arXiv:2301.01872v3 [math.GT] 8 Jun 2023

曲面辫子群的最小非阿贝尔商群

Cindy Tan

摘要。 我们给出了曲面辫子群 $B_n(\Sigma_g)$ 的非阿贝尔商群阶的精确下界，并对所有达到该下界的商群进行了分类：根据 n 和g，最小阶的商群要么是对称群，要么是二步幂零 p-群。

1 引言

阿廷辫群 B_n 是 $\mathrm{UConf}_n(\mathbb{D})$ 的基本群，其中 $\mathrm{UConf}_n(\mathbb{D})$ 是开圆盘 $\mathbb{D}$上 n 个互不相同的无序点的构形空间。我们可以将这一构造推广，定义一个定向闭曲面 Σ_g 上的曲面辫群，其中该曲面的亏格为 g： 曲面辫群

$$B_n(\Sigma_g) = \pi_1(\mathrm{UConf}_n(\Sigma_g)).$$

Kolay 已证明 [5] 对于 $n = 3$或 $n \geq 5$， B_n 的最小非循环有限商群是对称群 S_n，也就是说， S_n 在 B_n 的所有非循环商群中阶最小，且 S_n 是 B_n 中阶最小的唯一非循环商群。

本文考察曲面辫群中类似的问题。我们的主要结果表明，尽管 S_n 是 $B_n(\Sigma_g)$的一个商群，但与通常的辫群不同，它通常并非最小非阿贝尔商。新出现的极小非阿贝尔商是二步幂零 p-群，将在构造 2.6中定义。

对于 $g \geq 1$，存在一个嵌入 $B_n \hookrightarrow B_n(\Sigma_g)$[2]。我们将辫约化商 $B_n(\Sigma_g)$定义为满足 B_n 具有循环像的有限商群。我们的主要结果如下。

定理 1.1 （ B_n（Σ_g）的最小非阿贝尔商群）。 设 $n \geq 5$ 和 $g \geq 1$。假设 G 是 $B_n(\Sigma_g)$的有限非阿贝尔商群。

(a) 若 G 不是辫约化的，则 $|G| \geq n!$ ，且等号成立当且仅当 $G \cong S_n$。

(b) 若 G是辫约化的，则 G是二步幂零的，且 $|G| \geq p^{2g+j}$，其中 p是整除 $g + n - 1$ 的最小素数，并且 $j = 1$ 或 2 分别取决于 p 是奇数还是 2。等号成立当且仅当 $G \cong \mathrm{I}(p^j, g)$或 $G \cong \mathrm{II}(p^j, g)$（这两个群是非同构的二步幂零 p-群，定义见构造 2.6）。

特别地， $B_n(\Sigma_g)$ 的最小非幂零商群是 S_n。

注意，定理 1.1蕴含以下定性结果。

推论 1.2。

(a) 固定 $g \geq 1$。对于所有充分大的 n， $B_n(\Sigma_g)$ 的最小非阿贝尔商群是二步幂零 p-群（特别地，最小非阿贝尔商群不是 S_n）。(b) 固定 $n \geq 5$。对于所有充分大的 g， $B_n(\Sigma_g)$ 的最小非阿贝尔商群是 S_n。此外，存在一个（较小的） g，使得这一结论不成立。

注记 1.3（较小情形）。

(a) 如果 $n = 1$、2、3、4 和 $g \geq 1$（但 $(n, g) = (1, 1)$ 除外，此时 $B_n(\Sigma_g) = \pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$ 是阿贝尔的），那么对称群 S_3 是 $B_n(\Sigma_g)$ 的最小非阿贝尔商群。(b) 如果 $g = 0$，那么 $B_n(\Sigma_g)$ 是球面辫群 $B_n(S^2)$，它是映射 $B_n \to S_n$ [4] 的一个中间商群。由 Kolay [5] 的结果可知，$B_n(S^2)$ 的最小商群在 $n \geq 5$ 时是 S_n，在 $n = 3$ 时是 S_3，4。对于 $n = 1$ 和 2，我们注意到 $B_n(S^2)$ 是阿贝尔的。

由定理 1.1，我们得以部分证实 Chen 的一个猜想 [3, 猜想 1。3]:

