arXiv:2301.01886v2 [math.KT] 4 Jan 2024

斯普林格簇的等变 K-理论

VIKRAMAN UMA

Abstract.本文旨在用生成元与关系描述与一个幂零算子相关联的 K-环。该算子的 Jordan 标准形的各个块大小构成一个弱递减序列 $\mathcal{F}_\lambda$ 型的斯普林格簇 A $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$。这与 Abe 和 Horiguchi 对 $\mathcal{F}_\lambda$ 等变上同调环的描述相呼应，并推广了 Sankaran 和 Uma 对 K普通拓扑 $\mathcal{F}_\lambda$ -环的描述 [15]。

1. Introduction

取正整数 n，并考虑完全旗簇 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$（或简写为 $\mathcal{F}$），其定义如下:

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}^n) := \{\underline{V} := (0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim V_i = i \text{ for all } i\}.$$

设 $N : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 的一个幂零线性变换。与 N 相关联的 A 型斯普林格簇，记为 $\mathcal{F}_N$，是 $\mathcal{F}$ 的闭子簇，定义如下:

$$\{\underline{V} \in \mathcal{F} \quad | \quad NV_i \subset V_{i-1} \text{ for all } 1 \leq i \leq n\}.$$

斯普林格簇 $\mathcal{F}_N$ 是 $\mathcal{F}$ 中在由幺幂元素$\mathcal{U} = I_n + N \in SL(n, \mathbb{C})$生成的无限循环群作用下保持不变的子簇。此外，记 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$为 n 的分拆，其中 λ_j 是 N的 Jordan标准形的对角块大小，则簇 $\mathcal{F}_N$ 在同构意义下仅取决于分拆 λ。这是因为，对应于同一分拆 λ 的两个不同幂零变换在 $GL(n, \mathbb{C})$中互为共轭。因此，我们假设N本身处于 Jordan标准形: $N = J_\lambda := \text{diag}(J_{\lambda_1}, \ldots, J_{\lambda_l})$，其中 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l$，并将斯普林格簇 $\mathcal{F}_N$记为 $\mathcal{F}_\lambda$。（这里$J_p = (a_{i,j}) \in M_p(\mathbb{C})$是一个矩阵，其中$a_{i,\,i+1} = 1$、$1 \leq i < p$以及所有其他元素均为零。）若 $\lambda = (1, \ldots, 1)$，则 $N = 0$，并且我们有$\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}(\mathbb{C}^n) = \mathcal{F}$。在另一个极端，当 $\lambda = (n)$时， N 是一个正则

2020 数学主题分类。55N15,14M15, 19L99。关键词和短语。斯普林格簇、旗簇、等变 K 理论、等变上同调。

幂零元，并且我们看到 $\mathcal{F}_{(n)}$ 是仅由标准旗 $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = \mathbb{C}^n$ 构成的单点簇，其中 E_j由标准基向量 e_1、.....、 e_j （ $1 \leq j \leq n$）张成。

注意， $\mathcal{F}_\lambda$ 在代数环面 $T^l_{\mathbb{C}} \cong (\mathbb{C}^*)^l$ 的作用下保持不变。该环面包含于 $GL(n, \mathbb{C})$ 中，由所有与 N 可交换的对角矩阵组成。我们将包含于 $T^l_{\mathbb{C}}$ 中的紧致环面记为 $T^l = (\mathbb{S}^1)^l$。将 $GL(n, \mathbb{C})$ 的对角子群记为 $T^n_{\mathbb{C}}$，则 $(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n) \in T^n_{\mathbb{C}}$属于 $T^l_{\mathbb{C}}$，当且仅当 $\mathtt{t}_{a_j+i} = \mathtt{t}_{a_j+1}$对于$2 \leq i \leq \lambda_{j+1}$, $0 \leq j \leq l-1$成立，其中 $a_j := \lambda_1 + \cdots + \lambda_j, 1 \leq j \leq l-1$且 $a_0 = 0$。

Springer 首先研究了簇 $\mathcal{F}_\lambda$ （参见 [18], [19] ，另见[9]）。特别地，Springer 证明，对称群 S_n 在有理上同调 $H^*(\mathcal{F}_\lambda; \mathbb{Q})$ 上有自然作用，且该作用与 S_n 在 $H^*(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 上的标准作用相容。此外，由包含映射 $\mathcal{F}_\lambda \hookrightarrow \mathcal{F}$ 诱导的限制同态 $H^*(\mathcal{F}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(\mathcal{F}_\lambda; \mathbb{Z})$ 是满射（参见 [9]）。一般而言，簇 $\mathcal{F}_\lambda$ 并非不可约，但它是等维的。 $\mathcal{F}_\lambda$ 的不可约分支由形状为 λ 的标准杨表集自然标记。参见[17]。在 S_n 作用下， S_n-模 $H^*(\mathcal{F}_\lambda; \mathbb{Q}))$ 同构于 S_n 的表示 M_λ ，该表示由子群 $S_\lambda = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \cdots \times S_{\lambda_l} \subset S_n$ 的平凡表示诱导而来。参见 [13] 和 [7, 第 204] 页。

De Concini 和 Procesi [7] 将 $H^*(\mathcal{F}_\lambda; \mathbb{C})$ 描述为 $\mathbb{C}$ 上的一个（非约化）簇的坐标环，现将其具体描述如下。令 $\lambda^\vee$ 表示与 λ对偶的分拆。非约化概形 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \cap O_{\lambda^\vee}$ （概形论交）的坐标环 $\mathbb{C}[\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \cap O_{\lambda^\vee}]$, 其中 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = Lie(T^n_{\mathbb{C}}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$, 而$\overline{O_{\lambda^\vee}} \subset M_n(\mathbb{C})$ 表示 $J_{\lambda^\vee}$ 在 $GL(n, \mathbb{C})$ 的伴随作用下的轨道闭包。De Concini 和 Procesi 证明, $H^*(\mathcal{F}_\lambda; \mathbb{C})$ 同构于代数 $\mathbb{C}[\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \cap O_{\lambda^\vee}]$ （见 [7]）。

Tanisaki [20] 将 $H^*(\mathcal{F}_\lambda; \mathbb{C})$ 描述为 $\mathbb{C}$ 上的多项式环除以一个理想所得的商空间，该理想后来被称为 Tanisaki 理想。事实上，Tanisaki 的描述给出了 $\mathcal{F}$的整上同调环。最近，H. Abe 和 T. Horiguchi 描述了 T^l-等变上同调代数 $H^*_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda; \mathbb{Z})$。结果表明， $H^*_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda; \mathbb{Z})$ 是多项式代数 $H^*_{T^l}(pt; \mathbb{Z}) = H^*(BT^l; \mathbb{Z})$ 除以一个理想所得的商空间，而这个理想是 Tanisaki 理想的一种自然推广。通过遗忘映射 $H^*_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(\mathcal{F}_\lambda; \mathbb{Z})$，这一表示恢复了通常的整上同调环的表示（见[1,定理 4.1]）。

我们将 $\mathcal{L}_i$ $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上的典范线丛记为 $\mathcal{L}_i$ ，其在旗 $V \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上的纤维是向量空间 $V_i/V_{i-1}, 1 \leq i \leq n$。令 $L_i = \mathcal{L}_i|_{\mathcal{F}_\lambda}$。回顾 [20] ， L_i、 $1 \leq i \leq n$ 的第一陈类生成 $H^*(\mathcal{F}_\lambda; \mathbb{Z})$。

在 [15], Sankaran 与本文作者描述了 K-环$\mathcal{F}_\lambda$ 的生成元与关系。($\mathcal{F}_\lambda$) 的生成元是类 $[L_i], 1 \leq j \leq n$。这些关系是通过将上同调环中的关系用生成线丛的类来表达，并在 K-理论中运用适当的伽马运算得到的（参见 [15, 命题 4。1]）。

可以看出， L_i、 $1 \leq i \leq n$ 实际上是 $\mathcal{F}_\lambda$上的 T^l-等变线丛，因为它们是 $\mathcal{F}$ 上典范线丛 $\mathcal{L}_i$、 $1 \leq i \leq n$ 的限制，而后者是 T^n-等变的。

本文研究 $\mathcal{F}_\lambda$的 T^l-等变拓扑 K-环。在主定理中，我们将以生成元与关系的形式，给出 $K^*_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$作为 $R(T^l)$-代数的一个表示。

更准确地说，我们证明 $K^0_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$由 $1 \leq i \leq n$的 T^l-等变线丛 L_i 的类$[L_i]_{T^l}$生成。我们进一步将 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$中的关系理想确定为 [15]中定义的 K-理论 Tanisaki 理想的等变类似物。

在陈述主要结果之前，我们需要先设定以下记号。正整数的一个非递增序列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$，其中$\sum \lambda_j = n$，将与分拆$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$对应，其中$1 \leq j \leq l$

$\lambda_j = 0$ 对于 $j > l$。对于 $1 \leq s \leq n$，令

$$p_\lambda(s) := \lambda_{n-s+1} + \cdots + \lambda_n. \tag{1.1}$$

回顾一下， $R(T^l) = K_{T^l}(pt) = \mathbb{Z}[u_i^{\pm 1} \mid 1 \leq i \leq l]$，其中 u_i、$1 \leq i \leq l$是与坐标投影相对应的 T^l 的特征。

令 $q := p_\lambda(s)$。令 $\mathcal{R} = R(T^l)[x_1, x_2, \ldots, x_n]$，并令 $\mathcal{I}_\lambda$ 表示由以下元素生成的 $\mathcal{R}$ 中的理想

$$\sum_{0 \leq k \leq d} (-1)^{d-k} e_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}) h_{d-k}(u_{\phi_\lambda(1)}, \ldots, u_{\phi_\lambda(s+1-d)}) \tag{1.2}$$

对于 $1 \leq s \leq n$、 $1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n$ 和 $d \geq s + 1 - q$。这里， e_k表示第 k个初等对称函数， h_{d-k} 表示第（$d-k$）个完全对称函数（见 [13]），而 ϕ_λ 是映射$[n] \longrightarrow [l]$（其中 $[n] := \{1, \ldots, n\}$），由以下条件定义

$$\begin{aligned} &(u_{\phi_\lambda(1)}, \ldots, u_{\phi_\lambda(n)}) \\ &= (\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{\lambda_1 - \lambda_2}, \underbrace{u_1, u_2, \ldots, u_1, u_2}_{2(\lambda_2 - \lambda_3)}, \ldots, \underbrace{u_1, \ldots, u_l, \ldots, u_1, \ldots, u_l}_{l(\lambda_l - \lambda_{l+1})}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

作为有序序列，其中对于每个 $1 \leq r \leq l$，右侧的第 r个扇区由（u_1， u_2，……， u_r）重复（$\lambda_r - \lambda_{r+1}$）次构成。这里令 $\lambda_{l+1} = 0$。（见[1, (4.2)]）。

现在我们陈述主定理。

定理 1.1。使用上述记号，设

$$\Psi_\lambda : \mathcal{R} \longrightarrow K^0_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$$

为由 $\Psi_\lambda(x_j) = [L_j]_{T^l}$ 定义的环同态，其中 $1 \leq j \leq n$。则 Ψ_λ 是满射，且 $ker(\Psi_\lambda) = \mathcal{I}_\lambda$。

现在我们简要说明主定理的证明方法，并概述本文的结构。

Let

$$\binom{n}{\lambda} := \frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_n!}.$$

利用 $\mathcal{F}_\lambda$ 具有一个 T^l-稳定的代数胞腔分解，且含有 $\binom{n}{\lambda}$ 个胞腔（见 [17], [21]）这一事实，我们在定理 5.1 中证明 $K^0_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 是一个秩为 $R(T^l)$ 的自由模。此外，我们有 $\binom{n}{\lambda}$. Moreover, we have $K^1_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda) = 0$。

