arXiv:2301.01892v2 [math.DG] 7 Mar 2023

关于嵌入于单位三维球中的零亏格自由边界极小曲面的面积

PETER MCGRATH 和 JIAHUA ZOU

Abstract. 我们证明，嵌入于单位三维球中的每个非平坦亏格零自由边界极小曲面的面积，小于其在 $\mathbb{S}^2$上的径向投影的面积。该不等式渐近地达到最优；我们还证明，任何使该不等式取等的曲面序列都会弱收敛至 $\mathbb{S}^2$，无论作为流还是作为变分流。

1. Introduction

背景与主要结果。

设 M 是一个边界非空的紧黎曼流形。若极小浸入 $\varphi : \Sigma \to M$ 沿着 $\partial\Sigma$与 ∂M 正交相交，则称其为自由边界极小曲面。对于保持 ∂M 作为一个集合不变的 M 的变形，这类曲面是面积临界的。

当 M 是欧几里得单位球 $\mathbb{B}^n$ 时，自由边界极小曲面这一类具有格外丰富的几何性质。Fraser-Schoen [8] 证明了自由边界极小 $\Sigma \subset \mathbb{B}^n$的面积下界是锐的 $|\Sigma| \geq \pi$ ——等号成立当且仅当 Σ 是赤道圆盘（另见 [2]）——而 Fraser-Li 则证明了以下面积上界：

命题 1.1（Fraser-Li [7, 命题 3.4]）。若 $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ 是一个嵌入的自由边界极小曲面，其亏格为 γ，且有 k 个边界分支，则

$$|\Sigma| \leq \min\left\{2(\gamma + k)\pi, 8\pi \left\lfloor \frac{\gamma + 3}{2} \right\rfloor\right\}. \tag{1.2}$$

(1.2) 中的界并非最优，而本文的一个目的就是在亏格 γ 为零时证明一个锐的面积上界。

近期的一些令人惊讶的进展中，若干作者 [11, 17, 18] 构造了嵌入于 $\mathbb{B}^3$ 中的一列零亏格自由边界极小曲面，并且这列曲面在变分流的意义下收敛到正曲率边界 $\partial\mathbb{B}^3 = \mathbb{S}^2$ 。特别地，这些曲面的面积趋于 4π。

作为以下更强结果的推论，可知 4π 实际上是最优上界：

定理 1.3。设 $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ 是一个零属且至少有两个边界分支的嵌入的自由边界极小曲面。那么

$$|\Sigma| < |\Omega|,$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ 是 Σ 到 $\mathbb{S}^2$ 的径向投影。

由于唯一的自由边界极小圆盘就是全测地赤道 [22], ，因此可立即得到以下最优面积界：

推论 1.4. 每个嵌入单位三维球中的亏格零自由边界极小曲面的面积都严格小于 4π。

来自 [11, 17, 18] 的曲面序列弱收敛至球面，这表明定理 1.3 中的不等式是渐近锐利的。我们的第二个主要结果证实，只有通过这种弱收敛方式才能使该不等式取等：

定理 1.5. 对每个 $n \in \mathbb{N}$，设 $\Sigma_n \subset \mathbb{B}^3$ 是一个嵌入的零属自由边界极小曲面，且至少有两个边界分支，其径向投影为 $\Omega_n \subset \mathbb{S}^2$。若 $|\Omega_n| - |\Sigma_n| \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时，则 $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 作为变分流和流收敛至 $\mathbb{S}^2$。

注 1.6. 关于定理 1.3 和定理 1.5，我们指出如下几点：

- 嵌入性至关重要：在 $\mathbb{B}^3$ 中存在面积 [6, 16] 任意大的浸入自由边界极小环带。
- 根据 [7, 定理 1.2], , 没有任何满足 1.3 中等式的曲面序列，其边界分支数有界。
- 将 $\mathbb{B}^3$ 替换为圆三维球面 $\mathbb{S}^3$ 中的半球后，类似于 1.3 的结果并不成立：考察 $\mathbb{S}^3$中的赤道二维球面 [13, 14] 的倍增曲面，并应用面积展开 [15, 定理 A(v)] ，即可看出这一点。

一般框架。

在 $\mathbb{B}^n$ 中，自由边界极小曲面理论与 Steklov 特征值问题的谱几何密切交织。对于紧曲面 Σ 上的度量，若该度量使 $\sigma_1(\Sigma)|\partial\Sigma|$达到最大值，其中 $\sigma_1(\Sigma)$为第一 Steklov 特征值，则该度量 [9] 作为 $\mathbb{B}^n$中自由边界极小曲面的诱导度量出现。上文提到的 [11, 18] 中的自由边界极小曲面正是以这种方式出现的，并且这些曲面使 Kokarev 上界 [19]取等。

$$\sigma_1(\Sigma)|\partial\Sigma| < 8\pi, \tag{1.7}$$

适用于任意带边界的紧致零属曲面。

另一方面，若 Σ 也是自由边界极小曲面，则对位置向量场 $V(x) = x$ 应用散度定理可得

$$2|\Sigma| = \int_\Sigma \mathrm{div}_\Sigma V = \int_{\partial\Sigma} \langle V, x\rangle = |\partial\Sigma|. \tag{1.8}$$