推论 1.4。设 $n \geq 5$ 和 $m \geq 3$，并设 g，$h \geq 0$。若 $n > m$，则不存在满同态

$$B_n(\Sigma_g) \to B_m(\Sigma_h).$$

证明方法。定理 1.1(a) 由 Kolay 的结果可得：将一个辫映射为其在点集上的置换，S_n是 $B_n(\Sigma_g)$ 的一个有限商群。若 $B_n \to B_n(\Sigma_g) \to G$有非循环像，则 $|G| \geq n!$ 且只有 $G \cong S_n$才能达到该界。

本文的主要贡献是定理 1.1(b)，该定理研究辫约化商群。我们采用 Bellingeri $B_n(\Sigma_g)$（定理 3.1）给出的 [1] 表示，并假设 B_n 有循环像，以此化简关系，并得出辫约化商群 G 必为幂零群。若进一步假设 G 是阶最小的非阿贝尔辫约化商群，则 G 属于一类称为 JN2 群的幂零群（定义 2.1），这类群已由 Newman 在 1960 [6]中完成分类。接下来只需找出能够实现为 $B_n(\Sigma_g)$的商群的最小阶 JN2 群；鉴于 Newman 的分类具体明确，这项工作相当直接。

第2 节将对 JN2 群的分类进行完整而独立的阐述。在第 3节中，我们将证明定理1.1(b)以及推论1.4。

致谢。我非常感谢我的导师 Benson Farb 在整个项目期间给予的持续支持，以及对本文多个版本提出的详细意见；同时也感谢他最初提出这个问题。我感谢 Peter Huxford 就辫群和小型 p-群展开的有益讨论，并在编辑过程中提出了许多宝贵建议。我还感谢 Dan Margalit 抽出时间阅读早期草稿并提出意见。

2 只是二步幂零

本节将介绍并分类 JN2 群。这类幂零群包含 $B_n(\Sigma_g)$ 的所有极小非阿贝尔辫约化商群。

定义 2.1。**</style}群 是恰为二步幂零的**（JN2），当且仅当 G 是二步幂零的（特别地，是非阿贝尔的），且 G 的每个真商群都是阿贝尔群。

Newman 对有限 JN2 群给出了完整且明确的分类[6]：每个有限 JN2 群都可以唯一地赋予一个类 (p^j, m)，其中 p是一个素数，j和 m都是正整数；在同构意义下，给定类 (p^j, m)恰好对应两个 JN2 群。我们将在定理 2.7中陈述并证明这一分类定理，遵循 [6]的一般思路。

以下所有 JN2 群均假定为有限群。以下命题将使我们能够定义 JN2 群的类（p^j，m）。

命题 2.2 (JN2 群的刻画 [6, 定理 1])**.** 有限群 G 是 *JN2* 群，当且仅当存在一个素数 p 使得

(a) $G' := [G, G]$ 是阶为 p 的循环群，(b) 中心 ZG 是阶为 p 的幂的循环群，并且(c) G/ZG 是指数为 p 的初等阿贝尔群。

特别地，*JN2* 群是一个 p-群。

证明。

$\boxed{\Rightarrow}$ 设 G 是一个有限 JN2 群。对于每个非平凡正规子群 $N \trianglelefteq G$，有 $G' \leq N$，因为 G 的任何真商群都是阿贝尔群。由于 G 是二步幂零的，$G' \leq ZG$。因此，

(a) G' 是阿贝尔群，且不存在非平凡的真子群，因此对于某个素数 p，有 $G' \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。

(b) ZG 不能被真地分解为直和：ZG 的任何非平凡子群都包含 G'

因此，任意两个非平凡子群的交都非平凡。由于 ZG 是有限阿贝尔群，它必定是素数幂阶的循环群。该素数必为 p，因为 $G' \leq ZG$。(c) G/ZG 是阿贝尔群，因为 $G' \leq ZG$。对于 $x, y \in G$，利用恒等式并注意到 $[x, y]$ 是中心的（因为 $G' \leq ZG$），可得 $[x^p, y] = [x, y]^p$。但是 G' 的阶为 p，所以实际上 $[x^p, y] = 1$。因此，对所有 $x \in G$，都有 $x^p \in ZG$，也就是说，G/ZG 的指数为 p。

$$[xz, y] = z[x, y]z^{-1}[z, y]$$

$\boxed{\Leftarrow}$ 假设 G 是满足 (a)、(b) 和 (c) 的有限群。由 (a) 得 $G' \neq \{1\}$，由 (c) 得 $G' \leq ZG$，因此 G 是二步幂零群。

