j|)} \tilde{x}_{k,j} \otimes \tilde{x}_{i,k}$。 n

$$\Delta(x_{s,t})C_{i,j} = (\sum_{p=1}^{m+n} x_{s,p} \otimes x_{p,t})(\sum_{k=1}^{m+n} (-1)^{(|i|+|k|)(|k|+|j|)} \tilde{x}_{k,j} \otimes \tilde{x}_{i,k}) =$$

$$\sum_{p,k=1}^{m+n} (-1)^{(|i|+|k|)(|k|+|j|)} (-1)^{(|p|+|t|)(|k|+|j|)} (x_{s,p}\tilde{x}_{k,j}) \otimes (x_{p,t}\tilde{x}_{i,k})$$

利用这一计算和关系 $\sum_{p=1}^{m+n} x_{i,p}\tilde{x}_{p,j} = \delta_{i,j}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{w=1}^{m+n} \Delta(x_{s,w})C_{w,j} &= \sum_{w=1}^{m+n}\sum_{p,k=1}^{m+n} (-1)^{(|p|+|w|)(|k|+|j|)+|w|(|k|+|j|)+|k|(|k|+|j|)}(x_{s,p}\tilde{x}_{k,j}) \otimes (x_{p,w}\tilde{x}_{w,k}) \\
&= \sum_{p,k=1}^{m+n}\sum_{w=1}^{m+n} (-1)^{|p|(|k|+|j|)+|k|(|k|+|j|)}(x_{s,p}\tilde{x}_{k,j}) \otimes (x_{p,w}\tilde{x}_{w,k}) \\
&= \sum_{p,k=1}^{m+n} (-1)^{(|p|+|k|)(|k|+|j|)}(x_{s,p}\tilde{x}_{k,j}) \otimes (\sum_{w=1}^{m+n} x_{p,w}\tilde{x}_{w,k}) \\
&= \sum_{p,k=1}^{m+n} (-1)^{(|p|+|k|)(|k|+|j|)}(x_{s,p}\tilde{x}_{k,j}) \otimes (\delta_{p,k}) \\
&= \sum_{p=1}^{m+n} (-1)^{(|p|+|p|)(|p|+|j|)}(x_{s,p}\tilde{x}_{p,j}) \otimes 1 = (\sum_{p=1}^{m+n} x_{s,p}\tilde{x}_{p,j}) \otimes 1 = \delta_{s,j}
\end{aligned}$$

现在考虑矩阵 $(m+n)\times(m+n)$ $A = (\Delta(x_{i,j}))_{1\le i,j\le m+n}$，其元素属于 $k[GL(m|n)]\otimes_k k[GL(m|n)]$。由于余乘法是超代数同态，其逆为 $(\Delta(\tilde{x}_{i,j}))_{1\le i,j\le m+n}$。若 C 表示矩阵 $(C_{i,j})_{1\le i,j\le m+n}$，则上述计算表明 $AC = Id$。这意味着 $C = (\Delta(\tilde{x}_{i,j}))$，从而证明了引理的第一部分。第二部分的证明方法类似。 □

命题 3.2. $\mathcal{A}(m|n;\, r, s)$ 是一个超余代数，而 $\mathcal{A}(m|n)$ 是一个超双代数

证明。由引理 3.2 和引理 3.1 的第 3 部分立即可得。 □

引理 3.1 的第 4 部分意味着

$$\tilde{\mathcal{A}}(m|n; r, s) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}(m|n; r+1, s+1)$$

沿用 [4]，我们为 $z \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 定义：

$$\tilde{\mathcal{A}}(m|n)_z := \bigcup_{t\ge 0} \tilde{\mathcal{A}}(m|n; z+t, t) \text{ and } \tilde{\mathcal{A}}(m|n)_{-z} := \bigcup_{t\ge 0} \tilde{\mathcal{A}}(m|n; t, z+t)$$

