arXiv:2301.01888v2 [quant-ph] 7 Dec 2023

通过测量实现近乎确定性的冷却

Jia-shun Yan[1] 和 Jun Jing[1], *[1] *School of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, Zhejiang, China*(日期：2023年12月8日)

基于测量的非确定性技术能够有效重塑量子系统的布居分布，但将系统制备到目标态的成功概率有限。为降低实验成本，我们利用条件测量和无条件测量的态工程机制，提出一种由量子比特辅助的两步协议，可使谐振器以接近单位的概率冷却至基态。第一步，对辅助量子比特进行无条件测量，将目标谐振器从热态重塑为预留福克态。通过强化学习优化测量序列，以获得最大保真度。第二步，通过对量子比特进行条件测量，可将预留态上的布居逐步、忠实地转移至谐振器的基态，保真度接近单位值。通过适当设置测量序列的间隔，可有效抑制基于投影的条件测量所固有的不确定性，使 Kraus 算符对相邻福克态发挥湮灭算符的作用。经过数十次测量，谐振器的初始热平均占据数可降低五个数量级，成功概率超过 95%。

I. 引言

微观和介观谐振器冷却至接近基态时，会表现出非经典行为。作为量子系统 [1, 2], 绝热量子计算 [3, 4], 和超高精度测量 [5, 6], 初始化的关键前提，基态冷却近几十年来受到广泛关注 [7–12]。尤其是借助激光技术，谐振器（作为原子或分子系统的外部自由度）与自旋（作为内部自由度）之间建立的相互作用，为谐振器的能量泄漏提供了衰减通道或非对称跃迁。在存在 [13] 或不存在反馈控制[14]的情况下，机械基态制备都展现出丰富的物理现象。另有一种相关但截然不同的方法，则利用相同谐振器-自旋相互作用设置中的量子测量。该方法效率显著，可作为量子计算 [15–18], 量子态制备 [19–23] 和纠缠跃迁 [24–26]的有力工具。

基于测量的冷却大致分为确定性协议和非确定性协议两大类，具体取决于冷却过程是否无条件地继续进行。许多确定性冷却协议都需要反馈回路。根据对机械谐振器位置信息的光学读出，通过控制脉冲间隔 [21, 27], 脉冲持续时间 [21], 和施加的力 [28] 来实现制冷。在非确定性冷却中，冷却循环以概率方式串联起来 [29–32]。只有当投影测量的结果表明被测系统处于目标态时，冷却过程才会继续。否则，系统样本会被舍弃，并重新开始整个过程。投影诱导的连续后选择通过动态滤除振动模式 [33, 34], 逐步使机械振子进入基态。通过主动选择所需结果，非确定性冷却在平均占据数降低率方面效率极高，从而大幅减少冷却循环的次数。然而，其成功概率，即各次后选择测量概率的乘积，是以高效率为代价而受到限制的。对于完全由条件测量构成的冷却协议，成功概率通常只有 10% 左右或更低。例如，Ref [29], 提出了一种机械谐振器的基于测量的冷却方案，其平均声子数降低了四个数量级，成功概率约为 20%。在 Ref [32], 中，非线性机械谐振器的平均声子数降低了约八个数量级，成功概率约为 10%。在 Ref. [33], 中，通过基于测量的冷却，囚禁离子振子被冷却至接近基态，成功概率约为 12%。毫无疑问，成功概率低会在实际应用中引发诸多问题，并给实验带来额外的复杂性。因此，成功概率应作为评估非确定性冷却协议的一项关键指标。

为提高成功概率，可以减少投影的次数 [14, 29, 35, 36] ，或使用副产物算符和自适应测量 [16, 37]。另一种选择是先对目标系统进行纯化，再执行投影测量；这个想法虽然出人意料，却鲜少有人探索。我们利用无条件（非选择性）测量 [38, 39] ，因为它能有效地将布居从低能态集中到某些预留的高能态。无条件测量的特征是纯退相干算

* 电子邮件地址：jingjun@zju.edu.cn

符作用，并伴随着波函数的部分坍缩[40]，且不会偏向于将被测系统投影到某个子空间 [41]。因此，它是实现布居保持不变的态工程的一种有前景的工具。目标系统得到有效纯化后，其动力学会变得更可预测，因此更有可能通过投影测量对其进行操控，并获得接近 1 的成功概率。

本文提出了一种基于测量的两步冷却框架。第一步中，对制备在激发态的辅助量子比特持续进行无条件测量，使耦合的谐振器逐渐从热态转变为预留福克态。较短的测量间隔倾向于将其他态中的更多布居汇集到预留态，而较长的间隔则倾向于使态分布在预留态附近更加集中。通过强化学习可以生成优化的时间间隔序列，从而将热态重塑为近乎纯态。强化学习是一种强大的工具，能够直接从经典 [42–45] 和量子系统或环境[46–49]中的奖励信号学习复杂行为。在第二步中，利用投影测量，通过逐步实施正算子值测度（POVM），将预留福克态引导回机械基态。通过测量制备在基态的辅助量子比特的激发态来生成 POVM，从而使谐振器相邻福克态之间实现近乎完美的布居转移。借助解析公式中可更新的测量间隔，机械谐振器被冷却至基态，成功概率超过 95%。

本文其余部分安排如下。在第 II 节中，我们介绍一种基于无条件测量和条件测量所诱导的布居转移的纯态制备框架，并从解析上给出预留适当态的条件，以及更新条件测量最优区间的方法。在第 III 节中，我们提出两步冷却方案，并展示测量作用下机械谐振器的冷却动力学。在第 IV 节中，我们研究各种预留态的基态保真度和成功概率对热退相干的鲁棒性。最后，我们在第 V 节总结全文。

II. 模型与测量

我们的两步冷却方案中，无条件测量和条件测量均基于 Jaynes-Cummings（JC）模型。为简单起见且不失一般性，将辅助量子比特的基态能量设为 $\omega_g = 0$。相对于 $H_0 = \omega_b$（$|e\rangle\langle e| + b^\dagger b$）的旋转坐标系中的完整哈密顿量为（$\hbar \equiv 1$）

$$H = \Delta|e\rangle\langle e| + g(b^\dagger\sigma_- + b\sigma_+). \tag{1}$$

这里，$\Delta \equiv \omega_e - \omega_b$ 表示辅助量子比特的能级间隔 ω_e 与目标谐振器频率 ω_b 之间的失谐。g 是 Jaynes-Cummings 相互作用的耦合强度。b（$b^\dagger$）是谐振器的湮灭（产生）算符，$\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ 和 $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$是量子比特的跃迁算符。

假设谐振器最初处于热浴中，其初始态为 [50] ($k_B \equiv 1$)

$$\rho_b^{\rm th} = \frac{1}{1+\bar{n}_{\rm th}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}_{\rm th}}{1+\bar{n}_{\rm th}}\right)^n |n\rangle\langle n|, \tag{2}$$