结合 (1.7) 和 (1.8) 可知，Fraser-Li [7] 提出的以下著名猜想蕴含推论 1.4：

猜想 1.9. 设 Σ 是欧几里得单位球 $\mathbb{B}^n$中的一个恰当嵌入的自由边界极小超曲面。则 $\sigma_1(\Sigma) = 1$。

猜想 1.9 是丘成桐特征值猜想的一种变体 [26], ，该猜想断言，球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中任意嵌入的极小超曲面的第一拉普拉斯特征值为 n。猜想 1.9 除推论 1.4 外，还蕴含着深远的结果，包括将界（1.2）提高 2 倍，以及刻画 [10] 临界悬链面为 $\mathbb{B}^3$中唯一的嵌入自由边界极小环带。本文的另一个目的，是通过证明推论 1.4，为猜想 1.9 的正确性提供进一步的证据。

策略概述与主要思路。

定理 1.3 的证明受到 Harvey-Lawson 关于标定几何的开创性工作的启发。他们证明了 [12, 定理 4.9] ：如果一个定向黎曼流形由极小超曲面构成叶状分解，那么每个叶在其同调类中都是面积极小的。

为证明定理 1.3，设 $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ 是一个自由边界极小曲面，并考虑锥 $\mathcal{C}_\Sigma = \{t\Sigma : \ t \in (0,\infty) \ p \in \Sigma\} \subset \mathbb{R}^3$。虽然一般而言这并不成立，但若 Σ 也是嵌入的且为零属，则利用二分性质 [21] 的精细节点域论证表明， Σ 的膨胀像$t\Sigma$实际上构成锥 $\mathcal{C}_\Sigma$ 的叶状分解。由于这些叶片都是极小曲面，上述标定结果表明 Σ 在 $\mathcal{C}_\Sigma$ 中是面积极小的。特别地，$|\Sigma| < |\Omega|$ ，因为径向投影 Ω 位于 $\mathcal{C}_\Sigma$ 中，且 $\partial\Omega = \partial\Sigma$。

上述节点域论证改编自 Fraser-Schoen 的命题 8.1] 中的论证，也与 Brendle 对圆球面特征的论证相似：圆球面是平均曲率流下唯一紧致嵌入的零属自收缩子[3] 。

定理 1.5 的证明以“倾斜超额”恒等式为出发点

$$|\Omega| - |\Sigma| = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nu \circ \pi^{-1} - \nu_{\mathbb{S}^2}|^2, \tag{1.10}$$

该恒等式对定理 1.3 中的 Σ 和 Ω 有效，其中 $\pi : \Sigma \to \Omega \subset \mathbb{S}^2$ 是径向投影，而 ν 和 $\nu_{\mathbb{S}^2}$ 分别是 Σ 和 $\mathbb{S}^2$ 的外法向量。(1.10) 的右端与引理 8.13] 中的倾斜超额量 [1，惊人地相似；该量在证明 Allard 著名的正则性定理 [1] 中发挥着重要作用。

若 Σ_n 是定理 1.5 中所述的一列曲面，我们首先将倾斜超额恒等式 (1.10) 与径向图性质结合起来，并利用 Σ_n 在其锥 $\mathcal{C}_{\Sigma_N}$ 中使面积取极小这一事实，得出 Σ_n 与其径向投影 $\Omega_n \subset \mathbb{S}^2$ 之间的豪斯多夫距离在 $n \to \infty$ 时趋于零。

接下来，我们考虑与曲面Σ_n相关联的可求 rectifiable 流 T_n 。根据 Federer 的标准紧性结果 [5, 4.2.17] ， T_n 存在一个子列收敛到可求 rectifiable 流 T。由于 Σ_n 与 Ω_n 之间的豪斯多夫距离趋于零，因此 T 支撑在 $\mathbb{S}^2$中。利用已经确立的收敛性质，并结合极小性和自由边界条件，我们能够证明$\partial T = 0$。于是，由常值定理 [5, 4.1.31] 可知，流 T 可表示为在 $\mathbb{S}^2$上的积分，并带有某个整数重数。利用径向图性质和定理 1.3，我们论证该重数必为一，从而得到 $\Sigma_n \to \mathbb{S}^2$ 在流意义下收敛。

最后，我们利用 (1.10) 和流意义下的收敛，完成论证，证明$\Sigma_n \to \mathbb{S}^2$ 作为变分流形收敛。

致谢。

我们感谢 Daniel Stern 的有益交流，感谢 Nikolaos Kapouleas 多年来的支持与指导，也感谢 Joseph Hoisington 指出了本文早期版本中的一个错误。此外，我们还要感谢 Misha

Karpukhin 鼓励我们证明定理 1.5，并与我们分享了该定理证明的大致提纲。

2. Proof of Theorem 1.3

我们需要用到 [20] 中的以下结果。为使本文自成一体，我们简要给出证明；如需更多细节，请参阅 [10, 命题 8.1] 和 [24, 引理 4.2]。

引理 2.1（径向图）。设 $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ 是一个零属且至少有两个边界分支的嵌入的自由边界极小曲面。那么：

