arXiv:2301.01880v1 [math.GR] 5 Jan 2023

American University in Bulgaria

Senior Thesis

镶嵌

作者：导师：普拉门 Dimitrov 奥尔林教授 Stoytchev

2023年1月6日

摘要

本文从 n 维几何和抽象对称群两个角度介绍镶嵌与多胞体。文章首先简要介绍相关术语，并阐述研究动机。第一部分构造所有 n 维正则镶嵌和多胞体，并将研究扩展至准正则及均匀推广。第二部分探讨多胞体与镶嵌的对称性，并介绍和分类考克斯特群及其相关根系。最后一部分介绍本文开发的算法，并讨论其结果。

目录

1 引言 3

1.1 动机与镶嵌定义.3 1.2 多胞体定义.4

2 n 维空间中的正则镶嵌与多胞体 5

2.1 正镶嵌与多面体.5 2.2 正立方蜂窝与多胞体.8 2.3 n−1 维空间中的正则镶嵌与 n-多胞体 . . . 11

3 准正则与均匀镶嵌和多胞体 14

3.1 准正则铺砌与晶体学限制 14 3.2 均匀蜂窝与几何操作.16

4 考克斯特群与反射群 18

4.1 Coxeter 系统.18 4.2 根系.20 4.3 分类.22

5 超立方体镶嵌与凸多胞体算法 24

5.1 已开发的算法.24 5.2 获得的结果.26

附录 29

A 可视化 29

参考文献 30

1 引言

1.1 动机与镶嵌定义

这项工作的灵感源于对四维立方体与三维仿射空间相交所得截面的序列进行可视化；这些截面在四维立方体中心形成一个八面体，并沿四维立方体的任一四重对角线形成大小和截角程度各异的四面体。

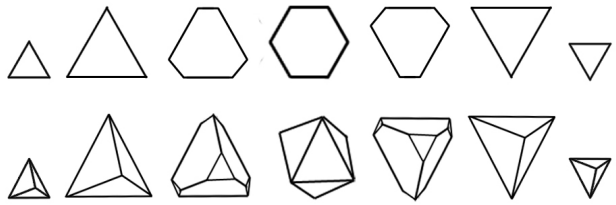


图 1：沿四重对称轴的三维截面。

所有维度中的三个正多胞体都可以由一个包含超立方体的截面得到，而各种均匀多胞体又可以由这些多胞体进一步得到；再加上超立方体镶嵌是在所有维度中唯一的正则镶嵌，这些事实促使我们萌生了开发一种算法的想法，以帮助识别与超立方体镶嵌相关的特定类型的对称截面。

由于数学家在本文所讨论的某些术语上使用了许多不同的命名惯例，本小节首先对此作出澄清。大多数数学家会区分平面镶嵌、蜂窝和镶嵌：将最后一个术语用作 n 维情形的泛称，而前两个术语分别指平面和更高维空间中的镶嵌。本文对这些术语采用相同的含义，但避免像某些资料那样将它们互换使用。

本文采用的镶嵌定义源自考克斯特 [3]。镶嵌是指由多胞体组成的无限集合，这些多胞体彼此拼接，填充一个 n维空间且互不重叠，使得每个多胞体的 n-1个面只属于另一个多胞体。

$n-1$ 维镶嵌可视为 n维无限多胞体，即具有无限多个胞的多胞体。下一节将对此作出说明：届时将探讨多胞体与镶嵌之间的联系，并证明多胞体也可视为给定流形上的镶嵌。在此之前，先给出若干关于多胞体的定义

是必要的。

1.2 多胞体定义

多胞体 P 是由有限个超平面围成的几何图形。它是多边形（2-多胞体）、多面体（3-多胞体）、四维多胞体（4-多胞体）等的 n维推广，并具有以下性质：

- P 的面是多胞体。
- P有各个维度的面：0，1，.....，$n-1$ 为简洁起见，将 k维面称为 P的 k面。
- P 的任一面的面也是 P的面。
- 本文采用的一个约定是：存在一个 P的 n面，而该面 P 就是 P本身。
- 对于 P 的任意两个面 F_1 和 F_2，$F_1 \cap F_2$ 也都是 P 的一个面。
- 对于 P 的任意两个面 F_1 和 F_2，都存在一个唯一确定的 P 的面 $F_1 \vee F_2$，即按包含关系而言同时包含 F_1 和 F_2 的最小面。

最后两个性质源于以下观察。对于一个 n 多胞体，每个 n-1 面都位于一个边界超平面内。两个或更多相邻边界超平面相交于一个 n-二维平坦，而 P 的 n-二维面位于这个 n-二维平坦内；三个或更多相邻的 n-二维平坦相交于一个 n-三维仿射空间，而 n-3-面位于这个n-三维仿射空间内；依此类推，n 个或更多一维平坦（即直线）相交于点，这些点就是多胞体的顶点。

除顶点、棱和面这些显而易见的名称外，多胞体的各种面还有不同的命名惯例。例如，3-面称为胞，4-面称为超胞，n-1-面称为面，n-2-面称为脊，n-3-面称为峰。为了便于进一步推广，这里只采用这些名称的前半部分。每个同时也是低维多胞体的组成部分，还可称为 k-面、k-边界或类似的其他名称；但在此处将使用 k-面（$k < n$）这一称法。

令 N_r 表示多胞体的 r-面数；若 $p < q$，则令 N_{pq} 表示位于一个 q-面内的 p-面数；若 $p > q$，则令 N_{pq} 表示经过一个 q-面的 p-面数。于是 $N_r = N_{rr} = N_{rn}$，并且可以注意到这些数并非彼此独立，即 $N_{pq}N_q = N_{qp}N_p$。它们称为构形数，并将在本文后续部分使用。

多胞体可分为：凸多胞体和非凸多胞体（也称为星形多胞体）；正则、准正则和半正则多胞体；均匀和非均匀多胞体。

如果集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 具有这样的性质：对于任意一对点 $x,\ y \in S$，线段

$$\lambda x + (1-\lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1$$

端点为 x 和 y的线段完全位于 S中。对于任意集合 S，包含 S 的最小凸集（即所有包含S的凸集组成的族的交集）称为 S的凸包，记作 $conv(S)$。凸多胞体P定义为 $\mathbb{R}^n$ [1]中任意有限点集的凸包。若 F_1^0、...、F_r^0是 P中交于 F^0的棱的端点，则 $conv(F_1^0, ..., F_r^0)$是一个 n-1维多胞体，称为 P的顶点图形。若一个 n维多胞体 P 的面是正则的，且其顶点图形也是正则的，则称它为正则多胞体（下一节将重新讨论这个定义）。最后，若一个 n维多胞体 P 的面是均匀的，且其顶点图形都属于同一种类型（P是顶点传递的），则称它为均匀多胞体。

多胞体的对偶定义为这样一个多胞体：它的 r维面与原多胞体的（$n-r-1$）维面相对应，使得它的 n-1维面是原多胞体的顶点图形。于是，对偶多胞体的 n-1维面的构形数，自然对应于原多胞体顶点图形的构形数。

本文不讨论星形多胞体。

2 n 维正则镶嵌与多胞体

2.1 正则平面镶嵌与多面体

在下一节中，我们将列举 n 维空间中的正则多胞体，并运用相同原理，将所有 n-1维正则镶嵌定义为无限正则 n维多胞体。这些多胞体的构造基于 Sommerville [2]。

正则多面体满足两个条件：（1）其面是同一种正多边形；（2）其立体角相等。不过，在经典定义中，第二个条件被改述为一个更强的条件：顶点图形是正多边形。这样一来，第一个条件便可以弱化为：其面是正多边形。更现代的定义则要求一个更强的条件——多面体必须在其旗上具有传递性，即面传递、棱传递且顶点传递；也就是说，所有的面、棱和顶点都必须彼此相同。采用这一新定义的原因是，虽然在通常情况下，正多边形面和顶点图形这一要求足以推出该条件，但对于新引入的抽象多胞体，这一结论已不再成立。

以下构造所需的两个最终条件较弱：(1) 每个面具有相同数量的 n 棱和顶点；(2) 每个顶点周围的

棱和面数量相同。这两个数 n 和 p 将证明足以构造出与采用较强条件时相同的最终多胞体。根据这个定义可得 $N_{02} = N_{12} = n$和 $N_{10} = N_{20} = p$ ，其中 N_{ij} 是与一个 j 维面相邻的 i 维面的数量。由于每条棱周围有两个顶点和面，因此 $N_{01} = N_{21} = 2$。因此，利用 $N_{ij}N_j = N_{ji}N_i$ ，我们得到 $nN_2 = 2N_1 = pN_0$。现在还需增加一项限制，最终将限制 n 和 p的可能取值。

这一限制就是欧拉多面体公式

$$N_2 - N_1 + N_0 = \chi$$

其中， χ 表示一种称为欧拉特征数的拓扑不变量。因此，正多面体的欧拉特征数与球面 $\chi = 2$相同。要验证这一点，我们还需要一些其他工具。高斯-博内公式

$$\int_M KdA = 2\pi\chi(M)$$

将高斯曲率 K 与欧拉特征数 χ 联系起来，关系式为 M ，其中 M 表示任意可定向闭曲面。笛卡尔亏角定律指出，如果多面体与球面同胚（因此不一定是凸的），那么所有顶点的角亏之和，即总角亏，为 4π ，这就是球面的总高斯曲率。于是，高斯-博内公式给出

$$4\pi = \int_M KdA = 2\pi\chi(M) \Rightarrow \chi(M) = 2.$$

多面体的表面可以看作可微曲面的一个极限情形：总高斯曲率 K 在多面体的面和棱处保持为零，因此集中在离散的顶点处。尽管 K 在这些点上没有定义，其积分仍然有限，而且总曲率的积分可以用所有顶点的角亏之和来代替。因此，用 $2\pi\chi(M) = 4\pi$ 除以一个顶点处的角亏，就能轻易得出顶点数。

$$N_0(2 + \frac{2n}{p} - n)\pi = 4\pi$$

为了得到合适的角亏，围绕一个顶点选取 p 个多边形，以及围绕一个多边形选取 n 个顶点，最终都受到这一整除判据的限制。尽管这为 p 和 n 提供了解法，这里仍将探讨一种更具几何性的思路，以便将其应用于更高维的情形。

