arXiv:2301.01870v2 [math.AP] 4 Jun 2023

一类没有局部极小解但有许多全局极小解的非线性弹性问题

Yury Grabovsky Lev Truskinovsky

2023年6月6日

谨以此文献给 R. Fosdick 85岁寿辰

摘要

我们提出一类适用于任意空间维数的弹性相变模型，其能量井彼此不相容。在硬装置中，这类模型存在大量 Lipschitz 全局极小值，却完全不存在强局部极小值。分析的关键在于证明：硬装置中的每个强局部极小值也是全局极小值；这一结论的适用范围远超本文所选的模型类别。在此过程中，我们还表明，可以围绕经典克拉珀龙定理的一种新颖非线性推广，为一类仿射边界条件构建一种新的充分性证明；R. Fosdick 曾深入研究该定理与动力学之间微妙的联系。

1 引言

弹性静力学中的亚稳性现象表现为存在并非全局极小值的强局部极小值，通常与 Neumann 边界条件（软装置）相关，并与能量井的不相容性相联系 [7]。而在 Dirichlet 问题（硬装置）中，情况有所不同：能量井不相容并不足以导致亚稳性。为证实这一论断，我们在此提出一类具有不相容能量井的超弹性材料模型，并证明对于任意 Dirichlet 边界条件（硬装置），亚稳性都不会出现。

此外，我们证明，对于相关的一类向量变分问题，在任意区域和任意维数下，都不存在不是全局极小化子的强局部极小值。对于这类问题中的一个子类，由于其解析处理格外清晰，我们展示了全局极小化子同时存在惊人的非唯一性。尽管

[1]对亚稳性这一物理概念的上述理解并非唯一可能的解释。在物理学文献中，亚稳性一词通常指某些构型仅在受到足够小的扰动时才保持稳定。在此，我们明确界定“小”的含义，并将强局部极小值解释为：在变形场一致接近的竞争者中使能量最小的构型。更为传统的弱局部极小值，则是指在变形及变形梯度都一致接近的竞争者中使能量最小的构型。

最简单的弹性问题是一个一维标量问题，它在硬装置下既表现出全局极小化子的大量存在，又不存在强局部极小值。 [13],这种效应是否会在多维向量情形下继续存在，至今仍是一个悬而未决的问题。众所周知，弹性能量松弛原则上可能导致最优微观结构出现极为严重的非唯一性； [32, 17], 然而，这种非唯一性是否也会延伸到强局部极小值，通常很难判定。

我们回顾一下：在非线性弹性中，要确保解的唯一性，采用狄利克雷边界条件以及区域具有拓扑上的、乃至几何上的简单性，都是必不可少的 [42, 49, 47]。对于星形区域、仿射位移边界条件以及严格拟凸储能函数，已证明解具有唯一性 [30, 48]。人们也已认识到，唯一性是否成立，可能取决于寻求极小值解时所采用的正则性类 [31], ，以及其可积性类 [4, 45, 24]。相比之下，对于非线性弹性的混合狄利克雷—诺伊曼边值问题，非唯一性普遍存在；最常见的例子与屈曲有关，并涉及多个对称相关的能量极小值的出现 [15], ，但并非仅限于此 [18]。对于纯狄利克雷边界条件，非唯一性的可能性通常与淬火非均匀性有关，例如存在残余应力或非零体力牵引的问题 [12, 35, 51]。

本文所考察的一个简单例子之所以值得关注，是因为它在区域不存在任何几何复杂性的情况下，无需淬火非均匀性，便展现了硬装置问题中全局极小值的多重性。此外，所得的非唯一性并非源于问题的标量性质（即不存在相容性约束），也与欧拉屈曲情形中的对称性相关简并无关。相反，它令人联想到复合材料微结构优化问题中的非唯一性 [3, 39, 17, 36]。

本文将注意力局限于“几何线性化”的 Hadamard 材料这一类，它们可视为完全非线性 Hadamard 材料的简化类比物[22, 26]。后者的能量密度函数具有如下形式

$$W(\boldsymbol{F}) = \mu|\boldsymbol{F}|^2 + h(\det \boldsymbol{F}). \tag{1.1}$$

这里， $\boldsymbol{F}$ 是变形梯度， μ 是刚度度量。非负函数 $h(d)$ 定义在 $(0, +\infty)$ 上，并具有如下性质：当 $d \to 0^+$ 时， $h(d) \to \infty$。如果现在对材料 (1.1) 形式上采用“几何”近似 $\det \boldsymbol{F} \approx 1 + \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I})$，该近似在极限 $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{I}$ 下成立，那么关于小参数的形式渐近展开也必然会导致“物理”线性化，从而使问题变得平凡。由于我们的目标是保留并利用物理非线性，因此我们转而考虑如下能量

$$W(\boldsymbol{H}) = g(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{H}) + \mu|\boldsymbol{H}|^2, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}. \tag{1.2}$$

这在形式上与 (1.1) 无关。然而，按照 [28, 9, 27, 1, 2], ，我们可以对 (1.2) 中的第二项进行几何线性化，用其对称部分 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^t)/2$ 替换 $\boldsymbol{H}$ ；并且，为了强调所得能量密度的各向同性，将结果写成如下形式

$$W_0(\boldsymbol{H}) = f(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}) + \mu|\mathrm{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})|^2, \qquad \mathrm{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{d}\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{I}. \tag{1.3}$$

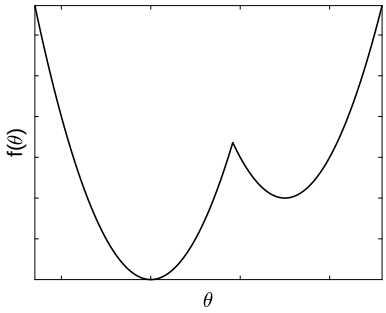

图 1：几何线性双二次哈达玛材料中的双势阱非线性。

尽管在形式上得到了简化，但对于能量为 (1.2) 和 (1.3) 的材料，其平衡问题所具有的数学特征与我们关注的内容相似。因此，我们将重点讨论 (1.3)，同时知道它至少保留了框架无差异性的线性化版本。

我们假设 $\mu > 0$，并选择函数 f，使其非凸且呈“双势阱”形状，从而使总能量具有不相容能量阱。为使分析更为清晰，在显式构造中我们将采用双二次势

$$f(\theta) = \min\{\kappa_0\theta^2, \kappa_0(\theta - \theta_p)^2 + f_0\}, \tag{1.4}$$

如图 1 所示。由此得到的模型描述了一种材料，它能够在两个弹性相之间发生纯体积膨胀型相变；这两个相均为线弹性，且具有相同的弹性模量，但参考能量（化学能）不同。此类弹性问题中的松弛并非平凡问题，历史上一直被视为各种弹性相变数学理论的基准案例 [28, 32, 41]。

如果能量井秩一相连，那么非凸能量的拟凸化有望与秩一凸化一致，在许多情况下甚至与凸化一致。反之，能量井的不相容性可能导致拟凸包络具有非平凡结构。在这方面，材料 (1.2) 值得关注，因为尽管非凸性在 (1.3) 中仅通过标量势引入，能量井仍然不是秩一相连的。例如，这意味着，即使 (1.2) 中的能量井均处于零能量状态，松弛后的能量也不为零，而且最优微观结构也高度非平凡。

只要 $f(\theta)$ 由 (1.4) [32] 给出，对于所有 $\mu > 0$，能量密度 (1.3) 都不是秩一凸的。置于软装置中加载的、具有此类能量的材料，预期会表现出本构滞后 [5, 25, 43, 44, 53]。而在硬装置中，模型 (1.3) 不存在强局部极小值，准静态力学响应是唯一确定的，且变形路径可逆，因为它对应于每个加载参数值下总能量的全局极小化。相关的应力-应变关系可通过了解能量 (1.3) 的拟凸包络获得；对于所有双阱形状的势 [2] $f(\theta)$，该包络在整个参数范围内都可以显式刻画。本文为使内容完整自足，计算了该

[2]事实上，对于所有连续势，能量的拟凸包络都可以得到刻画 $f(\theta)$

能量 (1.3) 的松弛，并将简单层状结构作为最优微观结构；此前， [21] 中曾基于上界和下界的匹配给出了同一结果的另一种证明。

本文得到的最重要的一般性结果（与能量无关），是针对具有仿射边界条件的星形域中的全局极小化子，提出了影响深远的充要条件。这一结果为在能量松弛、或至少弹性双相曲线已明确的例子中刻画能量极小构型提供了新工具。相关分析中的一条重要技术引理，是对经典克拉珀龙定理[3]的一个基本非线性推广；该定理将平衡构型的能量与物体边界上（广义）力所做的功联系起来。结合克拉佩龙定理、仿射边界条件以及局部材料稳定性（拟凸性），我们得到一个不等式，从而证明星形域中所有驻定局部稳定构型都是全局极小值。从更广泛的角度看，所有这些结果都可视为对复合材料中极值微观结构最优性条件的一种推广（例如 [17]）。

作为所得充要条件的一项应用，我们证明，可以将求解能量 (1.3) 的全局极小值这一问题，归结为求解一个有界区域内涉及线性偏微分方程组的非线性自由边界问题。值得注意的是，对于任意双阱标量势 $f(\theta)$，由此得到的问题都可以显式求解。该问题存在退化现象，这是因为最优性条件并未对最优构型中的位移梯度施加十分严格的约束；这正是全局极小值多重性的根源。然而，我们在附录B中证明，在某些带角点的区域中，保持区域对称性的拓扑简单能量极小值可能并不存在。

我们对最优微观结构的分析表明，尽管在所考虑的这类缺乏局部极小化子的问题中，本构滞后并不存在，但正向相变与逆向相变在真实物理空间中可能沿着形态各异的相变路径进行。因此，尽管不存在亚稳性，仍可能出现“形态滞后”现象，即加载与卸载可能沿着不同的形态路径进行。沿这些路径，系统会经历彼此不同但能量等价的构型；如果能够通过某种方式（例如对梯度施加额外控制）使其中一条路径偏向发生，那么这一事实或许会在应用中引起兴趣。

本文结构如下。第2节中，我们计算能量密度 (1.3) 的拟凸化，并利用所得结果证明：对于任意区域和任意狄利克雷型边界条件，不存在非全局的强局部极小值。全局极小值的充要条件在第3节中给出。第4节讨论本模型中全局极小值的取到性及其多重性。最后，第5节总结结果并给出结论。附录A对能量密度的秩一凸化通常会失去严格椭圆性这一问题作技术性讨论。附录B中，我们证明不存在