(i) Σ 是一个径向图，即 $0 \notin \Sigma$，且从 0 出发的每条射线与 Σ 至多横截相交一次；(ii) $\partial\Sigma$ 的每个分支都是 $\mathbb{S}^2$ 中的一条凸曲线。

证明。根据二分性质 [21], ，每个二维线性子空间都将 Σ 恰好分成两部分。因此，这样的子空间不会与 Σ 的内部相切；否则，交集将包含至少两条在切触点相交的弧，并且由于 Σ 是零属的，会将 Σ 分成两部分以上。由此，$0 \notin \Sigma$，且径向投影 $\pi : \Sigma \to \Omega$ 的微分 $d\pi_p$ 对每个 $p \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ 都是单射。因此，根据反函数定理， π 是局部微分同胚。

再次利用二分性质以及 Σ 具有零属这一事实，类似于上述论证的结点区域论证表明，一个二维子空间若与 $\partial\Sigma$ 的某个分支横截相交，则恰好交于两点，从而得到结论 (ii)。

为证明 π 是整体同胚，令 $\varphi : M \to \Sigma$ 为参数化浸入，其中曲面 M 是 $\mathbb{S}^2$的子集。每个分支 $S \subset \partial M$ 都围成一个圆盘 $D_S \subset \mathbb{S}^2 \setminus M$，而前面的论证表明， $\varphi(S)$围成一个凸圆盘 $D_{\varphi(S)} \subset \mathbb{S}^2$。因此，可以将 φ 延拓为局部同胚 $\Phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$，并使其对 ∂M的每个分支 S 均满足 $\Phi(D_S) = D_{\varphi(S)}$。由于 $\mathbb{S}^2$ 是单连通的，局部同胚 Φ 实际上是整体同胚，证明完毕。□

定理 2.2. 设 $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ 是一个零属的嵌入的自由边界极小曲面。那么 Σ 在其锥内是面积极小的

$$\mathcal{C}_\Sigma = \{tp : t \in (0, \infty), p \in \Sigma\} \subset \mathbb{R}^3.$$

证明. 若 Σ 是一个圆盘，则由 [22] 可知它是全测地的，因此定理的结论显然成立。因此，我们可以假设 Σ 至少有两个边界分支。

根据径向图性质， $\mathcal{C}_\Sigma$ 由 Σ的膨胀像 $t\Sigma$构成叶状分解。令ν 为 Σ上的单位外法向量场，并将 ν 延拓为 $\mathcal{C}_\Sigma$ 上的单位光滑向量场（名称不变），要求 ν 垂直于每个叶 $t\Sigma$。

对于任意 $p \in \mathcal{C}_\Sigma$，令 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为 $T_p\mathbb{R}^3$ 的一个标准正交标架，满足 $e_3 = \nu$。于是

$$\operatorname{div}\nu = \sum_{i=1}^{2}\langle D_{e_i}\nu, e_i\rangle + \langle D_\nu\nu, \nu\rangle = H_{t\Sigma} + 0 = 0,$$

其中我们利用了 $t\Sigma$的极小性以及 $\langle D_\nu\nu, \nu\rangle = \frac{1}{2}\nu\langle\nu, \nu\rangle = 0$，因为 ν 是一个单位向量场。

令 ω 为 $\mathcal{C}_\Sigma$上的体积形式。则 $\varphi := i_\nu\omega$ 上的 1-形式 $\mathcal{C}_\Sigma$ 是闭的，因为 $d\varphi = \operatorname{div}\nu\,\omega = 0$，所以斯托克斯定理表明，对于任意与 Σ同调的定向曲面 $\Sigma' \subset \mathcal{C}_\Sigma$，

$$|\Sigma| = \int_\Sigma \varphi = \int_{\Sigma'} \varphi = \int_{\Sigma'} \langle \nu, \nu_{\Sigma'}\rangle \le |\Sigma'|. \tag{2.3}$$

□

作为推论，我们得到以下结果，该结果立即推出定理 1.3：

推论 2.4（倾斜超额恒等式）。对于定理 1.3 中的 Σ 和 Ω，

$$|\Omega| - |\Sigma| = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nu \circ \pi^{-1} - \nu_{\mathbb{S}^2}|^2, \tag{2.5}$$

其中 $\pi : \Sigma \to \Omega$ 是径向投影，而 ν 和 $\nu_{\mathbb{S}^2}$ 分别是 Σ 和 Ω 的法向量。

证明。由于 Σ 是自由边界极小曲面，$\partial\Sigma = \partial\Omega$。此外，径向图性质意味着 $\Omega \subset \mathcal{C}_\Sigma$。现在令 Ω 代替 Σ'，将 (2.3) 应用于此处，再加上并减去$|\Omega| = \int_\Omega 1$，并注意到 $1 - \langle\nu, \nu_{\mathbb{S}^2}\rangle = \frac{1}{2}|\nu - \nu_{\mathbb{S}^2}|^2$，即可得出结论。□

注 2.6。定理 1.3 也可以直接由径向图性质证明：将 Σ 参数化为其在 Ω 上的投影图形 $\subset \mathbb{S}^2$，下面简述证明细节。设 $u \in C^2(\Omega)$ 为满足 $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ 的函数，其中 $X(p) = p - u(p)p$ 参数化了 Σ。