显然，这些都是超余代数。在上述论文中，作者给出了经典情形下 $\mathcal{A}(m|0)$ [4, 2.6.1] 的一个余代数分解。该结果的超类比同样成立

$$\tilde{\mathcal{A}}(m|n) = \bigoplus_{z\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{A}}(m|n)_z \tag{1}$$

其证明与经典情形相似，现简要概述如下。将$w \in \tilde{\mathcal{A}}(m|n;\, r, s)$实现为 $\tilde{\mathcal{A}}(m|n;\, e, f)$中元素的唯一方式，是反复使用关系 $w(\sum_{k=1}^{m+n} x_{i,k}\tilde{x}_{k,i}) = w\cdot 1$ 或 $(\sum_{k=1}^{m+n} \tilde{x}_{i,k}x_{k,i})\ w = 1\cdot w$。这意味着必定存在某个 $t \ge 0$，使得 $r+t = e, s+t = f$。因此，若 $r \ge s$，则可推出 $w \in \mathcal{A}(m|n)_{r-s}$；同理，若 $s > r$，则 $w \in \mathcal{A}(m|n)_{-(s-r)}$。所以无论哪种情况，$\mathcal{A}(m|n;\, r, s)\ \mathcal{A}(m|n;\, e, f) \subseteq \mathcal{A}(m|n)_{r-s}$。这表明方程 1 中的和是直和。

˜定义 3.6. 若 M是一个 $GL(m|n)$-超模，且 $cf(M) \subseteq \mathcal{A}(m|n)_z$，则它是一个有理次数为 z的超模˜。此外，若 $cf(M) \subseteq \mathcal{A}(m|n;\ r,s)$且 $cf(M) \not\subset \mathcal{A}(m|n;\ r-1,s-1)$，则它是一个双次数为（$r,s$）的超模。

定理 3.1。（与 *[4, 定理 2.7]* 比较）若 V是一个有限维的 $GL(m|n)$-超模，则以下结论成立。

1. $V = \bigoplus_{z\in\mathbb{Z}} V_z$，其中 V_z 是一个有理次数为 z 的超模。

2. 每个 V_z 都是如下 $GL(m|n)$-超模的递增链之并：

   (a) 若 $z \geq 0$，则 $V_{z,\ 0} \subseteq V_{z+1,\ 1} \subseteq \cdots \subseteq V_{z+t,\ t} \subseteq \cdots$，其中 $V_{z+t,\ t}$ 是一个双次数为 $(z+t,t)$ 的超模，且 $V_z = \bigcup_{t=0}^{\infty} V_{z,\ t}$。(b) 若 $z < 0$，则 $V_{0,\ -z} \subseteq V_{1,\ -z+1} \subseteq \cdots \subseteq V_{t,\ -z+t} \subseteq \cdots$，其中 $V_{t,\ -z+t}$ 是一个双次数为 $(t,-z+t)$ 的超模，且 $V_z = \bigcup_{t=0}^{\infty} V_{t,\ -z+t}$。

证明。 [11], 中的引理 8.3指出，$x_{i,\ j}, \tilde{x}_{i,\ j}$对于 $1 \leq i,j \leq m+n$ 生成 $k[GL(m|n)]$。因此，$\tilde{\mathcal{A}}(m|n)$ $= k[GL(m|n)]$ （关于这一事实的一个自成一体的证明，另见推论 4.1）。类似于 Dipper 和 Doty 在 [4], 中证明定理 2.7 的方法，将方程 1 与[6] 中的定理 1.6c结合起来，我们得到 $k[GL(m|n)]$-余模分解

$$V = \bigoplus_{z\in\mathbb{Z}} V_z$$

这个余模分解实际上是一个超余模分解。因为若 $\tau:\ V \to V \otimes_k k[GL(m|n)]$ 表示超余模结构映射，那么在 Green 对定理 1.6c 的证明中，$V_z = \tau^{-1}(V \otimes_k \tilde{\mathcal{A}}(m|n)_z)$。由于偶线性映射下超空间的原像仍是超空间，我们可知 V_z 是一个超余模。至此，第一条陈述得证。