有下界。[3]在狄利克雷情形下研究唯一性时，克拉珀龙定理型公式的必要性最早由 Knops和Stuart在 [30]中认识到。

在正方形中使能量达到极小的方形对称单连通夹杂。

2 局部极小化子

鉴于我们关注的情形涉及硬器件加载，我们的目标是研究泛函的强局部极小值和全局极小值

$$\mathcal{E}_0(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega \left\{ f(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \mu \left| e(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{d}(\nabla \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{I} \right|^2 \right\} d\boldsymbol{x} \tag{2.1}$$

在满足约束的所有 Lipschitz 位移向量场 $\boldsymbol{u} \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 中

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{2.2}$$

其中 $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $\partial\Omega$ 上的给定 Lipschitz 函数。这里 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 表示一个 Lipschitz 区域。将讨论范围限制在 Lipschitz 极小化子上，使我们能够聚焦于拟凸性失效所导致的失稳 [40, 10] ，并排除其他一些失稳，例如与极小化序列的可积性和无穷远处能量密度的增长不匹配有关的失稳 [6]。

首先回顾一下，强局部极小性的一个必要条件是：对于旧相内部新相共格析出物的形核，系统必须保持稳定。这意味着我们必须有 $\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{A}$，对几乎处处的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$， [49, 命题 4.1],其中

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{\boldsymbol{H} \in \mathbb{M} : W_0(\boldsymbol{H}) = QW_0(\boldsymbol{H})\}, \tag{2.3}$$

其中 $\mathbb{M}$ 表示所有 $d \times d$ 矩阵的集合，而 $QW_0(\boldsymbol{H})$ 是 W_0 [10]的拟凸化。

本文证明，若 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 是能量 (2.1) 对应欧拉-拉格朗日方程的一个弱解，满足边界条件 (2.2)，且对几乎处处的 $\boldsymbol{x} \in\in \Omega$ 有 $\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{A}$，那么它必然是 $\mathcal{E}_0(\boldsymbol{u})$ 的一个全局极小值。不过，在进入实际分析之前，有必要说明，我们尚未发现任何定义在具有平凡拓扑的区域中、硬装置下的适当亚稳态实例。此外，已有研究证明，对于一般能量，在星形区域中采用仿射狄利克雷边界条件的硬装置下，每个强局部极小值都是全局极小值 [48]。在我们的特殊例子中，对于具有分段光滑边界且拓扑任意的区域，采用任意狄利克雷边界条件时，同样的结论也成立。

分析的第一步是刻画所选材料模型的可容许位移梯度集合A。它可以通过计算 $QW_0(\boldsymbol{H})$得到，而在我们的情形下，这一计算可以显式完成。

THEOREM 2.1. 假设 $W_0(\boldsymbol{H})$由式（1.3）给出。那么，

$$QW_0(\boldsymbol{H}) = \Phi^{**}(\operatorname{Tr}\boldsymbol{H}) + \frac{\mu}{4}|\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^t|^2 - 2\mu J_2(\boldsymbol{H}), \tag{2.4}$$

其中

$$\Phi(\theta) = f(\theta) + \frac{d-1}{d}\mu\theta^2, \tag{2.5}$$

$$2J_2(\boldsymbol{H}) = (\operatorname{Tr}\boldsymbol{H})^2 - \operatorname{Tr}(\boldsymbol{H}^2) = 2\sum_{i<j}\begin{vmatrix} h_{ii} & h_{ij} \\ h_{ji} & h_{jj} \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

*i*s 是一个二次零拉格朗日函数，而 Φ^{**} 表示 $\Phi(\theta$ 的凸化).

证明。先从使用周期函数 [10] 定义任意能量密度函数 $W(\boldsymbol{H})$ 的众所周知的拟凸化开始会很方便:

$$QW(\boldsymbol{H}) = \inf_{\boldsymbol{\phi}-Q\text{-periodic}} \fint_Q W(\boldsymbol{H} + \nabla\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}, \tag{2.7}$$

wh其中 $Q = [0,1]^d$。 QW_0 的计算基于以下形式 ula

$$\left|e(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{d}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{I}\right|^2 = \frac{d-1}{d}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})^2 + \frac{1}{4}|\nabla\boldsymbol{u} - (\nabla\boldsymbol{u})^t|^2 - 2J_2(\nabla\boldsymbol{u}). \tag{2.8}$$

设 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$。则

$$\fint_Q W_0(\nabla\boldsymbol{u})d\boldsymbol{x} = -2\mu J_2(\boldsymbol{H}) + \fint_Q \left(\Phi(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \frac{\mu}{4}|\nabla\boldsymbol{u} - (\nabla\boldsymbol{u})^t|^2\right)d\boldsymbol{x}. \tag{2.9}$$

由于对于所有 $\theta\in\mathbb{R}$， $\Phi^{**}(\theta) \le \Phi(\theta)$，我们得到不等式

$$\fint_Q W_0(\nabla\boldsymbol{u})d\boldsymbol{x} \ge -2\mu J_2(\boldsymbol{H}) + \fint_Q \left(\Phi^{**}(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \frac{\mu}{2}|\nabla\boldsymbol{u} - (\nabla\boldsymbol{u})^t|^2\right)d\boldsymbol{x}.$$

现在应用詹森不等式可得:

$$\fint_Q W_0(\nabla\boldsymbol{u})d\boldsymbol{x} \ge -2\mu J_2(\boldsymbol{H}) + \Phi^{**}(\operatorname{Tr}\boldsymbol{H}) + \frac{\mu}{4}|\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^t|^2. \tag{2.10}$$

因此,

$$QW_0(\boldsymbol{H}) \ge -2\mu J_2(\boldsymbol{H}) + \Phi^{**}(\operatorname{Tr}\boldsymbol{H}) + \frac{\mu}{4}|\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^t|^2. \tag{2.11}$$

为了证明等式成立，我们需要构造一个周期函数 $\boldsymbol{\phi}$ ，使得 $\nabla\boldsymbol{\phi} = (\nabla\boldsymbol{\phi})^t$，并且

$$\fint_Q \Phi(\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z}) + \operatorname{Tr}\boldsymbol{H})d\boldsymbol{z} = \Phi^{**}(\operatorname{Tr}\boldsymbol{H}). \tag{2.12}$$

如果由 (2.5) 给出的 $\Phi(\theta)$ 是凸的，那么原始能量 $W_0(\boldsymbol{H})$ 是拟凸的（实际上是多凸的），且公式 (2.4) 成立。因此，值得关注的情况是 $\Phi(\theta)$ 保持双阱形状；此时， $\Phi^{**}(\theta) = \Phi(\theta)$ 当且仅当 $\theta\notin(\theta_1,\theta_2)$，如图 2 所示。例如，对于势 (1.4)，我们得到

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{f_0}{\kappa_0\theta_p} + \frac{(d-1)\mu\theta_p}{d\kappa_0 + (d-1)\mu}\right), \qquad \theta_2 = \theta_p + \frac{1}{2}\left(\frac{f_0}{\kappa_0\theta_p} - \frac{(d-1)\mu\theta_p}{d\kappa_0 + (d-1)\mu}\right). \tag{2.13}$$

[4]对于势 (1.4)，这种情况从未发生。

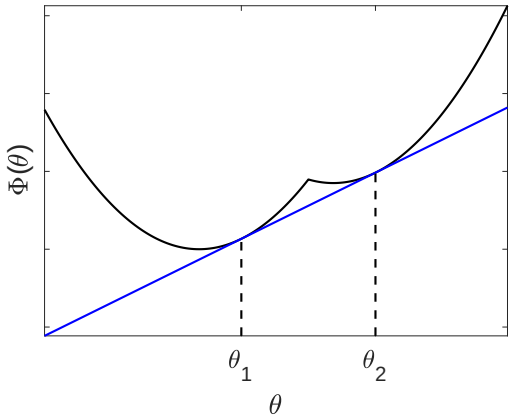

图 2：通过公切线构造定义 $\theta_1 < \theta_2$ 。

因此，如果 Tr $\boldsymbol{H} \notin (\theta_1, \theta_2)$，那么 $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ 在 (2.10) 中取等号。如果 Tr $\boldsymbol{H} \in (\theta_1, \theta_2)$，那么存在 $\omega \in (0, 1)$，使得

$$\operatorname{Tr} \boldsymbol{H} = \omega\theta_1 + (1-\omega)\theta_2. \tag{2.14}$$

为了使 (2.10) 中等号成立，我们需要将周期胞元 $Q = [0,1]^d$ 分成两个子集 A_1，其体积为 ω，以及 A_2，其体积为 $1-\omega$，使得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \theta_1 \chi_{A_1}(\boldsymbol{x}) + \theta_2 \chi_{A_2}(\boldsymbol{x}) \tag{2.15}$$

对所有 $\boldsymbol{x} \in Q$ 均成立。通过层合构造很容易实现这一点，其中 $A_1 = [0, \omega] \times [0,1]^2$ 和 $A_2 = [1-\omega, 1] \times [0,1]^2$ 以及函数 $\nabla\boldsymbol{\phi}$ 均为对称的分段常数：

$$\nabla\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}_1 \chi_{A_1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{M}_2 \chi_{A_2}(\boldsymbol{x}).$$

对称矩阵 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 可由 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ 的周期性轻易确定，这等价于 $\int_Q \nabla\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})dx = \mathbf{0}$，以及 (2.15)：

$$\boldsymbol{M}_1 = (1-\omega)[\![\theta]\!]\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{M}_2 = -\omega[\![\theta]\!]\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1,$$

其中 $[\![\theta]\!] = \theta_1 - \theta_2$。这些选择保证 (2.12) 中等号成立。 □

推论 2.2。

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{\boldsymbol{H} \in \mathbb{M} : \operatorname{Tr} \boldsymbol{H} \notin (\theta_1, \theta_2)\}. \tag{2.16}$$

构造的能量密度 $QW_0(\boldsymbol{H})$显然是多凸的，并且与$RW_0(\boldsymbol{H})$一致，后者是 $W_0(\boldsymbol{H})$的秩一凸化。事实上，正如定理 2.1 的证明所示，式 (2.7) 中的下确界可以通过一个简单层状结构达到。鉴于最优微观结构十分简单，事后可以得出结论：显式计算 $QW_0(\boldsymbol{H})$对于刻画集合A并非必要。我们也可以利用不等式 (2.10)，并借助 [19, 20]中引入的跳跃集的知识和性质来勾画该集合。事实上，不等式 (2.10) 意味着所有满足以下条件的 $\boldsymbol{H}$