若 $N \trianglelefteq G$ 是满足 $G' \not\leq N$ 的正规子群，则由 (a) 得 $N \cap G' = \{1\}$。由于 N 是正规子群，$[N, G] \leq N \cap G' = \{1\}$，因此 $N \leq ZG$。但是 $G' \leq ZG$，且 (a) 和 (b) 表明，ZG 的任何非平凡子群都与 G' 有非平凡交。因此 $N = \{1\}$。由此可知，G 的每个真商群都是阿贝尔群。 □

命题 2.2(c) 的一个直接推论是 $V := G/ZG$ 具有 $\mathbb{F}_p$-向量空间的结构。注意，V 中的向量加法采用乘法记号，元素x 模 $ZG \in V$ 与标量 $r \in \mathbb{F}_p$ 的数乘记作

$$r \cdot (x \bmod ZG) = x^r \bmod ZG.$$

固定 ZG 的一个生成元 z。这就固定了 G' 的一个生成元 $z^{p^{j-1}}$，从而确定了 G' 与 $\mathbb{F}_p$ 之间的一个同一化。定义一个配对

$$V \times V \to G' = \mathbb{F}_p$$
$$(x \bmod ZG, y \bmod ZG) \mapsto [x, y]$$

这个配对是良定义的双线性非退化交替形式，使 V 成为一个辛向量空间。特别地，$\dim V$ 为偶数。

因此，与每个 JN2 群 G 相关联的是一个 类 (p^j, m)，其中 $|ZG| = p^j$ 且 $\dim V = 2m$，因此 G 属于如下短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \longrightarrow G \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2m} \longrightarrow 0.$$

中心因子群 $V = G/ZG$ 上的辛结构是分类定理的关键，因为中心因子群上的辛自同构可用于构造某些

同一类的 JN2 群之间的同构。下面的引理从一个 JN2 群中提取其相关向量空间 V 上的规范化辛基。

引理 2.3. 设 G 是类为 (p^j, m) 的 *JN2*，其中 $p^j \neq 2$，且 ZG 有一个固定生成元 z。那么，存在 $V = G/ZG$ 的一个辛基 $\mathscr{B} = \{a_i \bmod ZG, b_i \bmod ZG\}_{i=1}^{m}$，使得代表元 $a_i, b_i \in G$ 满足以下两种情况之一：

(I) 对所有 i，都有 $a_i^p = b_i^p = 1$；或者(II)
对 $2 \le i \le m$，有 $a_1^p = b_1^p = z$ 和 $a_i^p = b_i^p = 1$。

相应地，我们称 $\mathscr{B}$ 为 *I 型*或 *II 型*。

备注 2.4 (术语)。 对于熟悉 [6], 中现有术语的读者，我们在引理 2.3中所称的"I 型（II 型）基"，对应于 Newman 术语中的"含零（一）对 II 型的典范正规基"。

证明。 注意，对于所有 $x \in G$，都有 $x^p \in ZG$，因为 G/ZG 的指数为 p。令 $(ZG)^p = \{u^p : u \in ZG\}$，并通过将 z 映射为模 $(ZG)^p$ 的 $p \mapsto 1$，将 $ZG/(ZG)^p$ 与 $\mathbb{F}_p$ 等同。定义一个映射

$$\nu : V \to ZG/(ZG)^p = \mathbb{F}_p$$
$$x \bmod ZG \mapsto x^p \bmod (ZG)^p$$

将 $V = G/ZG$ 视为以乘法记号表示的向量空间， ν 与数乘交换，并且

$$\nu((x \bmod ZG)(y \bmod ZG)) = (xy)^p \bmod (ZG)^p = [y,x]^{\frac{p(p-1)}{2}} x^p y^p \bmod (ZG)^p$$

对于 x， $y \in G$，因此，只要 $[y,x]^{p_{(p-1)2}} = 1$ 模 $(ZG)^p$， ~~ν就是~~一个线性泛函。若 $p^j \neq 2$，则此条件成立：若 p 为奇数，则 $p \mid {}^{p}(p-1)2$，因此 $[y,x]^{p_{(p-1)2}} = 1$，因为 G' 的阶为 p。若 $j \ge 2$，则 $G' \not\le ZG$，所以 $G' \le (ZG)^p$。