其中，$\bar{n}_{\rm th} = {\rm Tr}[\hat{n}\rho_b^{\rm th}] = 1/(e^{\omega_b/T} - 1)$ 为热平均占据数，T 表示连接到谐振器的热浴温度。瞬时冯·诺依曼量子测量可分为两类[39]：条件测量和无条件测量，具体取决于是否记录测量结果。一般测量算符可由 $Q = \sum_i q_i M_i$ 和 $QM_i = q_i M_i$ 定义，其中投影算符 M_i 表示一个特定子空间。对于条件测量 [51–53]，，测量后的态变为 $M_i\rho M_i/{\rm Tr}[M_i\rho]$，其中 ρ 是由谐振器和量子比特组成的复合系统的密度矩阵。对于无条件测量，其作用范围涵盖被测系统的整个空间，测量后的态为 $\sum_i M_i\rho M_i$。在我们的近乎确定性冷却方案中，两种测量均会采用，但用途不同。无条件测量可从热态生成高能量的福克态，而条件测量则用于将高能级布居转移至其低能级邻态。

A. 基于无条件测量的福克态制备

由于整个系统的激发数守恒，JC 哈密顿量（1）在希尔伯特空间中呈分块对角形式，可写为

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \Delta \end{pmatrix} \tag{3}$$

在由 $\{|g,n\rangle, |e,n-1\rangle\}$ 张成的 n-激发子空间中。于是，时间演化算符为：

$$U = \bigoplus_n e^{-i\frac{\Delta\tau}{2}} \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n^* \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中

$$\alpha_n = \cos(\Omega_n\tau) + i\Delta\sin(\Omega_n\tau)/2\Omega_n, \tag{5}$$
$$\beta_n = -ig\sqrt{n}\sin(\Omega_n\tau)/\Omega_n \tag{6}$$

为冷却系数，$\Omega_n = \sqrt{g^2 n + \Delta^2/4}$ 为拉比频率。从任意混合态开始

$\rho_b = \sum_n p_n|n\rangle\langle n|$ 对于谐振器和量子比特的激发态，在经过时长为 τ 的联合演化后，对量子比特进行无条件测量，可得到超操作 $\mathcal{U}(\tau)[\rho_b] \equiv \mathrm{Tr}_a[U(|e\rangle\langle e| \otimes \rho_b)U^\dagger]$，谐振器的最终状态为

$$\rho_b'(\tau) = \mathcal{U}(\tau)[\rho_b] = \sum_{n\geq 0} \left(p_n|\alpha_{n+1}|^2 + p_{n-1}|\beta_n|^2\right)|n\rangle\langle n|, \tag{7}$$

其中 p_{-1} 设为零以简化公式。这里我们忽略测量所需的时间 [54]，因为它远短于典型的演化周期 τ。对于谐振器的布居分布，每个福克态与其低能级邻态之间都会发生转移

$$p_n \to p_n|\alpha_{n+1}|^2 + p_{n-1}|\beta_n|^2, \tag{8}$$

其中，布居的变化量由冷却系数 $|\alpha_{n+1}|^2$ 和 $|\beta_n|^2$决定。具体而言，$|\alpha_{n+1}|^2$ 表示第 n个福克态上原始布居的保留比例，而 $|\beta_n|^2$则是转移到上一级的第 $(n-1)$ 个态布居的加权因子。在满足 $|\alpha_{n+1}|^2 = 1$的固定间隔下，对量子比特反复进行无条件测量时，某些态 $|n\rangle$ 上的布居会持续增长，因为它们的低能级邻态上的布居会通过 $p_{n-1}|\beta_n|^2$ 以 $|\beta_n|^2 \geq 0$转移到这些态上。

本文将这些特定状态称为“预留态”。给定 $|\alpha_{n+1}|^2 = 1$or $\Omega_{n+1}\tau = \pi$，不难立即发现，第一个预留态 $n = n_r^{(1)}$对应的测量间隔可写为

$$\tau = \tau_r = \frac{\pi}{\Omega_{n_r^{(1)}+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{g^2\left[n_r^{(1)}+1\right] + \Delta^2/4}} \tag{9}$$

或其整数倍。反过来，对于给定的测量间隔 τ_r，我们有一组预留态:

$$n_r^{(k)} = n_r^{(1)} + (k^2-1)\left[n_r^{(1)} + \delta^2 + 1\right], \tag{10}$$

其中 $k \in \mathbb{N}_+$ 且 $\delta^2 = \Delta^2/(4g^2)$。因此，对于 $\Omega_{n_r^{(k)}+1}\tau_r = k\pi$ 为 k 整数的情形，预留态并不唯一。此外，它们受到保护，布居会在无条件测量的作用下逐渐集中在这些状态附近。当然，$n_r^{(k)}$应理解为方程（10）右侧最接近的整数，而 k表示预留态的阶数。

图 1(a) 绘出了布居变化比率

$$\eta_n^{(m)} = \frac{p_n^{(m)}}{p_n^{(m-1)}} \tag{11}$$

，以展示在方程（τ_r 9）中固定测量间隔下进行无条件测量的效果，其中 $p_n^{(m)}$表示经过 $|n\rangle$次 m 测量后在

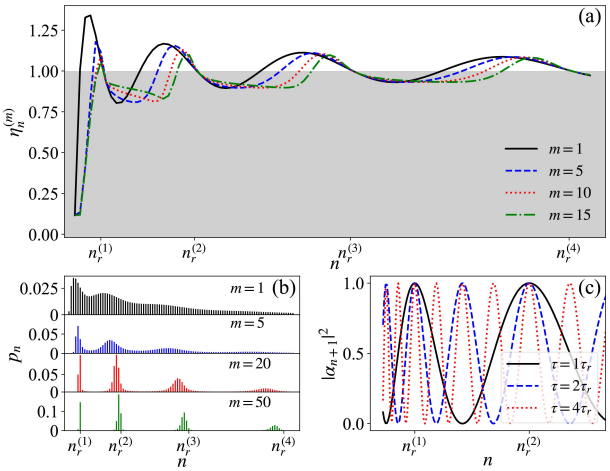

图 1. (a) 布居比值 η 随福克态指标 n 的变化，其中在固定测量间隔 $\tau = \tau_r$ 下，根据式（9）对给定预留态 $n_r^{(1)} = 5$进行了不同次数的测量。灰色区域的上界为 $\eta = 1$，表示在无条件测量过程中 $|n\rangle$ 上的布居持续下降的区域。(b) 谐振器福克空间中的布居直方图，对应不同次数的测量。(a) 和 (b) 中，谐振器初始处于高温度 $T = 1$ K 的热态，以使较大范围的福克态具有不可忽略的布居。(c) 冷却系数 $|\alpha_{n+1}|^2$ 随 n 的变化，对应不同的 τ。耦合强度和失谐分别设为 $g = 0.04\omega_b$ 和 $\Delta = 0.02\omega_b$。当 $n_r^{(1)} = 5$时，由式（ $n_r^{(2)} \approx 2310$）可得 $n_r^{(4)} \approx 95$ 。

p_n 会随着测量而增加，当 $\eta_n^{(m)} > 1$ （白色区域）；当 $\eta_n^{(m)} < 1$ （灰色区域）时则会下降。对于任意 m，福克基中的布居变化比率都呈现出相似的模式。基态 $|n=0\rangle$上的 η 保持最小值；根据式（8），该值为常数 $\eta_0 = |\alpha_0|^2 \approx 0.12$ 。对于 $n > 0$，$\eta_n^{(m)}$会随着 n迅速增加，达到局部峰值后，在第一预留态 $n_r^{(1)}$附近降至 1。在量子比特上反复进行无条件测量，会使峰值对应的福克指标向 $n_r^{(1)}$移动，并使低能范围 $[0 \sim n_r^{(1)}]$ 内的布居显著集中到第一预留态 $|n_r^{(1)}\rangle$。$\eta_n^{(m)} > 1$ 的范围会随m收缩，但始终涵盖 $|n_r^{(1)}\rangle$附近。当 n大于 $n_r^{(1)}$时，布居变化比率会降至 1 以下，直到下一个预留态 $n_r^{(2)}$。对于温度较高、在更广的福克态范围内具有不可忽略布居的谐振器，可以看到更多具有 $\eta_n^{(m)} > 1$的可分离态范围。随着反复实施测量，所有这些隆起都会收缩，并向式（10）给出的保留态$n_r^{(k)}$移动，$k \geq 1$。热分布布居随后会逐渐集中到这些保留态上。还需要更多次测量或更长的运行