根据正多面体的欧拉公式 $N_2 - N_1 + N_0 = 2$ ，我们计算得出

$$N_0 = 2 - N_2 + N_1 = 2 - \frac{pN_0}{n} + \frac{pN_0}{2} \Rightarrow N_0(1 + \frac{p}{n} - \frac{p}{2}) = 2 \Rightarrow N_0 = \frac{4n}{2(n+p) - np}$$

其余部分同理可得

$$N_1 = \frac{2np}{2(n+p)-np},\ N_2 = \frac{4p}{2(n+p)-np},\ \lambda = \frac{2}{2(n+p)-np}$$

可简化为 $N_0 = 2n\lambda$, $N_1 = np\lambda$, 以及 $N_2 = 2p\lambda$。

将其限制为有限正多面体，需要 λ 为有限且正的，这会带来附加条件 $p > 2$, $n > 2$ 以及 $2(n+p)-np > 0 \Rightarrow p < \frac{2n}{n-2}$。因此，对于 $n = 3 \Rightarrow 2 < p < 6$, $n = 4 \Rightarrow 2 < p < 4$, $n = 5 \Rightarrow 2 < p < 4$。$n \geq 6$ 会推出 $2 < p < 3$，这是不可能的，因此所有选项都已排除。由此，所有可能的正多面体为

n	3	3	3	4	5
p	3	4	5	3	3

这些恰好就是柏拉图立体。四面体 {3,3}是自对偶的，而六面体 {4,3} 的对偶是八面体 {3,4}，二十面体{3,5} 是十二面体 {5,3}的对偶。类似地，我们可以令 $2(n+p) - np = 0$，从而得到一个无限正多面体，此时 λ 变为无限。由于 $p > 2$ 和 $n > 2$, 这将得到

n	3	4	6
p	6	4	3

这三种正镶嵌分别是三角形 {3,3}、六边形 {6,3} 和正方形 {4,4}。

情形 $2(n+p)-np < 0$ 是第三种情形，但要更好地理解它，我们必须先解释这些结果。在第一种情形中，多面体的顶点、棱和面的构型与球面的镶嵌同构，其中所有顶点都位于球面上，棱则以测地弧表示。为此，设 S 表示半径为 r 的球面上一个 n 边形的角度总和。由于球面的总角亏为

$$\alpha = \int_M K dA = \frac{1}{r^2} A(M) \Rightarrow A(M) = r^2\alpha$$

而对于一个 n 边形

$$2\pi - \alpha + S = n\pi \Rightarrow \alpha = (S - (n-2)\pi)$$

由此可知，该 n 边形的面积必为 $A(M) = (S-(n-2)\pi)r^2$，又因为 $\sum_{i=1}^{N_2} S_i = \sum_{i=1}^{N_2} S = 2\pi N_0$，且 $nN_2 = 2N_1 = pN_0$，总面积必为

$$((2N_0 - (n-2)N_2)\pi r^2 = (2N_0 + 2\frac{pN_0}{n} - pN_0)\pi r^2 = \frac{2(n+p)-np}{n} N_0 \pi r^2.$$

那么，在情形 $2(n+p) - np = 0$ 中， r、 N_0 至少有一个必须是无穷大，才能使 n 边形的面积有限。如果 r 是无穷大，球面就会变成

平面；否则 N_0 必须是无穷大，这会使所有顶点在有限球面上彼此无限接近，因此欧几里得几何仍然适用（此时 n边形的角度和为 $S=(n-2)\pi$）。第三种情形可由前两种情形推出。

最后一个条件 $2(n+p)-np<0$ 随后意味着 $r^2<0$，其中纯虚半径需要使用三角公式；这些公式适用于高斯曲率为恒定负值的曲面 K，该曲面称为罗巴切夫斯基球面或双曲平面。由此，这三种情况帮助我们得出结论：正多面体等价于椭圆几何、欧几里得和双曲平面上的镶嵌。

上述条件 $2(n+p)-np>0$ 也可以改写为

$$2(n+p)-np>0 \Rightarrow \frac{2n}{p}+(2-n)>0 \Rightarrow \frac{2}{p}>1-\frac{2}{n} \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$$

这是另一个与顶点图形的角亏有关的不等式。

2.2 正则立方蜂窝与多胞体

为了在 n 维空间中继续这一构造，我们现在采用更严格的经典定义来描述 n 维正则多胞体，并要求满足两个条件：(1) 多胞体的所有 n-1 面都必须是正则多胞体；(2) 多胞体的所有顶点图形都必须是正则多胞体。尽管也可以考虑其 n-1 面是 n-2 维空间镶嵌的多胞体，但为了进行这一构造，这里仅考虑以有限多胞体作为 n-1 面和顶点图形的情况。

延续上一小节的方法，将多胞体的构形数 N_{pq} 扩展为包含 n-1-面F_{pq} 和顶点图形 V_{pq}的构形数。根据定义，有以下等式：

$$\begin{array}{llll} N_{pq}=F_{pq} & (p<q<3), & N_{p3}=F_p & (p=0,1,2) \\ N_{pq}=V_{p-1,q-1} & (p>q>0), & N_{p0}=V_{p-1} & (p=1,2,3) \end{array}$$

上述等式对于 p的特定取值成立。第一个等式给出了 4-多胞体的面与顶点图形之间的关系。第二个等式由 $N_{p3}=F_{p3}=F_p$ 得出，因为 3-多胞体的 n-1-面是 3-面。第三个等式利用了对偶 N':$V_{pq}=F'_{pq}=N'_{pq}=N_{p-1,\ q-1}$。最后一个等式与第二个等式类似，涉及对偶多胞体。

此外，3-面（胞）中经过一点 F_{10}，F_{20} 的直线或平面的数量，必须与经过每个顶点的直线或平面的数量 V_{02}，V_{12} 相同，因此 $F_{10}=F_{20}=V_{02}=V_{12}$。这是最终可以从中提取出的三个数值 p、q、r之一

$$F_{02} = F_{12} = N_{02} = N_{12} = p$$
$$F_{10} = F_{20} = V_{02} = V_{12} = q$$
$$V_{10} = V_{20} = N_{21} = N_{31} = r$$

其中 p, q 描述3-面，而 q, r 描述顶点图形。它们分别表示多边形的顶点数或棱数（p）、多面体每个顶点处的棱数或平面数（q），以及经过每条棱的3-面或胞数（r）。

如前所述，通过叠加有限多面体的所有可选方案，可以构造出以下四维情形:

333	334	335	343	353	433
434	435	533	534	535	

然而，仍需根据度量（椭圆几何、欧几里得几何和双曲几何）对它们加以区分。为此，我们必须考察构成这些多面体的二面角。几何构造采用球面三角学。

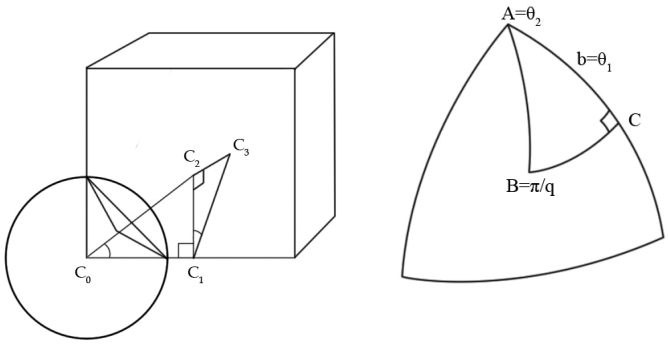


图 2：多面体的二面角 .