若 ν 是 V 上的平凡线性泛函，则取 $\mathscr{B}$ 为 V 的任意辛基。否则，存在 V 的一个辛基 $\mathscr{B}$，使得 ν 关于 $\mathscr{B}$ 写成行向量

$$\nu = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

因为辛自同构在非零向量上传递作用。

换言之，对于每个基向量 $x_j \bmod ZG \in \mathscr{B}$，

$$x_j^p \bmod (ZG)^p = \nu(x_j \bmod ZG) = z^{\nu_j} \bmod (ZG)^p$$

因此存在 $u_j \in ZG$ 使得 $x_j^p = z^{\nu_j} u_j^p$。于是 $x_j u_j^{-1} \equiv x_j \bmod ZG$，且 $(x_j u_j^{-1})^p = z^{\nu_j}$。因此，$x_j u_j^{-1} \in G$ 是满足以下条件的基 $\mathscr{B}$ 的代表元：若 ν 是平凡的，则满足 (I)；否则满足 (II)。 □

现在，对于每个给定的类 (p^j, m)，我们将构造两个标准的非同构 JN2 群。分类定理的证明将给出从任意 JN2 群到某个标准群的同构。由较小的 JN2 群构造较大的 JN2 群，主要方法是取中心积。

定义 2.5（中心积）。 设 G 和 H 是存在同构 $\varphi : ZG \to ZH$ 的群。定义 G 和 H 关于 φ 的 **中心积** 为

$$G \odot H = (G \times H)/N$$

其中 $N = \langle (g, \varphi(g)^{-1}) : g \in ZG \rangle$，即通过同构 φ 将 $ZG \times 1$ 与 $1 \times ZH$ 视为相同。By $G^{\odot n}$ 表示 n 个 G 的中心积，其在 ZG 上取恒等同构。

注意，如果 G、H 是类为 $(p^j$、$m_1)$ 的 JN2，且 $(p^j$、$m_2)$ 是类为 $G \odot H$ 的 JN2，那么根据命题 $(p^j$、$m_1 + m_2)$ 2.2，因为

1. $(G \odot H)' = G' \times H'/N \cong G' \cong H' \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,
2. $Z(G \odot H) \cong ZG \cong ZH$，以及 3. $(G \odot H)/Z(G \odot H) \cong (G/ZG) \times (H/ZG)$。

构造 2.6（标准 JN2 群）。定义这些群

$$M(p^j) = \left\langle z, a, b : [z,a] = [z,b] = 1; [a,b] = z^{p^{j-1}}; z^{p^j} = a^p = b^p = 1 \right\rangle$$
$$N(p^j) = \left\langle z, a, b : [z,a] = [z,b] = 1; [a,b] = z^{p^{j-1}}; z^{p^j} = 1; a^p = b^p = z \right\rangle$$
$$\mathrm{I}(p^j, m) = M(p^j)^{\odot m}$$
$$\mathrm{II}(p^j, m) = N(p^j) \odot M(p^j)^{\odot (m-1)}$$

注意以下几点：

1. $M(p^j)$ 和 $N(p^j)$ 是 JN2 群（根据命题 2.2），其类为（$p^j, 1$），各自的中心由 z 生成，且 $\{a, b\}$ 是 V 的辛基。2. 根据定义 2.5 后的注释，$\mathrm{I}(p^j, m)$ 和 $\mathrm{II}(p^j, m)$ 是类为（p^j, m）的 JN2 群。3. 当 $p^j \neq 2$ 时，$\mathrm{I}(p^j, m)$ 和 $\mathrm{II}(p^j, m)$ 不同构：群 $N(p^j)$ 有一个阶为 p^{j+1} 的元素（例如 a 或 b），因此 $\mathrm{II}(p^j, m)$ 也有这样的元素。相反，群 $M(p^j)$ 的指数至多为 p^j，因此 $\mathrm{I}(p^j, m) = M(p^j)^{\odot m}$ 也是如此：线性泛函 ν（如引理 2.3 的证明中所述）在辛基 $\{a, b\}$ 上为零，因此 $M(p^j)^p \leq (ZG)^p$，于是 $M(p^j)^{p^j} \leq (ZG)^{p^j} = 1$。注意：若 $p^j = 2$，则 $\mathrm{I}(p^j, m)$ 和 $\mathrm{II}(p^j, m)$ 仍不同构：$M(2)$ 是二面体群 D_8，而 $N(2)$ 是四元数群 Q_8，它们分别含有两个和六个阶为 4 的元素 an