时间，才能提高高阶保留态上的布居。

我们利用图中的谐振器福克基布居直方图1(b)展示重复进行无条件测量时布居的集中现象。有趣的是，测量大幅改变了热态的指数衰减分布。通过收集越来越多的布居，可以区分出保留态，并且显然$p_{n_r^{(1)}}$在低能标度下占主导。因此，探索一种从混合态生成高保真度福克态的有效方法 $|n_r^{(1)}\rangle$ 颇有意义，尤其是从基态布居达到最大值的热态中生成。这构成了我们冷却方案第一步的主要目标。此步骤剩下的问题是如何抑制高阶保留态 $n_r^{(k)}$，$k \geq 2$的布居；这些态同样受到保护，甚至会变得更加占据。为避免它们造成干扰，可以根据给定的初始温度，为谐振器选择合适的预留态$|n_r^{(1)}\rangle$ 。对于平均占据数为 $\bar{n}_{\rm th}$的热态，其均方根偏差为 $\Delta n = (\bar{n}_{\rm th} + \bar{n}_{\rm th}^2)^{1/2}$，截至 $|n = N\rangle$ 的累积布居为

$$P(N) = \frac{1}{\bar{n}_{\rm th}} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\bar{n}_{\rm th}}{1+\bar{n}_{\rm th}} \right)^n = 1 - \left(\frac{\bar{n}_{\rm th}}{1+\bar{n}_{\rm th}} \right)^N . \quad (12)$$

可以立即发现 $P(N = \bar{n}_{\rm th} + 4\Delta n) \geq 0.99$。接下来，为了防止布居集中到第二个预留态上，必须满足

$$n_r^{(2)} \geq \bar{n}_{\rm th} + 4\Delta n, \quad (13)$$

由此， $|n_r^{(2)}\rangle$附近原有的热布居变得可以忽略。根据方程（10），该条件实质上为第一个预留态设定了一个下界$n_r^{(1)}$:

$$n_r^{(1)} \geq \frac{1}{4}\left[\bar{n}_{\rm th} - 3(\delta^2+1)\right] + \Delta n. \quad (14)$$

这可用于选择预留态，从而实现高保真度福克态制备。

根据方程（5），冷却系数$|\alpha_{n+1}|^2$ 和预留态 $n_r^{(1)}$都会受到测量间隔 τ的显著影响。注意， τ 可能是 τ_r 在方程（9）中的整数倍。给定目标态 $|n_r^{(1)}\rangle$，图1（c）展示了 $|\alpha_{n+1}|^2$ 随福克态指标变化的情况，并比较了不同测量间隔。采用最短间隔 $\tau/\tau_r = 1$，可以降低由 $|n_r^{(1)}\rangle$和 $|n_r^{(2)}\rangle$限定的大范围内的非期望布居。采用较长间隔时，$|\alpha_{n+1}|^2$的周期缩短，这表明根据方程（8），预留态附近的布居分布更加尖锐。具有较高保真度的福克态对于以更高概率实现基态冷却至关重要。因此，可以构造一组间隔不等的 M 无条件测量序列

通过为第 i 次测量设置 $\tau_i = j\tau_r$，并采用经过优化的整数 j 来构造。 i 的取值范围为 1 至 M。如果 $j \in \{1, 2, \cdots, d\}$，那么我们就必须通过蛮力测试 d^M 种序列。

在第III节中，我们采用强化学习方法，快速生成一组经过优化的无条件测量时间间隔（作为实施我们协议的参数输入），从而使布居几乎完全集中到预留态上。强化学习中的智能体会根据当前状态（布居分布）采取动作，并通过反馈机制，根据奖励或惩罚更新经验。通过计算机模拟中的反复试错，它能够生成一系列最优动作，以实现特定目标（预留福克态保真度）。

B. 基于条件测量的布居转移

与无条件测量不同，条件测量会舍弃未投影子空间上的系统布居，因此冷却过程是非确定性的。这里我们采用一个基于量子比特激发态的投影算符 $M_e = |e\rangle\langle e|$ 。不同于传统测量冷却所用的投影 $M_g = |g\rangle\langle g|$， M_e 会产生一种非确定性的正算子值测度（POVM），将谐振器中布居从较高能级转移到较低能级。

具体而言，量子比特被制备在基态。在复合系统经过持续时间为 τ的联合演化后，于演化结束时执行条件测量，谐振器的状态变为

$$\rho_b(t+\tau) = \frac{\langle e|U(\tau)\rho_b(t)\otimes|g\rangle\langle g|U^\dagger(\tau)|e\rangle}{P_s}, \quad (15)$$

其中

$$P_s = {\rm Tr}[R(\tau)\rho_b(t)R^\dagger(\tau)] \quad (16)$$

表示测量概率，而

$$R(\tau) \equiv \langle e|U(\tau)|g\rangle = \sum_{n=1} \frac{-ie^{i\Delta\tau} g\sqrt{n}\sin\Omega_n\tau}{\Omega_n}|n-1\rangle\langle n| \quad (17)$$

是定义在谐振器希尔伯特空间中的 Kraus算符。根据纳马克扩张定理[55], ，对辅助量子比特进行的投影测量会在谐振器上诱导出 POVM $\mathcal{M}(\tau)[\mathcal{O}] \equiv R(\tau)\mathcal{O}R^\dagger(\tau)$。因此，经过一次条件测量后，谐振器的状态（未归一化）为

$$\rho_b(t+\tau) = \mathcal{M}(\tau)[\rho_b(t)] = \sum_{n=1} |\beta_n|^2 p_n |n-1\rangle\langle n-1|. \quad (18)$$

方程（18）描述了相邻态对之间向下的布居转移，转移为 $p_{n-1} \leftarrow |\beta_n|^2 p_n$

其具有一个 n相关因子 $|\beta_n|^2$，由方程（5）给出。通过选择合适的测量时间间隔 τ，转移效率可在不超过 $|\beta_n|^2=1$的范围内完全实现。在这种情况下，Kraus算符的作用与湮灭算符相同 $R_n\sim|n-1\rangle\langle n|$，对于给定的 n，若谐振器预先制备为 $|n\rangle$，便可将布居从 $|n\rangle$ 完全转移至 $|n-1\rangle$。随后，优化后的测量间隔使投影测量能够逐步将全部布居从高能级福克态转移至基态。进行第一步无条件测量后，我们得到 $n=n_r$（为简洁起见，下文省略第一个预留态的上标），由此可求得第一轮条件测量的最优测量间隔：

$$\tau_{\rm opt}=\frac{\pi}{2\Omega_{n_r}}. \tag{19}$$

根据 $|\sin(\Omega_{n_r}\tau)|=1$，由方程 (5可知。在接下来的第 k 轮中，n_r 更新为 $n_r-(k-1)$，$k\geq 2$。