第二个陈述的证明与 Dipper 和 Doty 在 [4], 定理 2.7 中的证明基本相同，因此略去。

□

定义 3.7。固定非负整数 m、n、r、s。有理 Schur 超代数记作 $\mathcal{S}(m|n;\ r,s)$，其中我们˜将其定义为 $(\mathcal{A}(m|n;\ r,s))^*$。

由命题 3.2 和引理 3.1 的第 3 部分可知，这确实是一个有限维超代数。

3.3 范畴的等价

众所周知，若 A 是有限维超余代数，则其超余模范畴与 A^*上的超模范畴等价。与经典情形一样，我们定义：

$$\mathcal{S}(m|n)_z := (\tilde{\mathcal{A}}(m|n)_z)^*$$

这等于以下逆极限，其中 $z \geq 0$ 或 $z < 0$ 分别为：

$$\varprojlim_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{S}(m|n; z+t, t), \qquad \varprojlim_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{S}(m|n; t, -z+t)$$

由于每个 $GL(m|n)$-超模都可以分解为次数各异的有理超模，这表明理解 $\mathcal{A}(m|n)_z$ 的超余模范畴将有助于

深入了解 $GL(m|n)$ 的表示论。正如我们刚才提到的，这等价于理解 $\mathcal{S}(m|n)_z$ 的表示论。由于它是由有限维超代数 $\mathcal{S}(m|n;\ r,s)$ 构成的，第一步是理解它们的表示论。

4 定义的等价性与半单性

在本节中， k 表示特征为零的代数闭域， $V=k^{m|n}$、 $W=V^*$和 $T（r，\ s）=V^{\otimes r}\otimes W^{\otimes s}$。在经典情形下，对称群 S_r 作用于空间 $（k^n）^{\otimes r}$，舒尔代数 $S（n，\ r）$ 可定义为 $\mathrm{End}_{S_r}（（k^n）^{\otimes r}）$。这个定义等价于取由 $k[GL（n）]$中的r 次齐次多项式构成的余代数的对偶。舒尔代数 $S（n，\ r）$ 也同构于典范的 $\mathfrak{gl}（n）$ 表示 $\rho_r：\ U（\mathfrak{gl}（n））\to\mathrm{End}（（k^n）^{\otimes r}）$ 的像。因此，舒尔代数可以通过这三种等价定义中的任意一种来定义。本节旨在展示 $\mathcal{S}（m|n；\ r，\ s）$ 的类似定义等价性。首先，我们证明 $k[GL（m|n）]$ 同构于 $GL（m|n）$ 上的正则函数霍普夫超代数，该代数在 [14]中引入。由此，我们可以证明 $\mathcal{S}（m|n；\ r，\ s）$ 同构于泛包络超代数 $U（\mathfrak{gl}（m|n））$ 在其对 $T（r，\ s）$ 的自然作用下的像。若$m-n\geq r+s$，则通过证明 $T（r，\ s）$ 是一个不可约的$\mathcal{S}（m|n；\ r，\ s）$-超模，且超代数在其上的作用是忠实的，可以得出该像具有半单性。最后，已知墙壁布劳尔代数$B_{r,\ s}（m-n）$ 自然作用于 $T（r，\ s）$，且当 $m-n\geq r+s$时，它同构于 $\mathrm{End}_{\mathfrak{gl}(m|n)}（T（r，\ s））$ [10]。结合半单性结果与这一舒尔-韦伊尔对偶，再通过双中心化子定理可得 $\mathcal{S}（m|n；\ r，\ s）\cong\mathrm{End}_{B_{r,\ s}（m-n）}（T（r，\ s））$。