d

两者的中心阶数均为 2。因此，没有阶为 4 的元素属于中心。较大的群 $\mathrm{I}(p^j, m)$ 和 $\mathrm{II}(p^j, m)$ 可通过计算阶为 4 的元素个数加以区分，因为在中心积中只有中心元素会被识别。我们不需要考虑这种情况。

现在我们可以陈述并证明 JN2 群的分类定理了。

定理 2.7 (有限 JN2 群的分类 [6, 定理 5、定理 7(c)、引理 8(i)])。设 G 为类 (p^j, m)的 *JN2* 群。假设 $p^j \neq 2$。则 G 同构于 $\mathrm{I}(p^j, m)$ 或 $\mathrm{II}(p^j, m)$。

证明。设 z 是 ZG 的一个生成元，并设 $\mathscr{B}$ 是引理 2.3 给出的辛基。沿用引理 2.3 的记号，令 $H_i = \langle z, a_i, b_i \rangle$。若 $\mathscr{B}$ 是 I 型，则对所有 i，都有 $H_i = M(p^j)$。若 $\mathscr{B}$ 是 II 型，则对 $i \geq 2$，有 $H_1 = N(p^j)$ 且 $H_i = M(p^j)$。

子群 H_i 两两交换，共同生成 G，且交集恰为它们的中心 $\langle z \rangle$，因此$G \cong \mathrm{Ç}_{i=1}^{m} H_i$。由此，$G$同构于 $\mathrm{I}(p^j, m)$ 或 $\mathrm{II}(p^j, m)$，具体取决于基 $\mathscr{B}$ 的类型。□

备注 2.8。

(a)（推广）为简洁起见，我们排除了 $p^j = 2$ 的情形，并将讨论限定于有限群。经过进一步工作，$p^j = 2$ 情形以及某些无限 JN2 群（具有可数辛基的群）也可以分类为初等 JN2 群的中心积，参见 [6]。

(b)（特殊情形）注意，$M(p)$ 和 $N(p)$ 是阶为 p^3 的仅有的两个群。群$M(p) = \mathrm{I}(p, 1)$ 同构于定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的海森堡群。有限海森堡群的一种推广是特异群，其定义为具有 p 阶且 G 阶数为 p、G/ZG 非平凡初等阿贝尔群的 p-群。特别地，特异群是 JN2，由此可得

由定理 2.7可知，对于每个素数 p 和正整数 m，恰有两个不同的阶为 p^{1+2m} 的特异群，且这就涵盖了所有特异群。

3 B_n（Σ_g）的极小非阿贝尔商群

本节将证明定理 1.1(b)。证明策略是利用曲面辫群的显式表示（定理 3.1），通过辫约化商必须满足的关系来刻画它们（引理3.3）。随后我们将证明，许多 JN2 群可实现为 B_n（Σ_g）的非阿贝尔辫约化商（引理3.4），最后证明，最小阶的所有非阿贝尔辫约化商都属于引理3.4中列出的 JN2 群。

（Σ_g）的以下表示由 Bellingeri 给出 [1]。

定理 3.1 （（Σ_g）[1, 定理 *1*.2]）。对于 $g \geq 1$ 和 $n \geq 2$，曲面辫群B_n（Σ_g）有如下表示：

- 生成元： $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$.
- 关系：

辫关系：

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 1 \qquad (1 \leq i, j \leq n-1 \text{ and } |i-j| \geq 2)$$
$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \qquad (1 \leq i \leq n-2)$$

混合关系：

(R1) $[a_r, \sigma_i] = [b_r, \sigma_i] = 1$ $(1 \leq r \leq g$ 和 $i \neq 1)$

(R2) $[a_r, \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1}] = [b_r, \sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1}] = 1$ $(1 \leq r \leq g)$