设 C_0 为正多面体 p,q 的任意一个顶点。设 C_1 为经过该顶点的一条棱的中点，C_2 为经过 C_0C_1 的一个面的中心，C_3 为多面体的中心。记 $\angle C_1C_0C_2 = \theta_1$ 和 $\angle C_2C_1C_3 = \theta_2$。由于该多面体是正则的，$\angle C_0C_2C_1 = \pi/p$。考虑以 C_0 为中心的单位球面——经过 C_0 的棱和面将球面截成一个具有 q 条边的球面多边形（即该多面体的顶点图形）。于是，θ_1 是此类多边形任一边长的一半，而 θ_2 是其角度大小的一半。最后，由于 π/q 是该多边形的一条边在其中心所张角的一半，我们可以对一个球面直角三角形应用纳皮尔法则

$$cos(B) = sin(A)cos(b) \rightarrow cos\frac{\pi}{q} = sin\theta_2 cos\theta_1 = sin\theta_2 sin\frac{\pi}{p}$$

其中 $2\theta_2$ 是该多面体的二面角。

给定 p和 q 时，正多面体二面角的结果决定了在所构造的四维多胞体（四维多胞体）的每条棱周围可以放置多少个多面体，其数值为 r。结果如下表所示：

p	q	$2\theta_2$	r
3	3	70.5^o	3, 4, 5
3	4	109.5^o	3
4	3	90^o	3, 4
3	5	138.2^o	-
5	3	116.6^o	3

因此，多面体完全填满空间的唯一情况是每条棱周围有 4 个立方体（每个顶点周围有 8 个），这说明 434 是唯一能够镶嵌欧几里得三维空间的四维多胞体，即立方蜂窝；它也是三维中唯一的正镶嵌。可视为超球面正则镶嵌的正闭合多胞体，在每条棱周围只能有 3、4 或 5 个四面体，3 个八面体，3 或 4 个正六面体（立方体），或 3 个正十二面体。它们分别对应 333、334、335、343、433 和 533，其中 333 和 343 是自对偶，其余则构成对偶对：433 与 334 为一对，335 与 533 为一对。

利用正则性的两个条件，可以得到以下关系

$$N_0 q r_q = N_1,\ N_1 r = N_2 p,\ N_2 = N_3 q q_p$$

其中

$$q_p = \frac{2}{2(p+q) - pq},\ r_q = \frac{2}{2(q-r) - qr}.$$

不过，这些关系不再进一步解释，因为欧拉方程 $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$ 在四维空间中是齐次的，只能确定这些构形数之间的比值。

$$N_0 : N_1 : N_2 : N_3 = pq_p : pqq_p r_q : qrp_q r_q : rr_q$$

因此，为了最终确定这些多胞体，我们必须通过几何方式构造它们。由于这超出了本文的范围，这里仅将它们列出，供读者辨认：

- {3,3,3} 五胞体、五胞体或四维单纯形（四面体的类比）
- {4,3,3} 八胞体、八胞体或四维立方体（立方体的类比）

- $\{3,3,4\}$ 十六胞体、16胞体或4维正交多胞体（八面体的类比）
- $\{3,4,3\}$ 二十四胞体、24胞体或八胞体（无三维对应体）
- $\{3,3,5\}$ 六百胞体或600胞体（二十面体的对应体）
- $\{5,3,3\}$ 一百二十胞体或120胞体（十二面体的对应体）

为本论文开发的算法之一，可以生成这些柏拉图立体的任意四维对应体的坐标，从而能够进行各种截面分析，以研究它们的对称性。

2.3 n-1维空间中的正则镶嵌与n-多胞体

如我们所见，构造正则 n-多胞体的问题，只是构造 n-1维空间中的正则镶嵌这一一般问题的一部分。这种镶嵌将 n-1维空间划分为彼此等价的 n-1-多胞体，而这些多胞体又分别是 n-2维椭圆空间中的镶嵌。此外，围绕 n-1维镶嵌的一个顶点的任意超球面，都将定义 n-2维椭圆空间中的一种镶嵌。

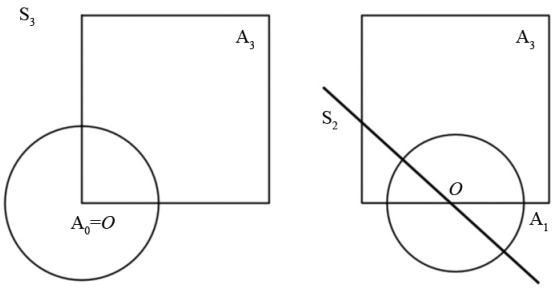


图 3：立方体的正视图，情况为 $p=2, q=0$ （A_q-顶点， A_{p+1}-立方体）和 $p=2, q=1$ （A_q-棱， $A_{p+1}-cube$）。

考虑一个 p+1-面 A_{p+1} 以及其内部的一个 q-面 A_q，使得 $q \leq p$。在 A_{p+1}中，取任意一个与 A_q 交于点 O 的（$p+1-q$）维平坦 S_{p+1-q}，并以 O为中心构造一个小超球面。不难看出

$$\dim S_{p+1-q} = p+1-q = \dim A_{p+1} - \dim A_q,$$
$$\dim A_q \cap S_{p+1-q} \leq min(q, p+1-q), \text{ and } O \subset A_q \cap S_{p+1-q}$$
$$\Rightarrow_{q+r} A_q \cap S_{p+1-q} = O_r,$$

也就是说，所有经过 A_q 的 q+r 面都被 S_{p+1-q} 截成经过 O 的 r 维平坦空间。这些平坦空间继而将超球面截成交维数为 r-1 的区域（经过 A_q 的 q+1 面将超球面截成点，q+2 面将其截成大圆，等等）。

因此，在超球面上形成的图形是 $p-q$ 维椭圆空间上的正则镶嵌。若以 ${}_aN_{bc}$ 表示经过一个 c 面且位于一般多胞体某个 a 面上的 b 面的数量，并以 ${}_aN'_{bc}$ 表示 $p-q$ 维正则镶嵌的构形数，则有

$$ {}_aN'_{bc} = {}_{a+q}N_{b+q,c+q} $$

当 $q=p-1$ 时，可以得到一维椭圆几何正则镶嵌，即正多边形，而 ${}_{p+1}N_{p,p-1} = {}_2N'_{10} = 2$。当 $q=p-2$ 时，得到的二维椭圆几何正则镶嵌为 ${}_{p+1}N_{p,p-2} = {}_3N'_{20} = {}_3N'_{10} = {}_{p+1}N_{p-1,\ p-2}$。这些数

$$ {}_{p+1}N_{p,p-2} = {}_{p+1}N_{p-1,p-2} = k_p \ (p = 1, 2, ..., n-1) $$

与四维情形中的数类似。对于 $p=1$，采用约定 ${}_rN_{p,\ -1} = N_{pr}$ 来表示一个 r-面中 p-面的总数。

此外，用 ${}_pF_{qr}$ 表示镶嵌中 n-1-面的构形数，用 ${}_pV_{qr}$ 表示顶点图的构形数。

$$ {}_{p+1}F_{p,p-2} = {}_{p+1}N_{p,p-2} = k_p \Rightarrow k_1, k_2, ..., k_{n-2} $$

$$ {}_{p+1}V_{p,p-2} = {}_{p+2}N_{p+1,p-1} = k_{p+1} \Rightarrow k_2, k_3, ..., k_{n-1} $$

现在，必须将用于区分椭圆几何、欧几里得和双曲情形的几何方法推广到任意维度。考虑 n 维空间的正则镶嵌 $k_1k_2k_3...k_n$。设 C_0 为任意一个顶点，C_1 为经过 C_0 的一条棱的中点，C_2 为经过 C_0C_2 的一个面（多边形）的中心；一般而言，C_r 为经过 $C_0C_1C_2...C_{r-1}$ 的 r-面中心。那么，三角形 $C_pC_qC_r$（$p<q<r$）始终是直角三角形，直角位于 Cq。角 $C_0C_2C_1$ 是平面面中心处由一条棱所对角的一半，等于 π/k_1。角 $C_1C_0C_2 = \theta_1$ 是两条相邻棱之间夹角的一半，$C_2C_1C_3 = \theta_2$ 是两个相邻平面面之间二面角的一半；一般而言，$C_pC_{p-1}C_{p+1} = \theta_p$ 是两个相邻 p-面之间二面角的一半。由于每个 n-2-面上有 k_n n-1-面，因此角 $C_{n-1}C_{n-2}C_n = \theta_{n-1} = \pi/k_n$。现在，考虑位于 3-面 $C_0C_1C_2C_3$ 中、以 C_0 为球心的球面。经过 C_0 的直线和平面将该球面截成交数为 $2\theta_1$ 、角为 $2\theta_2$ 的正球面多边形；该多边形在中心处由半条边所对的角为 π/k_2。因此，根据球面三角学

$$ cos\pi/k_2 = sin\theta_2 cos\theta_1. $$

再一次，在 4-面 $C_0C_2...C_4$ 中，取一个与 C_0C_1 垂直的超平面 H，使其经过 C_1；在此超平面内，考虑一个以 C_1 为中心的小球面。它被 H 与经过 C_0C_1 的平面和超平面的交线及交平面截出一个正则球面多边形，其边长为 $2\theta_2$，角为 $2\theta_3$，而角

是从多边形中心看半条边 π/k_3 所张的角。再次运用球面三角学

$$cos\pi/k_3 = sin\theta_3 cos\theta_2.$$

最后，我们得到公式

$$cos\pi/k_r = sin\theta_r cos\theta_{r-1} \ (r = 2, 3, ..., n-1) \text{ with } \theta_{n-1} = \pi/k_n.$$

为确定 θ_1，考虑直角三角形 $C_0C_1C_2$。在欧几里得几何中，其角度之和为 $\theta_1 + \pi/k_1 + \pi/2 = \pi$，而在椭圆几何中则更大，在双曲几何中则更小。

现在，对于 $n = 5$，考虑四维空间中的正则镶嵌。于是

$$cos\pi/k_3 = sin\theta_3 cos\theta_2 = sin\pi/k_4 cos\theta_2 \text{ and } cos\pi/k_2 = sin\theta_2 cos\theta_1$$

$$sin^2\theta_2 + cos^2\theta_2 = 1 \Rightarrow \frac{cos^2\theta_1 sin^2\theta_2}{cos^2\theta_1} + \frac{sin^2\pi/k_4 cos^2\theta_2}{sin^2\pi/k_4} = 1$$

$$\frac{cos^2\pi/k_2}{cos^2\theta_1} + \frac{cos^2\pi/k_3}{sin^2\pi/k_4} = 1.$$

如果最后一个表达式大于 1，则该镶嵌为椭圆几何；如果小于 1，则为双曲几何。

进一步将这一推广用于 $n = 5$，我们要求正则五维多胞体的四维面和顶点图形必须是四维空间中的椭圆几何镶嵌。由于四维空间中仅有六种这样的正则四维多胞体：333、334、335、343、433、533，因此可能的五维情形只有