$\Phi^{**}(\mathrm{Tr}\ \boldsymbol{H}) = \Phi(\mathrm{Tr}\ \boldsymbol{H})$都是可容许的，即 $\{\boldsymbol{H} \in \mathbb{M}\colon \mathrm{Tr}\ \boldsymbol{H} \notin (\theta_1, \theta_2)\} \subset \mathrm{A}$。接着，我们可以通过寻找位移梯度值的矩阵对 $\boldsymbol{H}_\pm$，证明所有满足 $\theta_1 < \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{H} < \theta_2$ 的 $\boldsymbol{H}$ 都不满足秩一凸性；这些矩阵对可出现在表示相界的光滑跳跃不连续的两侧。我们回想一下，[19], 这些矩阵满足方程

$$[\![\boldsymbol{H}]\!] = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{n}, \quad [\![W_{\boldsymbol{H}}]\!]\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \quad [\![W_{\boldsymbol{H}}]\!]^t\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}, \quad [\![W]\!] = \langle \{\!\{W_{\boldsymbol{H}}\}\!\}, [\![\boldsymbol{H}]\!] \rangle, \tag{2.17}$$

其中

$$[\![\boldsymbol{H}]\!] = \boldsymbol{H}_+ - \boldsymbol{H}_-, \qquad \{\!\{W_{\boldsymbol{H}}\}\!\} = \frac{1}{2}(W_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{H}_+) + W_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{H}_-)).$$

我们已在 [21] 中证明，能量 (1.3) 的跳跃集由两个超平面的并组成

$$\mathfrak{J}_- = \{\boldsymbol{H} \in \mathbb{M} : \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{H} = \theta_1\}, \qquad \mathfrak{J}_+ = \{\boldsymbol{H} \in \mathbb{M} : \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{H} = \theta_2\},$$

因此，若 $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{H}_- = \theta_1$，则相应的 $\boldsymbol{H}_+$ 集合构成一个射影平面

$$\boldsymbol{H}_+ = \boldsymbol{H}_- + (\theta_2 - \theta_1)\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}, \quad |\boldsymbol{n}| = 1.$$

正如我们已经指出的，不等式 (2.10) 意味着 $\mathfrak{J}_\pm \subset \mathcal{A}$。

下面给出的引理对一般的能量密度 $W(\boldsymbol{F})$ 均成立，它表明我们的结果 [20] 意味着所有矩阵 $\boldsymbol{H}_t = t\boldsymbol{H}_+ + (1-t)\boldsymbol{H}_-$ 对任意 $t \in (0, 1)$ 也都不是秩一凸的。由于线段 $\boldsymbol{H}_t$ 覆盖了满足 $\theta_1 < \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{H} < \theta_2$ 的所有点 $\boldsymbol{H}$，这就证明了等式 (2.16)。

Lemma 2.3. 设 $\boldsymbol{H}_\pm$ 是能量密度函数 $W(\boldsymbol{H})$ 的跳跃集 $\mathfrak{J}$ 上一对相应的点。设

(i) $W(\boldsymbol{H}) \geq W(\boldsymbol{H}_-) + \langle \boldsymbol{P}_-, \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_- \rangle$ 对任意矩阵 $\boldsymbol{H}$，使得 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_-) = 1$，其中 $\boldsymbol{P}_- = W_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{H}_-)$;

(ii) 矩阵 $\boldsymbol{H}_t = t\boldsymbol{H}_+ + (1-t)\boldsymbol{H}_-$, $t \in (0, 1)$ 中没有一个满足跳跃集方程 (2.17)，其中 $\boldsymbol{H}_-$ 是相应的一对。

那么，所有矩阵 $\boldsymbol{H}_t$, $t \in (0,1)$ 都必定不满足秩一凸性，也就是说，它们必定不满足不等式

$$W(\boldsymbol{H}) \geq W(\boldsymbol{H}_t) + \langle \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_t \rangle \quad \forall \boldsymbol{H}\colon\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_t) = 1, \tag{2.18}$$

其中 $\boldsymbol{P}_t = W_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{H}_t)$。

证明。为导出矛盾，假设 (2.18) 成立。那么，由于矩阵 $\boldsymbol{H}_-, \boldsymbol{H}_t$ 和 $\boldsymbol{H}_+$ 都位于同一条秩一线上，我们得到

$$W(\boldsymbol{H}_-) + t\langle \boldsymbol{P}_-, [\![\boldsymbol{H}]\!] \rangle \leq W(\boldsymbol{H}_t) \leq W(\boldsymbol{H}_+) - (1-t)\langle \boldsymbol{P}_t, [\![\boldsymbol{H}]\!] \rangle.$$

现在，利用跳跃集方程 (2.17)，我们得到

$$(1-t)(\langle \boldsymbol{P}_-, [\![\boldsymbol{H}]\!] \rangle - \langle \boldsymbol{P}_t, [\![\boldsymbol{H}]\!] \rangle) \geq 0.$$

利用这一事实 $\boldsymbol{H}_t - \boldsymbol{H}_- = t[\![\boldsymbol{H}]\!]$ 我们得到

$$\langle \boldsymbol{P}_t - \boldsymbol{P}_-, \boldsymbol{H}_t - \boldsymbol{H}_- \rangle \leq 0. \tag{2.19}$$

不等式 (2.19) 的变分意义被称为相间交换稳定性不等式，在 [20], 中得到了阐明；根据 [20, 引理 4.1],，秩一相关矩阵对 $\boldsymbol{H}_-$ 和 $\boldsymbol{H}_t$ 必须满足跳跃集方程 (2.17)，这与该引理的假设 (ii) 矛盾。因此，假设 (2.18) 成立是不可能的，所有矩阵 $\boldsymbol{H}_t$, $t \in$ (0,1) 都必然不是秩一凸的。 □

注 2.4. 能量密度 $QW_0(\boldsymbol{H}) = RW_0(\boldsymbol{H})$ 是非凸的，因为它沿着 $\boldsymbol{I}$ 的倍数方向呈双阱形状，具体而言， $QW_0(\varepsilon \boldsymbol{I}) = \Phi^{**}(d\varepsilon) - d(d-1)\mu\varepsilon^2$。这一点显然可由以下事实看出：在区间 $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ 内，其体积模量为负，其中 θ_1 和 θ_2 由双二次材料模型 (1.4) 的公式 (2.13) 给出。此外，该模量的值为常数，等于 $-2(d-1)\mu/d$，参见 *[9],*；这恰好对应于平衡方程失去强椭圆性的阈值（Legendre-Hadamard 条件达到饱和）。这与秩一包络上的声学张量发生一般性退化有关，详见附录A。我们这个例子中纵波速度的消失，使相变材料转变为弹性以太 *[14]*。

现在我们可以证明，对于一类能量 $W(\boldsymbol{H})$（我们的例子属于这一类），在硬装置（狄利克雷边界条件）下，所有强局部极小值都必定是全局极小值。导出这一结果的首要观察是：就亚稳态的存在性而言，任何两个具有相同拟凸包络的能量 W 和 W' 都是等价的。这是因为对于任何亚稳态 $\boldsymbol{u}$

$$\int_\Omega W(\nabla \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{x} = \int_\Omega QW(\nabla \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{x}.$$

因此， W 的任何亚稳构形也是 QW的亚稳构形。定理 2.1 表明，我们的能量具有如下性质

$$QW(\boldsymbol{H}) = N(\boldsymbol{H}) + C(\boldsymbol{H}), \tag{2.20}$$

其中， $N(\boldsymbol{H})$是零拉格朗日量， $C(\boldsymbol{H})$是凸的，且 C^1 光滑。

THEOREM 2.5. 设 $W(\boldsymbol{H})$ 为满足（2.20）的能量密度。那么，$\int_\Omega W(\nabla \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{x}$ 的任何 Lipschitz 强局部极小值，只要满足给定的狄利克雷边界条件，就是全局极小值。

证明。设 $\boldsymbol{v}$ 是一个 Lipschitz 竞争函数，且在 $\partial\Omega$ 上与 $\boldsymbol{u}$一致。那么

$$\int_\Omega N(\nabla \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x} = \int_\Omega N(\nabla \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{x}, \qquad C(\nabla \boldsymbol{v}) \geq C(\nabla \boldsymbol{u}) + \langle C_{\boldsymbol{F}}(\nabla \boldsymbol{u}), \nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \rangle. \tag{2.21}$$

由于 $\boldsymbol{u}$是一个平衡态，我们有

$$0 = \nabla \cdot W_{\boldsymbol{F}}(\nabla \boldsymbol{u}) = \nabla \cdot QW_{\boldsymbol{F}}(\nabla \boldsymbol{u}) = \nabla \cdot N_{\boldsymbol{F}}(\nabla \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot C_{\boldsymbol{F}}(\nabla \boldsymbol{u}) = \nabla \cdot C_{\boldsymbol{F}}(\nabla \boldsymbol{u}).$$

对任意 $\boldsymbol{H} \in \mathrm{A}$， $W_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{H}) = QW_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{H})$ 的等式成立，这是因为函数$W(\boldsymbol{H}) - QW(\boldsymbol{H})$ 非负、C^1光滑，并且在所有$\boldsymbol{F} \in \mathrm{A}$处都取得其最小值 0。现在，对 (2.21) 中不等式右侧第二项进行分部积分，可得 $\int_\Omega C(\nabla \boldsymbol{v})^{d\boldsymbol{x}} \geq \int_\Omega C(\nabla \boldsymbol{u})d\boldsymbol{x}$。由此可得

$$\int_\Omega QW(\nabla \boldsymbol{v})d\boldsymbol{x} \geq \int_\Omega QW(\nabla \boldsymbol{u})d\boldsymbol{x}.$$

□

注 2.6. Sivaloganathan 和 Spector 在 *[46]*中指出了一个重要事实：为了使不等式 (2.21) 成立， $C(\boldsymbol{H})$ 无须是凸的。事实上，正如作者所证明的，只需对所有 $\boldsymbol{x} \in \Omega$，满足 $C^{**}(\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = C(\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$；也就是说， $C(\boldsymbol{F})$ 在 $\nabla \boldsymbol{u}$ 的所有取值处都与其凸包一致。

3 全局极小化子

本节暂时转而采用一个更一般的设定。例如，我们假设“形变” $\boldsymbol{y}$ 是一个向量场 $\boldsymbol{y} : \Omega \to \mathbb{R}^m$。事实上，下面的分析既不依赖于 $\boldsymbol{x}$ 空间的维数，也不依赖于 $\boldsymbol{y}$ 空间的维数，也不依赖于 $W(\boldsymbol{F})$ 的具体形式。