(R3) $[a_s, \sigma_1 a_r \sigma_1^{-1}] = [b_s, \sigma_1 b_r \sigma_1^{-1}] = 1$ $(1 \leq s < r \leq g)$

$[b_s, \sigma_1 a_r \sigma_1^{-1}] = [a_s, \sigma_1 b_r \sigma_1^{-1}] = 1$ $(1 \leq s < r \leq g)$

(R4) $[a_r, \sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1}] = \sigma_1^2$ $(1 \leq r \leq g)$

(TR) $[a_1, b_1^{-1}] \cdots [a_g, b_g^{-1}] = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \sigma_1$

注释 3.2 （表示的几何解释）。嵌入 $B_n \hookrightarrow B_n(\Sigma_g)$ 将 Artin 辫生成元与 Bellingeri 生成元 σ_i 对应起来。其余生成元 a_r, b_r 可以粗略地理解为 $\pi_1(\Sigma_g)$ 的标准生成元。

更确切地说，令 $\{p_1, \ldots, p_n\} \in \mathrm{UConf}_n(\Sigma_g)$ 表示 $B_n(\Sigma_g)$ 的基点，并令 $D \subset \Sigma_g$ 为一个包含 $p_1 \in \partial D$ 的开圆盘，其中 $p_2, \ldots, p_n$ 位于 D 的内部。存在一个包含映射

$$\pi_1(\Sigma_g - D, p_1) \hookrightarrow B_n(\Sigma_g)$$

它将环路 γ 在 $\Sigma_g - D$ 中的环路对应到 Σ_g 上的辫，其中第一股为 γ，其余各股均为平凡股。群 $\pi_1(\Sigma_g - D, p_1)$由 $2g$ 个生成元自由生成，并满射到 $\pi_1(\Sigma_g, p_1)$，后者有标准表示。于是，曲面辫子群的生成元 $a_r, b_r \in B_n(\Sigma_g)$ 可理解为 $\pi_1(\Sigma_g - D, p_1)$ 的一组自由生成集的选取，该生成集将 $\pi_1(\Sigma_g, p_1)$ 的标准生成集提升而来。需要强调的是，这些提升并非典范的，且表示取决于所作的选择；感兴趣的读者可参阅[1]，其中展示了产生这一特定表示的环路。

引理 3.3 (辫约化商的刻画)。 设 $n \geq 3$ 且 $g \geq 1$。有限群 G 是 $B_n(\Sigma_g)$ 的辫约化商，当且仅当 G 有一组生成集 $\{\sigma, a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g\}$ 满足以下关系

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{R1}') \quad [a_r, \sigma] = [b_r, \sigma] = 1 && (1 \leq r \leq g)\\
&(\mathrm{R3}') \quad [a_s, a_r] = [b_s, b_r] = [b_s, a_r] = [a_s, b_r] = 1 && (1 \leq s < r \leq g)\\
&(\mathrm{R4}') \quad [a_r, b_r] = \sigma^2 && (1 \leq r \leq g)\\
&(\mathrm{TR}') \quad \sigma^{2(g+n-1)} = 1
\end{aligned}$$

证明。 根据定理 $B_n(\Sigma_g)$，3.1，其有限商群由附加关系给出。 B_n 在商群中的像为循环群这一条件，等价于添加以下关系

$$\sigma_i = \sigma_1, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

添加这些关系并记作 $\sigma = \sigma_1$ 后，关系 (R2) 成为冗余关系，而 (R1)、(R3) 和 (R4) 分别化简为引理陈述中的关系 (R1′)、(R3′) 和 (R4′)。最后一个关系 (TR) 化简为

$$[a_1, b_1^{-1}] \cdots [a_g, b_g^{-1}] = \sigma^{2(n-1)}$$

这等价于 (TR′)，因为由 (R4′) 可得 $a_r = b_r^{-1}\sigma^{-2}a_r b_r$，因此

$$[a_r, b_r^{-1}] = a_r b_r^{-1} a_r^{-1} b_r \overset{(\mathrm{R4}')}{=} (b_r^{-1}\sigma^{-2}a_r b_r) b_r^{-1} a_r^{-1} b_r = b_r^{-1}\sigma^{-2} b_r \overset{(\mathrm{R1}')}{=} \sigma^{-2}. \qquad \square$$

下面的引理证明，许多 JN2 群都是辫约化商群。

引理 3.4。 设 $n \geq 3$ 和 $g \geq 1$。设 p 是整除 $g + n - 1$ 的素数。

(a)若 $p = 2$，则 I(22, g)和 II(2^j, g)对所有 $j \geq 2$ 都是 $B_n(\Sigma_g)$ 的非阿贝尔辫约化商群。(b)若 p 为奇数，则 I(p, g)和 II(p^j, g)对所有 $j \geq 1$ 都是 $B_n(\Sigma_g)$ 的非阿贝尔辫约化商群 .