我们注意到，$\mathcal{F}_\lambda$ 存在一个 T^l-稳定的闭子簇滤过，该滤过源自 T^l-等变代数胞腔分解。利用这一事实和归纳论证，我们在定理5.3中证明，拉回映射 $K^*_{T^n}(\mathcal{F}) \longrightarrow K^*_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 是满射。

对于 $\lambda = (1, 1, \ldots\ldots, 1)$ 这一特殊情形，$K_{T^n}(\mathcal{F}_\lambda) = K_{T^n}(\mathcal{F})$ 的结构由 [14] 和 [12]中的结果所熟知。我们在第 4节回顾这一结构。在定理 4.1 中，我们给出$K_{T^n}(\mathcal{F})$ 作为一个 $R(T^n)$-代数的表示。特别地，我们看到 $K_{T^n}(\mathcal{F})$ 具有一个 S_n-作用。

在命题 5.5 中，我们证明存在一个自然的 S_n-作用于 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 上，使得拉回映射 $K^*_{T^n}(\mathcal{F}) \longrightarrow K^*_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 是 S_n-等变的。证明这一结果所使用的方法与 Abe 和 Horiguchi 研究等变上同调时所采用的方法类似，即分别限制到 T^n 和 T^l 的不动点以及 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}_\lambda$ 的不动点。

接下来，利用 Sankaran 和作者在 [15, 命题 4.1] 中描述普通 K-环时所采用的类似方法，以及等变 K-理论中的 λ 运算，我们证明定义理想 $\mathcal{I}_\lambda$ 的关系在 $K^*_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 中成立。

这尤其表明，$\ker(\Psi_\lambda)$ 包含 $\mathcal{I}_\lambda$。因此，我们得到了一个定义良好的满射环同态，从 $\mathcal{R}/\mathcal{I}_\lambda$ 到 $K^*_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$。

现在，利用 [1, 引理 5.2] ，我们找到了 $\mathcal{R}/\mathcal{I}_\lambda$ 作为一个 $R(T^l)$-模的生成元。

因此 $\Psi_\lambda : \mathcal{R}/\mathcal{I}_\lambda \longrightarrow K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 是两个秩相同的自由模之间的满射环同态，它们定义在整环 $R(T^l)$ 上。因此可得 Ψ_λ 是一个同构。这将证明我们的主定理。

最后，通过遗忘映射 $K_{T'}(\mathcal{F}_\lambda) \longrightarrow K(\mathcal{F}_\lambda)$，我们恢复了 K-环 $K(\mathcal{F}_\lambda)$ 的普通表示，该表示见 [15, 定理 4。2]，

2. Equivariant topological K-theory of cellular varieties

关于等变拓扑 K-环的定义和基本性质，请参阅 [16]。

设 X 是环面 $T_{\mathbb{C}} \cong (\mathbb{C}^*)^k$ 上的一个 $T_{\mathbb{C}}$-簇，具有 $T_{\mathbb{C}}$-稳定的代数胞腔分解。设

$$X_m \subseteq X_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq X_2 \subseteq X_1 = X$$

为相应的 $T_{\mathbb{C}}$-稳定滤过，使得对于$1 \leq i \leq m$， $Z_i := X_i \setminus X_{i+1} \cong \mathbb{C}^{k_i}$。这里， $1 \leq i \leq m$ 中的$Z_i \cong \mathbb{C}^{k_i}$ 是不同的代数胞腔$_m$，其 $T_{\mathbb{C}}$-不动点为$\mathbf{x}_i$ 和 $X_i = \bigsqcup Z_j$。特别地， $Z_m = X_m =^{j=i} \{\mathbf{x}_m\}$。

我们考虑 $T_{\mathbb{C}}$ 的极大紧子群$T \cong (\mathbb{S}^1)^k$ 在 X 上的限制作用，以及其在 X_i 和 Z_i 上的限制作用，其中 $1 \leq i \leq m$。

命题 2.1. 环 $K_T^0(X)$ 是一个自由的 $R(T)$-模，其秩为 m，即细胞的数量。此外，我们有 $K_T^1(X) = 0$。

证明。 由 [16, 命题 2.6、定义 2.7、定义 2.8、命题 3.5] 可知，我们有一个双向无限延伸的 T-等变K-群长正合列：

(2.4)
$$\cdots \to K_T^{-q}(X_i, X_{i+1}) \to K_T^{-q}(X_i) \to K_T^{-q}(X_{i+1}) \to K_T^{-q+1}(X_i, X_{i+1}) \to \cdots$$
对 $1 \leq i \leq m$ 和 $q \in \mathbb{Z}$成立。

此外，由 [16, 命题 2.9]和 [16, 命题 3.5]，我们有

$$K_T^{-q}(X_i, X_{i+1}) = K_T^{-q}(X_i \setminus X_{i+1}) \tag{2.5}$$
$$= K_T^{-q}(\mathbb{C}^{k_i}) \cong K_T^{-q}(\mathrm{x}_i) \tag{2.6}$$
$$= \widetilde{K}_T^{-q}(\mathrm{x}_i^+) \tag{2.7}$$
$$= \widetilde{K}_T^0(\mathbf{S}^q(\mathrm{x}_i^+)) = R(T) \otimes \widetilde{K}^0(\mathbf{S}^q(\mathrm{x}_i^+)) \tag{2.8}$$

对 $1 \leq i \leq m$成立（见 [16, 命题 2.2]）。因此，当 q 为偶数时， $K_T^{-q}(X_i, X_{i+1}) = R(T)$；当 q 为奇数时， $K_T^{-q}(X_i, X_{i+1}) = 0$。这里，$\mathbf{x}_i^+$ 是T-不动点 $\mathbf{x}_i$ 与一个底空间点 $\mathfrak{o}$ 之和，而该底空间点也为 T-不动点（见 [16, 第 135] 页）。

或者，我们也可以将 $K_T^{-q}(X_i, X_{i+1})$ 识别为 $= K_T^{-q}(X_i/X_{i+1})$，其中 $X_i/X_{i+1} \cong \mathbf{S}^{2k_i}$。对于任意整数 q，我们有 $\widetilde{K}_T^{-q}(\mathbf{S}^{2k_i}) \cong \widetilde{K}_T^0(\mathbf{S}^{q+2k_i})$ [16, p.136]。

因此，当 q 为偶数时

$$K_T^{-q}(X_i, X_{i+1}) \cong \widetilde{K}_T^0(\mathbf{S}^{q+2k_i}) = R(T) \otimes \widetilde{K}^0(\mathbf{S}^{q+2k_i}) = R(T)$$

因为 $q+2k_i$ 是偶数。此外，当 q 是奇数时

$$K_T^{-q}(X_i, X_{i+1}) = \widetilde{K}_T^0(\mathbf{S}^{q+2k_i}) = R(T) \otimes \widetilde{K}^0(\mathbf{S}^{q+2k_i}) = 0$$

因为 $q+2k_i$ 是奇数（见 [16, 第 2 节，命题 3.5，命题 2。2]和 [2]）。

此外，由于 $X_m = Z_m = \{\mathbf{x}_m\}$ 和 $X_{m+1} = \emptyset$，我们有 $K_T^0(X_m) = R(T)$ 和 $K_T^{-1}(X_m) = K_T^{-1}(\mathbf{x}_m) = \widetilde{K}_T^{-1}(\mathbf{x}_m^+) = K_T^0(\mathbf{S}^1(\mathbf{x}_m^+)) = 0$，其中 $\mathbf{x}_m^+ = \mathbf{x}_m \sqcup \mathfrak{o}$，且其中 $\mathbf{x}_m$ 和基点 $\mathfrak{o}$ 都是 T-固定的（见 [16, 第 135] 页）。

现在，按 i 递减归纳，假设对于秩为 $m-i$ 的 $1 \le i \le m$，$K_T^0(X_{i+1})$ 是一个自由的 $R(T)$-模，且 $K_T^{-1}(X_{i+1}) = 0$。由于 $K_T^0(X_m) = R(T)$ 且 $K_T^{-1}(X_m) = K_T^{-1}(\mathbf{x}_m) = 0$，我们可以开始归纳。

由（2.4）可知，我们得到如下分裂短正合列 $R(T)$ 模

(2.9)
$$0 \longrightarrow K_T^0(X_i, X_{i+1}) \longrightarrow K_T^0(X_i) \longrightarrow K_T^0(X_{i+1}) \longrightarrow 0$$

对 $1 \le i \le m$。因此我们有如下结果

(2.10)
$$K_T^0(X_i) = K_T^0(X_{i+1}) \bigoplus K_T^0(X_i, X_{i+1})$$

因此可知，$K_T^0(X_i)$ 是一个秩为 $m-i+1$ 的自由 $R(T)$-模。由归纳法可得，$K_T^0(X)$ 是一个秩为 m 的自由 $R(T)$-模，其中 $X = X_{1\circ}$。

由于$K_T^{-1}(X_i, X_{i+1}) = 0$ 如上所示，且$K_T^{-1}(X_{i+1}) = 0$ 根据归纳假设，由（2.4）可知$K_T^{-1}(X_i) = 0$。因此 $K_T^{-1}(X) = 0$ 可对 i 进行归纳，这是因为 $X = X_{1\circ}$ □

今后我们将用 K_T 表示 K_T^0。

3. The equivariant cohomology of $\mathcal{F}_\lambda$

3.1. T^n-等变上同调 $\mathcal{F}$。 令 $\mathcal{V}_j$为平凡向量丛 $\mathcal{F} \times \mathbb{C}^n$ 的子丛，其在旗$V = (V_i) \in \mathcal{F}$ 上的纤维恰为 V_j。记 $\mathcal{L}_i$ 为 T^n-等变线丛 $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}$，$1 \le i \le n$，在 $\mathcal{F}$上。

存在代数向量丛的正合列 $0 \to \mathcal{V}_{s-1} \hookrightarrow \mathcal{V}_s \to \mathcal{L}_s \to 0$，由此得到一个关于 $1 \le s \le n$ 的 T^n-等变复向量丛同构：

(3.11)
$$\mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_s \cong \mathcal{V}_s.$$

由于 $\mathcal{V}_n = \epsilon_1 \oplus \cdots \oplus \epsilon_n$，右侧是秩为 n 的平凡向量丛，其中 T^n 在 ϵ_i 上的作用由特征 t_i 给出，该特征对应于 i 次坐标投影 $T^n \longrightarrow S^1$，其中 $1 \leq i \leq n$。因此，当 $s = n$ 属于（3.11）时，我们得到以下定义在 $\mathcal{F}$ 上的 T^n-等变向量丛同构

$$\mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n \cong \epsilon_1 \oplus \cdots \oplus \epsilon_n. \tag{3.12}$$

现在，通过比较 T^n-等变 i 阶陈类（3.12），可得

$$e_i\left(c_1^{T^n}(\mathcal{L}_1), \ldots, c_1^{T^n}(\mathcal{L}_n)\right) = e_i(t_1, \ldots, t_n) \tag{3.13}$$

其中，e_i 表示 i次初等对称多项式，$c_1^{T^n}(\mathcal{L}_j)$表示 $1 \leq j \leq n$对应的 $\mathcal{L}_j$ 的 T^n-等变第一陈类。

回忆一下，$H^*(BT^n) = \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$。映射

$$H^*(BT^n)[y_1, \ldots, y_n] \longrightarrow H^*_{T^n}(\mathcal{F}; \mathbb{Z})$$

将 y_i 映至 $c_i^{T^n}(\mathcal{L}_i)$的映射，诱导出$H^*_{T^n}(\mathcal{F}; \mathbb{Z})$作为 $H^*(BT^n)$-代数的如下表示。

$$H^*(BT^n)[y_1, \ldots, y_n]/\mathcal{J} \cong H^*_{T^n}(\mathcal{F}; \mathbb{Z}) \tag{3.14}$$