3333	3334	3335
3343	3433	
4333	4334	4335
5333	5334	5335

应用这一条件

$$\frac{cos^2\pi/k_2}{cos^2\theta_1} + \frac{cos^2\pi/k_3}{sin^2\pi/k_4} = 1$$

我们可以将上述情况分为三种椭圆几何情形：3333、3334 和 4333；三种欧几里得情形：3343、3433 和 4334；其余五种则为双曲情形。因此，我们可以得出结论：在四维欧几里得空间中存在三种正则镶嵌，即该空间可以完全由八胞体（立方体）、16胞体或二十四胞体填充；并且只有三种正则五维多胞体——五维单纯形、5维超立方体和五维正交多胞体。

对于 $n = 6$，由于五维面 $k_1k_2k_3k_4$ 和顶点图形 $k_2k_3k_4k_5$ 都必须是椭圆几何的，因此镶嵌只能采用以下形式

33333,33334, 43333, 43334

它们分别对应 6-单纯形、6-立方体、6-正交体，最后一种则是 5维欧几里得空间中的正则镶嵌。很容易看出，在任何更高维度中，选择仍将保持不变：自对偶的 n-单纯形 α_n、 n-立方体 γ_n 及其对偶 n-正交体 β_n ，是 n 维空间中仅有的正则多胞体（$n \geq 5$）；而 $43^{n-2}4$ 镶嵌 δ_{n+1} 则是 n 维空间中唯一的正则镶嵌（记号采用考克斯特 [3] 的用法）。

3 准正则和均匀镶嵌及多胞体

3.1 准正则铺砌与晶体学限制

上一节中为每个特定正则 n-多胞体得到的数值，对于描述其性质至关重要。稍后在本文中，这些数值将以特定组合再次出现，分别作为 Coxeter 系统中生成元的阶，以及考克斯特图中棱的分类依据。这里我们首先介绍最基本的记号，即上文简要提及的 Schl¨afli 符号，以及考克斯特 [3] 最先提出的、将其扩展到准正则镶嵌的形式。为简洁起见，这种扩展主要针对多面体以及相应的铺砌进行分析，随后再引入进一步扩展，以涵盖均匀镶嵌，并着重讨论蜂窝和多胞体。尽管如此，为求完整，下一节仍将简要介绍准正则蜂窝。最后，由于本小节将重点讨论铺砌，第二部分将分析所有平面镶嵌可能具有的对称性。

具有 $k_1k_2...k_{n-1}$ 个面的多胞体的 Schläfli 符号形式简单地写作 $\{k_1, k_2, ..., k_{n-1}\}$，因此可用于所有派生的正则多胞体或镶嵌。因此，$n$ 多胞体的 n-1-面 的 Schläfli 符号为 $\{k_1, k_2, ..., k_{n-2}\}$，顶点图形的 Schläfli 符号为 $\{k_2, ..., k_{n-1}\}$，而该多胞体的对偶的 Schläfli 符号为 $\{k_{n-1}, k_{n-2}, ..., k_1\}$。

现在可以将这种记法扩展到拟正则多面体。以同一点为中心的两个对偶正多面体 {p,q} 和 {q,p} 的交集内部有 N_1 个顶点，它们恰好是 {p,q}和 {q,p}的边中点。其面由 N_0 {q} 边形和 {p} 边形组成，分别是 {p,q} 和 {q,p}的顶点图形。每个顶点处有 4 条棱，总共有 $2N_1$ 条棱。于是

$$N_0 - N_1 + N_2 = N_1 - 2N_1 + (N_0 + N_2) = 2$$

由此得到的多面体可记作 $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix}$。

根据上述限制可以推导出可能的情形:

$p = q = 3 \Rightarrow N_0' = N_1 = 6, N_1' = 2N_1 = 12, N_2' = N_0 + N_2 = 4 + 4 = 8$
$p = 3, q = 4 \Rightarrow N_0' = N_1 = 12, N_1' = 2N_1 = 24, N_2' = N_0 + N_2 = 6 + 8 = 14$
$p = 3, q = 5 \Rightarrow N_0' = N_1 = 30, N_1' = 2N_1 = 60, N_2' = N_0 + N_2 = 12 + 20 = 32$

对于三种椭圆情形，我们得到

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} = \{3, 4\} - \text{octahedron}, \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} - \text{cuboctahedron, and } \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \end{Bmatrix} - \text{icosidodecahedron}$$

由于所有棱都相同，每条棱都将 p 与 q分隔开来，因此我们将准正多面体定义为恰有两种正多边形面且边传递的多面体。证明这就是仅有的准正多面体，其依据是顶点处的二面角总和必须满足不等式

$$r(1 - \frac{2}{p})\pi + r(1 - \frac{2}{q})\pi < 2\pi.$$

因此,

$$1 - \frac{2}{p} + 1 - \frac{2}{q} < \frac{2}{r} \Rightarrow 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

并且由于 p 和 q 都不能小于 3， $r = 2$ 和 $p = 3$， $q = 4$ 或 $p = 3$， $q = 5$。此外，我们还可以考虑正镶嵌的对偶对 {3,6} 和 {6,3}，其中三六边形镶嵌 $\begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix}$ 是以它们的棱的交点为顶点构成的。

这种镶嵌的对称群是由平面上的全等变换构成的无限群。该群包含一个指数为 2 的有限子群。对平面镶嵌的对称性进行分类，进而得到晶体学限制定理：如果平面上的一个离散旋转群有多个旋转中心，那么其中可能出现的旋转阶数只有 1、2、3、4 和 6。

考虑平面上的等距变换构成的欧几里得运动群 $\mathbb{R}^2.O(2)$。该群的任何有限子群都固定一个点，因此与 $O(2)$ 中固定原点的有限子群共轭。于是， $O(2)$ 的有限子群就是阶为 n 的循环群，即由 $2\pi/n$ 构成的旋转群；以及阶为 $2n$ 的二面体群，其中旋转构成指数为 2 的子群，而反射会将这些旋转共轭为其逆旋转。子群 $\mathbb{R}^2$ 由所有平移构成。考虑所有离散情形，即与恒等变换的距离不能任意接近且有正下界的旋转和平移。令 $\Gamma \leq O(2)$ 为

离散子群，并考虑由两个线性无关向量所确定的平移生成的格群 $L = \Gamma \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$。此外，令 Γ 为 $\mathbb{R}^2.O(2)$ 在 $\mathbb{R}^2.O(2)/\mathbb{R}^2$ 中的像，即 $\bar{\Gamma} = \Gamma/L$。

于是 Γ 保持格 L不变。证明如下。取一个向量 $b \in L$，或等价地，取沿该向量平移的变换 $t_b \in \Gamma$，再取将其映射为$\bar{\gamma} \in \Gamma$的 $\gamma \in \Gamma$。用线性算子表示，令

$$\gamma(v) = Av,\ t_b(v) = v + b,\ \gamma^{-1}(v) = A^{-1}v$$
$$\gamma t_b \gamma^{-1}(v) = \gamma t_b(A^{-1}v) = \gamma(A^{-1}v + b) = A(A^{-1}v + b) = v + A(b)$$

因此，$\gamma t_b \gamma^{-1} = t_{\bar{\gamma}(b)}$ 是由 $\bar{\gamma}(b)$ 得到的共轭平移；又由于 $\gamma, t_b \in \Gamma$，根据运算封闭性可得 $t_{\bar{\gamma}(b)} \in \Gamma$，最后 $\bar{\gamma}(b) \in L$。

基于这一已确立的事实，$\Gamma = C_n$ 或 $\Gamma = D_{2n}$ 在具有 $n = 1$、2、3、4、6 以及$\Gamma = C_n$ 这些旋转部分时，最大阶为 12。用线性算子给出的证明如下。设 $A \in \Gamma$ 为一个旋转，即 $detA = 1$。我们要证明 A 的阶为 1、2、3、4 或 6。考虑 A $x^2 - tr(A)x + det(A)$ 的特征多项式 $= x^2 - tx + 1$。设 A 为旋转 θ。由于旋转类似于复数缩放，$x^2 - tx + 1$有复根，即 $t^2 - 4 \leq 0$（仅在 $+1$ 和 -1 的情况下为实数）。因此，该矩阵在复数域上可对角化，且 $tr(A) = t = z + \bar{z}$ 为实数。此外，由于 A稳定格 $L = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$，它将 a 和 b 分别映射为 a、b的整数倍。若将它们作为以 a为基的A 的列向量，则 b在此基下的各项均为整数，因此其迹t 为整数。于是 $t^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow t = \pm 1$、$\pm 2$、0，其中 $t = \pm 2 = 2cos(\theta)$ 对应阶为 1 和 2 的旋转，$t = \pm 1 = 2cos(\theta)$ 对应阶为 3 和 6 的旋转，而 $t = 0 = 2cos(\theta)$ 对应阶为 4 的旋转。证毕。

将高斯整数作为坐标时，镶嵌$\{4,4\}$ 的对称群由平移 $z' = z + 1$ 和四阶旋转 $z' = iz$生成，而 $\{3,6\}$ 的对称群则由同一平移以及三阶旋转 $z' = e^{\pi i/3}z = (e^{2\pi i/3} + 1)z$ 生成。晶体学限制定理可用于对平面镶嵌的所有对称性进行分类，这些对称性包括作为欧几里得平面等距变换的平移、旋转、反射和滑移反射；它们也称为壁纸群或平面晶体学群。