考虑拟凸包络定义中的取到问题

$$QW(\boldsymbol{F}) = \inf_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)} \fint_\Omega W(\nabla \boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}, \tag{3.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个星形利普希茨区域。下面我们将证明，对于 (3.1)，若利普希茨平衡构型满足亚稳性的必要条件，且在 $\partial\Omega$ 附近足够正则，则它们必为全局极小化子。

首先回顾变分泛函的利普希茨强局部极小值众所周知的必要条件。

第一个经典必要条件是欧拉-拉格朗日方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P}(\nabla \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}) = W_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}), \tag{3.2}$$

弱局部极小值也必须满足该方程。第二个条件是诺特方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P}^*(\nabla \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{P}^*(\boldsymbol{F}) = W(\boldsymbol{F})\boldsymbol{I}_d - \boldsymbol{F}^t\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}). \tag{3.3}$$

我们回顾一下，如果 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 属于 C^2 类，那么 (3.3) 是 (3.2) 的推论；而存在满足 (3.2) 但不满足 (3.3) 的利普希茨构型。例如，麦克斯韦关系（即 (2.17) 中的最后一个方程）是 (3.3) 的推论，但不是 (3.2) 的推论。

定义 3.1. 若构型 $\boldsymbol{y} \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ 同时满足 (3.2) 和 (3.3)，则称其为驻定的。

第二个经典必要条件是：对几乎处处的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$， $\nabla \boldsymbol{y} \in \mathrm{A}$ 拟凸，其中 A 定义于 (2.3)。[20]已证明，对于奇异点仅为光滑相界的构型，(3.2) 与拟凸性的结合意味着驻定性。然而，一般而言， [34] 中的一个例子表明，对于严格拟凸能量，可能存在不是强局部极小值的弱局部极小值；该构型很可能在 [34] 不满足驻定性。

事实证明，对于星形域中的仿射边界条件，只要假设 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 在区域边界附近具有正则性，上述两个必要条件就足以保证它是一个全局极小值。

THEOREM 3.2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是具有 Lipschitz边界的星形域。假设

(i) $\boldsymbol{y} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 是 Lipschitz连续的,

(ii) $\boldsymbol{y}$ 在分布意义下满足 (3.2) 和 (3.3),

(iii) 对几乎处处的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$， $\nabla \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 是局部稳定的,

(iv) 对所有 $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$， $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$,

(v) There exists $\epsilon > 0$, *such that* $\boldsymbol{y} \in C^1(\overline{\Omega_\epsilon}; \mathbb{R}^m)$, *where* $\Omega_\epsilon = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\Omega) < \epsilon\}$.

那么 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 就是（3.1）中的全局极小值，即

$$\int_\Omega W(\nabla \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x} = |\Omega| QW(\boldsymbol{F}). \tag{3.4}$$

证明。尽管下文证明中的每个要点都以某种形式出现在 Knops和Stuart 的唯一性证明中, [30], 我们的定理仍是新的，因为它不假设能量密度 $W(\boldsymbol{F})$ 是拟凸的。我们的思路是借助对 [30] 中某个公式的大幅推广，将平衡构型的能量表示为边界积分；单就这一公式而言，它本身就可以视为经典克拉珀龙定理[5]的一个非平凡的非线性推广。

LEMMA 3.3. 假设 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 是 Lipschitz 区域 Ω 中的 Lipschitz 驻定平衡态。
Then

$$E[\boldsymbol{y}] = \int_\Omega W(\nabla \boldsymbol{y}) = \frac{1}{d} \int_{\partial\Omega} \{\boldsymbol{P}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{P}^* \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}\} d\boldsymbol{x}, \tag{3.5}$$

其中， $\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{P}^*\boldsymbol{n}$ 可视为迹泛函，因为它们分别作用于 Lipschitz 函数$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{x}$。

[5]线弹性中的经典克拉珀龙定理指出，平衡构型的弹性能 $E[\boldsymbol{u}] = (1/2)\int_\Omega \langle \mathsf{C}(\boldsymbol{x})e(\boldsymbol{u})\ e(\boldsymbol{u})\rangle d\boldsymbol{x}$ 可由公式 $E[\boldsymbol{u}] = (1/2)\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} dS$ 计算，其中 $\boldsymbol{\sigma} = \mathsf{C}(\boldsymbol{x})e(\boldsymbol{u})$ 是应力张量， [16]。

证明。

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{P}^*\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}dS = \int_\Omega \langle \boldsymbol{P}^*, \nabla\boldsymbol{x}\rangle d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{P}^*)d\boldsymbol{x} = d\int_\Omega W(\nabla\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \langle \boldsymbol{P}, \nabla\boldsymbol{y}\rangle d\boldsymbol{x}.$$

方程 (3.5) 由下式得出

$$\int_\Omega \langle \boldsymbol{P}, \nabla\boldsymbol{y}\rangle d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}dS.$$

□

现在我们将公式 (3.5) 应用于 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 的能量。利用边界条件 (iv) 和假设 (v)，对所有 $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$，均有

$$\nabla\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}.$$

因此我们计算得

$$dE[\boldsymbol{y}] = \int_{\partial\Omega} (W(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})dS$$

接下来，我们使用局部稳定性条件 (iii)，并引用 [20, 引理 4.2]。为完整起见，现列出我们所需的引理部分。

Lemma 3.4. 设 $V(\boldsymbol{F})$ 是一个秩一凸函数，且 $V(\boldsymbol{F}) \le W(\boldsymbol{F})$。令

$$\mathcal{A}_V = \{\boldsymbol{F}\in\mathcal{O} : W(\boldsymbol{F}) = V(\boldsymbol{F})\},$$

其中 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{M}$ 的一个开子集，在该子集上 $W(\boldsymbol{F})$ 属于 C^1类。那么对每个 $\boldsymbol{F}\in\mathcal{A}_V$、$\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m$ 和 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^d$

$$V(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) \ge W(\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}. \tag{3.6}$$

现在，我们令 $V(\boldsymbol{F})$ 为 $QW(\boldsymbol{F})$，从而应用引理 3.4。根据假设 (iii)，对于每个$\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$，场 $\nabla\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}+\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n}$ 属于 $\mathcal{A}_V$。令 $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n}$，不等式 (3.6) 变为

$$QW(\boldsymbol{F}) \ge W(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}. \tag{3.7}$$

最后，我们利用 Ω 为星形的假设。若将原点选在星形中心，则函数 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}$ 在 $\partial\Omega$ 上所有点处始终非负。因此，不等式 (3.7) 意味着

$$dE[\boldsymbol{y}] \le QW(\boldsymbol{F})\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})dS = d|\Omega|QW(\boldsymbol{F}).$$

由于 $|\Omega|QW(\boldsymbol{F})$ 是 $E[\boldsymbol{y}]$ 的最小值，我们得出 $E[\boldsymbol{y}] = QW(\boldsymbol{F})$，而 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 是全局极小值。

□

4 全局极小化子的多重性

上一节证明，在具有仿射边界条件的硬装置中不存在强局部极小值，因此所有全局极小值的刻画问题仍有待探讨。

$$QW_0(\boldsymbol{H}_0) = \inf_{\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{x}} \fint_\Omega W_0(\nabla \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{x}, \tag{4.1}$$

其中 $W_0(\boldsymbol{H})$ 定义见 (1.3)。我们指出，第2节中周期层状结构的构造，为我们在任意区域中提供了 (4.1) 的一个极小化序列。本节探讨 (4.1) 中极小值的可达性问题。就此而言，层状结构不再能用作边界条件

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}_0\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{4.2}$$

与 $\nabla \boldsymbol{u}$ 在 Ω 中几乎处处恰好取两个特定值的条件不相容。因此，我们将尝试利用定理 3.2 中的充分条件寻找能量极小值。相应地，我们只需找到满足 (4.2) 且符合稳定性条件的 (3.2) 的解 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \notin (\theta_1, \theta_2) \text{ for a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{4.3}$$

Let $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{H}_0\boldsymbol{x}$。于是，(3.2) 可用 $\boldsymbol{\phi}$ 表示如下

$$\mu\Delta\boldsymbol{\phi} + \nabla\Phi'(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = \mu\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{4.4}$$

将 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ 与 (4.4) 的点积积分分部后，我们得到

$$\int_\Omega \left\{\mu(|\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}|^2 - |\nabla\boldsymbol{\phi}|^2) - \Phi'(\nabla \cdot \boldsymbol{u})\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}\right\} d\boldsymbol{x} = 0.$$

现在我们使用代数恒等式

$$|\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}|^2 - |\nabla\boldsymbol{\phi}|^2 = 2J_2(\nabla\boldsymbol{\phi}) - \frac{1}{2}|\nabla\boldsymbol{\phi} - (\nabla\boldsymbol{\phi})^t|^2$$

以及由 (2.6) 给出的 $J_2(\nabla\boldsymbol{\phi})$ 是零拉格朗日量这一事实，从而得到

$$\int_\Omega \left\{\frac{\mu}{2}|\nabla\boldsymbol{\phi} - (\nabla\boldsymbol{\phi})^t|^2 + \Phi'(\nabla \cdot \boldsymbol{u})\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}\right\} d\boldsymbol{x} = 0. \tag{4.5}$$

现在我们来证明 (4.3) 蕴含

$$\int_\Omega \Phi'(\nabla \cdot \boldsymbol{u})\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \geq 0. \tag{4.6}$$

事实上，根据 θ_1 和 θ_2 （作为公切点）的几何解释，结合 (4.3)，我们可以写出

$$\Phi(\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = \Phi^{**}(\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) \tag{4.7}$$

对几乎处处的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 成立。对于凸函数 $\Phi^{**}(\theta)$，该函数图像的切线始终位于图像下方，这意味着

$$\Phi^{**}(\eta) \geq \Phi'(\theta)(\eta - \theta) + \Phi(\theta)$$

对任意 $\eta \in \mathbb{R}$ 以及任意 $\theta \notin (\theta_1, \theta_2)$。代入 $\eta = \operatorname{Tr} \boldsymbol{H}_0$ 和 $\theta = \nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$，我们得到 n

$$\Phi'(\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \geq \Phi(\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) - \Phi^{**}(\operatorname{Tr} \boldsymbol{H}_0) = \Phi^{**}(\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) - \Phi^{**}(\operatorname{Tr} \boldsymbol{H}_0)$$

对几乎处处的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$。现在，(4.6)由凸函数 $\Phi^{**}(\theta)$ 的詹森不等式以及以下事实可得:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \operatorname{Tr} \boldsymbol{H}_0. \tag{4.8}$$