其中，$\mathcal{J}$是由以下元素在 $H^*(BT^n)[y_1, \ldots, y_n]$ 中生成的理想：

$$e_i(y_1, \ldots, y_n) - e_i(t_1, \ldots, t_n)$$

对于 $1 \leq i \leq n$。（参见 [1, 第 3] 节。）

3.2. **T^l-等变上同调 $\mathcal{F}_\lambda$。**斯普林格簇 T^l的等变整上同调环 $\mathcal{F}_\lambda$ 已由 Abe 和 Horiguchi [1]用生成元与关系来描述，这种描述推广了上述对 $H^*_{T^n}(\mathcal{F}; \mathbb{Z})$ 的描述。下面回顾这一表示。我们需要以下记号（参见（1.1））。

定义 3.1。函数 $p_\lambda : [n] \to [n]$ 与一个 n 的分拆 λ相关，其定义为 $p_\lambda(s) = \lambda_{n-s+1} + \ldots + \lambda_n$，$1 \leq s \leq n$。

那么，p_λ 是关于 s 的单调递增函数。与共轭分拆 $\lambda^\vee$ 相关的函数$p_{\lambda^\vee}$ 对我们更为重要。回忆一下，共轭分拆 $\lambda^\vee$定义为 $\lambda^\vee = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$，其中 $\eta_j = \#\{i \mid \lambda_i \geq j\}$。将 λ 写作$1^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdots n^{a_n}$，其中 a_j 是 λ中 j出现的次数，则对所有 $j \geq 1$，都有 $\eta_j = a_j + \cdots + a_n$。

我们在下面的例子中加以说明：

例 3.2. 设 $n = 20$，且 $\lambda = (5, 4, 4, 2, 2, 2, 1) = 1^1 \cdot 2^3 \cdot 3^0 \cdot 4^2 \cdot 5^1$。则 $\lambda^\vee = (7, 6, 3, 3, 1)$ 且 $p_{\lambda^\vee}(s) = 0$ 对于 $1 \leq s \leq 15$，$p_{\lambda^\vee}(16) = 1$，$p_{\lambda^\vee}(17) = 4$，$p_{\lambda^\vee}(18) = 7$，$p_{\lambda^\vee}(19) = 13$，$p_{\lambda^\vee}(20) = 20$。

定义 3.3. 令 $\mathcal{S} = H^*(BT^l)[y_1, \ldots, y_n]$ 为由 n 个不定元 y_1、……、y_n 构成的多项式环，其中 $H^*(BT^l) = \mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_l]$ 其中u_i、$1 \leq i \leq l$ 是对应于典范坐标投影的 T^l 的特征。T^l-等变 Tanisaki 理想的类似物 是由以下元素生成的理想 $\mathcal{J}_\lambda \subset \mathcal{S}$：

$$\sum_{k=0}^{d} (-1)^{d-k} e_k(y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}) \cdot h_{d-k}(u_{\phi_\lambda(1)}, \ldots, u_{\phi_\lambda(s+1-d)})$$

其中 $1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n$, $1 \leq s \leq n$ 和 $d \geq s + 1 - p_{\lambda^\vee}(s)$。这里 ϕ_λ 定义同上 (1.3)，且 e_k 和 h_{d-k} 分别表示第 k 个初等对称函数和第 $(d-k)$ 个完全对称函数。（参见 [1,(4.1), (4.2)]）

定理 3.4。*([1, 定理 4。1]) 设 $\lambda = \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l$ 是 n的一个分拆。那么有环同构*

$$H^*_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda; \mathbb{Z}) \cong \mathcal{S}/\mathcal{J}_\lambda$$

其中 $c_1^{T^l}(L_j)$ 对应于 $y_j + \mathcal{J}_\lambda, 1 \leq j \leq n$。此外，包含映射 ι_λ: $\mathcal{F}_\lambda \to \mathcal{F}$诱导出一个满射 ι_λ^*: $H^*_{T^n}(\mathcal{F}) \to H^*_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$。这里 $c_1^{T^l}(L_j)$ 表示 T^l-等变线丛 L_j的等变第一陈类。

上述表示是 Tanisaki [20]给出的 $H^*(\mathcal{F}_\lambda, \mathbb{Z})$ 表示的等变类似物。

注 3.5. 关于包含 $T^l \hookrightarrow T^n$ （通过映射

$$(z_1, \ldots, z_l) \mapsto (\underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{\lambda_1}, \underbrace{z_2, \ldots, z_2}_{\lambda_2}, \ldots, \underbrace{z_l, \ldots, z_l}_{\lambda_l}),$$

特征 u_i 是 T^l 上任意特征 t_j （属于T^n）在 T^l 上的限制，其中 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + 1 \leq j \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$，当且仅当 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} = 0$，若 $i = 1$。

4. T^n-EQUIVARIANT K-RING OF THE FLAG VARIETY $\mathcal{F}$

当 $l = n$ 且 $\lambda = (1, \ldots\ldots, 1)$ 时，$\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}$是完全旗簇。

我们回顾第3.1节中的记号。对于 $1 \leq i \leq n$，我们将线丛 $\mathcal{L}_i$ 在 $K_{T^n}(\mathcal{F})$ 中的 T^n-等变类记作 $[\mathcal{L}_i]_{T^n} \in K^0_{T^n}(\mathcal{F}; \mathbb{Z})$。回想一下，经典上已对 $\mathcal{F}$ 的 T^n-等变 K-环进行了充分研究（见 [12] 和 [14]）。此外，旗簇和旗丛的普通 K-环的表示是经典结果，可参见 [11, §3, Chapter IV]。我们给出 $\mathcal{F}$ 的 T^n-等变 K-环的如下表示；它类似于 [11] 中将旗丛的 K-环表示为底空间的 K-环上的代数的表示。

令 t_1、……、t_n 表示与坐标投影相对应的 T^n 的特征。因此 $R(T^n) = \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$。

定理 4.1. 令 J' 为由以下元素生成的 $R(T^n)[x_1, \ldots, x_n]$ 中的理想

$$e_k(x_1, \ldots, x_n) - e_k(t_1, \ldots, t_n) \tag{4.15}$$

对于 $1 \leq k \leq n$。我们有如下的 $R(T^n)$-代数同构

$$R(T^n)[x_1, \ldots, x_n]/J' \cong K_{T^n}(\mathcal{F}) \tag{4.16}$$

其中，对于 $1 \leq i \leq n$，x_i 映射到 $[\mathcal{L}_i]_{T^n}$。特别地，$K_{T^n}(\mathcal{F})$ 作为 $R(T^n)$-代数，由 $1 \leq i \leq n$ 对应的 $[\mathcal{L}_i]_{T^n}$ 生成。

证明： 酉群 $U(n) \subset GL_n$ 在旗簇 $\mathcal{F}$ 上递 transitively 作用，其在标准旗处的稳定子为对角子群$T^n \subset U(n)$。这将 $\mathcal{F}$识别为齐性空间 $U(n)/T^n$。

此外，上文定义的线丛 $\mathcal{L}_i \cong \mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}$ 可以识别为线丛

$$U(n) \times_{T^n} \mathbb{C}_i$$

与特征 t_i 相关联的 $\mathcal{F} = U(n)/T^n$：对于 $1 \leq i \leq n$，对应于第 i 个坐标投影的 $T^n \longrightarrow S^1$。

回顾 [14] 以及 [12]，我们有一个同构

$$R(T^n) \bigotimes_{R(T^n)^{S_n}} R(T^n) \cong K^0_{T^n}(\mathcal{F}) \tag{4.17}$$

该映射在第一个因子上定义为：将 $[V] \in R(T^n)$ 映到 $\mathcal{F}$ 上平凡的 T^n-等变向量丛 $[\mathcal{F} \times V]$ 的类（这是通过沿常值映射 $\mathcal{F} \longrightarrow pt$ 拉回而诱导的）；在第二个因子上则定义为：将 $[W] \in R(T^n)$ 映到相关向量丛 $U(n) \times_{T^n} W$ 的类。特别地，它将 t_i 映到第二个因子中的 $[\mathcal{L}_i]_{T^n}$。注意，如果我们将第二个映射与遗忘同态 $K^0_{T^n}(\mathcal{F}) \longrightarrow K^0(\mathcal{F})$ 复合，就得到经典的 Atiyah-Hirzebruch同态 $R(T^n) \longrightarrow K^0(\mathcal{F})$。此外，$R(T^n)^{S_n}$ 被识别为 $R(U(n))$（见 [10]），而张量积第二个因子中的 $R(T^n)$ 被识别为 $K^0_{U(n)}(\mathcal{F})$。

回忆一下，S_n 作用于 $R(T^n) = \mathbb{Z}[t_i^{\pm 1} : 1 \leq i \leq n]$ 由 $\sigma(t_i) := t_{\sigma(i)}$给出，对每个 $1 \leq i \leq n$和 $\sigma \in S_n$都成立。因此，$R(T^n)^{S_n}$是在元素 $t_1 \cdots t_n$处局部化的 $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]^{S_n}$，该元素在 S_n作用下不变。因此，$R(U(n)) = R(T^n)^{S_n}$ 是 $R(T^n)$ 的一个子环，由元素 $e_1(t_1, \ldots, t_n) \ldots, e_n(t_1, \ldots, t_n)$ $1/(t_1 \cdots t_n)$生成，其中 $e_k(t_1, \ldots, t_n)$表示 $0 \leq k \leq n$的 k次初等对称多项式。特别地，注意到 $t_1 \cdots t_n = e_n(t_1, \ldots, t_n)$和 $e_0(t_1, \ldots, t_n) = 1$(见 [10])。

Since $R(T^n) \bigotimes_{R(T^n)^{S_n}} R(T^n) \cong R(T^n) \otimes R(T^n)/J$ where J is the ideal 由形如 $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ 的元素生成，其中 $a \in R(T^n)$ ^{n}。只需考虑 $a = {}^{S}e_k$ $(t_1, \ldots, t_n)$和 $a = e_n(t_1, \ldots, t_n)^{-1}$。因此，理想 J 由以下元素生成：

$$e_k(t_1, \ldots, t_n) \otimes 1 - 1 \otimes e_k(t_1, \ldots, t_n)$$

and

$$(t_1^{-1} \cdots t_n^{-1}) \otimes 1 - 1 \otimes e_n(t_1, \ldots, t_n)^{-1}.$$

由上述关系和（4.17）可知，在环 $K^0_{T^n}(\mathcal{F})$ 中有如下关系

$$[\mathcal{L}_i^\vee]_{T^n} = (t_1^{-1} \cdots t_n^{-1}) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} [\mathcal{L}_j]_{T^n}$$

对于 $1 \leq i \leq n$。因此，类 $[\mathcal{L}_i]_{T^n}$for $1 \leq i \leq n$生成 $K_{T^n}(\mathcal{F})$ 作为一个 $R(T^n)$- 代数。

考虑 $R(T^n)$-代数同态 φ：$R(T^n)[x_1, \ldots, x_n] \to K_{T^n}(\mathcal{F})$，其将 $x_i \mapsto [\mathcal{L}_i]_{T^n}$for $1 \leq i \leq n$ 映射为。

现在，对 k的两边分别取（3.12）的第$1 \leq k \leq n$外幂，得到 $K_{T^n}(\mathcal{F})$ 中的如下关系：

$$e_k([\mathcal{L}_1]_{T^n}, \ldots, [\mathcal{L}_n]_{T^n}) = e_k([\epsilon_1]_{T^n}, \ldots, [\epsilon_n]_{T^n}). \tag{4.18}$$

令 J'为 $R(T^n)[x_1, \ldots, x_n]$ 中由元素$e_k(x_1, \ldots, x_n) - e_k(t_1, \ldots, t_n)$（$1 \leq k \leq n$）生成的理想。由（4.18）可知，$J'$ 包含于 φ 的核中。因此，φ 诱导出一个良定义的满射 $R(T^n)$-代数同态 φ'：$R(T^n)[x_1, \ldots, x_n]/J' \to K_{T^n}(\mathcal{F})$。