3.2 均匀蜂窝与几何操作

考克斯特提出的施莱夫利符号扩展，可推广至截半的 n 多胞体；截半是指取两个对偶多胞体的交集，也就是在棱的中点处切去顶点，最终形成一个由原多胞体的顶点图形和截半面共同围成的多胞体。

对于准正则蜂窝，所有胞都必须是正则的，且所有顶点图形都必须是准正则的。另一种等价条件是：所有顶点图形都相同，而胞由两种类型交替构成。内角和能整除 2π 的正多面体只有两种：八面体和四面体（它们的内角和为 π）。因此，唯一的准正则蜂窝是 $\left\{\begin{matrix}3 & 3\\ , & \\ & 4\end{matrix}\right\}$，也就是交错立方蜂窝。它可以看作是移除交替顶点后的立方蜂窝：立方胞因此变为四面体，剩余空隙则形成八面体胞。

截半是更一般的截角操作的一种特殊情形，可用于推导出均匀多胞体和镶嵌的列表。虽然有一种源自均匀多胞体 Wythoff 构造、称为 Wythoff 符号的新记法，但也可以对 Schl¨afli 符号作进一步扩展；下一节将介绍一种记法，能够补充有关镶嵌（或多胞体）对称性的更多信息。最终的扩展 Schl¨afli 符号将多胞体的第 k 次截半表示为 $t_k\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}\}$ where $t_{0,\ 1}$ 表示对多边形或更高维多胞体进行截角，$t_{0,\ 2}$ 表示对多面体或更高维多胞体进行截棱（同时移除棱和顶点），$t_{0,\ 3}$ 表示截脊，$t_{0,\ 1,\ 2}$ 表示截棱截角（截棱与截角），$t_{0,\ 1,\ 2,\ 3}$ 表示截脊截棱截角，等等。

所有这些几何操作都可以通过高维空间中的一系列截面来推广。截角是由一系列平行于多胞体顶点图形的面的截面产生的；当截面越过顶点时，会与先前截过的棱相交，并形成下一条棱。类似地，截棱是由一系列平行于多胞体某条棱的截面产生的；当截面越过该棱时，会与先前截过的面相交，并形成下一个面。通过这种推广，可以利用对其截面进行的几何操作，重构一个 $n+1$ 维多胞体。

借助这一方法，我们能够重构一个四维多胞体的图；其截面是立方体逐渐截角直至成为其对偶的结果。

除截半之外，这些操作还引入了半正则多胞体，与准正则和正则多胞体并列。它们都统一于均匀多胞体这一概念之下，其仅有的两个条件是：（1）均匀多胞体面；（2）顶点类型相同（顶点传递性）。均匀二维多胞体必然是正多边形。

平面上有 11 种均匀镶嵌，三维空间中有 28 种均匀凸蜂窝，也称为阿基米德蜂窝。在后者中，只有一种正则蜂窝（由立方体组成）和一种准正则蜂窝（由八面体和四面体组成），这两种都已在上文提及。通过截角，从立方蜂窝衍生出了另外 7 种蜂窝，而从

交替立方体蜂窝衍生出了另外 4 种。最后，还有 15 种棱柱形蜂窝，它们由均匀平面镶嵌经过改造而来。

4 考克斯特群与反射群

4.1 考克斯特系统

上一节表明，欧几里得平面上的等距变换群仅有少数几个 $O(2)$ 的离散子群，因此可以对不一定是均匀镶嵌的各种可能对称性进行分类。晶体学群的三维情形即为空间群。本节旨在对镶嵌（或多胞体）的对称性进行形式化描述，因此不再采用 n 维几何的技术，而主要使用抽象代数中的工具。

Coxeter 系统是一个二元组 (W,S)，其中 W 是一个群，S 是一组生成元 $S\subset W$，并受关系式 $(s_is_j)^{m(s_i,s_j)}=1$ 的约束，其中 $m(s_i,s_i)=1$，即 s_i 是一个对合，并且 $m(s_i,s_j)=m(s_j,s_i)\geq 2,\forall s_i\neq s_j\in S$。如果 s_i 与 s_j 之间没有关系，则采用约定 $m(s_i,s_j)=\infty$。此时，群 W 是商群 F/N，其中 F 是以集合 S 为基的自由群，N 是由所有元素 $(s_is_j)^{m(s_i,s_j)}$ 生成的正规子群。此外，$|S|=n$ 是 Coxeter 系统的秩。$W(M)$ 则是一个考克斯特群，它可以由一个对称 $n\times n$ 矩阵 $M=(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ 构造，该矩阵以 S 为索引，且其元素属于 $\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$，满足 $m_{ii}=1$ 和 $m_{ij}\geq 2\ \forall i\neq j$。类型为 M 的考克斯特群则类似地

$$W(M)=\langle s_1,s_2,...\in S|(s_is_j)^{m_{ij}}=1,m_{ij}\in M\rangle$$

在不存在歧义时，记作 W。

以下是几个最低秩的例子。若 $|S|=n=1$，则 $M=(1)$，且 $W(M)=\langle s_1|s_1^2=1\rangle$，它是 2 阶循环群。对于 $n=2$，则 $M=\left(\begin{smallmatrix}1&m\\m&1\end{smallmatrix}\right)\Rightarrow W(M)=\langle s_1,s_2|s_1^2=1,s_2^2=1,(s_1s_2)^m=1\rangle=D_{2m}$，当$m\in\mathbb{N}\cup\infty$时，它是克莱因四元群；当 $m=2$ 时，它是有限阶二面体群；当 $2\leq m\leq\infty$ 时，它是无限二面体群 D_∞，适用于 $m=\infty$。

除了矩阵之外，还可以根据一个无向图来构造 Coxeter 系统 (W,S)：该图的顶点集为 S，若两个顶点 s 和 s' 由一条标记为 $m(s,\ s')$ 的棱相连，则 $3\leq m\leq\infty$。因此，若不同的顶点 s 和 s' 不相连，则 $m(s,\ s')=2$。由于标记为 $m(s,\ s')$ 的棱很常见，按照惯例会将其省略。所得的图 Γ 称为考克斯特图；作为一种记法，它包含的信息比扩展的施莱夫利符号更多。

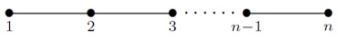


图 4：考克斯特图示例。

与施莱夫利符号的情况相同，矩阵的全部信息都可以从考克斯特图中重建。为说明这一点，我们需要研究考克斯特群与反射群，以及正多胞体的对称群之间的联系。

由于考克斯特群基于抽象表示，因此不一定存在作为反射群的忠实表示。每个反射群的抽象群都是考克斯特群，因为反射是对合的一种特殊情形 [3]。尤其是，无限考克斯特群可能无法表示为反射群。不过，有限考克斯特群具有忠实线性表示，可作为由欧几里得空间中的反射生成的群。其中一些由此类反射生成的有限线性群，是欧几里得空间中正多胞体的对称群。我们将证明考克斯特群存在表示，因为这对本研究的目的至关重要。

设 (W, S) 是类型为 M 的 Coxeter 系统，并取 $n = |S|$。现在我们将构造一个 W 的实线性表示，其次数为 n，使得 S 中元素的像都是 $\mathbb{R}^n$ 中的反射。实向量空间 V 上的反射是 V 上的线性变换，它固定 V 的一个余维为 1 的子空间，即反射超平面 H_α，并且具有一个非平凡特征向量 α，其特征值为 $\lambda = -1$；该向量称为此反射的根。现在取域 $\mathbb{R}$ 上以 $\{\alpha_s | s \in S\}$ 为基的向量空间 V。在 V 上定义双线性型 B，使得

$$B(\alpha_s, \alpha_{s'}) = -cos\frac{\pi}{m(s, s')}$$

其中 $m(s, s') = m_{ij} \in M$，且由于 $m_{ij} = m_{ji}$ 该型是对称的。因此$B = -1$ 对于 $m(s, s') = \infty$， $B(\alpha_s.\alpha_s) = 1$，并且 $B(\alpha_s.\alpha_s) \leq 0$ 对 $s \neq s'$成立，且等号仅当 $m(s, s') = 2$时成立。现在，对每个 $s \in S$，定义一个反射σ_s： $V \to V$，使得 $\sigma_s\lambda = \lambda - 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s$。于是 $\sigma_s\alpha_s = -\alpha_s$ 且 $\sigma_s\lambda = \lambda$，其中 $\{\lambda \in V | B(x, \lambda) = 0\} := H_s$ 与 α_s正交的超平面。因此σ_s 在 $GL(V)$ 中的阶为 2。从定义还可得到一个额外观察：$B(\sigma_s\lambda, \sigma_s\mu) = B(\lambda, \mu)$ $\forall\lambda$， $\mu \in V$，也就是说，反射保持双线性型，由 σ_s 生成的每个元素也都会保持它。最后还可观察到，$|\sigma_s\sigma_{s'}| = m(s, s')$，接下来应当证明这一点。

考虑 $V_{s,\ s'} := \mathbb{R}\alpha_s \oplus \mathbb{R}\alpha_{s'}$。 B 在 $V_{s,\ s'}$ 上的限制是半正定的