由方程 (19可知，对于较大的 n_r，$\tau_{\rm opt}$ 所需的测量次数更多；由于激发数较少的子空间中的跃迁较慢，[53] 也会因此变长。在实施条件测量时，谐振器的演化取决于高度相关的测量结果，而测量所产生的结果构成了参数空间中的一条条件轨迹。采用优化后的周期 $\tau_{\rm opt}$ 后，若测量结果显示量子比特处于激发态，就意味着已从谐振器中可靠地提取了一个单位的能量。因此，在这些特定的正算子值测度下，成功概率不会显著降低，能量会持续流出，直至发现谐振器处于基态。

III. 近乎单位成功概率的高效冷却

结合前述的无条件测量和条件测量，我们现在介绍如图 2(a) 所示的两步冷却方案。在第一步（见橙色框）中，将辅助量子比特制备为激发态，并通过无条件测量 $|n_r\rangle$ $\mathcal{U}(\tau_i)$（见式（7））将初始处于热态的谐振器重塑为第一个预留福克态，其中 τ_i 表示第 i轮联合演化和测量的时间间隔。正如我们在第 IIA节所分析的，较短的 τ_i 有助于抑制非目标态上的布居，但不利于实现高保真度福克态 $|n_r\rangle$。相比之下，较长的 τ_i 会加快福克态的生成，但可能在高阶保留态上留下更多布居。我们采用强化学习方法，寻找一组具有不同测量间隔的最优有限无条件测量序列，以实现高保真度的福克态。

我们通过策略神经网络在图 $\tau\in\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_d\}$ 2(b) 中提供动作集合或动作空间 $\tau_j=j\tau_r$ 表示不同的测量间隔，d 为集合大小。为尽可能提高福克态保真度，策略神经网络经过训练，学习在对辅助量子比特实施无条件测量时所需的一系列不等测量间隔。我们采用分布式近端策略优化算法 [56] 进行优化，更多细节见附录 A。需要注意的是，强化学习生成的测量间隔序列作为实施无条件测量的参数化输入。当预留福克态$|n_r\rangle$ 经过 M 轮无条件测量制备完成后，将其载入第二步（见蓝色框）。M 在预训练过程中确定，是一个可调参数，用于确保预留态上具有足够高的布居集中度，并避免无效测量。如图 2(c) 所示，在第二步中，辅助量子比特被翻转至基态，并以不同的联合演化间隔 $M_e=|e\rangle\langle e|$对量子比特进行投影测量 $\tau_{\rm opt}$ （见式（19））。这会在谐振器上诱导出一个正算子值测度 $\mathcal{M}$，能够以接近单位的概率将$|n\rangle$ 上的布居传输至 $|n-1\rangle$。随后经过 n_r 轮额外的条件测量，谐振器便冷却至基态。

我们的两步协议可用于冷却吉赫兹 [57–59]，范围内、本征频率为 $\omega_b=3.7$ GHz 的纳米机械振荡器。谐振器与辅助量子比特之间的耦合强度为 g/ω_b =0.04，初始温度为 $T=0.1$ K。图 3(a) 和图 3(b) 展示了在不同测量次数下谐振器随时间演化的布居分布（即纵向排列的直方图），其中包括无条件测量和条件测量。$M=0$ 的数据描述了初始热态。在图 3(a) 中，通过无条件测量实现的预留态 $|n_r=10\rangle$ 上的布居转移比 η_n 始终大于 1。低能级（尤其是基态）的布居逐渐转移至较高能级，直至预留态。经过 $M=15$ 次无条件测量后，$|n_r\rangle$ 的保真度已超过 0.68。对于 $M=20$ 和 $M=30$，其保真度分别超过 0.94 和接近 1。福克态制备不能简单地视为辅助量子比特与目标谐振器之间能量交换的结果，因为该过程并未对量子比特态进行后选择。此外，若不进行时间间隔优化，预留态上的布居就无法单调增加，尽管谐振器的能量增益源于辅助量子比特的激发。当制备好福克态 $|n_r\rangle$ 后，第二步的条件测量便开始将其布居转移回基态 $|0\rangle$。整个冷却过程结束时，基态的保真度达到 0.999997，成功

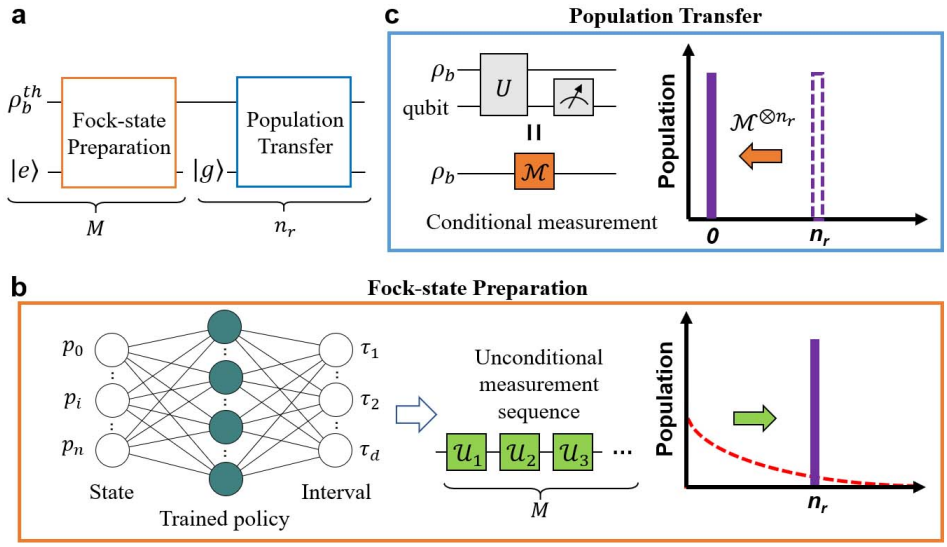

图 2. (a) 我们的近单位概率冷却协议框架，由两个步骤组成。模型包含一个待冷却的谐振器 ρ_b，其初始处于热态；以及一个辅助量子比特，在第一步和第二步中分别制备于激发态 $|e\rangle$ 和基态$|g\rangle$。(b) 强化学习辅助的福克态制备步骤示意图。通过神经网络构建的策略经过训练，根据当前状态选择最优测量间隔；其中，神经网络的输入是谐振器布居 $s = \{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$，输出是各种无条件测量间隔的概率分布。训练完成后，会生成一系列经过优化的测量间隔，用于无条件测量。在此步骤中，谐振器可以从热态高效地重塑为预留福克态 $|n_r\rangle$。(c) 布居转移步骤示意图。经过一段时间的联合幺正演化后，对辅助量子比特实施投影测量，可在谐振器上产生一个正算子值测度（POVM），从而将布居从较高的福克态转移至较低的福克态。经过 n_r 轮条件测量后，预留态上的布居将全部转移至基态。