4.1 $GL(m|n)$上的正则函数霍普夫超代数

李超代数 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 通过以下定义在齐次元素上的作用，自然地作用于 $T(r,s)$:

$$x\cdot(v_1\otimes...\otimes v_r\otimes w_1\otimes...\otimes w_s)=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{|x|\sum_{p=1}^{k}|v_p|}v_1\otimes...\otimes(x\cdot v_k)\otimes...\otimes v_r\otimes...\otimes w_s$$
$$+\sum_{k=1}^{s}(-1)^{|x|(\sum_{p=1}^{r}|v_p|+\sum_{t=1}^{k}|w_t|)}v_1\otimes...\otimes v_r\otimes...\otimes(x\cdot w_k)\otimes...\otimes w_s$$

我们将此表示记为 $\rho_{r,\ s}：\ U(\mathfrak{gl}(m|n))\to\mathrm{End}_k(T(r,s))$。

定义4.1。 *[14]*

$GL(m|n)$上的正则函数霍普夫超代数是由以下元素生成的 $(U(\mathfrak{gl}(m|n)))^*$ 的子超代数:

$$cf_{U(\mathfrak{gl}(m|n))}(V)=\mathrm{span}_k\{t_{i,j}:1\leq i,j\leq m+n\}\quad and\quad cf_{U(\mathfrak{gl}(m|n))}(W)=\mathrm{span}_k\{\overline{t}_{i,j}:1\leq i,j\leq m+n\}$$

我们将这个子超代数记为 $\mathcal{B}$。在 [14] 中，已证明 $\mathcal{B}$ 是一个 Hopf 超代数。下面简要回顾其超双代数结构映射。设 Δ_0 和 ϵ_0 分别为 $U(\mathfrak{gl}(m|n))$ 上的标准余乘法和余单位结构映射。设 f、$g\in U(\mathfrak{gl}(m|n))^*$ 以及 a、$b\in U(\mathfrak{gl}(m|n))$。那么， $\mathcal{B}$ 的单位、乘法、余乘法和余单位分别为:

$$1_{U(\mathfrak{gl}(m|n))^*}:=\epsilon_0^*,\quad\langle m(f\otimes g),a\rangle:=\langle f\otimes g,\Delta_0(a)\rangle,\quad\langle\Delta(f),a\otimes b\rangle:=\langle f,ab\rangle,\quad\epsilon(-):=\langle-,1_{U(\mathfrak{gl}(m|n))}\rangle$$

此外，设 B 为由 $\{t_{i,j}$ 生成的超代数： $1 \leq i$、 $j \leq m+n\}$。文献 [12, 的定理 2.1f] 证明了，映射 $t_{i,j} \mapsto x_{i,j}$ 给出了 B 与 $\mathcal{A}(m|n)$ 作为超双代数的同构。不过，在这种情况下， $\mathcal{A}(m|n)$ 上的余乘法定义为：

$$\Delta'(x_{i,j}) := \sum_{h=1}^{m+n} (-1)^{(|i|+|h|)\cdot(|h|+|j|)} x_{i,h} \otimes x_{h,j}$$

将我们上下文中给定的超双代数结构的 $\mathcal{A}(m|n)$ 记为 $(\mathcal{A}(m|n)\ \Delta)$，将 [12] 中的超双代数结构记为 $(\mathcal{A}(m|n)\ \Delta')$。容易验证，该超代数同构

$$f : (\mathcal{A}(m|n), \Delta) \to (\mathcal{A}(m|n), \Delta'), \quad x_{i,j} \mapsto (-1)^{|j|(|i|+|j|)} x_{i,j}$$

也是一个超余代数同构。因此，$(\mathcal{A}(m|n)\ \Delta)$ 与 B 作为超双代数同构。若 $\alpha := \det((t_{i,\ j})_{1 \leq i,\ j \leq m})$ 且 $\beta := \det((t_{i,\ j})_{m+1 \leq i,\ j \leq m+n})$，则将 B 在 $\alpha \cdot \beta$ 处局部化后可知， $k[GL(m|n)]$ 与 $B_{\alpha\cdot\beta}$ 作为超双代数同构。由于霍普夫超代数之间的超双代数同构就是霍普夫超代数同构，这意味着 $k[GL(m|n)]$ 与 $B_{\alpha\cdot\beta}$ 同构。由 [14, 定理 3.3] 可知， $B_{\alpha\cdot\beta}$ 与 $\mathcal{B}$ 作为霍普夫超代数同构。因此，我们有以下引理：