因为对于 $\lambda = a\alpha_s + b\alpha_{s'}$，我们得到

$$B(\lambda,\lambda) = B(a\alpha_s + b\alpha_{s'}, a\alpha_s + b\alpha_{s'}) =$$
$$= a^2 B(\alpha_s,\alpha_s) + 2abB(\alpha_s,\alpha_{s'}) + b^2 B(\alpha_{s'},\alpha_{s'}) =$$
$$= a^2 - 2abcos(\pi/m(s,s')) + b^2 =$$
$$= a^2 - 2abcos(\pi/m(s,s')) + b^2(cos^2(\pi/m(s,s')) + sin^2(\pi/m(s,s')) =$$
$$= (a - bcos(\pi/m(s,s')))^2 + b^2 sin^2(\pi/m(s,s')) \geq 0.$$

因此，当 $sin(\pi/m(s,s')) \neq 0$ 且 $m < \infty$时，该形式是正定的。进一步注意到，σ_s 和 $\sigma_{s'}$ 稳定 $V_{s,s'}$，因此 $\sigma_s\sigma_{s'}$ 作为 $V_{s,s'}$中的算子，其阶分为两种情况。(1) 若 $m < \infty$，由于该形式是正定的，我们可以考虑欧几里得平面；又由于 $B(\alpha_s,\alpha_{s'}) = -cos(\pi/m(s,s')) = cos(\pi-(\pi/m(s,s')))$，且 $\mathbb{R}\alpha_s$ 与 $\mathbb{R}\alpha_{s'}$ 之间的角因此为 $\pi-(\pi/m(s,s'))$，所以 H_α 与 $H_{\alpha'}$ 之间的角为 $\pi/m(s,s')$。由于转过 $2\pi/m(s,s')$的旋转可以表示为两个反射的乘积，且这两个反射的不动超平面之间的角为 $\pi/m(s,s')$，由此可知 $\sigma_s\sigma_{s'}$ 的阶为 $m(s,s')$。B在 $V_{s,s'}$ 上正定这一事实意味着 $V = V_{s,s'} \oplus V_{s,s'}^{\perp}$，其中 $V_{s,s'}^{\perp} := s^{\perp} \cap s'^{\perp}$同时被 σ_s 和 $\sigma_{s'}$固定。因此，$\sigma_s\sigma_{s'}$ 在 V上的阶也为 $m(s,s')$。(2) 若$m = \infty$, $B(\alpha_s,\alpha_{s'}) = -1$。那么，若 $\lambda = \alpha_s + \alpha_{s'}$, $B(\lambda,\alpha_s) = B(\lambda,\alpha_{s'}) = 0$，且 σ_s 和 $\sigma_{s'}$ 固定 λ，则 $\sigma_s\sigma_{s'}\alpha_s = \sigma_s(\alpha_s + 2\alpha_{s'}) = 3\alpha_s + 2\alpha_{s'} = 2\lambda + \alpha_s$。应用 $\sigma_s\sigma_{s'}$ $k \in \mathbb{Z}$ 次，$(\sigma_s\sigma_{s'})^k\alpha_s = 2k\lambda + \alpha_s$。因此，我们可以得出结论：$\sigma_s\sigma_{s'}$ 在 $V_{s,s'}$ 上的阶是无限的，因而在 V 上的阶也是无限的。

这有助于我们得出结论：存在唯一的同态 $\sigma: W \to GL(V)$，其中 $\sigma(s_1s_2...s_n) = \sigma(w) = \sigma_w = \sigma_{s_1}\sigma_{s_2}...\sigma_{s_n}$。我们称这个同态为 W 的线性表示。该表示是忠实表示这一事实，是关于考克斯特群长度函数的另一条定理的推论，超出了本文的讨论范围。不过，后续章节需要用到的最后一个定义如下。由给定子集 $I \subset S$ 生成的子群 W_I 以及它的任意共轭子群，称为考克斯特群 W 的抛物子群；事实上，它们本身也是考克斯特群。

4.2 根系

考虑一个类型为 M 的 Coxeter 系统 (W,S)。集合 $\Phi := \bigcup_{s\in S, w\in W} \sigma(w)\alpha_s$ 称为 W 的根系。它由反射表示空间 V 中单位向量在 W 作用下所得的轨道组成；也就是说，它由 W 置换的 V 中的单位向量构成。由于 W 保持双线性型，这些向量仍是单位向量。此外，$\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$，其中

$$\Phi^+ := \Phi \cap (\sum_{s\in S} \mathbb{R}_{\geq 0}\alpha_s),\ \Phi^- := \Phi \cap (\sum_{s\in S} \mathbb{R}_{\leq 0}\alpha_s).$$

如果 $\alpha \in \Phi^+$，则称根 α 为正根（记作 $\alpha > 0$）；如果$\alpha \in \Phi^-$，则称其为负根（$\alpha < 0$）。注意，由于 $\sigma_s(\alpha_s) = -\alpha_s$、$\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$ $\forall\alpha \in \Phi$，且 $\sigma(W)\Phi = \Phi$，因此 $\Phi = -\Phi$。正根和负根是相对于某种特定的

全序（例如字典序）定义的，其中 $\sum a_i\lambda_i < \sum b_i\lambda_i \Rightarrow a_k < b_k$， k 是满足 $a_k \neq b_k$的最小索引。

向量 α_i 的子集 $\Delta \subset \Phi^+$ 若构成 V 中 Φ 的 $\mathbb{R}$-张成空间的一组基，则称为简单系。根 $\alpha \in \Delta$ 称为 Φ 的简单根。每个 $\alpha' \in \Phi$ 都是 Δ 的线性组合，且系数的符号均相同。

通过考察 Coxeter 系统 (W, S) 的反射集合 $R = \{wsw^{-1} | w \in W, s \in S\}$，可以进一步建立根与反射之间的关系。在几何表示 $\sigma: W \to GL(V)$ 中，每个 $s \in S$ 都在 V 上充当反射 $\sigma(s)\alpha_s$。更一般地，可以为每个根 $\alpha \in \Phi$ 关联 $GL(V)$ 中的一个反射。考虑 $\alpha = \sigma(w)\alpha_s := w(\alpha_s)$（为简便起见），其中 $w \in W$ 和 $s \in S$。那么 $wsw^{-1} \in R$ 在 W 上的作用如下:

$$\sigma(wsw^{-1})\lambda =: wsw^{-1}(\lambda) = w[w^{-1}(\lambda) - 2B(w^{-1}(\lambda), \alpha_s)\alpha_s] =$$
$$= \lambda - 2B(w^{-1}(\lambda), \alpha_s)w(\alpha_s) = \lambda - 2B(\lambda, w(\alpha_s))w(\alpha_s) =$$
$$= \lambda - 2B(\lambda, \alpha)\alpha$$

这表明， wsw^{-1} 不取决于 w 和 s 的选择，而只取决于 α 的选择，因此可记为 s_α。此外， s_α 在 V 上的作用是一个反射，将 α 映到 $-\alpha$，并逐点固定超平面 $H_\alpha \perp \alpha$。因此， α和 $-\alpha$ 确定的是同一个反射 $s_\alpha = -s_\alpha$。由于存在双射 $\alpha \to s_\alpha$ （对于 $\alpha \in \Phi^+$），根与反射之间的对应关系最终得以确立。因此，考克斯特群 W 的每个反射都有唯一的正根$\alpha \in \Phi^+$，而每个 $\alpha \in \Phi^+$ 都是关于 B 的唯一正交反射的正根。若 α， $\beta \in \Phi$ 且 w， $w' \in W$，使得 $w'(\beta) = w(\alpha)$, 则$ws_\alpha w^{-1} = w's_\beta w'^{-1}$。

这种对应关系有助于我们将形如 $(s_is_j)^{m_{ij}}$ 的 Coxeter 系统中的关系理解为两个反射的结果，这两个反射固定的超平面相交成角 π/m_{ij}。元素 $s_is_j \in S$ 的阶为 m_{ij}，因此在几何上可解释为旋转 $2\pi/m_{ij}$。

这里还要提及根系的一些重要性质和定义，具体如下。若 Δ 是 Φ 中的简单系, 则 $(\alpha, \beta) \leq 0\ \forall \alpha \neq \beta \in \Delta$。若 $\alpha_s \in \Delta$，则 $s(\Pi\backslash\{\alpha_s\}) = \Pi\backslash\{\alpha_s\}$。根系 Φ 若满足以下附加条件，则称为晶体学的:

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha, \beta \in \Phi.$$

向量 $\alpha^\vee := 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ 称为 $\alpha \in \Phi$ 的余根。所有余根组成的集合 $\Phi^\vee$ 是 Φ 的对偶根系或逆根系。由 $\Phi^\vee$ 生成的反射 $w \in W$ 与 Φ 相同，即 $w\alpha^\vee = w(\alpha)^\vee$。

本节还需给出 W 在 V 上作用的基本域的定义。取一个包含简单系 Δ 的正系 Φ^+

并考虑每个反射超平面 H_α 的开半空间 $H_\alpha^+ := \{\lambda \in V | (\lambda, \alpha) > 0\}$ 和 $H_\alpha^- := -H_\alpha^+$。定义 $C := \cap_{\alpha_s \in \Delta} H_\alpha^+$，它是开集和凸集的交集，因此是开且凸的。令 $D := C$ 为C的闭包，即闭半空间 $H_\alpha^+ \cup H_\alpha$ 的交集。于是

$$D = \{\lambda \in V | (\lambda, \alpha) \geq 0 \ \forall \alpha \in \Delta\}$$

并且每个 $\lambda \in V$ 都与 D中的唯一一个点共轭。因此， D 被称为 W 在 V中的作用的基本域。

这或许能为考克斯特群的几何表示提供一种不同的见解。考克斯特图的节点代表基本域的壁；当对应的壁不垂直时，两个节点之间就用一条分支连接。此外，分支上标有数字$m_{ij} > 2$，用来表示角度 π/m_{ij}。对于不含任何偶数标记分支的连通图，群中的所有反射都彼此共轭 [3]。这种由考克斯特最初提出的、以基本域阐释考克斯特图的方式，使其最终拓展到上一节讨论的几何操作，以及均匀镶嵌和多胞体。