现在，不等式 (4.6) 与 (4.5) 一起推出 $\nabla \boldsymbol{\phi} = (\nabla \boldsymbol{\phi})^t$。因此，

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{\phi} - (\nabla \boldsymbol{\phi})^t) = \Delta \boldsymbol{\phi} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}). \tag{4.9}$$

因此，(4.4) 推出 $\nabla \Phi'(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = 0$，并且存在一个常数 P_0，使得

$$\Phi'(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = P_0. \tag{4.10}$$

因此，约束 (4.3) 意味着：要么 $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \theta_0$ 是 Ω 中的常函数，要么 $P_0 = \Phi'(\theta_1) = \Phi'(\theta_2)$，在这种情况下，存在 Ω 的一个子集 A，使得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \theta_1 \chi_A(\boldsymbol{x}) + \theta_2 \chi_{\Omega \setminus A}(\boldsymbol{x}), \tag{4.11}$$

其中 $\theta_1 < \theta_2$ 是区间 $\{\theta \in \mathbb{R}$ 的端点：$\Phi^{**}(\theta) < \Phi(\theta)\}$（见图 2）。回顾 (4.8)，我们得出结论：若 $\operatorname{Tr} \boldsymbol{H}_0 \notin (\theta_1, \theta_2)$，则必有 $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \operatorname{Tr} \boldsymbol{H}_0$。但此时 $\nabla \cdot \boldsymbol{\phi} = 0$，因此根据 (4.9)，$\boldsymbol{\phi}$ 在 Ω 中满足 $\Delta \boldsymbol{\phi} = 0$，且在 $\partial\Omega$ 上满足 $\boldsymbol{\phi} = 0$。由此可得 $\boldsymbol{\phi} = 0$，进而得出结论：$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}_0 \boldsymbol{x}$ 是满足 (4.3) 的唯一平衡态。

若 $\operatorname{Tr} \boldsymbol{H}_0 \in (\theta_1, \theta_2)$，那么除了 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}_0 \boldsymbol{x}$ 之外，我们还可能有满足 (4.11) 的其他解，在这种情况下

$$\omega = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\operatorname{Tr} \boldsymbol{H}_0 - \theta_2}{\theta_1 - \theta_2} \tag{4.12}$$

是 $\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \theta_1$ 所在相的体积分数。

此外，若 Ω 是单连通的，则存在一个标量势 $h \in W^{2,\,2\,0}(\Omega)$，使得 $\boldsymbol{\phi} = \nabla h$。然后，根据势 h，我们得到一个自由边界问题

$$\begin{cases} \Delta h = (\theta_1 - \theta_2)(\chi_A(\boldsymbol{x}) - \omega), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \\ h \in W_0^{2,2}(\Omega). \end{cases} \tag{4.13}$$

如公式 (4.12)、(4.13) 所示，析出物的体积分数 ω 由硬器件加载 $\boldsymbol{H}_0$唯一确定，而其剪切分量不会影响析出物形貌。值得注意的是，尽管 (4.13) 看起来像一个泊松方程的柯西问题，但 (4.13) 中的右端项并非固定；只要能找到恰当形状的夹杂 A，问题便可求解。

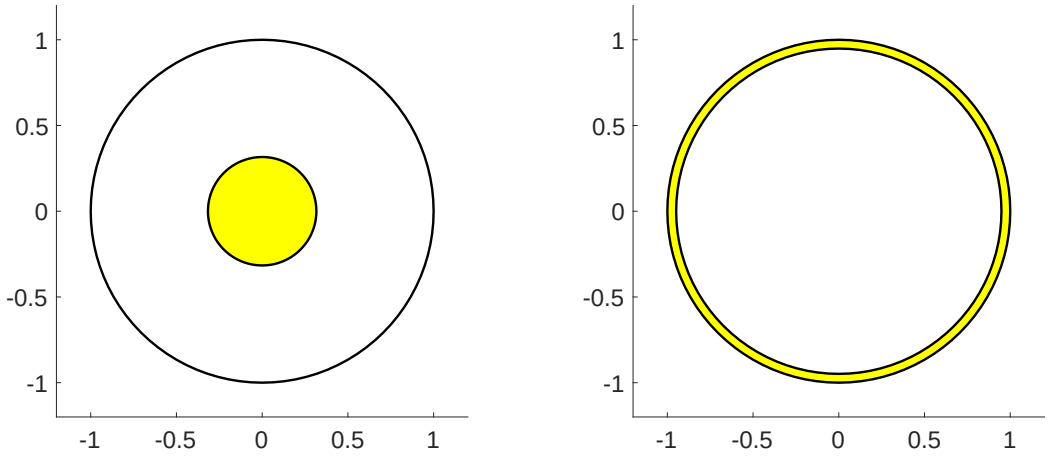

图3：形态滞后，展示了相排列的两种不同形态，对应于相2的体积分数为 10%（$\omega = 0.1$），以黄色显示。左图中，形核从中心开始。右图中，形核从边界开始。

事实上，对于某些特别简单的区域几何，可以显式地轻松求得 (4.13) 的一个解。例如，当 Ω 为单位球时，很容易构造径向对称解；此时集合 A 可以取为半径 $r_0 = \omega^{1/d}$ 的同心球，也可以取其补集，在这种情况下 $r_0 = (1-\omega)^{1/d}$。于是，(4.13) 的解为 $h(\boldsymbol{x}) = h_\omega(|\boldsymbol{x}|)$，其表达式为

$$h_\omega(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2d}(\theta_1 - \theta_2)(1-\omega)\left(r^2 - \dfrac{d(\omega^{2/d} - \omega)}{(d-2)(1-\omega)}\right), & 0 \le r \le \omega^{1/d} \\ -\dfrac{1}{2d}(\theta_1 - \theta_2)\omega\left(r^2 + \dfrac{2}{(d-2)r^{d-2}} - \dfrac{d}{d-2}\right), & \omega^{1/d} \le r \le 1, \end{cases} \tag{4.14}$$

在前一种情况下。在后一种情况下，$h(\boldsymbol{x})$由同一个公式 (4.14) 给出，其中 θ_1和 θ_2 互换，且 ω 替换为 $1-\omega$，即 $h(\boldsymbol{x}) = -h_{1-\omega}(|\boldsymbol{x}|)$。这两个能量相同的最优构型如图3所示。随着体积分数 ω 增加，左图中的晶核（黄色部分）将向外生长，而右图中的晶核（同样以黄色显示）将向内生长。当 $\omega = 1$时，随着第二相完全占据整个区域，两种相变均告结束。需要注意的是，相关的相变形态机制虽然始于并终于相同的构型，且经历能量相当的状态，但彼此仍然不同。

可以证明，“同心球”解 (4.14) 可用于在任意其他 Lipschitz 区域中构造一个无穷解族。这可以通过所谓的 Hashin“同心球”构造 [23] 来实现。在这一构造中，集合 A 是径向对称解 (4.14) 经不同比例缩放后所得副本的可数并，它们填满 Ω，除去一个勒贝格测度为零的集合。令 $B(\boldsymbol{x}_i, a_i) \subset B(\boldsymbol{x}_i, R_i)$，$i = 1, 2, \ldots$ 为

Hashin构造中使用的同心球，其中

$$\frac{a_i^d}{R_i^d} = \omega.$$

构造中的内球 $B(\boldsymbol{x}_i, a_i)$ 属于集合 A，而球壳$B(\boldsymbol{x}_i, R_i) \setminus B(\boldsymbol{x}_i, a_i)$ 属于 $\Omega \setminus A$。函数 $h(\boldsymbol{x})$ 限制在球 $B(\boldsymbol{x}_i, R_i)$ 上时，由下式给出

$$h(\boldsymbol{x}) = R_i^2 \, h_\omega \left(\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i|}{R_i} \right), \quad \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_i, R_i),$$

其中 h_ω 由 (4.14) 给出。如此在每个同心球上定义的函数 $h(\boldsymbol{x})$ 确实满足 (4.13)，因为在每个球 $B(\boldsymbol{x}_i, R_i)$ 的边界上， $h(\boldsymbol{x})$ 和$\nabla h(\boldsymbol{x})$ 都为零。

显然，在非圆形区域中，“同心球”构造会具有无限大的表面积（形式证明见 [37, 52]），这在物理上更现实的情形中是不可接受的，因为相界（梯度不连续的表面）会带来额外的表面能。因此，人们可能会关心是否也存在其他具有有限表面积的最优微观结构。在某些情况下，如果区域 Ω 足够简单，确实已知存在这类表面能较低的替代方案。例如，如果 Ω 是一个椭球，那么表面面积较小的极小化解 A 是一个共焦椭球（或其补集） [8, 38, 50, 54, 17]。然而，如果 Ω 更复杂，例如是一个正方形，那么表面面积较小的极小化解（如果存在）可能并不平凡。为佐证这一说法，我们将在附录B中证明，在这种情况下，不存在具有正方形对称性和简单拓扑的最优夹杂。

5 结论

本文研究了一类经典的非线性弹性问题，涉及发生相变的材料。从数学上看，这一物理问题可归结为变分法中的一个非凸向量问题。

在这一框架下，我们给出了一个简单却并非平凡的（材料）能量密度示例：在硬装置中，亚稳性的缺失与全局极小值解的严重非唯一性并存。

弹性静力学中的亚稳性是指存在非全局的强局部极小值。由于滞后是伴随马氏体相变的典型现象，因此亚稳性普遍存在。对于 Neumann 边界条件，此类局部极小值的存在确实很常见，因为其存在可与能量井通常不相容联系起来；而我们在此证明，对于狄利克雷边界条件，能量井的不相容性未必会导致“亚稳性”。具体而言，我们给出了一个超弹性材料能量密度的例子：其能量非秩一凸，具有双势阱能量，且能量井之间不存在秩一连接；我们证明，对于任意区域和任意狄利克雷边界条件，都不存在非全局的强局部极小值。论证在解析上的清晰性，得益于所选能量密度极为简单：它是几何线性且各向同性的。

对于同一材料模型，我们完整刻画了硬器件加载下定义全局能量极小值的充分必要条件。所得条件揭示了全局极小化子的多重性，以及与之相关、既非源于客观性也非源于晶体对称性的非唯一性。作为这项分析的重要组成部分，我们采用了一种新颖的方法，将平衡构型的能量表示为边界积分；这可视为经典克拉珀龙定理的一种非平凡非线性推广。