由命题 2.1 可知，$K_{T^n}(\mathcal{F})$ 是一个秩为 $n!$ 的自由 $R(T^n)$-模。另一方面，众所周知，$R(T^n)[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个秩为 $n!$ 的自由 $R(T^n)[e_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots, e_n(x_1, \ldots, x_n)]$ 模，其基为 $x_1^{r_1} \cdots x_{n-1}^{r_{n-1}}$，其中 $0 \leq r_i \leq n - i$ 对于 $1 \leq i \leq n - 1$ 成立（见定理 3.6 的证明，第 198] 页）。这意味着商空间$R(T^n)[x_1, \ldots, x_n]/J'$是一个自由 $R(T^n)$-模，其基由乘积$x_1^{r_1} \cdots x_{n-1}^{r_{n-1}}$构成。因此，$\varphi'$是两个秩相同的自由 $R(T^n)$-模之间定义良好且满射的 $R(T^n)$-代数同态。因此，φ' 是 $R(T^n)$-代数的一个同构。定理得证。 □

5. T^l-EQUIVARIANT K-RING OF $\mathcal{F}_\lambda$

本节研究斯普林格簇 $\mathcal{F}_\lambda$ 上的 T^l-等变 K-环，以及环面 T^l 对它的典范作用。

回顾一下（[16]），经常值映射 $\mathcal{F}_\lambda \longrightarrow pt$ 的拉回诱导出自然的 $R(T^l) = K_{T^l}(pt)$-代数结构于 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$。

5.1. $R(T^l)$ **的** $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$**-模结构**。

定理 5.1. 环 $K^0_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 是一个秩为 $\binom{n}{\lambda}$ 的自由 $R(T^l)$-模。特别地，这意味着 $K^0_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 是无挠的（因为 $R(T^l)$ 是一个整环）。此外，$K^1_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda) = 0$。

证明。众所周知，根据 Spaltenstein 的结果（见 [17]），斯普林格簇 $\mathcal{F}_\lambda$ 允许一个胞腔分解，其中 $\binom{n}{\lambda} := \frac{n!}{(\lambda_1!\cdots\lambda_l!)}$ 个局部闭胞腔同构于仿射空间。进一步可知，这个代数胞腔分解是 T^l-稳定的，因为这些胞腔是 $\mathcal{F}_\lambda$ 与 T^n-不变的舒伯特胞腔在 $\mathcal{F}$中的交（见 [21,第 3 节。2]）。由命题 2.1，定理得证。□

注 5.2.注意，$\mathcal{F}_\lambda$ 不一定是 CW 复形，只需具有代数胞腔分解即可（参见 [21, 第 3 节2]中珍珠串的例子）。

5.2. T^l**-不动点** $\mathcal{F}_\lambda$。下面回顾$\mathcal{F}_\lambda^{T^l}$在 [1,引理 21]中的描述。

完全旗簇 $\mathcal{F}$ 的 T^n-不动点由下式给出

$\{(\langle e_{w(1)}\rangle \subseteq \langle e_{w(1)}, e_{w(2)}\rangle \subset \cdots \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)}, \ldots\ldots, e_{w(n)}\rangle = \mathbb{C}^n \mid w \in S_n\}$其中 $e_1, \ldots\ldots, e_n$是 $\mathbb{C}^n$的标准基。因此，我们可以将 $\mathcal{F}^{T^n}$与 S_n等同起来。

于是，$\mathcal{F}_\lambda$ 的 T^l-不动点可以与满足以下条件的$w \in S_n$ 集合等同：对于每个 $1 \le k \le l$，w 都满足：

(5.19) $\lambda_1 + \cdots \lambda_{k-1} + 1$ 和 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$之间的数

按递增顺序作为子序列出现在 w 的单行记法中。当 $k = 1$时，我们令 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} + 1 = 1$。

此外，$\mathcal{F}_\lambda^{T^l}$ 也可以视为子群 S_λ 在 S_n 中的唯一右陪集代表元，其中 $S_\lambda := S_{\lambda_1} \times \cdots \times S_{\lambda_l}$。

考虑斯普林格簇在完全旗簇中的包含 $\iota_\lambda : \mathcal{F}_\lambda \to \mathcal{F}$；相对于 $\mathcal{F}$ 上的受限 T^l作用以及前文所述 $\mathcal{F}_\lambda$ 上的 T^l 自然作用，该包含是 T^l-不变的。

这诱导出一个拉回映射

$$\iota_\lambda^! : K_{T^n}(\mathcal{F}) \to K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$$

它通过将 T^l 包含到 T^n($\iota_\lambda^!$ 中而经由 $K_{T^l}(\mathcal{F})$ 分解（这与第 3] 节中等变上同调的映射 ρ_λ 类似）。我们可以通过由包含映射 $T^l \subseteq T^n$ 诱导的典范映射 $R(T^n) \longrightarrow R(T^l)$，将 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 视为 $R(T^n)$-模。此外

映射 $R(T^n) \longrightarrow R(T^l)$ 是满射，因为特征 u_i（属于 T^l，由 $(z_1, \dots, z_l) \mapsto z_i$ 给出）可提升为特征 $t_{\lambda_1+\cdots+\lambda_i}$（属于 T^n，由 $(\mathtt{t}_1, \dots, \mathtt{t}_n) \mapsto \mathtt{t}_{\lambda_1+\cdots+\lambda_i}$ 给出），对每个 $1 \le i \le l$（见注 3.5）。

在下面的定理中，我们证明 $\iota_\lambda^!$ 是满射。这个结论类似于等变 K-理论中的相应结论；普通上同调中的对应结论见 [20], ，等变上同调中的见[1]，普通 K-理论中的见 [15]。

在下文中，令 $m = \binom{n}{\lambda}$。

我们用 $\mathbf{x}_w$ 表示 $\mathcal{F}$ 中与$w \in S_n$对应的 T^n-不动点。

回顾一下，$\mathcal{F}$ 是一个光滑射影 T^n-簇，具有一个可滤过的 Białynicki-Birula 胞腔分解 [5]。这意味着 $\mathcal{F}$具有由 T^n-稳定闭子簇构成的递减滤过：

$$\{\mathrm{x}_{w_1}\} = X_{w_1} \subseteq \cdots \subseteq X_{w_i} \subseteq X_{w_{i+1}} \subseteq \cdots \subseteq X_{w_{n!}} = \mathcal{F} \tag{5.20}$$

使得 $X_{w_i} \setminus X_{w_{i-1}} = Z_{w_i}$，其中 Z_{w_i} 是对应于 T^n-不动点 $\mathbf{x}_{w_i}$ 的舒伯特胞腔，$2 \le i \le n!$ 此外，$X_{w_1} = Z_{w_1} = \{\mathbf{x}_{w_1}\}$。这里，$w_1$ 表示S_n 的恒等排列，而 $w_{n!}$ 表示关于 S_n上的布鲁哈特序的最长元素，其中 $s_i = (i,\ i+1)$ 对于 $1 \le i \le n-1$ 表示 S_n中的简单反射。

令 $w_{k_1}, \dots, w_{k_m}$对于 $1 = k_1 < \cdots < k_m \le n!$ 是 $S_\lambda \backslash S_n$中对应于 $\mathcal{F}_\lambda^{T^l}$ 的右陪集代表元。特别地，$w_{k_1}, \dots, w_{k_m}$是 S_n 中满足条件（5.19）的元素，且 $w_{k_1} = w_1$。此外，对于 $1 \le j \le m$，$\mathbf{x}^{w_{k_j}}$ 是 T^l-不动点。$\mathcal{F}_\lambda$。

定理 5.3。映射 $\iota_\lambda^!$ 是一个满射的 $R(T^n)$-代数态射。

证明： 由 [17]（另见 [21, 第 3.2] 节），存在一个由 T^l-稳定闭子簇构成的递减滤过，其对象属于 $\mathcal{F}_\lambda$，定义如下：

$$X'_{w_{k_1}} \subseteq \cdots \subseteq X'_{w_{k_j}} \subseteq X'_{w_{k_{j+1}}} \subseteq \cdots \subseteq X'_{w_{k_m}} = \mathcal{F}_\lambda \tag{5.21}$$

使得对于 $1 \le j \le m$，$\mathbf{x}_{w_{k_j}} \in Z'_{w_{k_j}} = X'_{w_{k_j}} \setminus X'_{w_{k_{j-1}}} \cong \mathbb{C}^{r_j}$，其中$X'_{w_{k_0}} = \emptyset$。此外，$Z'_{w_{k_j}} = Z_{w_{k_j}} \cap \mathcal{F}_\lambda$。因此可得，对于 $1 \le j \le m$，$X'_{w_{k_j}} = X_{w_{k_j}} \cap \mathcal{F}_\lambda$，其中对于 $1 \le j \le m$，$X_{w_{k_j}} = \bigsqcup_{i \le k_j} Z_{w_i}$。回忆，对于 $i \in [1, n,\ Z_{w_i} \cap \mathcal{F}_\lambda = \emptyset\,!] \setminus \{k_1, \dots, k_m\}$。

考虑以下闭子簇链：$\mathcal{F}$ 它是（5.20）的子链：

$$\{\mathrm{x}_{w_1}\} = X_{w_{k_1}} \subseteq X_{w_{k_2}} \subseteq \cdots \subseteq X_{w_{k_m}}$$

其中 $X_{w_{k_j}} \setminus X_{w_{k_{j-1}}} = \bigsqcup_{k_{j-1} < i \le k_j} Z_{w_i}$ 对于 $1 \le j \le m$.

令 $\iota_j = \iota_\lambda \mid_{X'_{w_{k_j}}}$ 表示 $1 \le j \le m$的包含 $X'_{w_{k_j}} \hookrightarrow X_{w_{k_j}}$。我们将通过对 j进行归纳法，证明 $\iota_j^!$: $K_{T^n}(X_{w_{k_j}}) \longrightarrow K_{T^l}(X'_{w_{k_j}})$ 是满射。

按照与第2 节中类似的论证，我们得到以下分裂短正合列，它们是 $R(T^n)$-模:

$$0 \to K_{T^n}(X_{w_{k_j}}, X_{w_{k_{j-1}}}) \to K_{T^n}(X_{w_{k_j}}) \to K_{T^n}(X_{w_{k_{j-1}}}) \to 0$$

其中 $K_{T^n}(X_{w_{k_j}}, X_{w_{k_{j-1}}}) \cong K_{T^n}(X_{w_{k_j}} \setminus X_{w_{k_{j-1}}}) = \bigoplus_{k_{j-1}<i\le k_j} K_{T^n}(Z_{w_i})$。

我们还有以下分裂短正合列，它是 $R(T^l)$-模:

$$0 \to K_{T^l}(X'_{w_{k_j}}, X'_{w_{k_{j-1}}}) \to K_{T^l}(X'_{w_{k_j}}) \to K_{T^l}(X'_{w_{k_{j-1}}}) \to 0$$

其中 $K_{T^l}(X'_{w_{k_j}}, X'_{w_{k_{j-1}}}) \cong K_{T^l}(X'_{w_{k_j}} \setminus X'_{w_{k_{j-1}}}) = K_{T^l}(Z'_{w_{k_j}})$。

由于 $Z'_{w_{k_j}} = Z_{w_{k_j}} \cap \mathcal{F}_\lambda$ 是 $Z_{w_{k_j}}$ 的闭子簇，我们得到诱导映射

$$K_{T^n}(\mathrm{x}_{w_{k_j}}) \cong K_{T^n}(Z_{w_{k_j}}) \xrightarrow{(\iota_\lambda|_{Z'_{w_{k_j}}})^!} K_{T^l}(Z'_{w_{k_j}}) \cong K_{T^l}(\mathrm{x}_{w_{k_j}}) \tag{5.22}$$