概率超过 $P_s = 95\%$。

在图 3(b) 中，由于预留态的能级较高且初始布居较低，要达到更高的目标预留态 $|n_r = 20\rangle$ 需要进行更多次无条件测量。经过 $M = 30$ 次测量后，相邻态 $|n = 19\rangle$ 的布居显著增加，达到 $\langle n = 19|\rho_b|n = 19\rangle = 0.35$。经过 $M = 50$次测量后，预留态的保真度超过 $F_r = 0.94$。同样，在完成福克态制备过程后，对量子比特进行 $n_r = 20$ 轮条件测量，最终基态的保真度达到 0。999996，成功概率超过 $P_s = 94$ %。在 $n_r = 10$ 和$n_r = 20$的情况下，平均占据数 $\bar{n} = \mathrm{Tr}\hat{n}\rho_b]$ 从初始值 $\bar{n} \approx 3.06$降至 $\bar{n} = 1.57\times10^{-5}$和 $\bar{n} = 3.83 \times 10^{-6}$，分别降低了五个数量级以上。

在现有的非确定性冷却协议中 [29,31], ，谐振器和量子比特的乘积基态 $|g0\rangle$通过多轮基于直接投影测量的后选择，与其他子空间解耦。分布在非期望激发态上的布居不可忽略，因此冷却的成功概率较低。然而，在我们的协议中，目标系统已经被制备为福克态 $|n_r\rangle$，随后接受基于投影测量、由式（17）描述的非确定性 POVM。因此损失很小

第二步期间的布居。

我们的协议所需的资源也有限。在第一步通过无条件测量进行福克态制备时，无需对辅助量子比特进行后选择。因此，理论上成功概率为 1。在第二步进行布居转移时，每轮条件测量中，辅助量子比特都被制备为基态，并被投影到激发态 [，见图 2（a）]。因此，可能需要一个以上的量子比特来弥补后选择的有限概率。对于图 3（a）中的结果，成功概率约为 $P_s \approx 95\%$，这意味着在每 100 次实验中（假设我们有一组相同的系统，并多次执行测量序列），冷却谐振器失败的次数不到 5 次。

图3（c）和3（d）展示了无条件测量步骤中的时间间隔序列，这些序列分别由针对保留态 $|n_r = 10\rangle$ 和 $|n_r = 20\rangle$训练良好的策略生成。策略学到的关键策略似乎有一些相似之处。在最初几轮中，它们倾向于使用更多较短的时间间隔，以在第一个保留态附近收集更多布居。这实际上减少了高阶保留态所占的布居。随后，它们逐渐选择更长的测量间隔，并在最后几轮固定使用最大值。这种策

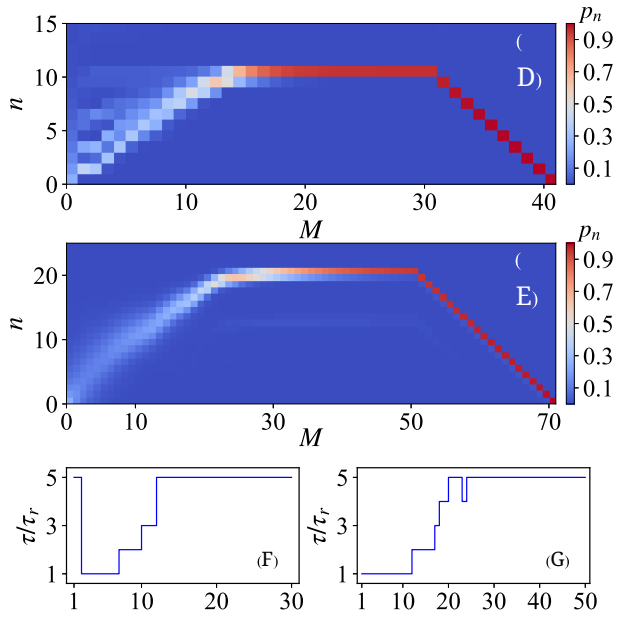

图3。（a）和（b）：谐振器在福克空间中的布居分布随测量次数的变化。从热态出发，经过 30 轮无条件测量后，较宽范围内的布居逐渐集中到预留态（a）$|n_r = 10\rangle$；经过 50 轮无条件测量后，布居逐渐集中到预留态（b）$|n_r = 20\rangle$。随后，对量子比特进行 n_r 轮条件测量，以逐步将累积在 $|n_r\rangle$ 上的布居转移到基态。（c）和（d）：在相同的作用空间 $\tau \in \{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_5\}$ 下，分别针对预留态（a） $n_r = 10$ 和（b） $n_r = 20$优化的无条件测量序列。谐振器频率设为 $\omega_b = 3.7$ GHz，初始温度为 $T = 0.1$ K。 $\Delta = 0.05g$ 和 $g = 0.04\omega_b$。

略有助于使预留态附近的布居分布更加集中，从而作为一种精细操作实现纯化。

IV. 热浴下的冷却

考虑目标谐振器与外部热浴相互作用所导致的退相干，研究开放量子系统情形下的冷却过程是不可避免的。在温度有限的热浴存在时，冷却效率预计会下降。在这种情况下，测量所穿插的系统演化可通过主方程模拟

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho(t)] + \gamma(\bar{n}_{\rm th} + 1)\mathcal{D}[a]\rho(t) + \gamma\bar{n}_{\rm th}\mathcal{D}[a^\dagger]\rho(t), \tag{20}$$

其中， $\rho(t)$表示谐振器和量子比特组成的复合系统， γ表示退相干率，而 $\mathcal{D}[A]$ 表示林德布拉德超算符

$$\mathcal{D}[A]\rho(t) \equiv A\rho(t)A^\dagger - \frac{1}{2}\left\{A^\dagger A, \rho(t)\right\}. \tag{21}$$

为区分热浴引起的退相干效应，我们采用强化学习为第 III 节封闭量子系统情形训练得到的相同无条件测量序列，并在条件测量步骤中使用与方程（19）所给出的相同最优测量间隔。

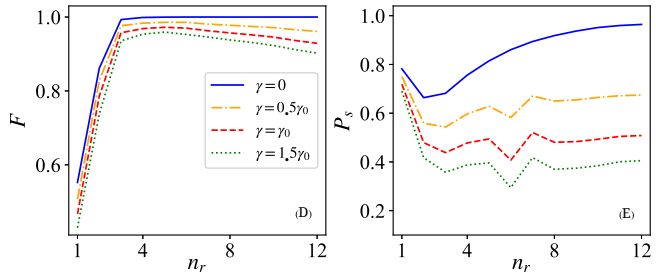

图4。（a）冷却 F 协议结束时的基态保真度，以及（b）谐振器的成功概率 P_s 随第一保留态的变化，图中给出了不同退相干率下的结果。退相干率的单位取为实验相关值 $\gamma_0 = 10^{-5}\omega_b$ [58]。其他参数与图3相同。