引理 4　　.1. 坐标超代数 $k[GL(m|n)]$ 同构于 $\mathcal{B}$，作为霍普夫超代数　　*a.*

该引理为 [11] 中的引理 8.3 提供了另一种证明。

推论 4.1. 坐标超代数 $k[GL(m|n)]$ 由 $x_{i,j}, \tilde{x}_{i,j}$（其中 $1 \leq i, j \leq m+n$）生成。因此， $k[GL(m|n)] = \mathcal{A}(m|n)$。

证明。注意， [14, 定理 3.3] 中给出的霍普夫超代数同构

$$h : B_{\alpha\cdot\beta} \to \mathcal{B}$$

将 $(-1)^{|j|(|i|+|j|)} x_{i,j}$ 映射到 $\tilde{t}_{i,j} := (-1)^{|j|(|i|+|j|)} t_{i,j}$。令 s' 表示 $\mathcal{B}$ 的反 antipode。回想[14, 页码55]，我们看到

$$(s'((h \circ f)(x_{i,j})))_{1 \leq i,j \leq m+n} = (\tilde{t}_{i,j})^{-1}_{1 \leq i,j \leq m+n}$$

由于 h、 f 是霍普夫超代数态射，这意味着：

$$(\tilde{t}_{i,j})^{-1}_{1 \leq i,j \leq m+n} = ((h \circ f)(s(x_{i,j})))_{1 \leq i,j \leq m+n} = ((h \circ f)(\tilde{x}_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq m+n}$$

But,

$$(\tilde{t}_{i,j})^{-1}_{1 \leq i,j \leq m+n} = (\overline{t}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m+n}$$

因此,

$$\overline{t}_{i,j} = (h \circ f)(\tilde{x}_{i,j}) \quad \text{for} \quad 1 \leq i, j \leq m+n$$

由于 $\{t_{i,j}, \overline{t}_{i,j} : 1 \leq i, j \leq m+n\}$ 生成 $\mathcal{B}$，这意味着 $\{x_{i,j}, \tilde{x}_{i,j} : 1 \leq i, j \leq m+n\}$ 生成 $k[GL(m|n)]$。回顾引理 3.1 第 1 部分，我们看到 $k[GL(m|n)] = \mathcal{A}(m|n)$。 □

4.2 定义的第一种等价

为了证明有理 Schur 超代数 $\mathcal{S}(m|n;\ r,s)$ 同构于 $\rho_{r,\ s}(U(\mathfrak{gl}(m|n)))$，我们需要以下结果：

P ˜命题 4.1. 作为超余代数， $\mathcal{A}(m|n;\ r,s)$ 与 $\mathbf{cf}_{U(\mathfrak{gl}(m|n))}(T(r,s))$ 同构 .

证明. 根据 推论 4.1 和引理 3.1 第 3 部分给出的同构，只需证明 tha t

$$\mathbf{cf}_{U(\mathfrak{gl}(m|n))}(T(r,s))=\mathrm{span}\{t^{m_1}_{i_1,j_1}...t^{m_p}_{i_p,j_p}\overline{t}^{m_{p+1}}_{i_{p+1},j_{p+1}}...\overline{t}^{m_{p+\ell}}_{i_{p+\ell},j_{p+\ell}}:\sum_{k=1}^{p}m_k=r,\sum_{k=1}^{\ell}m_{p+k}=s\}$$

回顾 $\mathcal{B}$ 的定义，以下事实可立即得出：若 A,B 是 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 的有限维表示，则

$$\mathbf{cf}_{U(\mathfrak{gl}(m|n))}(A\otimes B)=\mathbf{cf}_{U(\mathfrak{gl}(m|n))}(A)\cdot\mathbf{cf}_{U(\mathfrak{gl}(m|n))}(B)$$

□

定理 4.1.（与 *[14,* 定理 3.*2]* 比较）有理 Schur 超代数 $\mathcal{S}(m|n;\ r,s)$ 同构于 $\rho_{r,s}(U(\mathfrak{gl}(m|n)))$.