尽管我们证明了模型中能量的松弛（拟凸化）可以通过简单的层合或包覆球构造实现，但这些最优微观结构几乎不具备物理意义，因为其对应的表面积是无限的。在真实的物理情形中，有限的表面能会在能量相同的构型中发挥筛选机制的作用 [29, 33, 11], ，排除表面积无限的构造。因此，在物理应用中特别值得关注的是表面积有限的全局极小化子。我们明确计算了有界区域具有光滑边界时的一参数非仿射能量极小构型族。所得解的一个有趣之处在于，尽管不存在亚稳性及相应的本构滞后，它仍表明，正向相变和逆向相变在经过能量相同的构型时，可能沿着不同的形态路径进行。如果采用超越经典连续介质弹性力学所涵盖的尺度和范围的微观结构操控方式，这种形态滞后的可能性或许会在应用中带来优势。

致谢。YG 感谢 Pavel Etingof 指出了相关参考文献，这些文献证明了 1992 年 Hashin同心球构造的表面积是无穷大的。

经费支持。YG 获得了美国国家科学基金会 DMS-2005538 号资助的支持。LT 的工作获得了法国资助项目ANR-10-IDEX-0001-02 PSL的支持。

作者贡献。两位作者共同撰写了论文正文，并审阅了稿件。

6 声明

利益冲突。作者声明不存在利益冲突。

A 秩一包络的声学张量退化

本文证明，非秩一凸能量的秩一凸包络 RW 的声学张量，在所有满足 $RW(\boldsymbol{F}_0) < W(\boldsymbol{F}_0)$ 的点 $\boldsymbol{F}_0$ 处都必有一个退化方向。我们还表明，在特别简单的情形下（例如本文讨论的情形），这一性质甚至可能足以用于计算整个秩一凸包络。

我们回顾一下，能量 $W(\boldsymbol{F})$ 在点 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_0$ 沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的声学张量是一个二次型 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})$，定义如下:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\langle W_{\boldsymbol{FF}}(\boldsymbol{F}_0)(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n}),\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n}\rangle.$$

THEOREM A.1. 固定 $\boldsymbol{F}_0$，并假设 $RW(\boldsymbol{F}_0)<W(\boldsymbol{F}_0)$，其中 RW表示 W的秩一凸化。此外，假设 W 和 RW 在 $\boldsymbol{F}_0$附近是 C^2。令 $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{n})$ 为 RW 在 $\boldsymbol{F}_0$处的声学张量。则存在一个方向 $\boldsymbol{n}$，使得 $\det \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{n})=0$.

证明。假设不存在这样的方向 $\boldsymbol{n}$。由于 RW 必然是秩一凸的，我们可以得出，对于任意方向 $\boldsymbol{n}$，矩阵 $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{n})$ 都是半正定的。由于函数 $\boldsymbol{n}\mapsto\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{n})$ 连续，存在一个正数 α，使得对每个单位向量 $\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{n})\geq\alpha\boldsymbol{I}.$$

由于 $RW\in C^2$ 在 $\boldsymbol{F}_0$ 附近，存在一个数 $\delta>0$，使得对每个满足$|\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_0|<\delta$ 的 $\boldsymbol{F}$，以下不等式成立:

1. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})\geq\frac{1}{2}\alpha\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})$ 是 RW在 $\boldsymbol{F}$处的声学张量。

2. $W(\boldsymbol{F})-RW(\boldsymbol{F})\geq\frac{1}{2}(W(\boldsymbol{F}_0)-RW(\boldsymbol{F}_0))=\beta>0.$

现在考虑一个函数

$$T_\epsilon(\boldsymbol{F})=RW(\boldsymbol{F})+\epsilon\phi(\frac{\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_0}{\sqrt[4]{\epsilon}}),$$

其中，ϕ 是定义在 $\mathbb{M}$ 中的单位球上、支集位于该球内的光滑非负函数，并且满足$\phi(0)=1$。我们可以将 ϵ 取得足够小，使得以下不等式成立:

1. $\|\epsilon\phi\|_{L^\infty}<\frac{1}{2}\beta$，2. $\|\sqrt{\epsilon}\nabla_{\boldsymbol{F}}\nabla_{\boldsymbol{F}}\phi\|_{L^\infty}\leq\frac{1}{4}\alpha$,

3. supp $\phi(\frac{\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_0}{\sqrt[4]{\epsilon}})\subset B(\boldsymbol{F}_0,\delta)$，其中 $B(\boldsymbol{F}_0,\delta)$是 $\mathbb{M}$中以 $\boldsymbol{F}_0$为中心、半径为 δ的球。

那么 $T_\epsilon(\boldsymbol{F})\leq W(\boldsymbol{F})$，而 $T_\epsilon(\boldsymbol{F})$的声学张量 $\boldsymbol{A}_\epsilon(\boldsymbol{n})$满足

$$\boldsymbol{A}_\epsilon(\boldsymbol{n})\geq\frac{1}{4}\alpha\boldsymbol{I}$$

在二次型意义下。因此，$T_\epsilon(\boldsymbol{F})$是秩一凸的，且 $T_\epsilon(\boldsymbol{F})\leq W(\boldsymbol{F})$，但是$T_\epsilon(\boldsymbol{F}_0)>RW(\boldsymbol{F}_0)$。矛盾。因此，我们的假设不成立，并且在每个满足 $RW(\boldsymbol{F}_0)<W(\boldsymbol{F}_0)$的点 $\boldsymbol{F}_0$，都存在一个方向 $\boldsymbol{n}$，使得声学张量 $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{n})$退化。 □

注释 A.2. 因此，通过形成具有尖锐相界的微观结构来适应声波传播所产生的变形的材料，将会有一个方向上的声速为零。

我们可以将定理 A.1 应用于能量 (1.3)。由于我们的材料是各向同性的，声学张量可能通过 $\mu = 0$ 或 $\lambda + 2\mu = 0$ 发生退化；后一种情况还意味着体积模量 $\kappa = -2\mu(d-1)/d$。由于切向剪切模量在每种形变下都相同，因此排除了 $\mu = 0$ 的可能性。

假设我们不知何故猜到，如果

$$W_0(\boldsymbol{H}) = f(\operatorname{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}) + \mu|\operatorname{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})|^2,$$

then

$$RW_0(\boldsymbol{H}) = F(\operatorname{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}) + \mu|\operatorname{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})|^2$$

对于某个尚待确定的函数 F。在这种情况下，定理 A.1 将使我们能够确定函数 $F(\theta)$。容易计算得，对于任意单位向量 $\boldsymbol{n}$ 和任意向量 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$

$$\langle RW_{0,\boldsymbol{HH}}(\boldsymbol{H})(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{a}), \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{a}\rangle = F''(\operatorname{Tr}\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})^2 + 2\mu\left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n}) - \frac{1}{d}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\boldsymbol{I}\right|^2.$$

因此，我们得到了声学张量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n})$ 的公式。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n}) = \left(F''(\operatorname{Tr}\boldsymbol{H}) + \frac{d-2}{d}\mu\right)\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} + \mu\boldsymbol{I}. \tag{A.1}$$

我们看到，对于所有方向 $\boldsymbol{n}$，都有 $\det \boldsymbol{A}(\boldsymbol{n}) = \mu^2(F''(\operatorname{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}) + 2(d-1)\mu/d)$。因此，对于所有满足 $RW_0(\boldsymbol{H}) < W_0(\boldsymbol{H})$ 的 $\boldsymbol{H}$，都有 $F''(\operatorname{Tr}\boldsymbol{H}) = -2(d-1)\mu/d$。$RW_0$、$\boldsymbol{H}$ 的连续性意味着，在双节线区域的边界点 θ_1 和 θ_2 处，有 $F'(\theta_1) = f'(\theta_1)$ 且 $F'(\theta_2) = f'(\theta_2)$。因此，在双节线区域内，其中 $F'(\theta) = -2(d-1)\theta\mu/d + C$，对某个常数 C，必有 $C = \Phi'(\theta_1) = \Phi'(\theta_2)$。此外，$W_0$ 的连续性意味着，仿射函数[6] $y(\theta) = F(\theta) + (d-1)\mu\theta^2/d$ 将是函数 $\Phi(\theta)$ 图像的公切线方程。因此，我们得到 $F(\theta) + (d-1)\mu\theta^2/d = \Phi^{**}(\theta)$，并由此恢复出 $W_0(\boldsymbol{H})$ 的秩一凸包络；在此情形下，可以看出它与其拟凸化 (2.4) 重合。

B 正方形中不存在拓扑上简单的正方形对称极小化子

我们先给出一个一般性观察：如果 $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个开子集，且问题 (4.13) 有解 $h(x,y)$，那么函数

$$\widetilde{h}_+(x,y) = h(x,y) + \frac{1}{4}(\theta_1-\theta_2)\omega(x^2+y^2), \quad \widetilde{h}_-(x,y) = h(x,y) - \frac{1}{4}(\theta_1-\theta_2)(1-\omega)(x^2+y^2)$$

$\widetilde{}$ 在 $\Omega\setminus A$ 中分别是调和函数。由此可知，函数 $\partial h_\pm/\partial x - i\partial h_\pm/\partial y$ 在各自的区域上关于复变量 $z = x + iy$ 都是解析的。因此，函数

$$H_+(z) = \frac{2}{\theta_1-\theta_2}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \omega\overline{z}, \quad z \in \Omega\setminus A,$$

[6]函数 $y(\theta)$ 是仿射函数，因为 $F(\theta)$ 的性质可以写成 $y''(\theta) = 0$。

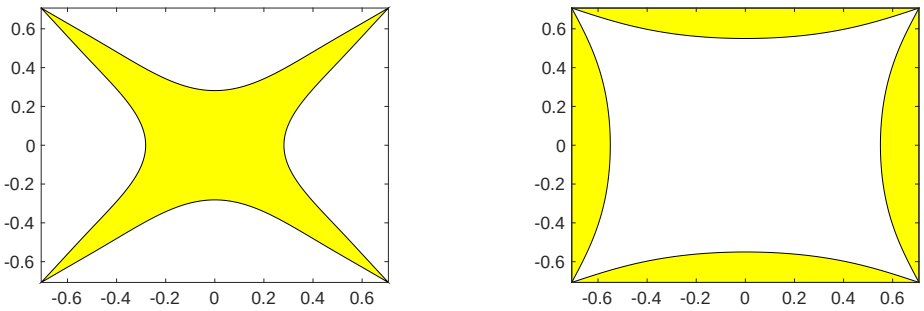

图4：形态滞后展示了正方形中相排列的两种不同形态。图中以黄色表示一个假设的、具有简单拓扑和正方形对称性的共格析出物，其对应相2的体积分数为 30%（$\omega = 0.3$）。左图中，形核从中心开始；右图中，形核从边界开始。

$$H_-(z) = \frac{2}{\theta_1 - \theta_2}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right) - (1-\omega)\overline{z}, \quad z \in A$$