图4（a）展示了$F \equiv \langle 0|\rho_b|0\rangle$ 冷却结束时目标谐振器态相对于其基态的保真度随保留态的变化 $|n_r\rangle$，其中考虑了不同的退相干率。对于低于下界的保留态，该下界是使用绘图参数代入方程（ ~ 3 14）得到的，高阶保留态上积累的不可忽略布居会显著降低目标福克态的纯度。对于 $n_r < 3$，即使在无退相干情形下，保真度也低于 0。87，表明冷却效率低下。与此形成鲜明对比的是，对于$n_r \geq 3$ ，当 $\gamma = 0$时，谐振器可以被冷却至基态，且保真度接近 1。尽管随着 γ的增大，保真度缓慢下降，但当 $\gamma = 1.5\gamma_0$ 时，在 $n_r = 12$的范围内，保真度仍维持在约 0。90。因此，基态保真度体现出对热浴的稳健性。对于 $n_r \geq 3$，与较小的福克态相比，热浴对较大的福克态保真度抑制更强。这是因为较高的保留态意味着需要进行更多轮条件测量，而且在我们用于布居转移的协议第二步中，运行时间也会长得多。根据主方程（21），有效衰减率与谐振器的初始平均布居成正比。因此，与低能级态相比，高能级态对热浴更为敏感。

成功概率的变化趋势 P_s 如图4(b)所示，也大致由下界 $n_r \sim 3$划分。对于 $n_r \leq 3$，$n_r = 1$ 的成功概率高于 $n_r = 2$ 和 $n_r = 3$。当$\gamma = 0$时，成功概率接近 80%。这是可以理解的，因为

布居转移步骤中只有一次投影，但这对于冷却而言意义不大，因为相应的基态保真度低于0.5，如图4(a)所示。对于 $n_r \geq 3$，成功概率大致随着 n_r 的增加而提高，并随着 γ的增加而逐渐下降。在没有热浴的情况下，对于 $P_s = 96$，成功概率达到$n_r = 12$ %；即使对于 $\gamma = 1.5\gamma_0$，成功概率仍可维持在 40% 以上，远高于完全依赖优化条件测量的冷却方案[60]。

V. 讨论与结论

总而言之，我们提出了一种兼具高效率和近单位成功概率的两步冷却方案。该方案通过在测量条件下与辅助量子比特耦合，将热谐振器冷却至其基态。第一步由无条件测量组成，负责将目标谐振器从混合态（例如热态）转变为预留的福克态。演化与测量轮次的时间间隔序列可通过强化学习中的分布式近端策略优化算法预先优化，以权衡不同测量间隔对纯化预留态以及抑制非目标态布居的影响。对于合适的预留态，经过数十次测量，目标谐振器即可被制备为保真度接近单位的福克态。第二步依赖于一种非确定性POVM，该POVM由投影到辅助量子比特的激发态所诱导；在谐振器与量子比特每轮联合演化后，辅助量子比特均被制备于基态。通过采用更新后的优化测量间隔设置的POVM，预留态上的布居将以近乎单位的概率逐步下降。通过分步提取谐振器中的能量，所制备的预留态逐渐接近基态。

与现有完全依赖投影测量的冷却方案不同，后者每一轮都具有非确定性；当前方案结合了无条件测量的确定性，以及条件测量在降低布居方面的高效率。因此，该方案在保持较高冷却速率的同时，不会因后选择而导致成功概率大幅下降。我们的方案不要求谐振器在初始时具有非零的基态占据数。这为测量冷却的实际应用开辟了道路：谐振器的初始热平均占据数降低了五个数量级，而成功概率接近于 1。与此同时，实验成本适中，因为只需进行几十次测量。此外，该方案还为量子态操控与机器学习相结合进行优化提供了一个颇具前景的跨学科应用范例。

致谢

我们感谢中国国家自然科学基金（项目编号：11974311）的经费支持。

附录 A：分布式近端策略优化

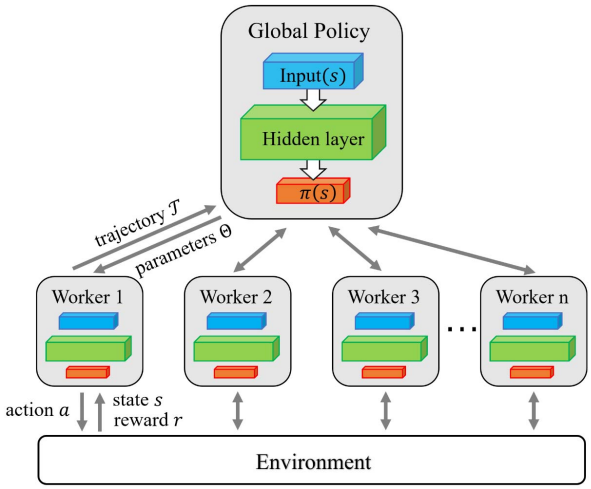

图 5. 分布式近端策略优化算法中策略更新的示意图。

本附录旨在进一步介绍第 III 节中用于生成优化后的无条件测量序列的分布式近端策略优化（DPPO）。DPPO 算法是近端策略优化（PPO）的一种分布式变体[56]，，其中，将一个可更新的策略作为行动者进行训练，以选择相对优化或正确的动作来实现最终目标；同时训练一个评论家，对策略所选动作是否应受到鼓励进行定量评估。在传统 PPO 中，有两个策略和一个评论家。策略和评论家均由神经网络构成，并各自拥有一组参数。两个策略采用相同的神经网络结构。旧策略负责通过与环境交互来收集数据，新策略则利用旧策略收集的数据更新其网络。在 DPPO 中，存在一个全局策略和多个工作策略。所有策略采用相同的网络结构。计算分布在策略和环境的多个并行实例上，数据收集则由多个并行线程完成，如图 5 所示。每个线程中都有一个工作策略，独立地与环境交互。在第一次试验中，单个工作策略根据初始态 a_1 选择一个动作 s_0，随后在环境中执行该动作，从而将状态更新为 s_1。环境会返回一个

奖励 r_1，其依据是定义明确的奖励函数。之后，更新后的状态 s_1 和奖励 r_1都会返回给工作策略。交互会重复多次，直至完成一条轨迹$\mathcal{T} = \{s_0, a_1, r_1, s_1, \cdots\}$。要更新全局策略，需要收集一批轨迹，因此将收集任务分配给多个并行线程，可以显著加快训练过程。请注意，在数据收集与全局策略更新之间，应及时更新所有工作策略的网络参数 Θ，以确保全局策略始终领先所有工作策略一个版本。

对于我们的两步冷却方案，策略的输入状态是目标谐振器密度矩阵的布居 $s_i = \{p_0, p_1, p_2, \cdots, p_{n_c}\}$，其截断$n_c$ 位于福克空间中。作用空间的维度设为五：$a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$，表示测量间隔 j 的倍数 τ_r，该间隔由式（9）给出，适用于第一个预留态。“环境”（并非开放量子系统中的热浴）会根据策略选出的动作，以不同的间隔实施无条件测量。奖励是预留态保真度 F_r 的正切函数 $r(s_i, a_i) = 10\tan(F_r\pi/2)$，该函数促使保真度尽可能接近 1。训练后，全局策略能够生成一个最优序列$\mathcal{S}_{\text{opt}} = \{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_M\}$，其中包含经过优化的无条件测量间隔； M 收敛时，预留态上的布居集中度较高。