根据引理 A.1，$X(\Omega) = \Sigma$ 的平均曲率满足

$$0 = (1-u)H = \operatorname{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{(1-u)^2 + |\nabla u|^2}} + \frac{2(1-u)}{\sqrt{(1-u)^2 + |\nabla u|^2}}. \tag{2.7}$$

在 Ω_ε 上对 (2.7) 积分：$= \{p \in \Omega : dist(p, \partial\Omega) > \varepsilon\}$，利用散度定理，并将 (2.7) 中最后一项的上界估为 2，可得

$$-\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\langle\nabla u, \nu_\varepsilon\rangle}{\sqrt{(1-u)^2 + |\nabla u|^2}} < 2|\Omega_\varepsilon|,$$

其中 ν_ε 是 Ω_ε 沿 $\partial\Omega_\varepsilon$ 的外指单位法向量。但 $u \searrow 0$ 和 $\nu_\varepsilon = -\nabla u/|\nabla u| + o(1)$ 当 $\varepsilon \searrow 0$ 时成立，因此取极限可得 $|\partial\Sigma| < 2|\Omega|$。结论现在可由使用 (1.8) 中的 $|\partial\Sigma| = 2|\Sigma|$ 得出。

3. Proof of Theorem 1.5

在本节中，设 $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{B}^3$ 中一列嵌入的自由边界极小曲面，每个曲面均为零属且至少有两个边界分支。对于 Σ_n，记 $\pi_n:\Sigma_n\to\mathbb{S}^2$ 为其径向投影映射，$\iota_n:\Sigma_n\to\mathbb{R}^3$ 为其包含映射，ν_n 为其外指单位法向量，da_n 为其面积形式，并令 $\Omega_n=\pi_n(\Sigma_n)$。与定理 1.5 中一样，我们假设

$$|\Omega_n|-|\Sigma_n|\to 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty. \tag{3.1}$$

引理 3.2. 设 $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 是一个不包含原点的嵌入曲面。对于任意 $p\in\Sigma$，径向投影 $\pi:\Sigma\to\mathbb{S}^2$ 的微分满足

$$d\pi_p=\frac{1}{|p|}\Pi_{T_{\pi(p)}\mathbb{S}^2}, \quad \det(d\pi_p)=\frac{\langle\nu(p),\nu_{\mathbb{S}^2}\circ\pi(p)\rangle}{|p|^2}, \tag{3.3}$$

其中 $\Pi_{T_{\pi(p)}\mathbb{S}^2}$ 是到 $T_{\pi(p)}\mathbb{S}^2$ 的正交投影。

证明。直接计算即可。 □

引理 3.4. 豪斯多夫距离 $d_{\mathcal{H}}(\Sigma_n,\Omega_n)$ 趋于 0，当 $n\to\infty$ 时。

证明。固定一个小数 $\delta>0$。由定理 2.2，Σ_n 在其锥$\mathcal{C}_{\Sigma_n}$中是面积极小的，因此是稳定的；于是，曲率估计 [23] 表明，每个 Σ_n 的第二基本形式在 $B_{1-\delta}$ 上有界：$=\{|x|<1-\delta\}$。由于 $|\Sigma_n|<4\pi$，由 [4, 命题 7.14] 可知，Σ_n 的一个子列光滑收敛到一个光滑极小曲面 Σ，其重数可能大于一。

为了完成引理的证明，只需证明 Σ 为空。反证，假设 Σ 非空。

利用（3.3）将恒等式（2.5）拉回到 Σ_n 上，可得

$$|\Omega_n|-|\Sigma_n|=\frac{1}{2}\int_{\Sigma_n}\frac{\langle\nu_n,\nu_{\mathbb{S}^2}\circ\pi_n\rangle}{|p|^2}|\nu_n-\nu_{\mathbb{S}^2}\circ\pi_n|^2. \tag{3.5}$$

令 $n\to\infty$取极限，可知要么 $\langle\nu_\Sigma$，要么 $\nu_{\mathbb{S}^2}\circ\pi\rangle\equiv 1$ 或$\langle\nu_\Sigma$在 Σ上 $\nu_{\mathbb{S}^2}\circ\pi\rangle\equiv 0$。前一种情况意味着 Σ 包含在一个球面中，这与其极小性矛盾。另一方面，后一种情况意味着极小曲面 Σ 是一个锥。根据 [25, 命题 6.1.1], , 其链接在 $\mathbb{S}^2$ 中是极小的，因此是一个大圆。所以 Σ是一个赤道圆盘 $\mathbb{D}\subset\mathbb{B}^3$。

令 $k\in\mathbb{N}$ 为收敛 $\Sigma_n\to\Sigma$的重数。我们首先证明 $k\in\{1,2\}$，论证方法与 [10, 定理 8.2]中相同：若 $k\geq 3$，则与 $\mathbb{D}$ 正交的一维子空间对于所有足够大的 n，都会与 Σ_n 至少相交于三点。因此，对应的两条射线中至少有一条会与 Σ_n 至少相交于两点，这与径向图性质矛盾。

为排除 $k=1$ 和 $k=2$这两种情况，我们通过估计锥内外相应的面积，导出与 (3.1) 矛盾的结论

$$\mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}=\{tp:t\in(0,\infty),p\in\Sigma_n\cap B_{1-\delta}\}.$$