证明。这可由命题 4.1 和引理 2.1 直接推出。 □

4.3 有理舒尔超代数作为中心化子代数及一个半单性结果

回顾一下，如果 $m\geq n$，则墙壁布劳尔代数 $B_{r,s}(m-n)$ 作用于 $T(r,s)$，并且当$m-n\geq r+s$ 时，它同构于 $\mathrm{End}_{U(\mathfrak{gl}(m|n))}(T(r,s))$ [10]。类似于经典情形，我们将证明：有理 Schur 超代数同构于某个墙壁布劳尔代数作用的中心化子，或者用符号表示为

$$\mathcal{S}(m|n;r,s)\cong\mathrm{End}_{B_{r,s}(m-n)}(T(r,s))$$

根据上一节，只需证明 $\mathcal{S}(m|n;\ r,s)$ 是半单的，因为一旦证明了这一点，我们就可以应用双中心化子定理 [13, 定理 11.1。1] 来获得所需的同构。为此，只需找到 $\mathcal{S}(m|n;\ r,s)$ 的一个半单忠实表示。一个自然的候选是 $T(r,s)$。

已知 $T(r,s)$ 可分解为 $\mathfrak{gl}(m|n)$-超模中的不可分解子超模，因而也可分解为不可分解的 $\mathcal{S}(m|n;\ r,s)$ 子超模。Brundan 和 Stroppel 通过 [2] 到 $(m|n)$-交叉双分拆对这些不可分解对象的同构类型进行了分类。

定义 4.2. 若 λ_L 是 r 的一个分拆，且 λ_R 是 s的一个分拆，则如果存在一个 $1\leq i\leq m+1$ 使得 $\lambda^L_i+\lambda^R_{m+2-i}<n+1$，那么 (λ_L,λ_R) 是 $(m|n)$-交叉双分拆 (r,s)。

$(m|n)$-交叉双分拆 (r,s) 的集合记作 $\Lambda_{r,\ s}$。

定理 4.2. *[2,* 定理 8.*19]* 不可分解的 $\mathcal{S}(m|n;\ r,s)$ 子超模 $T(r,s)$ 在同构意义下由 $(m|n)$-交叉双分拆 (r,s) 参数化。

设 $\lambda \in \Lambda_{r,\ s}$，并令 $R(\lambda)$ 表示与 λ 相对应的 $T(r,s)$ 的唯一（在同构意义下） $\mathfrak{gl}(m|n)$ 子超模。在 [7], Heidersdorf 为每个这样的双分拆关联一个不变量 $d(\lambda)$，并证明 $R(\lambda)$ 是不可约 $\mathfrak{gl}(m|n)$-超模，当且仅当 $d(\lambda) = 0$。此外，同一篇论文中的命题10.3指出，若 $m-n \geq r+s$，则 $d(\lambda) = 0$。由于我们假设$m - n \geq r + s$，因此 $B_{r,\ s}(m-n)$ 同构于 $\mathrm{End}^{U(\mathfrak{gl}(m|n))}(T(r,s))$，由此可得 $T(r,s)$ 的所有不可分解 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 子超模也都是不可约的。综上所述，我们得到：

引理4.2. 若 $m - n \geq r + s$，则 $T(r,s)$ 是一个半单的 $\mathfrak{gl}(m|n)$-超模。

由于 $\mathcal{S}(m|n;\ r,s)$ 在 $T(r,s)$ 上的作用为 $\rho_{r,s}(U(\mathfrak{gl}(m|n)))$，显然这是一个忠实的半单表示。因此，$\mathcal{S}(m|n;\ r,s)$ 是一个半单代数。