与暴力搜索相比，强化学习方法在搜索最优间隔序列方面效率高得多；暴力搜索会在计算时间和内存空间两方面消耗呈指数增长的资源。在图3(a)的情境中，每轮有 $d = 5$ 种测量间隔可选，无条件测量序列由 $M = 30$ 轮组成。因此共有 5^{30} 种排列方式。使用普通个人电脑（本次数值模拟所用处理器为 Intel Core i7-9700，主频 3.00 GHz，内存 6 GB）运行一组测量序列约需 0.15 秒。相比之下，我们采用 DPPO，通过 4 个线程进行分布式采样来加速强化学习，约 1 小时即可找到最优排列，优势极为显著。

[1]L. Robledo, L. Childress, H. Bernien, B. Hensen, P. F. Alkemade, 和 R. Hanson, *High-fidelity projective read-out of a solid-state spin quantum register*, 《自然》477, 574（2011）。[2] C. E. Bradley, J. Randall, M. H. Abobeih, R. C. Berrevoets, M. J. Degen, M. A. Bakker, M. Markham, D. J. Twitchen, 和T. H. Taminiau, *A ten-qubit solid-state spin register with quantum memory up to one minute* **9**, 031045 2019 , 《物理评论X》（）。[3] T. Albash 和 D. A. Lidar, *Adiabatic quantum computation* **90**, 015002 2018 , 《现代物理评论》（）。[4] A. Das 和 B. K. Chakrabarti, *Colloquium: Quantum annealing and analog quantum computation*, 《现代物理评论》80, 1061（2008）。[5] A. L. Andersen 和 K. Mølmer, *Quantum non-demolition measurements of moving target states*, 《物理评论快报》129, 120402（2022）。[6] T. Ilias, D. Yang, S. F. Huelga, 和 M. B. Ple-nio, *Criticality-enhanced quantum sensing via continuous measurement* **3**, 010354 2022 , 《PRX量子》（）。[7] O. Arcizet, P.-F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard, 和 A. Heidmann, *Radiation-pressure cooling and optomechanical instability of a micromirror*, 《自然》444, 71（2006）。[8] S. Gigan, H. R. B¨ohm, M. Paternostro, F. Blaser, G. Langer, J. B. Hertzberg, K. C. Schwab, D. B¨auerle, M. Aspelmeyer, 和 A. Zeilinger, *Self-cooling of a micromirror by radiation pressure* **444**, 67 2006 , 《自然》（）。[9] D. Kleckner 和 D. Bouwmeester, *Sub-kelvin optical cooling of a micromechanical resonator*, 《自然》444, 75（2006）。[10] S. Sharma, Y. M. Blanter, 和 G. E. W. Bauer, *Optical cooling of magnons*, 《物理评论快报》121, 087205（2018）。[11] I. Wilson-Rae, N. Nooshi, W. Zwerger, 和 T. J. Kippenberg, *Theory of ground state cooling of a mechanical oscillator using dynamical backaction*, 《物理评论快报》99, 093901（2007年）。[12] J. F. Triana、A. F. Estrada 和 L. A. Pach´on, *Ultrafastoptimal sideband cooling under non-markovian evolution*, 《物理评论快报》116, 183602（2016年）。[13] M. Poggio、C. L. Degen、H. J. Mamin 和 D. Rugar, *Feedback cooling of a cantilever's fundamental mode below 5 mk* **99**, 017201 2007 , 《物理评论快报》（）。[14] L. Buffoni、A. Solfanelli、P. Verrucchi、A. Cuc- coli 和 M. Campisi, *Quantum measurement cooling*, 《物理评论快报》122, 070603（2019年）。[15] R. Raussendorf 和H. J. Briegel, *A one-way quantum computer* **86**, 5188 2001 , 《物理评论快报》（）。[16] R. R. Ferguson、L. Dellantonio、A. A. Balushi、K. Jansen、W. D¨ur 和 C. A. Muschik, *Measurement-based variational quantum eigensolver*, 《物理评论快报》126, 220501（2021年）。[17] H. J. Briegel、D. E. Browne、W. D¨ur、R. Raussendorf 和 M. Van den Nest, *Measurement-based quantum computation* **5**, 19 2009 , 《自然·物理》（）。[18] S. Cao、B. Wu、F. Chen、M. Gong、Y. Wu、Y. Ye、C. Zha、H. Qian、C. Ying、S. Guo、Q. Zhu、H.-L. Huang、Y. Zhao、S. Li、S. Wang、J. Yu、D. Fan、D. Wu、H. Su、H. Deng、H. Rong、Y. Li、K. Zhang、T.-H. Chung、F. Liang、J. Lin、Y. Xu、L. Sun、C. Guo、N. Li、Y.-H. Huo、C.-Z. Peng、C.- Y. Lu、X. Yuan、X. Zhu 和 J.-W. Pan, *Generation ofgenuine entanglement up to 51 superconducting qubits*, 《自然》（2023年），10.1038/s41586-023-06195-1。[19] G. Harel、G. Kurizki、J. K. McIver 和 F. Coutsias, *Optimized preparation of quantum states by conditional measurements* **53**, 4534 1996 , 《物理评论A》（）。[20] L. Roa、M. L. L. de Guevara、A. Delgado、G. Olivares-Renter´ıa 和 A. B. Klimov,*Quantum evolution by discrete measurements*,