证明。 设 p是整除 $g + n - 1$的一个素数。根据引理 3.3，我们需要为满足关系（R1′）、（R3′）、（R4′）和（TR′）的每个群构造一个生成集 $\{\sigma,\ a_r,\ b_r\}$。

在定理陈述中的任意一个 JN2 群中，固定中心的一个生成元 z，并选取$a_1,\ b_1,\ \ldots,\ a_g,\ b_g$作为引理 2.3给出的 V 的一个辛基的代表元。根据定理 2.7，对于 I(22，g) 和 I(p，g)，该基是 I 型；对于 II(2^j，g) 和 II(p^j，g)，该基是 II 型。注意，在给定的辛形式下，基是辛基的条件仅仅是所有基元素除辛对外都彼此交换 $[a_r, b_r] = z^{p^{j-1}}$。特别地，（R3′）成立。

现在，我们将为每个群选择 σ，并验证 $\{\sigma, a_r, b_r\}$ 生成该群且满足 (R4′)。

1. I(22, g) 由 $\sigma = z$ 和 a_r、b_r 生成。这些生成元满足 (R4′)，因为$[a_r, b_r] = z^2 = \sigma^2$。2. II($2^j$, g)，对于给定的 $j \geq 2$，仅由 a_r、b_r 生成，因为 $a_1^p = z$。若选择 $\sigma = z^{2^{j-2}}$，则满足 (R4′)，因为 $[a_r, b_r] = z^{2^{j-1}} = \sigma^2$。3. 对于奇素数 p，I(p, g) 由 $\sigma = z^{(p^j+1)/2}$ 以及 a_r、b_r 生成。因此满足 (R4′)，因为$[a_r, b_r] = z = \sigma^2$。4. II(p^j, g)，对于给定的奇素数 p 和 $j \geq 1$，仅由 a_r、b_r 生成，因为 $a_1^p = z$。接着令 $\sigma = z^{(p^j+p^{j-1})/2}$，从而满足 (R4′)，因为 $[a_r, b_r] = z^{p^{j-1}} = \sigma^2$。

在所有情况下，σ 均被选为中心的，因此满足 (R1′)。

接下来要检查 (TR′) 是否成立，也就是说， $|\sigma|$ 是否整除 $2(g+n-1)$。回顾一下，我们假设$p \mid (g+n-1)$。在情况 1 和 2 中，我们有 $p=2$ 以及 $|\sigma|=4=2p \mid 2(g+n-1)$。在情况 3 和 4 中，我们有$|\sigma|=p \mid (g+n-1)$。□

现在我们准备好证明定理 1.1(b)。

定理 *1.1(b)*的证明。 令 G 为一个非阿贝尔辫约化商群，并令 $\{\sigma,\ a_1,\ b_1,\ \ldots\ldots,\ a_g,\ b_g\}$表示由引理 G 3.3给出的 G 的生成集。由 (R1′) 和 (R3′)，除 $a_r,\ b_r$ 这一对外，这些生成元的所有成对元素都交换，因此 $G'=\langle\sigma^2\rangle$ 由 (R4′) 得出。于是 G' 是中心的且非平凡的，也就是说， G 是二步幂零的。

现在假设 G 的阶最小。那么 G 没有真非阿贝尔商群，因此它是某个类的 JN2（$p^j,\ m$）。

我们提出三项断言：

1. $p^j \neq 2$，2. $m=g$，以及 3. $p \mid (g+n-1)$。

这些断言将完成证明：由于 $|G|=p^{2m+j}$，由断言 1 和 2 可得，若 p 为奇数，则 $|G| \geq p^{2g+1}$；若 $p=2$，则 $|G| \geq 2^{2g+2}$。结合断言 1 和 3 以及 G 的极小性，可知 G 是引理 3.4 中构造的商之一（特别是其中最小的一个）。具体而言：若 $g+n-1$ 为偶数，则 $p^j=2^2$。否则 $p^j=p$，其中 p 是整除 $g+n-1$ 的最小素数。最后，根据定理 2.7， G 必须同构于 I(p^j, g) 或 II(p^j, g)。