首先假设 $k = 1$。根据径向图性质， $\mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}$ 中的每条射线都与 Σ_n 恰好相交一次。于是 $\Sigma_n \cap \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}$ 以重数一光滑且一致地收敛到 $\mathbb{D} \cap B_{1-\delta}$。因此，对所有充分大的 n,

$$|\Sigma_n| = |\Sigma_n \cap \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}| + |\Sigma_n \setminus \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}| < \pi + |\Sigma_n \setminus \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}| + o(1). \tag{3.6}$$

现在我们估计 $|\Omega_n|$。根据径向图性质， $\mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}$ 中的每条射线都与 Σ_n 恰好相交一次，因此，对于某个 $C > 0$，有 $|\Omega_n \cap \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}| > 2\pi - C\delta$。为估计 $|\Omega \setminus \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}|$，注意到 $\Sigma_n \setminus \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}$、$\Omega_n \setminus \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}$ 和 $\partial\mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}$在 $\mathcal{C}_{\Sigma_n} \setminus B_{1-\delta}$中围成一个区域。根据定理 2.2，由于 Σ_n 在 $\mathcal{C}_{\Sigma_n}$ 中是面积极小的,

$$|\Sigma_n \setminus \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}| < |\Omega_n \setminus \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}| + C\delta,$$

其中我们利用了 $\partial\mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}$ 在 $B_{1-\delta}$ 之外的部分的面积小于 $C\delta$这一事实。

综合以上结果，我们得到

$$|\Omega_n| > 2\pi + |\Sigma \setminus \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}| - C\delta. \tag{3.7}$$

结合 (3.6) 和 (3.7)，这与 (3.1) 矛盾。

现在假设 $k = 2$。我们以与 $k = 1$ 情形非常相似的方式导出矛盾。通过将 n 取得足够大， $\Sigma_n \cap \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}$ 现在是一对具有任意小 C^1 范数的图。像之前一样论证，我们有

$$|\Sigma_n| < 2\pi + |\Sigma_n \setminus \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}| + o(1),$$
$$|\Omega_n| > 4\pi + |\Sigma_n \setminus \mathcal{C}^{1-\delta}_{\Sigma_n}| - C\delta,$$

这共同与假设 $|\Omega_n| - |\Sigma_n| \to 0$ 相矛盾。 □

令 T_n 表示与 Σ_n 相关联的流。由定理 1.3 和 (1.8),

$$\mathbf{M}(T_n) < 4\pi, \quad \mathbf{M}(\partial T_n) = 2\mathbf{M}(T_n) < 8\pi,$$

因此，根据整流的紧致性定理， $[5, 4.2.17]$， T_n 的一个子列（我们不妨取原序列）收敛到一个整流 T。令 T'_n 表示与 Ω_n 相关联的流。

命题 3.8（ T 的性质）。以下性质成立。

(i) $\operatorname{spt} T \subset \mathbb{S}^2$。(ii) 对 $\mathcal{H}^2$-几乎处处的 $p \in \operatorname{spt} T$， $\operatorname{Tan}^2(\operatorname{spt} T, p) = T_p\mathbb{S}^2$。(iii) 当 $n \to \infty$ 时， $T_n - T'_n \to 0$。(iv) $\partial T = 0$。(v) $T = (\mathcal{H}^2 \llcorner \mathbb{S}^2) \wedge \zeta$，其中 ζ 是为 $\mathbb{S}^2$ 定向的标准二向量场。换言之， T 可表示为在 $\mathbb{S}^2$ 上的积分。

证明。结论 (i) 由引理 3.4 得出，结论 (ii) 则由 (i) 与 $[5, 3.2.18, 3.2.19]$ 联合得出。

对于 (iii)，固定一个 2-形式 $\varphi \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}^3)$。在 $\mathbb{R}^3$ 中 $\mathbb{S}^2$ 的一个邻域内，容易看出存在一个光滑函数 f 和一个光滑1-形式 ξ，使得

$$\varphi = f\,\pi^*\omega + dr \wedge \xi,$$

其中 ω 是 $\mathbb{S}^2$ 上的面积形式，而 r 是到原点的距离。

注意， $\iota_n^*\pi^*\omega = \pi_n^*\omega = \det(d\pi_n)da_n$，因此

$$T_n(f\pi^*\omega) = \int_{\Sigma_n} f\pi^*\omega = \int_{\Sigma_n} f\det(d\pi_n)da_n = \int_{\Omega_n} f\circ\pi_n^{-1}\omega$$

因此

$$(T_n - T_n')(f\pi^*\omega) = \int_{\Omega_n}(f\circ\pi_n^{-1} - f)\omega.$$

由此以及引理 3.4 可得 $(T_n - T_n')(f\pi^*\omega) \to 0$。

接下来，由于 $T_n \to T$，(i) 和 (ii) 两项意味着

$$\lim_{n\to\infty} T_n(dr\wedge\xi) = T(dr\wedge\xi) = T_n'(dr\wedge\xi) = 0,$$

这里用到了 $dr|_{\mathbb{S}^2} = 0$。结合前述结果与引理 3.4，可得 $(T_n - T_n')\varphi \to 0$，从而完成 (iii) 的证明。