4.3 分类

正多胞体的所有对称群都是有限考克斯特群（也就是有限反射群）。正则镶嵌的所有对称群都是仿射考克斯特群（也就是包含正规阿贝尔子群的仿射反射群，使得商群有限且本身也是考克斯特群）。仿射考克斯特群的考克斯特图，是通过在第 2 节所述的构造中添加一个额外顶点得到的。对偶多胞体或镶嵌具有相同的对称群，因此也具有相同的考克斯特群。

对于任意维数的正多胞体，其对称群分别为对称群 S_{n+1} 或 A_n 型考克斯特群（对应正 n单纯形 α_n），以及超八面体群或 $B_n = C_n$ 型考克斯特群（对应 n 立方体 γ_n 及其对偶 n正交多胞体 β_n）。这些多胞体的根系采用相同的记号，只是 B_n 和 C_n 互换（ B_2 和 C_2 对应的对偶根系同构）。下一节所述某种算法中特别重要的 γ_n 的根系B_n，构造如下。

令 $V = R^n$，并令 Φ 由 V 中所有长度为 1（短根）或 $\sqrt{2}$ （长根）的整数向量组成。根的总数为 $2n^2$，其中有 $2n$ 个短根$\pm e_i$，以及 $2n(n-1)$ 个长根 $\pm e_i \pm e_j$（$i < j$）。对于 Δ，取简单长根$\alpha_i = e_i - e_{i+1}$；对于 $1 \leq i \leq n-1$，取短根 $\alpha_n = e_n$。于是，关于垂直于短根 α_n 的超平面的反射 s，就是将第

n个坐标取反。

此外，五边形的对称群是 H_2，十二面体及其对偶二十面体的对称群是完整的二十面体群 H_3，而它们的四维对应体（120胞体和600胞体）的对称群是 H_4。二十四胞体的对称群是 F_4。类型为 D_n (n-半超立方体)、E_6 ($2_{21}, 1_{22}$)、E_7 ($3_{21}, 2_{31}, 1_{32}$) 和 E_8($4_{21}, 2_{41}, 1_{42}$) 的考克斯特群是某些半正多胞体的对称群。六边形的对称群是 G_2。

~仿射考克斯特群分类如下：单纯形均匀~镶嵌对应 A_n，半超立方均匀镶嵌对应 B_n，超-~立方均匀镶嵌对应 C_n，2_{22} 对应 E_6，3_{31}，1_{33} 对应 E_7，5_{21}，2_{51}，1_{52} 对应 E_8，16胞体和二十四胞体均匀镶嵌对应 F_4~，六边形镶嵌和三角形镶嵌对应 G_2。

本文将要介绍的最后一种记号是带环考克斯特图，它包含足够的信息，可以明确列举几乎所有类型的均匀多胞体和均匀镶嵌。每个均匀多胞体都可以利用界定基本区域的镜面超平面和一个生成点来生成。该点关于镜面超平面的反射，以及随后关于同一组超平面的进一步反射，构成了多胞体的顶点集合。多胞体的棱将每个点与一个镜像点连接起来；面则可以构造为由棱组成的圈，等等。生成顶点的位置通过以下方式指定：考克斯特图中对应于生成顶点不位于其上的镜面超平面的所有节点，都用环标记（该顶点到所有带环节点对应的超平面距离相等）。因此，生成顶点所在的所有镜面超平面都不会生成额外的顶点。一个图至少需要一个活动节点才能表示一个多胞体，因此所有正多胞体的考克斯特图都将第一个节点标记上环。

带有一个标记超平面的均匀多胞体这一更一般的情形，对应于基本域顶点处的生成点（由于构造方式如此，基本域始终是一个单纯形）。如果所有节点都被圈出，生成点便位于单纯形内部。一般而言，如果考克斯特图中有 n 个节点被标记，生成点在基本域的 n-1 面上有 $n-1$ 个自由度；通常可以将其置于最终多胞体中具有相等 n-1 面的 n-1 面中心。对于具有非反射对称性的均匀多胞体这一特殊情形，可以使用一种辅助标记：移除被圈出节点的中心点，以表示交替删除节点。这样构造出的多胞体将只具有原考克斯特群的一个子对称群。最终，如果所有节点都以这种方式标记，该多胞体就称为扭棱体。利用这一最终记法，我们可以描述例如立方八面体、小斜方截半立方体、八面体、截角立方体，以及其他通过对立方体进行几何操作得到的均匀多胞体。

5 超立方体镶嵌与凸多胞体算法

5.1 所开发的算法

本节将介绍为这项工作开发的两种算法。由于它们采用了一些共同的方法，且区别仅在于可移除的组成部分，因此我们将通过一个顺序一致的算法来描述它们。尽管我们最初计划使用参数方程，但在计算交集时，它并不能提供理想的解决方案。此外，代数方程也无法绘制垂直线。

超立方体镶嵌算法生成一个 n-立方体，并在其所有侧面上再生成 n 个 n-立方体，然后求出一个与三个线性无关向量（最好是来自 B_n 根系的根）平行的三维空间截面。由此可绘制出由若干填充空间的多面体构成的三维图，这些多面体共同形成镶嵌；还可以选择绘制一个额外的二维图。凸多胞体算法通过分析其顶点坐标所确定的可能的 k-面，生成一个凸 n-多胞体，然后使用指定参数进行类似的截面运算。

对于一个 n维凸多胞体，设 V 为其顶点集， F为其 n-面集，取所有子集 $S \subset V$， $|S| = n$。对于这些 n 个点A_1， A_2，.....， A_n，求一个非零向量（u_1， u_2，.....， u_n），使其与向量 $A_i - A_n$， $i = 1$，2，.....， $n-1$正交。因此，我们需要求解一个含有 n 个变量 u_1， u_2，.....， u_n的 $n-1$ 元齐次方程组。如果 n 个顶点构成超平面的一个子空间，那么所构造矩阵的零空间维数可能大于一（所考虑线性映射的核中至少存在两个线性无关的非零向量）。这些情况意味着给定的 S 不是该多胞体的 n-1 面，因此可以忽略。

其余结果是穿过来自 S 的点的超平面 H_j 的法向量 $\vec{n_j}$，其中 j 为 S 其余各情形的索引。测试 H_j 是否为一个 n 面时，必须考虑 $\vec{n_j}$ 的正向和反向取向。为此，使用了多胞体凸性的定义之一。

如果一个多胞体完全位于其每个 n-1 维面的同一侧，那么它就是凸的。因此，如果该多胞体是凸的，且有一个面位于超平面 H_j 内，那么所有点 $A \in V \backslash S$ 都必须位于闭负半空间 H_j^- 内。有向距离由从超平面到该

点 $A=(a_1,\ a_2,\ .....,\ a_n)$ 的任意向量在平面 $\vec{n_j}=(u_1,\ u_2,\ ...u_n)$ 的法向量上的投影得到。

$$\frac{|(\vec{a}-\vec{x})\cdot\vec{n_j}|}{|\vec{n_j}|}=\frac{|a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n-u_1x_1-u_2x_2-...-u_nx_n|}{|\vec{n_j}|}=$$
$$=\frac{|a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n-(-C)|}{|\vec{n_j}|}=\frac{a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n+C}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+...+u_n^2}}$$

平移常数 C 可通过将正则超平面方程 H_j 代入任意点 $A\in S$求得。由 V 中的顶点定义的凸包为

$$\bigcap H_{j_k}^{-}=conv(V),k=0,1,...,|F|$$

它就是所需的多胞体，也是 $|F|$ 不等式组的解。

然而，对于算法的第二部分——与三维子空间求截面，以观察多胞体的某些对称性——只需要多胞体的 n 面的法向量 n_{j_k}。三个线性无关向量和一个平移点足以在 n 维空间中定义唯一的三维子空间。为了在三维子空间中观察多胞体的对称性，只允许特定的取向。这些取向由特定多胞体对应的考克斯特群的根系 Φ 决定。因此，选取一个平行于三个线性无关根（不一定是简单根）的三维子空间，可以确保所观察到的截面符合原考克斯特群的某个抛物子群的对称性。进而，可以用该子群所稳定的根系来描述这个截面。例如，考虑根系 B_4 和一个超立方体，我们可以选取长根

$$\begin{array}{rl} u_1=\text{(-1,-1,0,0)} & \angle(u_1,u_2)=\pi/3 \\ u_2=\text{(-1,0,-1,0)} & \angle(u_2,u_3)=\pi/4 \\ u_3=\text{(-1,0,0,0)} & \angle(u_3,u_1)=\pi/4 \end{array}$$

这将得到 B_3 根系，而与超立方体的截面应在沿这些根进行的所有反射下保持不变。示例截面是一个相对于 xy 平面以顶点着地的立方体，所得的二维截面是一个六边形。因此，我们不选择三维子空间的任意可能取向（尽管这也是可行的），而只选择向量 $\alpha\in\Phi$。