断言的证明：设 $d=|\sigma|$。由 (R1′)， σ 是中心的，因此 $d \mid p^j$。但 $p=|G'|=|\sigma^2|$，所以 $d \mid 2p$。因此，或者 p 为奇数且 $p=d$，或者 $p=2$ 且 $d=4$。

1. 如果 p 是奇数，那么 $p^j \neq 2$。如果 $p=2$，那么 $p^j \geq d=4$，所以 $p^j \neq 2$。

2. 我们将通过证明下式来说明 $\dim V=2g$

$$\mathscr{B}=\{a_r \bmod ZG, b_r \bmod ZG\}_{r=1}^{g}$$

是 V 的一组基。每个元素 $x \in G$ 都能唯一地写成如下形式

$$x=\sigma^k a_1^{i_1}\cdots a_g^{i_g} b_1^{j_1}\cdots b_g^{j_g}$$

利用交换关系 (R1′)、(R3′)、(R4′)，因此 $\mathscr{B}$ 是一个生成集。为证明 $\mathscr{B}$ 线性无关，设

$$y=a_1^{i_1}\cdots a_g^{i_g} b_1^{j_1}\cdots b_g^{j_g} \in G$$

并假设 $y=0$ 模 ZG，也就是说， $\mathscr{B}$ 中元素的任意线性组合在 V 中都是平凡的。那么 y 是中心的，因此

$$[y,b_1]=[a_1^{i_1},b_1]=\sigma^{-2i_1}=1$$

这意味着 $d \mid 2i_1$，从而 $i_1=0$ 模 p：如果 p 是奇数，那么 $d=p$，所以 $p \mid i_1$。如果 $p=2$，那么$d=4 \mid 2i_1$，所以 $p=2 \mid i_1$。

类似地，对于所有 r，都有 $i_r=j_r=0$ 模 p，也就是说，线性组合的所有系数在基域上均为平凡值 $\mathbb{F}_p$。这证明了 $\mathscr{B}$ 的线性无关性。

3. 关系 (TR′) 强加了关系 $d \mid 2(g+n-1)$。 $d=p$ 为奇数，或者 $d=4$ 和 $p=2$；在这两种情况下，(TR′) 都意味着 $p \mid (g+n-1)$。□

推论 *1.4*的证明。 设 $n \geq 5$和 $m \geq 3$，并设 $g, h \geq 0$。若存在一个满射 $B_n(\Sigma_g) \to B_m(\Sigma_h)$则复合映射 $B_n(\Sigma_g) \to B_m(\Sigma_h) \to S_m$也是满射。由于当 S_m 时不是幂零的，我们必有 $m \geq 3$, $m \geq n$。 □

注 3.5 （带 puncture 曲面、带边界曲面）。 在其论文 [1], Bellingeri 还给出了亏格为 g 、具有 m 个 puncture 的曲面的辫群表示（就辫群而言，这等价于具有 m 个边界分支）。几乎可以原样使用上述方法，证明 $B_n(\Sigma_{g,\ m})$ 的最小非阿贝尔商是 S_n 或 II(22， g) 中较小的一个。

参考文献

[1] P. Bellingeri. 关于曲面辫群的表示. 《代数学杂志》，274(2):543–563，2004年4月.[2] J. S. Birman. 关于辫群. 《纯粹与应用数学通讯》，22(1):41–72，1969年1月.[3] L. Chen. 曲面辫群之间的满同态. 《以色列数学杂志》，232(1):483–500，2019年8月.[4] E. Fadell 和 J. Van Buskirk. 关于 E^2 和 S^2 的辫群. 《美国数学会通报》，67(2):211–213，1961年.[5] S. Kolay. 辫群和映射类群的最小非循环商，2021年10月。arXiv: 2110.02162.[6] M. F. Newman. 关于一类幂零群. 《伦敦数学会会刊》，s3-10(1):365–375，1960年。