对每个 $1 \le j \le m$。我们注意到（5.22）可识别为典范映射 $R(T^n) \longrightarrow R(T^l)$，因此是满射。由此可知映射

$$\nu_j : \bigoplus_{k_{j-1}<i\le k_j} K_{T^n}(Z_{w_i}) \to K_{T^l}(Z'_{w_{k_j}}) \tag{5.23}$$

通过将投影到因子 $K_{T^n}(Z_{w_{k_j}})$ 与映射（5.22）复合得到的映射，是满射。

特别地，由于 $K_{T^l}(X'_{w_{k_1}}) = K_{T^l}(Z'_{w_{k_1}}) = K_{T^l}(\mathrm{x}^{w_{k_1}}) = R(T^l)$, 可知映射 $K_{T^n}(X_{w_{k_1}}) = K_{T^n}(Z_{w_1}) = R(T^n) \to R(T^l) = K_{T^l}(X'_{w_{k_1}})$ 是满射。该映射可识别为 $j = 1$ 下的映射（5.22）。我们通过归纳法假设 $\iota_{j-1}^!$: $K_{T^n}(X_{w_{k_{j-1}}}) \to K_{T^l}(X'_{w_{k_{j-1}}})$ 是满射。考虑如下交换图:

(5.24)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & K_{T^n}(X_{w_{k_j}}, X_{w_{k_{j-1}}}) \to & K_{T^n}(X_{w_{k_j}}) \to & K_{T^n}(X_{w_{k_{j-1}}}) \to & 0 \\
 & \downarrow \nu_j & \downarrow \iota_j^! & \downarrow \iota_{j-1}^! & \\
0 \to & K_{T^l}(X'_{w_{k_j}}, X'_{w_{k_{j-1}}}) \to & K_{T^l}(X'_{w_{k_j}}) \to & K_{T^l}(X'_{w_{k_{j-1}}}) \to & 0
\end{array}$$

其中各行都是分裂短正合列，第一条和第三条竖直箭头都是满射。

因此，我们有 $K_{T^n}(X_{w_{k_j}}) \cong K_{T^n}(X_{w_{k_j}}, X_{w_{k_{j-1}}}) \bigoplus K_{T^n}(X_{w_{k_{j-1}}})$，以及 $K_{T^l}(X'_{w_{k_j}}) \cong K_{T^l}(X'_{w_{k_j}}, X'_{w_{k_{j-1}}}) \bigoplus K_{T^l}(X'_{w_{k_{j-1}}})$。此外，中间的竖直箭头 $\iota_j^!$ 可以与有序对 $(\nu_j, \iota_{j-1}^!)$ 视为同一，因此是满射。归纳法由此完成。因此，$\iota_m^!: K_{T^n}(X_{w_{k_m}}) \to K_{T^l}(X'_{w_{k_m}}) = K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 是满射。

现在，由于 $X_{w_{k_m}}$ 是 T^n-不变的 $\mathcal{F} = X_{w_{n!}}$ 的闭子簇，包含映射 $X_{w_{k_m}} \hookrightarrow \mathcal{F}$ 诱导出一个 $R(T^n)$-模的满射

$$K_{T^n}(\mathcal{F}) \to K_{T^n}(X_{w_{k_m}}).$$

定理现在可由将上述映射与 $\iota_m^!$ 复合得到。 □

5.3. **局部化。** 当 $\lambda = (1, \dots, 1)$ 且 $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}$ 时，已知（参见[12]），等变 ι_1 -环上的映射 K由限制到不动点诱导而成 $K_{T^n}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\iota_1} K_{T^n}(\mathcal{F}^{T^n}) = \prod_{w \in S_n} R(T^n)$ 是单射。

对于任意分拆 λ，我们有关于 $\mathcal{F}_\lambda$ 的以下结果。

引理 5.4。 典范限制映射

$$K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda) \xrightarrow{\iota_2} K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda^{T_l}) \cong (R(T^l))^m$$

在 $m = \binom{n}{\lambda}$ 处是单射。

证明。 由于通过对 (0) 局部化，$R(T^l)$ 的素理想 (0) 的支撑为 T^l（参见 [16, 命题 4.1]），因此我们有

$$K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda) \otimes_{R(T^l)} Q(T^l) \longrightarrow K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda^{T^l}) \otimes_{R(T^l)} Q(T^l)$$

是同构，其中 $Q(T^l) := R(T^l)_{\{0\}}$ 是整环 $R(T^l)$ 的商域。这进一步表明，限制映射$K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda) \longrightarrow K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda^{T^l})$ 是单射，因为 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 是一个秩为 $R(T^l)$ 的自由 m (参见定理 5.1)。 □

5.4. 对称群在 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$上的作用。 以下结果是相应普通上同调结果（参见 [18], [19] 和 [9]）、等变上同调结果（参见 [1, 第 3] 节）以及普通 K-理论结果（参见 [15, 第 3.1] 节）的等变 K-理论类比。

命题 5.5。 存在一个作用在 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 上的 S_n 作用，使得映射 $\iota_\lambda^!$ 是一个 S_n-等变同态。

证明。 我们的证明与 [1, 第 3] 节中关于等变上同调的相应结论的证明思路类似。考虑以下

交换图：

$$\begin{array}{ccc} K_{T^n}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\iota_1} & K_{T^n}(\mathcal{F}^{T^n}) = \bigoplus_{w\in S_n} \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1},\dots,t_n^{\pm 1}] \\ \iota_\lambda^! \downarrow & & \pi \downarrow \\ K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda) & \xrightarrow{\iota_2} & K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda^{T^l}) = \bigoplus_{w\in \mathcal{F}_\lambda^{T^l}\subseteq S_n} \mathbb{Z}[u_1^{\pm 1},\dots,u_l^{\pm 1}] \end{array} \tag{5.25}$$

其中，水平映射 ι_1 和 ι_2 分别是由 $\mathcal{F}^{T^n}$ 包含于 $\mathcal{F}$ 以及 $\mathcal{F}_\lambda^{T^l}$ 包含于 $\mathcal{F}_\lambda$ 所诱导的 T^n 和 T^l-等变K-理论中的映射。正如上文所述，竖直映射 $\iota_\lambda^!$ 由 $\mathcal{F}_\lambda$ 包含于 $\mathcal{F}$ 所诱导，并且是 $R(T^n)$-代数的映射。竖直映射 π 是典范投影 $R(T^n) \longrightarrow R(T^l)$，由在对应于 $w \in \mathcal{F}_\lambda^{T^l}$ 的因子上的包含 $T^l \subseteq T^n$ 以及在其他因子上的零环映射所诱导。

现在我们将描述模 $K_{T^n}(\mathcal{F})$ 上的 S_n-作用，$\bigoplus_{w\in S_n} \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1},\dots,t_n^{\pm 1}]$ 和 $\bigoplus_{w\in \mathcal{F}_\lambda^{T^l}\subseteq S_n} \mathbb{Z}[u_1^{\pm 1},\dots,u_l^{\pm 1}]$。然后我们将使用这些用于构造一个在 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 上的 S_n 作用。

我们首先回顾对称群的左作用 S_n 在 $K_{T^n}(\mathcal{F})$ 上。为此，我们考虑如下所述的旗簇 $\mathcal{F}$ 上的右 S_n-作用（参见 [1,第3]节）。

$_i$对于任意 $V \in \mathcal{F}$，存在 $g \in U(n)$，使得 $V_i = \bigoplus_{j=1} \mathbb{C}g(e_j)$，

其中 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$的标准基。于是， $w \in S_n$ 在 $\mathcal{F}$ 上的右作用可以定义为

$$\underline{V}\cdot w = \underline{V'} \tag{5.26}$$

$_i$其中 $V_i' = \bigoplus \mathbb{C}g(e_{w(j)})$。在将 $\mathcal{F}$与 $U(n)/T^n{}_{j=1}$同一化后， S_n 的这个右作用对应于 $gT^n\cdot w := g\cdot nT^n$，其中 $n \in N(T^n)$ 是 w在 $N(T^n)$ 中的一个提升，我们可以选择与 w 相关联的置换矩阵（见 [12, 第 3.11] 节）。

下面回顾 $K_{T^n}(\mathcal{F})$ 的显式表示，该表示来自定理4.1。

令 J'为 $R(T^n)[x_1,\dots,x_n]$ 中由元素$e_k(x_1,\dots,x_n)-e_k(t_1,\dots,t_n)$生成的理想，其中 $1 \le k \le n$ 且 $R(T^n) = \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1},\dots,t_n^{\pm 1}]$。我们有如下作为 $R(T^n)$-代数的同构

$$R(T^n)[x_1,\dots,x_n]/J' \cong K_{T^n}(\mathcal{F})$$

其中， x_i 映射到 $[\mathcal{L}_i]_{T^n}$，对应于 $1 \le i \le n$。我们将 x_i在 $R(T^n)[x_1,\dots,x_n]/J'$中的类记为x_i。

对称群的右作用（5.26） S_n 在 $\mathcal{F}$ 上诱导出如下左作用： $K_{T^n}(\mathcal{F})$:

$$w \cdot \overline{x}_i := \overline{x}_{w(i)} \quad ; \quad w \cdot t_i := t_i \tag{5.27}$$

对于 $w \in S_n$。这是因为线丛 $\mathcal{L}_i$ 在右作用下的拉回恰好是线丛 $\mathcal{L}_{w(i)}$, 而右作用是 T^n-等变的。

现在，我们将定义 $v \in S_n$ 在 $\bigoplus_{w \in S_n} \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$ 上的左作用如下: 如下:

$$(v \cdot f) \mid_w = f \mid_{wv} \tag{5.28}$$

其中 $f \mid_w$ 表示 f 的第 w 个分量，对 $f \in \bigoplus \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]_{w \in S_n}$ 和 $w \in S_n$ 成立。注意，这确实是一个左作用，因为 $(v_1 \cdot (v_2 \cdot f)) \mid_w = (v_2 \cdot f) \mid_{wv_1} = f \mid_{wv_1 v_2} = ((v_1 \cdot v_2) \cdot f) \mid_w$。

我们注意到，在交换图（5.25）中，映射 ι_1 定义如下:

$$\iota_1(\overline{x}_i) \mid_w = t_{w(i)} \quad ; \quad \iota_1(t_i^{\pm 1}) \mid_w = t_i^{\pm 1}$$

对于 $w \in S_n$ 和 $1 \leq i \leq n$。因此可知，由于....., ι_1 是 S_n 等变的

$$\iota_1(w \cdot \overline{x}_i) \mid_v = \iota_1(\overline{x}_{w(i)}) \mid_v = t_{v \cdot w(i)} = \iota_1(\overline{x}_i) \mid_{v \cdot w} = (w \cdot \iota_1(\overline{x}_i)) \mid_v$$

对于 $1 \leq i \leq n$。

令 y_i 表示 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 中 x_i 在满射 $R(T^n)$-代数同态 $\iota_\lambda^!$ 下的像。下面的引理与 [1, 引理 31]类似。由定理 5.3 和定理4.1可得。

引理 5.6。 T^l等变拓扑 K环 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 由 $y_1, \ldots, y_n$ 生成，作为 $R(T^l) = \mathbb{Z}[u_1^{\pm \Gamma}, \ldots, u_l^{\pm \Gamma}]$上的代数。

现在我们着手构造一个 S_n作用于 $\bigoplus_{w \in \mathcal{F}_\lambda^{T^l}} \mathbb{Z}[u_1^{\pm 1}, \ldots, u_l^{\pm 1}]$ 以及 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$。令 $\phi : [n] \longrightarrow [l]$ 为如下定义的映射

$$\phi(i) = k \tag{5.29}$$

若 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} + 1 \leq i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$其中 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} = 0$当 $k = 1$ （见 [1, 第6]页）。注意，包含 $T^l \hookrightarrow T^n$ 诱导出映射 $R(T^n) \longrightarrow R(T^l)$，其定义为 $t_i^{\pm 1} \mapsto u_{\phi\, i\, ()}^{\pm 1}$，其中 $1 \leq i \leq n$。