对于 (iv)，固定一个 1-形式 $\xi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^3)$。对于任意满足 $\iota^*\varphi = 0$ 的 $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^3)$，其中 $\iota\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ 是包含映射， $0 = d(\iota^*\varphi) = \iota^* d\varphi$，因此 (i)-(ii) 意味着

$$T\,d\xi = T\,d(\xi+\varphi).$$

因此，我们可以假设在 $\mathbb{R}^3$ 中 $\mathbb{S}^2$ 的一个邻域上， $\xi = \pi^*(i_X\omega)$，其中 π : $\mathbb{R}^3\setminus\{0\} \to \mathbb{S}^3$ 是径向投影， X 是 $\mathbb{S}^2$ 上的向量场，而 ω 是 $\mathbb{S}^2$ 上的面积形式。我们有

$$d\xi = d(\pi^* i_X\omega) = \pi^*(d(i_X\omega)) = \pi^*(\mathrm{div}_{\mathbb{S}^2}X\,\omega).$$

由此可得

$$\iota_n^* d\xi = (\mathrm{div}_{\mathbb{S}^2}X)\circ\pi_n\det(d\pi_n)da_n.$$

将 X 以 π^* 延拓到 $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$，使得 $X = X\circ\pi$，最终得到

$$\iota_n^* d\xi = (\mathrm{div}_{\mathbb{R}^3}X)\det(d\pi_n)da_n.$$

在 Σ_n 上积分，并利用 $\mathrm{div}_{\mathbb{R}^3}X = \mathrm{div}_{\Sigma_n}X + \langle D_{\nu_n}X,\ \nu_n\rangle$，可得 $T_n\,d\xi = \int_{\Sigma_n}\iota_n^* d\xi = (I) + (II) + (III)$，其中

$$(I) = \int_{\Sigma_n}\mathrm{div}_{\Sigma_n}X(\det(d\pi_n) - 1)da_n, \quad (II) = \int_{\Sigma_n}\mathrm{div}_{\Sigma_n}X da_n,$$

$$(III) = \int_{\Sigma_n}\langle D_{\nu_n}X, \nu_n\rangle\det(d\pi_n)da_n.$$

由散度定理、 Σ_n 的极小性、自由边界条件以及 $X|_{\mathbb{S}^2}$ 与 $\mathbb{S}^2$ 相切这一事实，可得

$$(II) = \int_{\Sigma_n}\mathrm{div}_{\Sigma_n}X da_n = \int_{\partial\Sigma_n}\langle X, x\rangle da_n = 0.$$

假设 $|\Omega_n| - |\Sigma_n| \to 0$，结合 (2.5)，可得

$$|\nu_n\circ\pi_n^{-1} - \nu_{\mathbb{S}^2}|\chi_{\Omega_n} \to 0 \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{S}^2),$$

因此，沿某个子列几乎处处收敛到零。结合引理 3.2 和引理 3.4，可得 $(1-\det(d\pi_n^{-1}))\chi_{\Omega_n} \to 0$沿某个子列几乎处处成立。于是，通过变量替换将积分写在 Ω_n 上，并利用控制收敛定理，得到 $|(I)| \to 0$。

沿用同样的思路，并利用 $X = X\circ\pi$，可知当 $n\to\infty$ 时，$|(III)|\to 0$。因此 $0=\lim T_n\, d\xi_n = T d\xi = \partial T\,\xi$，从而完成 (iv) 的证明。

由 (v)、条目 (iv) 和常值定理 [5, 4.1.31] 可知

$$T = k(\mathcal{H}^2\llcorner\mathbb{S}^2)\wedge\zeta$$

对某个 $k\in\mathbb{R}$，其中 ζ 是定向 $\mathbb{S}^2$ 的标准单位二向量场；由于 T 是一个整流，因此还可推出 $k\in\mathbb{Z}$。

结合质量的下半连续性和定理 1.3，

$$\mathbf{M}(T)\le \liminf \mathbf{M}(T_n)\le 4\pi,$$

因此 $|k|\le 1$。另一方面，条目 (iii) 以及 $T_n\to T$ 这一事实意味着 $T_n'\to T$。令 $\omega\in\mathcal{D}^2(\mathbb{R}^3)$ 为一个在 $\mathbb{S}^2$ 上限制为面积形式的 2-形式。由于 T 和 T_n' 都支撑于 $\mathbb{S}^2$，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}(T_n') = \lim_{n\to\infty} T_n'\omega = T\omega = \mathbf{M}(T). \tag{3.9}$$

但根据定理 1.3，$\mathbf{M}(T_n')\ge\mathbf{M}(T_n)\ge\pi$，且由定理 5.4]，可知 [8, ，因此 $\mathbf{M}(T)\ge\pi$。所以 $k=1$，证明完毕。□

定理 1.5 的证明。命题 3.8(v) 已证明 Σ_n 在流的意义下收敛到 $\mathbb{S}^2$，因此只需证明变分流形收敛。

我们必须证明，对任意 $\Phi\in C(\overline{\mathbb{B}^3}\times\mathbb{S}^2)$，

$$\left|\int_{\Sigma_n}\Phi(x,\nu_n)-\int_{\mathbb{S}^2}\Phi(x,\nu_{\mathbb{S}^2})\right|\to 0\quad\text{as}\quad n\to\infty. \tag{3.10}$$