注1. 假设 *[15,* 命题1.7 *],*，这意味着 $\mathcal{S}(m|n;\ r,s)$ 是一个半单超代数。

定理4.3. 若 $m - n \geq r + s$，则 $\mathcal{S}(m|n;\ r,s)$ 是$B_{r,s}(m-n)$ 作用的中心化子代数，或用符号表示为

$$\mathcal{S}(m|n;r,s) \cong \mathrm{End}_{B_{r,s}(m-n)}(T(r,s))$$

证明. 根据混合舒尔-韦尔对偶，已知 $\mathrm{End}_{\mathfrak{gl}(m|n)}(T(r,s)) \cong \rho(B_{r,s}(m-n))$，其中 ρ表示 $B_{r,s}(m-n)$ 在 $T(r,s)$ 上的右作用。由双中心化子定理 [13, 定理11.1.1]，可得 $\mathrm{End}_{B_{r,s}(m-n)}(T(r,s)) = \rho_{r,s}(U(\mathfrak{gl}(m|n)))$。

□

致谢

我想　感谢 Nicolas Guay 博士在本项目中给予的宝贵指导与支持　t.

参考文献

[1] J. Brundan 和 A. Kleshchev。超群 $Q(n)$的模表示。I。《代数杂志》（2003）。260 1 64–98。ISSN 0021-8693。[2] J. Brundan 和 C. Stroppel。墙壁布劳尔代数与 Khovanov弧代数上的分次。《数学进展》（2012）。231 2 709–773。ISSN 0001-8708。[3] P. Deligne、P. Etingof、D. S. Freed、L. C. Jeffrey、D. Kazhdan、J. W. Morgan、D. R. Morri- son 和 E. Witten（编）。量子场与弦：数学家课程。第1、2卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯；高等研究院（IAS），新泽西州普林斯顿（1999）。ISBN 0-8218-1198-3。[4] R. Dipper 和 S. Doty。有理舒尔代数。《表示论》（2008）。12 58–82。[5] J. Green。 GL_n的多项式表示。施普林格，柏林、海德堡（1980）。[6] J. A. Green。局部有限表示。《代数杂志》（1976）。41 1 137–171。ISSN 0021-8693。

[7] T. Heidersdorf。一般线性超群的混合张量。《代数杂志》（2017）。491 402–446。ISSN 0021-8693。[8] H. M. Khudaverdian 和 T. T. Voronov。Berezinian、外幂与递归数列。《数学物理快报》（2005）。74 2 201–228。ISSN 0377-9017。[9] J. Kujawa。超群 $GL(m|n)$的表示论。博士论文，俄勒冈大学（2003年7月）。[10] C. Lee Shader 和 D. Moon。一般线性李超代数的混合张量表示与有理表示。《代数通讯》（2002）。30 2 839–857。ISSN 0092-7872。[11] F. Marko 和 A. N. Zubkov。GL($m|n$)的 Donkin-Koppinen 滤过与广义舒尔超代数。https://arxiv.org/abs/2008.06558（2020）。[12] N. J. Muir。一般线性李超代数的多项式表示。博士论文，伦敦玛丽女王大学（1991）。[13] I. M. Musson。李超代数与包络代数，数学研究生教材第131卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（2012）。ISBN 978-0-8218-6867- 6。[14] M. Scheunert 和 R. B. Zhang。一般线性超群及其正则函数霍普夫超代数。《代数杂志》（2002）。254 1 44–83。ISSN 0021-8693。[15] M. Yamaguchi。对称群扭群代数与李超代数的对偶。《代数杂志》（1999）。222 1 301–327。ISSN 0021-8693。[16] A. N. Zubkov。一般线性超群和舒尔超代数的若干性质。《代数与逻辑》（2006）。45 3 147–171。