于是映射

$$\pi : \bigoplus_{w\in S_n} \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1},\dots,t_n^{\pm 1}] \longrightarrow \bigoplus_{w\in \mathcal{F}_\lambda^{T^l}} \mathbb{Z}[u_1^{\pm 1},\dots,u_l^{\pm 1}]$$

交换图（5.25）中的映射由下式给出

$$\pi(f\mid_w (t_1^{\pm 1},\dots,t_n^{\pm 1})) = f\mid_w (u_{\phi(1)}^{\pm 1},\dots,u_{\phi(n)}^{\pm 1}).$$

因此，由交换图（5.25），对于 $w\in \mathcal{F}_\lambda^{T^l}$我们有

$$\iota_2(\overline{y}_i)\mid_w = \iota_2(\iota_\lambda^!(\overline{x}_i))\mid_w = \pi(\iota_1(\overline{x}_i)\mid_w) = \pi(t_{w(i)}) = u_{\phi(w(i))} \tag{5.30}$$

and

$$\iota_2(u_i^{\pm 1})\mid_w = u_i^{\pm 1}. \tag{5.31}$$

$v\in S_n$在$\bigoplus_{w\in \mathcal{F}_\lambda^{T^l}} \mathbb{Z}[u_1^{\pm 1},\dots,u_l^{\pm 1}]$上的左作用定义为

$$(v\cdot f)\mid_w = f_{w'} \tag{5.32}$$

对于$w\in \mathcal{F}_\lambda^{T^l}$和$f\in \bigoplus_{w\in \mathcal{F}_\lambda^{T^l}} \mathbb{Z}[u_1^{\pm 1},\dots,u_l^{\pm 1}]$，$w'\in \mathcal{F}_\lambda^{T^l}$是陪集$[wv]$的代表元。（回忆一下，$\mathcal{F}_\lambda^{T^l}$可以视为子群 S_λ 在 S_n中的各陪集的陪集代表元。）

我们有如下引理，类似于 [1,引理 3.2]。

引理 5.7。对于每个 $v\in S_n$、$1\le i\le n$ 和 $1\le j\le l$，我们有

$$v\cdot(\iota_2(\overline{y}_i)) = \iota_2(\overline{y}_{v(i)}) \tag{5.33}$$

and

$$v\cdot(\iota_2(u_j^{\pm 1})) = \iota_2(u_j^{\pm 1}). \tag{5.34}$$

证明。由（5.31）和（5.32），我们有

$$(v\cdot\iota_2(u_i^{\pm 1}))\mid_w = \iota_2(u_i^{\pm 1})\mid_{w'} = u_i^{\pm 1} = \iota_2(u_i^{\pm 1})\mid_w$$

对每个 $w\in S_n$。因此（5.34）得证。

现在，由（5.30）和（5.32），我们有

$$v\cdot\iota_2(\overline{y}_i)\mid_w = \iota_2(\overline{y}_i)\mid_{w'} = u_{\phi(w'(i))}$$

and

$$\iota_2(\overline{y}_{v(i)})\mid_w = u_{\phi(w(v(i)))}.$$

因此，只需证明 $\phi(w'(i)) = \phi(wv(i))$。这是因为$[w'] = [wv]$ 在 $S_\lambda\backslash S_n$ 中（见引理 3.2] 的证明）。证毕。□

由于 ι_2 是单射，因此我们在 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 上得到一个由下式给出的 S_n 作用：

$$w \cdot \overline{y}_i = \overline{y}_{w(i)} \text{ and } w \cdot u_j^{\pm 1} = u_j^{\pm 1} \tag{5.35}$$

对于 $w \in S_n$ 对于 $1 \le i \le n$ 以及 $1 \le j \le l$。由引理 5.6 和引理 5.7，可知该作用定义良好。

通过将 y_i 与 $[L_i]_{T^l}$ 等同，S_n在 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 上的作用由$w \cdot [L_i]_{T^l}$ 给出：$= [L_{w(i)}]_{T^l}$对于 $1 \le i \le n$，以及 $w \cdot u_j^{\pm 1} = u_j^{\pm 1}$对于 $1 \le j \le l$。

此外，这也意味着，对于 $K_{T^n}(\mathcal{F})$ 和$K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 上的 S_n作用，映射 $\iota_\lambda^!$ 是 S_n-等变的。□

5.5. **关于 $\mathcal{F}_\lambda$ 上典范丛的截面化。** 回顾定义p_λ 中定义的函数3.1。数值 $p_{\lambda^\vee}(s$与幂零变换 $N = J_\lambda$ 的关系如下。

引理 5.8。 [20, 命题 3]。使用上述记号，

(i) $p_{\lambda^\vee}(s) = \text{秩}(J_\lambda^{n-s})$ $1 \le s \le n$。

(ii) 设 $V = V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n$ 为细化部分旗 $0 = \operatorname{Im}(J_\lambda^{\lambda_1}) \subset \operatorname{Im}(J_\lambda^{\lambda_1 - 1}) \subset \cdots \subset \operatorname{Im}(J_\lambda^2) \subset \operatorname{Im}(J_\lambda) \subset \mathbb{C}^n$ 的旗。那么，对任意 $V' \in \mathcal{F}_\lambda$ 和任意 $s \ge 1$，有 $V_q \subset V'_s$，其中$q = p_{\lambda^\vee}(s)$。

命题 5.9。 对于 $1 \le s \le n$，我们有同构

$$L_1 \oplus \cdots \oplus L_s \cong \xi \oplus \epsilon_{j_1} \oplus \cdots \oplus \epsilon_{j_q} \tag{5.36}$$

对于某个 T^l-等变复向量丛 $\xi = \xi(\mathbf{i})$，其秩为 $s - q$，以及 T^l-等变平凡线丛 ϵ_{j_ℓ}，对应于 $1 \le \ell \le q$，定义在 $\mathcal{F}_\lambda$ 上，其中$q := p_{\lambda^\vee}(s)$。此外，对于 $d \ge s + 1 - q$，(5.36) 还蕴含如下同构

$$L_1 \oplus \cdots \oplus L_s \cong \xi' \oplus \epsilon_{j_1} \oplus \cdots \oplus \epsilon_{j_{s+1-d}} \tag{5.37}$$

其中

$$\xi' = \xi \oplus \epsilon_{j_{s+1-d+1}} \oplus \cdots \oplus \epsilon_{j_q}$$

是秩为 $d-1$ 的 T^l-等变复向量丛。此外，我们可以选取 ξ 和 ϵ_{j_ℓ} $1 \le \ell \le q$，使得平凡向量丛 $\epsilon_{j_1} \oplus \cdots \oplus \epsilon_{j_q}$ 的秩为 q，且 T^l 在其纤维 $\mathbb{C}^q$ 上的作用由特征组 $(u_{\phi_\lambda(1)} \cdots, u_{\phi_\lambda(q)})$ 给出

证明。将 N 替换为其共轭 gNg^{-1}，使得对于 $k \ge 1$，有 $\operatorname{Im}(gNg^{-1})^{n-k} = E_{p_{\lambda^\vee}(k)} = \mathbb{C}^{p_{\lambda^\vee}(k)}$。于是，我们可以将 $(\cdots \subset (gNg^{-1})^2\mathbb{C}^n \subset (gNg^{-1})\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^n)$ 的细化选为标准旗$E = (0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = \mathbb{C}^n) \in \mathcal{F}$，其中 $E_i = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$，对于$1 \le i \le n$。因此，由引理 5.8 可知，对于任意 $V \in \mathcal{F}_{gNg^{-1}}$，都有 $\mathbb{C}^q \subset V_s$。令 $\iota_g : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ 为沿 g: $V \mapsto gV = gV_0 = 0 \subset gV_1 \subset$的平移 $\cdots \subset gV_n = \mathbb{C}^n$。由于 $GL(n, \mathbb{C})$ 是连通的，复合映射 $\mathcal{F}_N \xhookrightarrow{\iota_\lambda}$

$\mathcal{F} \xrightarrow{\iota_g} \mathcal{F}$，记作 $\iota_{\lambda,\, g}$ 与 ι_λ 同伦，并将 $\mathcal{F}_N$ 映到 $\mathcal{F}_{gNg^{-1}} \subset \mathcal{F}$ 上。因此，$\iota^!_{\lambda,\, g}\colon K_{T^n}(\mathcal{F}) \longrightarrow K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 可以与 $\iota^!_\lambda$ 等同。特别地，$\iota^!_{\lambda,\, g}([\mathcal{L}_j]) = [L_j]\ \forall\ 1 \leq j \leq n$。

回忆一下，$g \in GL_n(\mathbb{C})$ 在 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ 上的左作用定义为：将对应于 g 的 $n \times n$ 矩阵从左侧乘到列向量 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$ 上。注意，对于 $GL_n(\mathbb{C})$ 中 $w \in S_n$ 的一个代表元 g，由 w 在 $\mathbb{C}^n$ 上的左作用 $w \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (x_{w^{-1}(1)} \cdots, x_{w^{-1}(n)})$ 所诱导的 g 在 $\mathcal{F}$ 上的左作用 ι_g 满足 $\iota_g^*(\mathcal{L}_i) \simeq \mathcal{L}_i$，其中 $1 \leq i \leq n$。此外，ι_g 关于由 $\psi_g\colon T^n \longrightarrow T^n$ 给出的群同态是 T^n 等变的

$$(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n) \mapsto (\mathtt{t}_{w^{-1}(1)}, \ldots, \mathtt{t}_{w^{-1}(n)}). \tag{5.38}$$

注意，ψ_g 是由 g 共轭得到的。特别地，在 ψ_g 下，元素 $(z_1, \ldots, z_l) \in T^l$ 映射为 $(z_{\phi(w^{-1}(1))} \cdots, z_{\phi(w^{-1}(n))})$（见注 3.5 和 (5.29)）。因此，$T^l$ 在 ψ_g 下的像是 T^n 的共轭子群 gT^lg^{-1}。我们将考虑 T^l 通过 ψ_g 在 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}_{gNg^{-1}}$ 上的作用。

这里我们指出，在 $\mathcal{F}$ 与 $U(n)/T^n$ 的同构下，$w \in S_n$ 的这一左作用对应于 $w \cdot gT^n = ngT^n$，其中 $n \in N(T^n)$ 可取为与 w 相关联的置换矩阵。

回顾 [1, 第 5] 节，存在 $w \in \mathcal{F}_\lambda^{T^l} \subseteq S_n$，使得 $w \cdot E$ 将旗 $(\cdots \subset N^2\mathbb{C}^n \subset N\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^n)$ 细化。这里，$E = (E_i) \in \mathcal{F}$ 表示满足 $E_i = \langle e_1, \ldots, e_i\rangle$ 的标准旗，其中 $1 \leq i \leq n$。特别地，我们有 $w \cdot E_q = w \cdot \mathbb{C}^q = \mathrm{Im}(N^{n-s})$，其中 $q = p_{\lambda^\vee}(s)$。

因此，用 w^{-1} 的一个代表元 $g \in GL_n(\mathbb{C})$ 对 N 作共轭，得到

$$\mathrm{Im}(gNg^{-1})^{n-s} = E_q = \mathbb{C}^q$$

其中 $q = p_{\lambda^\vee}(s)$。这意味着 E 将细化旗

$$(\cdots \subset (gNg^{-1})^2\mathbb{C}^n \subset (gNg^{-1})\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^n).$$