《物理学杂志：会议系列》84, 012017（2007年）。[21] M. R. Vanner、I. Pikovski、G. D. Cole、M. S. Kim、C. Brukner、K. Hammerer、G. J. Milburn 和 M. Aspelmeyer, *Pulsed quantum optomechanics*, 《美国国家科学院院刊》108, 16182（2011年）。[22] M. R. Vanner、J. Hofer、G. D. Cole 和 M. Aspelmeyer, *Cooling-by-measurement and mechanical state tomography via pulsed optomechanics*, 《自然·通讯》4, 2295（2013年）。[23] J.-s. Yan 和 J. Jing, *Charging by quantum measurement*, 《物理评论应用》19, 064069（2023年）。[24] Y. Li、X. Chen 和 M. P. A. Fisher, *Quantum zeno effect and the many-body entanglement transition*, 《物理评论B》98, 205136（2018年）。[25] A. Chan、R. M. Nandkishore、M. Pretko 和 G. Smith, *Unitary-projective entanglement dynamics*, 《物理评论B》99, 224307（2019年）。[26] B. Skinner、J. Ruhman 和 A. Nahum, *Measurement-induced phase transitions in the dynamics of entanglement* **9**, 031009 2019, 《物理评论X》（）。[27] M. Brunelli、D. Malz、A. Schliesser 和 A. Nunnenkamp, *Stroboscopic quantum optomechanics*, 《物理评论研究》2, 023241（2020年）。[28] M. Rossi、D. Mason、J. Chen、Y. Tsaturyan 和 A. Schliesser, *Measurement-based quantum control of mechanical motion* **563**, 53 2018, 《自然》（）。[29] Y. Li、L.-A. Wu、Y.-D. Wang 和 L.-P. Yang, *Nondeterministic ultrafast ground-state cooling of a mechanical resonator* **84**, 094502 2011, 《物理评论B》（）。[30] C. Bergenfeldt 和 K. Mølmer, *Cooling a micromechanical resonator to its ground state by measurement and feedback* **80**, 043838 2009, 《物理评论A》（）。[31] H. Nakazato、T. Takazawa 和 K. Yuasa, *Purification through zeno-like measurements*, 《物理评论快报》90, 060401（2003年）。[32] R. Puebla、O. Abah 和 M. Paternostro, *Measurement-based cooling of a nonlinear mechanical resonator*, 《物理评论B》101, 245410（2020年）。[33] C. Lee、S. C. Webster、J. Mosca Toba、O. Cor- field、G. Porter 和 R. C. Thompson, *Measurement-based ground-state cooling of a trapped-ion oscillator*, 《物理评论A》107, 033107（2023年）。[34] J.-S. Xu、M.-H. Yung、X.-Y. Xu、S. Boixo、Z.-W. Zhou、C.-F. Li、A. Aspuru-Guzik 和 G.-C. Guo, *Demon-like algorithmic quantum cooling and its realization with quantum optics* **8**, 113 2014, 《自然·光子学》（）。[35] P. V. Pyshkin、D.-W. Luo、J. Q. You 和 L.-A. Wu, *Ground-state cooling of quantum systems via a one-shot measurement* **93**, 032120 2016, 《物理评论A》（）。[36] J.-s. Yan 和 J. Jing, *Optimizing measurement-based cooling by reinforcement learning*, 《物理评论A》106, 033124（2022年）。[37] R. Raussendorf、D. E. Browne 和 H. J. Briegel, *Measurement-based quantum computation on cluster states* **68**, 022312 2003, 《物理评论A》（）。[38] J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics* 1955（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，）。[39] A. Pechen、N. Il'in、F. Shuang 和 H. Rab- itz, *Quantum control by von neumann measurements*, 《物理评论A》74, 052102（2006年）。[40] J. P. Groen、D. Rist`e、L. Tornberg、J. Cramer、P. C. de Groot、T. Picot、G. Johansson 和 L. DiCarlo, *Partial-measurement backaction and nonclassical weak values in a superconducting circuit* 《物理评论快报》111, 090506 (2013). [41] G. Harel 和 G. Kurizki, *Fock-state preparation from thermal cavity fields by measurements on resonant atoms*, 《物理评论A》54, 5410 (1996). [42] D. Silver、A. Huang、C. J. Maddison、A. Guez、L. Sifre、G. van den Driessche、J. Schrittwieser、I. Antonoglou、V. Panneershelvam、M. Lanctot、S. Dieleman、D. Grewe、J. Nham、N. Kalchbrenner、I. Sutskever、T. Lillicrap、M. Leach、K. Kavukcuoglu、T. Graepel 和 D. Hass- abis, *Mastering the game of go with deep neural networks and tree search* **529**, 484 2016, 《自然》（）。[43] D. Silver、J. Schrittwieser、K. Simonyan、I. Antonoglou、A. Huang、A. Guez、T. Hubert、L. Baker、M. Lai、A. Bolton、Y. Chen、T. Lillicrap、F. Hui、L. Sifre、G. van den Driessche、T. Graepel 和 D. Hassabis, *Mastering the game of go without human knowledge*, 《自然》550, 354 (2017). [44] D. Silver、T. Hubert、J. Schrittwieser、I. Antonoglou、M. Lai、A. Guez、M. Lanctot、L. Sifre、D. Kumaran、T. Graepel、T. Lillicrap、K. Simonyan 和 D. Hassabis, *A general reinforcement learning algorithmthat masters chess, shogi and go through self-play*, 《科学》362, 1140 (2018). [45] V. Mnih、K. Kavukcuoglu、D. Silver、A. A. Rusu、J. Veness、M. G. Bellemare、A. Graves、M. Ried- miller、A. K. Fidjeland、G. Ostrovski、S. Petersen、C. Beattie、A. Sadik、I. Antonoglou、H. King、D. Ku- maran、D. Wierstra、S. Legg 和 D. Hassabis, *Human-level control through deep reinforcement learning*, 《自然》518, 529 (2015). [46] G. Carleo、I. Cirac、K. Cranmer、L. Daudet、M. Schuld、N. Tishby、L. Vogt-Maranto 和 L. Zde- borová, *Machine learning and the physical sciences*, 《现代物理评论》91, 045002 (2019). [47] T. F¨osel、P. Tighineanu、T. Weiss 和 F. Marquardt, *Reinforcement learning with neural networks for quantum feedback* **8**, 031084 2018, 《物理评论X》（）。[48] A. Bolens 和 M. Heyl, *Reinforcement learning for digital quantum simulation*, 《物理评论快报》127, 110502 (2021). [49] X.-M. Zhang、Z. Wei、R. Asad、X.-C. Yang 和 X. Wang, *When does reinforcement learning stand out in quantum control? a comparative study on state preparation* **5**, 85 2019, npj Quantum Inf.（）。[50] C. Gerry 和 P. Knight, *Introductory Quantum Optics*（剑桥大学出版社，2004）。[51] J.-N. Zhang、I. n. Arrazola、J. Casanova、L. Lamata、K. Kim 和 E. Solano, *Probabilistic eigensolver with a trapped-ion quantum processor*, 《物理评论A》101, 052333 (2020). [52] Q. Liu、K. Ziegler、D. A. Kessler 和 E. Barkai, *Driving quantum systems that perform conditional measurements* **4**, 023129 2022, 《物理评论研究》（）。[53] D. B. R. Dasari、S. Yang、A. Chakrabarti、A. Fin- kler、G. Kurizki 和 J. Wrachtrup, *Anti-zeno purification of spin baths by quantum probe measurements*, 《自然·通讯》13, 7527 (2022). [54] T. Nakajima、A. Noiri、J. Yoneda、M. R. Delbecq、P. Stano、T. Otsuka、K. Takeda、S. Amaha、G. Allison、K. Kawasaki、A. Ludwig、A. D. Wieck、D. Loss 和 S. Tarucha, *Quantum non-demolition measurement of an electron spin qubit* **14**, 555 2019, Nat. Nanotechnol.（）。[55] V. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras* 2003（剑桥大学出版社，剑桥，）。

[56]N. Heess、D. TB、S. Sriram、J. Lemmon、J. Merel、G. Wayne、Y. Tassa、T. Erez、Z. Wang、S. Ali Es- lami 和 D. Riedmiller，M. Silver，*Emergence of locomotion behaviours in rich environments*，arXiv，1707.02286 (2017)。[57] E. R. MacQuarrie、M. Otten、S. K. Gray 和 G. D. Fuchs，*Cooling a mechanical resonator with nitrogen-vacancy centres using a room temperature excited state spin–strain interaction* **8**，14358 2017 ，《自然·通讯》 () 。[58] J. Chan、T. P. M. Alegre、A. H. Safavi-Naeini、J. T. Hill、A. Krause、S. Gr¨oblacher、M. Aspelmeyer 和 O. Painter，*Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state* **478**，89 2011 ，《自然》 ()。[59] L. Ding、C. Baker、P. Senellart、A. Lemaitre、S. Ducci、G. Leo 和 I. Favero，*Wavelength-sized gaas optomechanical resonators with gigahertz frequency*，《应用物理快报》 **98**，113108 (2011)。[60] J.-s. Yan 和 J. Jing，*Simultaneous cooling by measuring one ancillary system* **105**，052607 2022 ，《物理评论A》 ()。