也具有解析性。(4.13) 中的边界条件以及 ∇h 在 ∂A 上的连续性（表示位移的运动学相容性）意味着

$$\begin{cases} H_+(z) = \omega\overline{z}, & z \in \partial\Omega, \\ H_+(z) - H_-(z) = \overline{z}, & z \in \partial A. \end{cases} \tag{B.1}$$

因此，在仿射边界条件下求 Ω 中全局极小化子的問題，可归结为单个复变量的复解析函数理论中的问题 (B.1)。

现在我们尝试求解这一问题，其中 Ω 是一个以原点为中心、对角线长度为 2 的正方形。于是，沿正方形的底边有 $H_+(x - i/\sqrt{2}) = \omega(x + i/\sqrt{2}) = \omega(z + i\sqrt{2})$。因此 $H_+(z) = \omega(z + i\sqrt{2})$；而沿正方形的右边有 $H_+(1/\sqrt{2}+iy) = \omega(1/\sqrt{2}-iy) = \omega(\sqrt{2}-z)$。因此，$H_+(z) = \omega(\sqrt{2}-z)$。关于 $H_+(z)$的这些矛盾表达式，只能通过具有图4所示拓扑结构的构造来调和；其中集合 A（在该集合中，$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \theta_1$）以黄色阴影标出。

问题的正方形对称性也表明，我们应当寻找具有正方形对称性的结构。因此，若假设 A 具有简单拓扑且没有奇点，我们只需找到连接正方形右边上下两端的曲线 Γ 。已知正方形四条边相邻的四个区域内的 $H_+(z)$，便可得到 $H_-(z)$ 在 ∂A上的边界值。A 的正方形对称性结合 (B.1) 可推出

$$H_-(iz) = -iH_-(z), \quad z \in \partial A. \tag{B.2}$$

在 A 中存在具有给定边界值的全纯函数 H_-，当且仅当对每个$n \geq 0$

$$\int_{\partial A} H_-(z) z^n dz = 0. \tag{B.3}$$

由于 (B.2)，(B.3) 中的积分很容易写成沿 Γ 的积分。如果 n 不是 4 的倍数，那么仅凭 (B.2) 就可知 (B.3) 中的积分为零。

如果 $n = 4k$，那么我们要求

$$\int_\Gamma H_-(z) z^{4k} dz = 0, \quad k \geq 0. \tag{B.4}$$

在 Γ 上，我们有 $H_-(z) = \omega(\sqrt{2} - z) - \overline{z}$。因此，(B.4) 等价于

$$\int_\Gamma \overline{z} z^{4k} dz = \frac{(-1)^k i\omega}{(4k+1)(2k+1)}, \quad k \geq 0. \tag{B.5}$$

如果对 (B.5) 进行分部积分：

$$\int_\Gamma \overline{z} z^{4k} dz = \int_\Gamma \overline{z}\, d\left(\frac{z^{4k+1}}{4k+1}\right) = -\int_\Gamma \frac{z^{4k+1}}{4k+1} d\overline{z}.$$

并将曲线 Γ 参数化为 $z(t) = a(t) + it$, $t \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$。那么 $z'(t) = z'(t)\overline{-2i}$，我们得到

$$\int_\Gamma \overline{z} z^{4k} dz = \frac{(-1)^{k+1} i}{(4k+1)(2k+1)} + \frac{2i}{4k+1} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} z(t)^{4k+1} dt.$$

因此，方程 (B.5) 变为

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} z(t)^{4k+1} dt = \frac{(-1)^k(\omega+1)}{2(2k+1)}.$$

由于对称性，我们有 $z(-t) = z(t)$。因此，我们最终得到

$$\Re\mathfrak{e}\left\{\int_0^{1/\sqrt{2}} (a(t) + it)^{4k+1} dt\right\} = \frac{(-1)^k(\omega+1)}{4(2k+1)}, \quad k \geq 0. \tag{B.6}$$

在图4中，我们展示了一个假设存在的、具有正方形对称性和简单拓扑的方程 (B.6) 精确解的数值近似。在这一阶段，应仅将其视为实际解一般结构的示意。展示该结果是为了与图3建立联系；在图3中我们表明，对于固定的体积分数 ω，总是存在两个能量相同的最优构型。正如我们在图3中已经看到的，随着 ω 的增加，图4左图中的晶核（黄色）将向外生长，而右图中的晶核（同样为黄色）将向内生长。在 $\omega = 1$ 时，两种相变再次终止，因为第二相完全占据了整个区域。

注意到，对于所有 $t \in [0, 1/\sqrt{2}]$，$|a(t)+it| < 1$；而当 $t = 1/\sqrt{2}$ 时，$|a(t)+it| = 1$。因此，当 k 很大时，积分 (B.6) 的主要贡献仅来自 $t = 1/\sqrt{2}$ 的邻域。因此，我们近似得到

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} + m(t - \frac{1}{\sqrt{2}}) + O((t - \frac{1}{\sqrt{2}})^2), \text{ as } t \to \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{B.7}$$

将首项代入 (B.6)，并显式计算积分，可得

$$\frac{(-1)^k}{(4k+2)(m^2+1)} - \frac{(1-m)^{4k+2}m}{2^{2k+1}(4k+2)(m^2+1)} \approx \frac{(-1)^k(\omega+1)}{2(4k+2)}. \tag{B.8}$$

如果我们选择

$$m = \sqrt{\frac{1-\omega}{1+\omega}} \tag{B.9}$$

那么当 k 足够大时，等式 (B.6) 在指数级小的误差范围内成立。因此，我们确定了曲线 Γ 进入正方形的角处时的斜率 m 。我们可以对 (B.6) 分部积分，并将其改写为

$$\frac{1}{4k+2}\Re\mathfrak{e}\left\{\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\left[(a(t)+it)^{4k+2}\right]'}{i+a'(t)}dt\right\} = \frac{(-1)^k(\omega+1)}{4(2k+1)}.$$

我们得到

$$\frac{1}{4k+2}\Re\mathfrak{e}\left\{\frac{e^{i(4k+2)\pi/4}}{i+m}\right\} - \frac{1}{4k+2}\Re\mathfrak{e}\left\{\int_0^{1/\sqrt{2}} (a(t)+it)^{4k+2}\left[\frac{1}{i+a'(t)}\right]' dt\right\} = \frac{(-1)^k(\omega+1)}{4(2k+1)}. \tag{B.10}$$

但由此可得，(B.10) 等价于

$$\Re\mathfrak{e}\left\{\int_0^{1/\sqrt{2}} (a(t)+it)^{4k+2}\left[\frac{1}{i+a'(t)}\right]' dt\right\} = 0, \qquad k \geq 0. \tag{B.11}$$

现在我们可以继续对 (B.11) 分部积分

$$\Re\mathfrak{e}\left\{\int_0^{1/\sqrt{2}} [(a(t)+it)^{4k+3}]' \frac{1}{i+a'(t)}\left[\frac{1}{i+a'(t)}\right]' dt\right\} = 0.$$

这意味着 $a''(1/\sqrt{2}) = 0$。通过归纳法，我们得到对于所有 $n \geq 2$， $a^{(n)}(1/\sqrt{2}) = 0$ ，这表明 $a(t)$ 在 $t = 1/\sqrt{2}$ 附近发生了解析性破缺。这种出乎意料的解析性失效，首次提示我们所寻求的解可能并不存在。

为更有说服力地论证情况确实如此，将（B.6）中的第 k 个方程乘以 $x^{4k+2}/(4k+1)!$ 并求和，得到“生成函数方程”

$$\Re\mathfrak{e}\left\{\int_0^{1/\sqrt{2}} [\sinh(x(it+a(t))) + \sin(x(it+a(t)))]dt\right\} = \frac{\omega+1}{2ix}(\cosh(\sqrt{i}x) - \cos(\sqrt{i}x)).$$

取实部可得

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} [\cos(xt)\sinh(xa(t)) + \sin(xa(t))\cosh(xt)]dt = \frac{\omega+1}{x}\sinh\frac{x}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}. \tag{B.12}$$

(B.12) 的两边都是 x 的整函数，因此该等式对所有 $x \in \mathbb{C}$ 均成立。对方程进行缩放会更方便: $u(s) = \sqrt{2}a(s/\sqrt{2})$, $z = x/\sqrt{2}$。然后

$$\int_0^1 [\cos(zs)\sinh(zu(s)) + \sin(zu(s))\cosh(zs)]ds = \frac{\omega+1}{z}\sinh z \sin z. \tag{B.13}$$

函数 $u(s)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递增，从 $u(0) > 0$ 到 1。它还满足 $u'(0) = 0$。我们知道，当 $\omega \to 0$ 时， $u(s) \to s$; 并且还知道，当 $s \approx 1$时，$u(s) \sim 1 + m(s-1)$。注意，当 $\omega \to 0$时， $m \to 1$, 且 $1 + m(s-1) \to s$。于是，我们写作 $u(s) = u_0(s) + w(s)$，其中 $u_0(s) = 1 + m(s-1)$。因此,

$$\sinh(zu(s)) = \sinh(zu_0(s)) + 2\sinh(zu_0(s))\sinh^2(zw(s)/2) + \cosh(zu_0(s))\sinh(zw(s)),$$

类似地,

$$\sin(zu(s)) = \sin(zu_0(s)) - 2\sin(zu_0(s))\sin^2(zw(s)/2) + \cos(zu_0(s))\sin(zw(s)),$$

注意到

$$\int_0^1 [\cos(zs)\sinh(zu_0(s)) + \sin(zu_0(s))\cosh(zs)]ds = \frac{\omega+1}{z}\sinh z \sin z + R(z),$$

其中

$$R(z) = \sqrt{1-\omega^2}\frac{\cos((1-m)z) - \cosh((1-m)z)}{2z},$$

我们得到

$$\int_0^1 \Bigg[\cos(zs)\cosh(zu_0(s))\sinh(zw(s)) + \cosh(zs)\cos(zu_0(s))\sin(zw(s)) + 2\cos(zs)\sinh(zu_0(s))\sinh^2\left(\frac{zw(s)}{2}\right) - 2\cosh(zs)\sin(zu_0(s))\sin^2\left(\frac{zw(s)}{2}\right)\Bigg] ds = \sqrt{1-\omega^2}\frac{\cos((1-m)z) - \cosh((1-m)z)}{2z}. \tag{B.14}$$