我们进一步回顾 [1]，有

$$\phi_\lambda = \phi \circ \overline{w} \tag{5.39}$$

其中 ϕ_λ 如（1.3）中所定义，而 ϕ 如（5.29）中所定义。

采用上述对 w 和 g 的选取，并结合前面的论证可知，$(z_1, \ldots, z_l) \in T^l$ 在 ψ_g 下的像为 $(z_{\phi\circ w(1)}, \ldots, z_{\phi\circ w(n)})$。因此，由（5.39）可知，$T^l$ 对 $\mathbb{C}^n$ 的作用由特征组 $(u_{\phi_\lambda(1)} \cdots, u_{\phi_\lambda(n)})$ 给出。

在上述假设下，在证明的其余部分中，我们将 gNg^{-1} 简记为 N，并将像 $\psi_g(T^l) = gT^lg^{-1}$ 简记为 T^l。

令 $G_{n,s} = G_s(\mathbb{C}^n)$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中所有 s 维平面构成的格拉斯曼簇。存在投影 $\pi_s\colon \mathcal{F} \to G_{n,s}$，其定义为 $V \mapsto V_s$。注意，

映射 π_s 是 T^l-等变的，其中 T^l 在 $G_{n,s}$ 上的作用是自然作用，即限制 T^n 的作用所得；该作用将 $\mathbb{C}^n$ 的一个 s 维子空间映射为另一个 s 维子空间。

令 $Y_q \subset G_{n,s}$ 表示子簇 $\{U \in G_{n,s} \mid U \supset \mathbb{C}^q\}, 1 \leq q < s$。注意，由于 T^l 与 N可交换，它保持 $Im(N)^{n-s} = E_q = \mathbb{C}^q$不变。因此，包含映射 $Y_q \hookrightarrow G_{n,s}$ 是 T^l-等变的。

此外， Y_q 同构于格拉斯曼簇 $G_{n-q,s-q}$。一个具体的同构 $Y_q \cong G_{s-q}(\mathbb{C}^n/\mathbb{C}^q)$ 可通过将 $U \in Y_q$映至 $U/\mathbb{C}^q$得到。典范复向量丛$\gamma_{n,s}$ 的秩为 s，其在 $A \in G_{n,s}$ 上的纤维是向量空间 A。注意，$\gamma_{n,s}$ 是T^l-等变向量丛。限制到 Y_q上时， $\gamma_{n,s}$ 有一个秩为 q的平凡子丛 $q\epsilon$。由于 T^l的作用保持子空间 $\mathbb{C}^q$不变，$\gamma_{n,s}$ 的子丛 $q\epsilon$ 也是 T^l-等变的。我们注意到， T^l通过特征组 $(u_{\phi_\lambda}(1) \cdots, u_{\phi_\lambda}(q))$作用于 $\mathbb{C}^q \subseteq \mathbb{C}^n$。

事实上，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} Y_q \times \mathbb{C}^q & \hookrightarrow & E(\gamma_{n,s}|_{Y_q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_q & \xrightarrow{id} & Y_q \end{array}$$

其中所有映射都是 T^l-等变的，竖直箭头是丛投影。因此，作为一个 T^l- 等变向量丛，我们将 $Y_q \times \mathbb{C}^q$ 记为 $\epsilon_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus \epsilon_{\chi_q}$。于是

$$\gamma_{n,s}|_{Y_q} \cong \omega \oplus \epsilon_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus \epsilon_{\chi_q} \tag{5.40}$$

其中 ω 是定义在 Y_q 上的复向量丛，其在 $A \in Y_q$上的纤维是复向量空间 $A' := A/\mathbb{C}^q$。由于 $\gamma_{n,\ s}$和 $\epsilon_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus \epsilon_{\chi_q}$都是 T^l-等变的，我们得到商丛 ω是 T^l-等变的。因此，直和分解（5.40）是 T^l-等变的。

由引理 5.8可知，复合映射的像

$$\mathcal{F}_N \overset{\iota_N}{\hookrightarrow} \mathcal{F} \xrightarrow{\pi_s} G_{n,s},$$

记作 $\pi_{N,\ s}$，包含于 Y_q 中。此外，映射 $\pi_{N,\ s}$ 是 T^l-等变的。因此，我们有一个交换图，其中所有映射都是 T^l-等变的

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_N & \overset{\iota_N}{\hookrightarrow} & \mathcal{F} \\ \pi_{N,s} \downarrow & & \downarrow \pi_s \\ Y_q & \hookrightarrow & G_{n,s}. \end{array} \tag{5.41}$$

Now,

$$\pi_s^*(\gamma_{n,s}) = \mathcal{V}_s = \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_s$$

由（3.11）。另请回想， ι_N^*（$\mathcal{L}_i$） $= L_i$ 对 $1 \leq i \leq n$。

因此

$$L_1 \oplus \cdots \oplus L_s = \iota_N^*(\mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_s) \tag{5.42}$$

$$= \iota_N^* \circ \pi_s^*(\gamma_{n,s}) \tag{5.43}$$

$$= \pi_{N,s}^*(\gamma_{n,s}|_{Y_q}) \tag{5.44}$$

$$= \pi_{N,s}^*(\omega) \oplus \pi_{N,s}^*(\epsilon_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus \epsilon_{\chi_q}), \tag{5.45}$$

由（5.40）。因此，若 $\epsilon_{j_\ell} := \pi_{N,\,s}^*(\epsilon_{\chi_\ell})$ 对 $1 \le \ell \le q$ 成立，且 $\xi := \pi_{N,\,s}^*(\omega)$，则同构（5.36）在 $\mathcal{F}_N$ 上成立。

此外，在 $\mathcal{F}_N$ 上的同构（5.36）中，T^l 作用于秩为 q 的 T^l-等变平凡丛的纤维

$$\bigoplus_{\ell=1}^{q} \epsilon_{j_\ell} \cong \mathcal{F}_N \times \mathbb{C}^q$$

通过元组 $(u_{\phi_\lambda(1)} \cdots,\ u_{\phi_\lambda\,(q)})$。由此得出该命题。

□

5.6. 等变 K-理论中的 λ 运算。 这里回顾等变 K-理论中的 λ 运算，也称外幂运算（见 [4,第 1]节）。

设 X 是紧致 G-空间，G 是紧致李群。对于 $x \in K_G(X)$，令

$$\lambda_t(x) := \sum_{i \ge 0} \lambda^i(x) t^i$$

作为形式幂级数环 $K_G(X)[[t]]$ 中关于不定元 t 的一个元素。对于任意 $x \in K_G(X)$，$\lambda^0(x) = 1$。当 $x = [\xi]_G \in K_G(X)$ 是 X 上秩为 k 的 G-向量丛的类时，$\lambda_t(x)$ 是次数为 k 的多项式，因为外幂 $\lambda^d([\xi]_G) = [\Lambda^d(\xi)]_G = 0$（当 $d \ge k+1$ 时）。特别地，当 ξ 是一个 G-线丛时，$\lambda_t([\xi]_G) = 1 + [\xi]_G t$。

令 $\xi = \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_k$，其中 ξ_i 是 X_k 上的一个 G-等变线丛（对 $1 \le i \le k$）。那么我们有 $\lambda_t([\xi]_G) = \prod(1 + [\xi_i]_G t)$，且 $\lambda_t([-\xi]_G) = {}_{i=1}^{k}\prod(1 + [\xi_i]_G t)^{-1}$。最后两个等式由恒等式${}_{i=1}$得出

$$\lambda_t(x + y) = \lambda_t(x) \cdot \lambda_t(y).$$

当 $X = \mathcal{F}_\lambda$ 且 $G = T^l$ 时，由（5.37）以及 λ_t 的上述性质可得

$$\lambda_t([\xi']_{T^l}) = \prod_{1 \le r \le s} (1 + [L_r]_{T^l} t) \prod_{1 \le \ell \le s+1-d} (1 + [\epsilon_{j_\ell}]_{T^l} t)^{-1} \tag{5.46}$$

对于 $d \geq s+1-q$ 其中 $q = p_{\lambda^\vee}(s)$。现在，$\lambda_t([\xi']_{T^l})$ 是一个次数为 $d-1$ 的多项式，因为 $\mathrm{rank}(\xi') = d-1$ 对于 $d \geq s+1-q$。因此，通过比较（5.46）中 t^d 的系数，其中 $d \geq s-q+1$，我们得到关于 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 的以下方程（5.47）

$$\sum_{0\leq k\leq d} (-1)^{d-k} e_k([L_1]_{T^l},\dots,[L_s]_{T^l}) h_{d-k}([\epsilon_{j_1}]_{T^l},\dots,[\epsilon_{j_{s+1-d}}]_{T^l}) = 0.$$

根据第 1 节的记号，有如下命题，其中$\mathcal{I}_\lambda$ 特别表示等变 K-理论 Tanisaki 理想（见（1.2））。

命题 5.10。存在一个良定义的满射 $R(T^l)$-代数同态

$$\overline{\Psi_\lambda} : R(T^l)[x_1,\dots,x_n]/\mathcal{I}_\lambda \longrightarrow K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$$

它将 x_i 映到 $[L_i]_{T^l} \in K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$，其中 $1 \leq i \leq n$。

证明。回忆定理 5.3，$K^{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 作为 $R(T^l)$-代数由 $[L_i]_{T^l}$ 生成。此外，回忆命题 5.5，S_n 对 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 的作用由 $w\cdot[L_i]_{T^l} := [L_{w(i)}]_{T^l}$ 和 $w\cdot u_i^{\pm 1} = u_i^{\pm 1}$ 给出，其中 $R(T^l) = \mathbb{Z}[u_1^{\pm 1},\dots,u_l^{\pm 1}]$。根据命题 5.9，对于 $1 \leq \ell \leq q$，ϵ_{j_ℓ} 是 $\mathcal{F}_\lambda$ 上的平凡线丛，T^l 在纤维上的作用由特征 $u_{\phi_\lambda(\ell)}$ 给出。因此，对于 $1 \leq \ell \leq q$，我们可以将 $[\epsilon_{j_\ell}]_{T^l}$ 认作元素$u_{\phi_\lambda(\ell)} \in R(T^l)$。现在，通过 S_n-作用，关系 (5.47) 蕴含以下关系组

$$\sum_{0\leq k\leq d} (-1)^{d-k} e_k([L_{i_1}]_{T^l},\dots,[L_{i_s}]_{T^l}) h_{d-k}(u_{\phi_\lambda(1)},\dots,u_{\phi_\lambda(q)}) = 0 \tag{5.48}$$

在 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 中，对于 $1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n$、$1 \leq s \leq n$ 和 $d \geq s-q+1$。因此命题得证。□

主定理 定理 1.1 若能证明命题中的同态5.10 是一个同构，即可得到。因此，只需证明 Ψ_λ的单射性。

为此，我们证明以下引理。

引理 5.11. 设 $\mathcal{R} :=:= R(T^l)[x_1,\dots,x_n]$。环 $\mathcal{R}/\mathcal{I}_\lambda$ 由 $\binom{n}{\lambda}$ 个元素生成，构成一个 $R(T^l)$-模。

证明。令 $\mathcal{R}' := \mathbb{Z}[u_1,\dots,u_l,x_1,\dots,x_n]$。令 $\mathcal{I}'_\lambda$ 为多项式环 $\mathcal{R}'$ 中由以下次数为 d 的齐次元素生成的理想，该环带有自然分次

$$\sum_{0\leq k\leq d} (-1)^{d-k} e_k(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_s}) h_{d-k}(u_{\phi_\lambda(1)},\dots,u_{\phi_\lambda(s+1-d)})$$

对于 $1 \le s \le n$、$1 \le i_1 < \cdots < i_s \le n$ 和 $d \ge s+1-q$，其中$q := p_{\lambda^\vee}(s)$。