需要注意的是，当该三维子空间在 n 空间中的余维大于 1 时，其法向量的选择并不唯一。余维越大，也就是说，该三维子空间的正交补维数越大，就必须选取一组由 $n-3$ 个向量组成的基，才能唯一确定该三维子空间。因此，更好的方法是直接选取三个张成该三维子空间的向量，以确定其在 n 空间中的取向。

选定三个根后，可以使用格拉姆–施密特正交化过程生成新的标准正交基和过渡矩阵 T，其中单位向量作为列向量。选定线性无关的根后，在三维子空间内进行正交化自然不会对截面产生任何影响。随后， n 面的法向量 $T^{-1}n_{j_k} = T^t n_{j_k}$ 定义出新的正半空间，从而改变凸多胞体的取向。在超立方体镶嵌算法中，对所有侧立方体应用相同的变换，区别在于它们最初沿某个初始单位向量进行了平移。生成半空间不等式时，使用指定三维子空间平移的点来平移超平面。最后，在给定 $x_i = 0, 3 < i \leq n$ 的情况下，求解不等式以得到 x_1, x_2， 和 x_3，结果即可用于绘图。

5.2 已获得的结果

下一小节介绍了本研究通过算法和所开展的研究获得的一些重要观察与结果。

考虑向量子空间 $K \subset L \subset M$，其中 $\dim K = k$、$\dim L = l$ 和 $\dim M = m < n$。从 Φ 中取一列 m 线性无关根，它们唯一确定 M，且其中前 l 个唯一确定 L，前 k 个唯一确定 K。对 m 个根进行置换，会导致与 n 多胞体在 M 中的截面取向不同，也会导致为 K 选择或置换 k 个根，以及为L选择或置换 l 个根。考虑那些在 K 中保持 k 个根不变、但在 L中不保持 l 个根不变的 m 个根的置换。因此，多胞体在L 中的截面会发生变化，但与 K 的截面保持不变。这为不同多胞体在 l 维空间中具有相同的k 截面提供了一个很好的例子。出于同样的原因，经过特定取向的八面体或立方体中心的平面截面都会形成一个六边形。同样，观察到的三维子空间中的多胞体保持不变，而在更高维度中，可以观察到原始多胞体及截面多胞体的许多不同取向。

另一个重要性更高的结果，与无法通过其根系获得的 n-多胞体的隐藏对称性有关。选择三个线性无关的根，可以确保截面至少具有由这些根产生的对称性，也就是说，在关于垂直于这些根的超平面进行反射后保持不变。然而，截面可能还具有其他对称性，并且在进行额外的反射后仍保持不变，而这些反射并不保持原始 n-多胞体不变。我们可以用一个例子轻松说明这一点。

用一个与立方体六条棱的中点相交的二维平坦截取三维立方体，得到一个六边形。应当正式考察的对称性

是 D_6 群的对称性，因为立方体中所有平行于该二维平坦的根都是长根，并生成 A_2 根系。两条平行于该二维平坦的根之间的角为 $2\pi/3$ ，因此，沿其各自超平面（在此情形下为平面）进行反射，会产生一种保持立方体不变的三重旋转。另一个与这两条根平行、且与原立方体的三个顶点相交的截面会形成一个等边三角形，此时这种额外的对称性已不存在。对于最初的截面， A_2根系的所有根都指向六边形的顶点。作为偶数边多边形，六边形也在由另一条指向其边中点的根所定义的反射下保持不变。

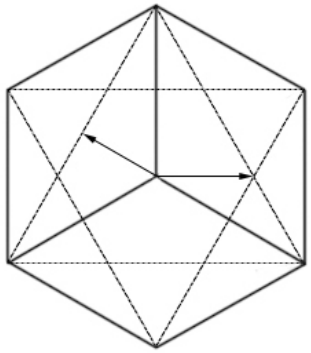


图 5：立方体中隐藏的对称性。

将 G_2 根系 α 的两个单根分别记为（一个指向顶点，且与所需的 A_2 根系中的一个根重合）和 β （一个指向棱的中点）。观察立方体的展开图后，可以很容易得出结论： β 型六边形的所有根都指向立方体某个面上的坐标 $(k/3, l/3)$ $k = 1, 2$， $l = 1, 2$，每条棱对应四个。沿 β 向量对立方体进行一般反射时，会固定一个正交平面 H_β ，该平面穿过两个相对的顶点和两条棱的中点。这种反射不保持立方体不变，因此不属于立方体的对称群。因此， β 向量不能是 B_3 根系的根；而作为六边形对称群的 D_{12} 群也不是八面体群的子群 O_h。因此，超立方体考克斯特群的抛物子群并未涵盖超立方体截面中可能观察到的所有对称性；从其根系中选取根，只能确保特定截面的最低限度对称性。

同样，也可以通过更高维度的截面获得更高阶的对称性。与生成根系 A_3 的三个线性无关长根平行的四维立方体中心截面，会形成一个特定取向的八面体（而非四面体），它在沿 A_3中的所有根进行反射时保持不变。隐藏对称性也是原因之一——

因此，无法直接通过与 n维立方体的交集获得立方八面体之类的均匀多面体。立方八面体可以轻松地通过与 C_n 根系中的三个短根平行的16胞体（4维正交多胞体）中心截面获得，而16胞体则可以通过5维超立方体的四维中心截面获得。然而，对构成16胞体截面所需的四个根序列进行任何进一步置换，都会产生 $\binom{4}{3}$ 种可能的三维截面，其中没有一种能够利用四维截面的额外对称性，而这种对称性是获得立方八面体所必需的。

最后的结论涉及从 n维立方镶嵌中得到的三维截面。旋转镶嵌会产生不同的截面，其中包含填充空间的超立方体，因此也会使所得填充空间的多面体具有不同的附加对称性。回到简单的三维例子，正方形镶嵌可以通过与立方蜂窝进行面优先交集得到，而等边三角形则可通过顶点优先截面得到：该截面穿过任意一个立方体的三个顶点。然而，只有将立方体视为多面体，并在每个原始面的中心增设立体角为 π 的顶点，才能得到六边形镶嵌；随后将原始立方体排列成一个立方体的顶点接触另一个立方体原始面的中心，且其棱与另一个立方体的棱保持平行。如果保留原始立方蜂窝，并使至少一个立方体在其六条棱的中心处被截取，所得平面镶嵌便是三六边形镶嵌，其中包含具有附加对称性的多边形以及具有最低必要对称性的多边形。

附录

A 可视化

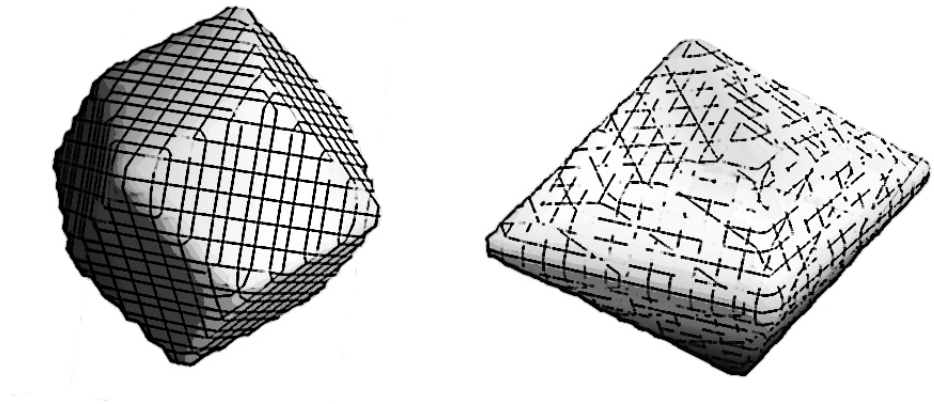


图 6：凸多胞体算法——由二十四胞体截面得到的菱形十二面体，以及由 16胞体截面得到的六角双锥。

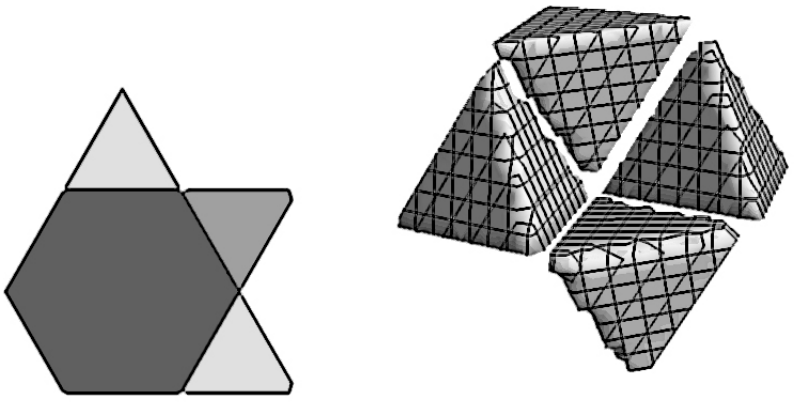


图 7：超立方体镶嵌算法——三六边形镶嵌和交替立方蜂窝。

参考文献

[1] B. Gruenbaum 和 G. C. Shephard，《凸多胞体》。伦敦数学会通报，牛津，第 1 卷（1969 年），257–300 页。[2] D. M. Y. Sommerville，《*N* 维几何导论》。多佛出版社，纽约，第一版，1958 年。[3] H. S. M. Coxeter，《正多胞体》。麦克米伦公司，纽约，第二版，1963 年。[4] James E. Humphreys，《反射群与考克斯特群》。剑桥大学出版社，剑桥，第一版，1990 年。