固定这样一个 Φ。我们有

$$\int_{\Sigma_n}\Phi(x,\nu_n)=\int_{\Omega_n}\det(d\pi_n^{-1})\Phi(\pi_n^{-1}(x),\nu_n\circ\pi_n^{-1}).$$

因此，$\int_{\Sigma_n}\Phi(x,\nu_n)-\int_{\mathbb{S}^2}\Phi(x,\nu_{\mathbb{S}^2}) = (I)+(II)+(III)+(IV)$，其中

$$\begin{aligned}
(I) &= \int_{\Omega_n}\left(\det(d\pi_n^{-1})-1\right)\Phi(\pi_n^{-1}(x),\nu_n\circ\pi_n^{-1}),\\
(II) &= \int_{\Omega_n}\Phi(\pi_n^{-1}(x),\nu_n\circ\pi_n^{-1})-\Phi(x,\nu_n\circ\pi_n^{-1}),\\
(III) &= \int_{\Omega_n}\Phi(x,\nu_n\circ\pi_n^{-1})-\Phi(x,\nu_{\mathbb{S}^2}),\\
(IV) &= \int_{\Omega_n}\Phi(x,\nu_{\mathbb{S}^2})-\int_{\mathbb{S}^2}\Phi(x,\nu_{\mathbb{S}^2}).
\end{aligned}$$

假设 $|\Omega_n|-|\Sigma_n|\to 0$ 与 (2.5) 一起推出

$$|\nu_n\circ\pi_n^{-1}-\nu_{\mathbb{S}^2}|\chi_{\Omega_n}\to 0\quad\text{in}\quad L^2(\mathbb{S}^2), \tag{3.11}$$

因此沿某个子列几乎处处收敛到零。结合引理 3.3 和引理 3.4 可知，$(\det(d\pi_n^{-1})-1)\chi_{\Omega_n}\to 0$沿某个子列几乎处处成立。因此，由控制收敛定理，$|(I)|\to 0$。

第二项和第三项的处理方法类似：由引理 3.4 可知，在 n 中 $\pi_n^{-1}-\mathrm{Id}_{\Omega_n}\to 0$ 一致成立，因此 $|(II)|\to 0$。接下来，(3.11) 意味着

沿某个子列几乎处处有 $\nu_n \circ \pi_n^{-1}\chi_{\Omega_n} \to \nu_{\mathbb{S}^2}\chi_{\Omega_n}$，因此根据控制收敛定理，$|(III)| \to 0$。

最后，我们估计

$$|(IV)| \leq \|\Phi\|_{L^\infty}|\mathbb{S}^2 \setminus \Omega_n|.$$

由命题 3.8(v) 和 (3.9) 可知 $|\Omega_n| \to |\mathbb{S}^2|$，因此 $|(IV)| \to 0$，证明完成。□

Appendix A. Mean curvature for radial graphs

引理 A.1. 若 $\Omega \subset \mathbb{S}^2$ 是一个区域，$u \in C^2(\Omega)$，且映射 $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ 定义为 $X(p) = p - u(p)p$ 是一个浸入，则其平均曲率满足

$$(1-u)H = \operatorname{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{(1-u)^2+|\nabla u|^2}} + \frac{2(1-u)}{\sqrt{(1-u)^2+|\nabla u|^2}}.$$

证明。固定 $p \in \Omega$，选取以 p 为中心的 Ω 的法坐标系，并用下标"1, 2"表示关于这些坐标的偏导数。特别地，$\{p, p_1, p_2\}$ 是 $T_p\mathbb{R}^3$ 的标准正交标架。

对于 $i = 1, 2$，我们有 $X_i = (1-u)p_i - u_i p$，因此 ν 到 Σ 的法向量为

$$\nu = \frac{(1-u)p + \nabla u}{\sqrt{(1-u)^2+|\nabla u|^2}}.$$

Σ 的第一基本形式的系数为

$$E = u_1^2 + (1-u)^2, \quad F = u_1u_2, \quad G = u_2^2 + (1-u)^2,$$

Σ 的第二基本形式的系数为

$$L = \frac{((1-u)+u_{11})(1-u)+2u_1^2}{\sqrt{(1-u)^2+|\nabla u|^2}}, \quad M = \frac{u_{12}(1-u)+2u_1u_2}{\sqrt{(1-u)^2+|\nabla u|^2}},$$
$$N = \frac{((1-u)+u_{22})(1-u)+2u_2^2}{\sqrt{(1-u)^2+|\nabla u|^2}}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
(1-u)H &= (1-u)\frac{EN-2MF+GL}{EG-F^2} \\
&= \frac{(u_1^2+(1-u)^2)u_{22} + (u_2^2+(1-u)^2)u_{11} - 2u_1u_2u_{12}}{((1-u)^2+|\nabla u|^2)^{3/2}} \\
&\quad + \frac{3|\nabla u|^2(1-u)+2(1-u)^3}{((1-u)^2+|\nabla u|^2)^{3/2}} \\
&= \frac{(|\nabla u|^2+(1-u)^2)\Delta u - (u_{11}u_1^2+u_{22}u_2^2+2u_{12}u_1u_2) + |\nabla u|^2(1-u)}{((1-u)^2+|\nabla u|^2)^{3/2}} \\
&\quad + \frac{2(1-u)}{\sqrt{(1-u)^2+|\nabla u|^2}} \\
&= \operatorname{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{(1-u)^2+|\nabla u|^2}} + \frac{2(1-u)}{\sqrt{(1-u)^2+|\nabla u|^2}}.
\end{aligned}$$