只需找到多项式 $\Phi_1(x)\dots,\Phi_m(x)$，使其类生成 $\mathcal{R}'/\mathcal{I}'_\lambda$，将其视为一个 $\mathbb{Z}[u_1,\dots,u_l]$-模。由于 $\mathcal{R}$（分别为 $R(T^l)$）是 $\mathcal{R}'$（分别为 $\mathbb{Z}[u_1,\dots,u_l]$）在 $u_1\cdots u_l$ 处的局部化，因此这意味着，多项式 $\Phi_1(x)\dots,\Phi_m(x)$ 在 $\mathcal{R}/\mathcal{I}_\lambda$ 中的类将生成 $\mathcal{R}/\mathcal{I}_\lambda$，将其视为一个 $R(T^l) = \mathbb{Z}[u_1^{\pm1},\dots,u_l^{\pm1}]$-模。于是引理得证。

现在，根据定理 3.4 可知 $\mathcal{R}'$ 同构于环$\mathcal{S}/\mathcal{J}_\lambda \cong H^*_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$。此外，根据 [1, 引理 5.2] 我们知道，存在多项式 $\Phi_1(x)\dots,\Phi_m(x)$，它们生成 $\mathcal{R}'/\mathcal{I}'_\lambda$，将其视为一个 $\mathbb{Z}[u_1,\dots,u_l]$-模。引理得证。□

现在我们证明定理 1.1。

证明。(主定理的证明) 我们已在定理 5.1中证明 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 是一个秩为 $\binom{n}{\lambda}$ 的自由 $R(T^l)$-模。此外，根据引理5.11 $\mathcal{R}/\mathcal{I}_\lambda$ 由 $\binom{n}{\lambda}$ 个元素生成，作为 $R(T^l)$-模。因此，我们将得到一个满射 $R(T^l)$-模同态

$$\psi : R(T^l)^{\binom{n}{\lambda}} \longrightarrow \mathcal{R}/\mathcal{I}_\lambda.$$

由于根据命题 5.10，Ψ_λ 是满射，我们将得到一个满射$R(T^l)$-模同态 $\Psi_\lambda \circ \psi$，它是定义在整环 $R(T^l)$ 上的两个同秩自由 $\binom{n}{\lambda}$ 之间的映射。这意味着 $\Psi_\lambda \circ \psi$ 是一个同构，因此 Ψ_λ 也是一个同构。□

注 5.12。我们有恒等式

$$\begin{aligned}&\sum_{0\le k\le d} (-1)^{d-k} e_k(u_{\phi_\lambda(1)},\dots,u_{\phi_\lambda(s)}) h_{d-k}(u_{\phi_\lambda(1)},\dots,u_{\phi_\lambda(s+1-d)})\\ &= e_d(u_{\phi_\lambda(s+2-d)},\dots,u_{\phi_\lambda(s)})\\ &= 0\end{aligned}$$

因为集合 $\{u_{\phi_\lambda(s+2-d)}\ \cdots,\ u_{\phi_\lambda(s)}\}$ 中的变量个数小于 d。因此，我们可以将 $\mathcal{R}$ 中定义 $\mathcal{I}_\lambda$ 的关系改写如下:

(5.49)
$$\sum_{0\le k\le d} \begin{aligned}&(-1)^{d-k}\left[e_k(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_s}) - e_k(u_{\phi_\lambda(1)},\dots,u_{\phi_\lambda(s)})\right]\cdot\\ &h_{d-k}(u_{\phi_\lambda(1)},\dots,u_{\phi_\lambda(s+1-d)})\end{aligned}$$

对于 $1 \le s \le n, 1 \le i_1 < \cdots < i_s \le n$ 和 $d \ge s+1-q$，其中 $q = p_{\lambda^\vee}(s)$。特别地，当 $\lambda = (1,\dots,1)$ 且 $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}$ 时，$\lambda^\vee = (n)$。因此，$p_{\lambda^\vee}(s) = 0$ 对于 $1 \le s < n$，且 $p_{\lambda^\vee}(n) = n$。此外，ϕ_λ 是恒等映射

映射。在这种情况下，关系式（5.49）化简为

$$\sum_{0\le k\le d}(-1)^{d-k}\big[e_k(x_1,x_2,\dots,x_n)-e_k(u_1,\dots,u_n)\big]\cdot h_{d-k}(u_1,\dots,u_{n+1-d}) \tag{5.50}$$

对于 $d\ge 1$。关系式（5.50）很容易看出等价于定理4.15中给出的关系式（4.1）。

6. Relation with the ordinary K-ring

回顾一下，增广映射 $\epsilon: R(T^l)\longrightarrow\mathbb{Z}$ 将任意 T^l-表示 V的类 $[V]$ 映到 $\dim(V)$。这赋予 $\mathbb{Z}$ 一个 $R(T^l)$-模结构。此外，通过结构态射的拉回，或者等价地，通过将 T^l-表示的类 $[V]$ 映到 $\mathcal{F}_\lambda\times V$上的平凡 T^l-等变向量丛的映射，我们在 $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$上也有一个典范的 $R(T^l)$-模结构。类似地，通过结构态射的拉回，或者等价地，通过映射 θ （该映射将任意正整数 n 映到 $\mathcal{F}_\lambda$ 上秩为 n 的平凡向量丛），我们在 $K(\mathcal{F}_\lambda)$上有一个 $\mathbb{Z}$-模结构。令 $\mathrm{f}: K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)\longrightarrow K(\mathcal{F}_\lambda)$ 表示遗忘同态，它将任意 T^l-等变向量丛的类映到忘却其 T^l-结构后所得底层向量丛的类。（见 [10],[16]）。

推论 6.1。映射

$$\mathrm{F}:\mathbb{Z}\otimes_{R(T^l)}K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)\longrightarrow K(\mathcal{F}_\lambda)$$

由第一因子上的 θ 和第二因子上的f 所诱导，是一个 $\mathbb{Z}$-模同构。换言之，斯普林格簇 $\mathcal{F}_\lambda$ 对 K-理论 [8] 是弱等变形式的。

证明：由定理 5.1， $K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 是一个秩为 $\binom{n}{\lambda}$ 的自由 $R(T^l)$-模。根据 [15, 命题 3.1]， $K(\mathcal{F}_\lambda)$ 是一个秩为 $\binom{n}{\lambda}$ 的自由 $\mathbb{Z}$-模，并且由线丛$[L_i]$ 的类生成，其中 $1\le i\le n$。由于 L_i 是 T^l-等变的，这意味着 $[L_i]$ 是 $[L_i]_{T^l}\in K_{T^l}(\mathcal{F}_\lambda)$ 的像，因此映射 F 是满射。于是，F 是两个秩相同的自由阿贝尔群之间的满射同态 $\binom{n}{\lambda}$，故为同构。 □

另一方面，将 $u_i=1$ 对所有 $1\le i\le l$ 进行特化，也就是说，将其与 $\mathbb{Z}$ 在 $R(T^l)$ 上作张量积，我们得到

$$h_{d-k}(u_{\phi_\lambda(1)},\dots,u_{\phi_\lambda(s+1-d)})=\binom{s+1-d+d-k-1}{s+1-d-1}=\binom{s-k}{s-d}$$

（见 [13]），关于 $d\ge s+1-q$。

此外，由于

$$\binom{q+d-k-1}{q-1} = \left(\prod_{i=1}^{q-s-1+d} \frac{s-k+i}{s-d+i}\right) \cdot \binom{s-k}{s-d}$$

因此，等变 K-理论的 Tanisaki 理想 $\mathcal{I}_\lambda$ 归约为普通 K-理论的 Tanisaki 理想 I_λ，其定义见 [15,第 11]页。

结合定理 1.1 和推论 6.1，我们重新得到普通 K-环的表示 $\mathcal{F}_\lambda$，该表示是通过其他方法直接在[15]中得到的。

定理 6.2。*[15, 定理 4。2]* 映射 $\Psi ord_\lambda : \quad R = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \to K(\mathcal{F}_\lambda)$ 是由 $\Psi ord_\lambda\ (x_j) \quad = [L_j]$ 对$1 \leq j \leq n$定义的环同态。则 Ψord_λ 是满射，且 $ker(\Psi ord_\lambda\ ) \quad = I_\lambda$，其中 I_λ是 R 中的理想，由以下元素生成

$$\sum_{0 \leq k \leq d} (-1)^{d-k} e_k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) \cdot \binom{q+d-k-1}{q-1}$$

其中 $1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n$、$1 \leq s \leq n$ 和 $d \geq s+1-q$。

致谢： 本研究得到 Serb Matrics 研究基金的资助，项目编号为 MTR/2022/000484。作者非常感谢 Parameswaran Sankaran 教授进行了多次宝贵的讨论。作者也感谢他认真审阅论文早期版本，并分享了许多宝贵的意见和建议。作者谨向 Shrawan Kumar 教授致以谢意，感谢他在论文准备期间提出的宝贵建议并给予鼓励。作者还要感谢 Megumi Harada 教授的鼓励以及通过电子邮件进行的有益交流。作者感谢审稿人提出的宝贵意见和建议。

References

[1] Abe, H. 和 Horiguchi, T.，《斯普林格簇的环面等变上同调环》，Topology and its Applications **208**，143-159（2016）[2] Atiyah, M.F.，《K 理论》，W.A.Benjamin，纽约，NY，（1967）。[3] Atiyah, M.F. 和 Hirzebruch, F.，《向量丛与齐性空间》，纯数学专题讨论会论文集，3，美国数学会（1961）。[4]M.F. Atiyah 和 D. O. Tall，群表示、*A*-环与 *J*-同态，Topology **8** （1969），第 253-297 页。[5] A. Bialynicki-Birula，由环面作用确定的代数簇分解的一些性质，Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys. **24** （1976），667-674。[6] Borel, A.，《关于紧李群的主纤维空间与齐性空间的上同调》，Ann. Math. **57** （1953），115–207。[7] De Concini, C. 和 Procesi, C.，《对称函数、共轭类与旗簇》，Invent. Math. **64**，203-219（1981）。

[8] Megumi Harada 和 Gregory D. Landweber，《K 理论中 Hamiltonian G- 空间的满射性》，《美国数学学会汇刊》359，第 12 期，6001-6025（2007）。[9] Hotta, R. 和 Springer T. A.，《某些 Weyl 群表示的专化定理及其在酉群 Green多项式中的应用》，Invent. Math. 41，113-127（1977）。[10] Husemoller, D.，《纤维丛》，第 2 版，GTM20，施普林格出版社，纽约，1975。[11]Karoubi, M.，《K 理论》，Grund. Math. Wiss.226，施普林格出版社，柏林，（1978）。[12] B. Kostant 和 S. Kumar，T-等变 K理论：广义旗簇，J. Differential Geom. 32（1990），549-603。[13] Macdonald, I. G.，《对称函数与 Hall多项式》，牛津大学出版社，1979。[14] J. McLeod，《等变 K 理论中的 Künneth公式》，载于《代数拓扑》，滑铁卢，1978（滑铁卢大学会议论文集，安大略省滑铁卢，1978），《数学讲义》，第 741 卷，施普林格出版社，柏林，1979，第 316-333 页。[15]Sankaran, P. 和 Uma, V.，《斯普林格簇的 K 理论》，math arXiv:2201.03058，即将在 Tohoku Math. Journ. 发表。[16] Segal, G.，《等变 K 理论》，Publications math ´ematiques de l'I.H. ´E.S.，第 34 卷（1968），第 129-151 页。[17] Spaltenstein, N.，《旗流形上幂零变换的不动点集》，Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 79（1976），452-456。[18] Springer, T. A.，《三角和、有限群的 Green函数与 Weyl群表示》，Invent. Math. 36（1976），173-207。[19] Springer, T. A.，《Weyl群表示的构造》，Invent. Math. 44（1978），279-293。[20] Tanisaki, T.，《共轭类闭包的定义理想与 Weyl 群表示》，Tohoku Math. Journ. 34（1982），575-585。[21]Tymoczko, J.，《斯普林格纤维的几何与组合学》，arXiv:1606.02760v1[math.AG]。

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Madras, Chennai 600036, India

电子邮件地址: vuma@iitm.ac.in