现在考察方程 (B.14) 在 $z \to +\infty$ 时的极限，可以看出这是不可能的。

事实上，振荡项在无穷远处至多产生多项式衰减，而指数项的表现类似于 $e^{zu_0(s)}$ ，并受到 $\sin(w(s)z)$ 或 $\sinh(w(s)z)$ 的调制。这类积分的主要贡献来自 $u_0(s)$ 在 $w(s)$ 的支集 $[0,\alpha]$ 上的最大值点附近。因此，积分将呈现指数增长 $e^{(1-m+m\alpha))z}$ ，且可能受到多项式衰减因子的调制。然而，(B.14) 右侧的指数增长为 $e^{z(1-m)}$。注意到 $1 - m = \min_{s\in[0,1]} u_0(s)$，我们得出结论：除非 $w(s)$ 的支集为零，否则 (B.14) 左侧的积分在无穷远处不可能具有这种增长。总而言之，我们已经证明，对所有 $m \in (0,1)$，等式 (B.14) 都不可能成立。不过，我们注意到，当 $m = 0$ 或 $m = 1$时， $w(s) = 0$ 确实成立。 (B.14)

最后我们指出，即使不假设解具有正方形对称性，结论也不会改变。原因在于，方程 (B.6) 对应于 (B.3)

对于 $n = 4k$。当 n 的模 4 余数不同时，正方形对称性保证相应的方程显然成立。打破对称性只会在额外的自由度上增加无穷系统，最终迫使我们假设正方形对称性，而正如我们所见，这会导致不存在性。

参考文献

[1] Rohan Abeyaratne 和 Jiang Guo-Hua。膨胀非线性弹性材料—I：一些理论。《固体与结构国际期刊》，25(10)：1201–1219，1989。[2] Rohan Abeyaratne 和 Jiang Guo-Hua。膨胀非线性弹性材料—II：一个阐释应力集中降低的实例。《固体与结构国际期刊》，25(10)：1221–1233，1989。[3] M. Avellaneda。弹性两相复合材料的最优界与微观几何结构。SIAM 应用数学杂志，47：1216–1228，1987。[4] J. M. Ball。非线性弹性中的不连续平衡解与空穴化。《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑，306(1496)：557–611，1982。[5] J. M. Ball、C. Chu 和 R. D. James。应力诱发变体重排过程中的滞后。《物理学杂志》IV，5(1)(8)：C8.245–C8.251，1995。[6] J. M. Ball 和 F. Murat。$W^{1,\,p}$-拟凸性与重积分变分问题。《泛函分析杂志》，58(3)：225–253，1984。[7] J.M. Ball 和 R.D. James。梯度的不相容集与亚稳性。《理性力学与分析档案》，218(3)：1363–1416，2015。[8] D. J. Bergman。可精确求解的微观几何结构及双组分复合材料复介电常数的严格界。《物理评论快报》，44：1285–1287，1980。[9] B. Budiansky、J.W. Hutchinson 和 J.C. Lambropoulos。陶瓷中膨胀相变增韧的连续介质理论。《固体与结构国际期刊》，19(4)：337–355，1983。[10] B. Dacorogna。变分法中非凸问题的拟凸性与松弛。《泛函分析杂志》，46(1)：102–118，1982。[11] G. Dolzmann 和 S. M¨uller。表面能对形状记忆合金无应力微观结构的影响。Meccanica（米兰），30(5)：527–539，1995。固体中的微观结构与相变（乌迪内，1994）。[12] Warren S. Edelstein 和 Roger L. Fosdick。线性弹性理论中非唯一性的一则注记。《应用数学与物理学杂志》（ZAMP），19：906–912，1968。10.1007/BF01602270。

[13] J . L. Ericksen. Equilibrium of bars. *J. El*弹性, 5(3–4) 191 201 1975
: – , .[14] J. L. Ericksen 和 R. A. Toupin. 哈达玛条件对弹性稳定性及唯一性定理的影响。《加拿大数学杂志》，8:432–436，1956年。[15] L. Euler.《求取具有最大或最小性质的曲线的方法，或广义等周问题的解》，附录 I：《论弹性曲线》。Bousquet，洛桑及日内瓦，1744年。《全集》，第一辑，第 24 卷。英文译本由 Oldfather、W. A.，Ellis、C. A. 和 Brown、D. M. 翻译，载于《伊西斯》，20(1)，第 72–160 页，1933年。[16] Roger Fosdick 和 Lev Truskinovsky. 论线弹性中的克拉佩龙定理。《弹性力学杂志》，72(1-3):145–172，2003年。纪念 Clifford Ambrose Truesdell III 的论文与文集，第 III 卷。[17] Y. Grabovsky. 双组分复合材料的界与极值微结构：基于平移方法的统一处理。《伦敦皇家学会会刊》，A 辑，452(1947):945–952，1996年。[18] Y. Grabovsky 和 L. Truskinovsky. 屈曲的另一面。《连续介质力学与热力学》，19(3-4):211–243，2007年。[19] Y. Grabovsky 和 L. Truskinovsky. 破裂极值解的粗化失稳。《理性力学与分析档案》，200(1):183–202，2011年。[20] Yury Grabovsky 和 Lev Truskinovsky. 弹性中的正则性条件。《非线性科学杂志》，24(6):1125–1146，2014年。[21] Yury Grabovsky 和 Lev Truskinovsky. 当秩一凸性遇上多凸性：弹性双相曲线的代数方法。《非线性科学杂志》，28(1):229–253，2019年。[22] J. Hadamard.《波传播与 流体动力学方程讲义》。Hermann，巴黎，1903年。[23] Z. Hashin. 非均质材料的弹性模量。《美国机械工程师学会应用力学杂志》，29:143–150，1962年。[24] C. O. Horgan 和 D. A. Polignone. 非线性弹性固体中的空穴化：综述。《应用力学评论》，48(8):471–485，1995年。[25] Yongmei M. Jin、Yu U. Wang 和 Armen G. Khachaturyan. 马氏体相变中的宏观能垒与率无关滞后。《材料学报》，173:292–301，2019年。[26] Fritz John. 有限振幅平面弹性波：Hadamard 材料与调和材料。《纯粹与应用数学通讯》，19(3):309–341，1966年。[27] I. M. Kaganova 和 A. L. Roytburd. 弹性相互作用相之间的平衡态。《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》，67(6):1173–1183，1988年。

[28] A. G. Khachaturyan.《固体结构转变理论》。Wiley，纽约，1983年。[29] P. Klouˇcek 和 M. Luskin. 带表面能的马氏体相变计算建模。《数学与计算机建模》，20(10-11):101–121，1994年。[30] R. J. Knops 和 C. A. Stuart. 非线性弹性中的拟凸性与平衡解唯一性。《理性力学与分析档案》，86(3):233–249，1984年。[31] RJ Knops、C Trimarco 和 HT Williams. 非线性弹性静力学中的唯一性与余能。Meccanica，38(5):519–534，2003年。[32] R. V. Kohn. 双势阱能量的松弛。《连续介质力学与热力学》，3:193–236，1991年。[33] R. V. Kohn 和 S. M¨uller. 共格相变中的表面能与微观结构。《纯粹与应用数学通讯》，47:405–435，1994年。[34] Jan Kristensen 和 Ali Taheri. 多维变分法中强局部极小值的部分正则性。《理性力学与分析档案》，170(1):63–89，2003年。[35] Herv´e Le Dret. 层状几何中强椭圆偏微分方程组解 H^1无界的一个例子。《爱丁堡皇家学会会刊A辑》，105:77–82，1987年。[36] J. Lu. 弹性能量极小化与共格析出物的形状。博士论文，纽约大学，纽约，NY，1993年。[37] S. N. Mergelyan. 复变量函数的一致逼近。《美国数学会译丛》，1954(101):99，1954年。[38] G. W. Milton. 复合材料复介电常数的界。《应用物理快报》，37(3):300–302，1980年。[39] G. W. Milton 和 R. V. Kohn. 各向异性复合材料有效模量的变分界。《固体力学与物理学杂志》，36(6):597–629，1988年。[40] Charles B. Morrey, Jr. 拟凸性与多重积分的下半连续性。《太平洋数学杂志》，2:25–53，1952年。[41] Allen C Pipkin. 具有两种优选状态的弹性材料。《力学与应用数学季刊》，44(1):1–15，1991年。[42] K. D. E. Post 和 J. Sivaloganathan. 关于有限弹性中的同伦条件与多重平衡态的存在性。《爱丁堡皇家学会会刊A辑》，127(3):595–614，1997年。[43] A. Roytburd 和 J. Slutsker. 固体相变的热力学滞后。《物理学B辑：凝聚态》，233(4):390–396，1997年。

[44] Miroslav ˇSilhav´y. 关于马氏体相变中的滞后。载于《有理连续介质：经典与新论》，第 151–168 页。Springer Italia，米兰，2003 年。[45] J. Sivaloganathan. 变分法中的奇异极小化者：一种退化形式的空穴化。《Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire》，9(6):657–681，1992年。[46] Jeyabal Sivaloganathan 和 Scott J Spector. 有限弹性中能量极小值的唯一性。《弹性力学杂志》，133(1):73–103，2018 年。[47] Emanuele Nunzio Spadaro. 严格多凸泛函极小值的非唯一性。《理性力学与分析档案》，193(3):659–678，2009 年。[48] Ali Taheri. 多维变分法中驻点的拟凸性与唯一性。Proc. Amer. Math. Soc.，131(10):3101–3107（电子版），2003 年。[49] Ali Taheri. 局部极小化子与拟凸性——拓扑的影响。《Arch. Ration. Mech. Anal.》，176(3):363–414，2005 年。[50] L. Tartar. 均匀化系数的精细估计。载于 P. Kree 编，E. De Giorgi 讨论会（巴黎，1983），第 168–187 页，伦敦，1985 年。Pitman Publishing Ltd.[51] Nicolas Triantafyllidis 和 B. N. Maker. 关于一类纤维增强复合材料中微观与宏观失稳机制的比较。J. Appl. Mech.，52:794–800，1985 年。[52] Oscar Wesler. 球体的无限装填定理。《美国数学会会刊》，11(2):324–326，1960 年。[53] Zhiyong Zhang、Richard D. James 和 Stefan M¨uller. 马氏体相变中的能量势垒与滞后。《材料学报》，57(15):4332–4352，2009 年。[54] V. V. Zhikov. 均匀化矩阵和均匀化张量的估计。《俄罗斯数学评论》，46(3):65–136，1991 年。