□

References

[1] W. K. Allard。变分流形的一阶变分。 *Ann. of Math. (2)* 95 417 491, , : – . 1972
[2] S. Brendle。单位球内极小曲面面积的精确上界。 *Geom. Funct. Anal.* 22 3 621 626, 2012 , ( ): – .
[3] S. Brendle。属为 0 的嵌入自相似收缩子。 *Annals of Mathematics*, 183 2 715 728, 2016 ( ): – .[4] T. H. Colding 和 W. P. Minicozzi, II。 *A course in minimal surfaces*, *Graduate Studies in Mathematics*第 121 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2011 年。[5] H. Federer。 *Geometric measure theory*。数学科学基础丛书，第 153 卷。施普林格纽约出版社，纽约，1969 年。[6] I. Fernandez、L. Hauswirth 和 P. Mira。浸入单位球中的自由边界极小环带。 *arXiv:2208.14998*，2022 年。[7] A. Fraser 和 M. M. C. Li。非负里奇曲率且边界凸的三维流形中带自由边界的嵌入极小曲面空间的紧性。 *J. Differential Geom.*, 96(2):183–200, 2014。[8] A. Fraser 和 R. Schoen。第一 Steklov 特征值、共形几何与极小曲面。 *Adv. Math.*, 226(5):4011–4030, 2011。[9] A. Fraser 和 R. Schoen。极小曲面与特征值问题。载于 *Geometricanalysis, mathematical relativity, and nonlinear partial differential equations*， *Contemp. Math.*第 599 卷，第 105–121 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2013 年。[10] A. Fraser 和 R. Schoen。球内极小曲面的尖锐特征值界。*Invent. Math.*, 203(3):823–890, 2016。[11] A. Girouard 和 J. Lagac´e。通过流形上的均匀化构造较大的 Steklov 特征值。 *Invent. Math.*, 226(3):1011–1056, 2021。[12] R. Harvey 和 H. B. Lawson, Jr. 校准几何。 *Acta Math.* 148 47 157, , : – . 1982
[13] N. Kapouleas。通过加倍赤道二维球面构造圆三维球面中的极小曲面，I。 *J. Differential Geom.*, 106(3):393–449, 2017。[14] N. Kapouleas 和 P. McGrath。通过加倍赤道二维球面构造圆三维球面中的极小曲面，II。 *Comm. Pure Appl. Math.*, 72(10):2121–2195, 2019。[15] N. Kapouleas 和 P. McGrath。线性化加倍方法的推广，以及通过加倍构造的新极小曲面与自收缩子。 *To appear, Camb. J. Math.*, *arXiv:2001.04240* 2020 , .
[16] N. Kapouleas 和 P. McGrath。浸入单位三维球中的自由边界极小环带。 *arXiv:2212.09680*，2022 年。[17] N. Kapouleas 和 J. Zou。靠近边界的欧几里得三维球中的自由边界极小曲面。 *arXiv:2111.11308*，2021 年。[18] M. Karpukhin 和 D. Stern。从 Steklov 到拉普拉斯算子：具有许多边界分支的自由边界极小曲面。 *arXiv:2109.11029*, 2021 年。[19] G. Kokarev。黎曼曲面上拉普拉斯特征值的变分方面。 *Adv. Math.* 258 191 239, 2014 , : – .
[20] R. Kusner 和 P. McGrath。单位球内嵌入的自由边界极小曲面的 Steklov 特征空间。 *To appear, Amer. J. Math., arXiv:2011.06884*，2021 年。[21] V. Lima 和 A. Menezes。球内自由边界极小曲面的二分性质。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 374(3):1661–1686, 2021。[22] J. C. C. Nitsche。凸体的平稳分割。 *Arch. Rational Mech. Anal.* 89 1 1 19, 1985 , ( ): – .
[23] R. Schoen。三维流形中稳定极小曲面的估计。载于 *Seminar on minimal submanifolds*, *Ann. of Math. Stud.*第 103 卷，第 111–126 页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1983 年。[24] D.-H. Seo。使自由边界极小环带成为临界悬链面的充分对称条件。 *arXiv.2112.11877*，2021 年。

[25] J. Simons。《黎曼流形中的极小子流形》。 *Ann. of Math. (2)*, 88 105, 1968 62: –。
[26] S. T. Yau。《问题部分》。载于
Seminar on Differential Geometry 102 *Ann.*, 第
of Math. Stud. 669 706 1982
卷，页–。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，。(Peter McGrath)
Department of Mathematics, North Carolina State Univer-sity,
Raleigh NC 27695*Email address*: pjmcgrat@ncsu.edu (Jiahua Zou)
Department of Mathematics, Brown University, Providence RI02912
Email address: jiahua zou@brown.edu

-