arXiv:2301.01897v2 [math.RT] 6 Apr 2023

奇点范畴中的非消失性结果

XIAO-WU CHEN、ZHI-WEI LI、XIAOJIN ZHANG、ZHIBING ZHAO*

Abstract. 我们证明，阿贝尔范畴中的近周期对象会在奇点范畴的某些 Hom 群上产生非消失性结果。因此，对于任意整体维数无限的 Artin 代数，其奇点范畴都不存在 silting 子范畴，且相应的微分分次 Leavitt 代数在每个次数上都有非消失的上同调。我们验证了奇点极小代数和最终闭代数的奇异预 silting 猜想。我们得出了微分分次 Leavitt 代数的上同调在 Hom-有限性方面的三分法。

1. Introduction

奇点范畴是整体维数无限的环的一个基本同调不变量。它可以追溯到 [9]，并在几何背景下于 [24] 中被重新发现。它日益受到不同领域学者的关注。

回顾一下，若一个模的高阶 syzygy 与其自身同构，则称其为周期模。这类模在奇点范畴 [25]中发挥着特殊作用。我们提出一个稍微一般化的概念：若一个模的高阶 syzygy 属于该模自身的扩张闭包，则称其为虚周期模；见定义 2.1。一个典型例子是左阿廷环模其 Jacobson根所得的半单商模。

本文的核心结果是定理 2.8，它陈述了以下非消失性质：对于一个虚周期 d 模 M，在奇点范畴中，M 与其第（nd）次悬移 Σ^{nd}（M）之间的 Hom群对所有整数 n 总是不消失。

上述非消失结果有两个推论。第一条指出，按照 [20, 2] 的定义，整体维数无限的左阿廷环的奇点范畴不含 silting 子范畴；见推论 3.3。这加强了 [1, 定理 1], , 并部分支持奇点预倾斜猜想 [14]，进而支持著名的 Auslander-Reiten 猜想 [6]。

我们证明，对于奇异极小 Artin 代数，奇异预倾斜猜想成立，因而 Auslander-Reiten 猜想也成立；见命题 3.4。我们证明，按照 [18], 的意义，奇异预倾斜猜想对最终闭代数成立，其中包括周期代数和 syzygy 有限代数；见命题 3.5 和注 3.6。

第二个推论指出，与具有无限全局维数的 Artin 代数相关联的微分分次 Leavitt代数 [13]在每个次数上都有非消失的上同调；参见命题 3.10。在第4节中，我们利用几乎周期对象刻画奇点范畴的 Hom-有限性。我们对与 Artin 代数相关联的微分分次 Leavitt 代数的上同调得到一个三分法

Date:2023年4月7日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 16E05, 18G80, 16S88。
Key words and phrases. 奇点范畴，周期模，silting 子范畴，奇异预倾斜猜想，Leavitt 代数。

* 通讯作者。xwchen@mail.ustc.edu.cn, zhiweili@jsnu.edu.cn,xjzhang@jsnu.edu.cn, zbzhao@ahu.edu.cn。

；参见命题 4.3。我们提到，关于微分分次 Leavitt 代数的结果类似于 [3] 中关于交换诺特局部环的剩余域的稳定上同调代数的结果。

我们用 Σ 表示任意三角范畴中的悬移函子，并用 dg 表示“微分分次”。关于三角范畴，请参阅 [16]；关于 Artin 代数，请参阅 [7]。

2. Virtually periodic objects

设 $\mathcal{A}$ 是一个有足够多投射对象的阿贝尔范畴。后一个条件是指，对每个对象 M，都存在一个满态射 $P \to M$，其中 P 是投射对象。我们用 $\mathcal{P}$ 表示由所有投射对象构成的全子范畴，并用 $\underline{\mathcal{A}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 对所有经过投射对象的态射取商所得的稳定范畴。

对任意对象 M，M 的第一 syzygy $\Omega(M)$ 定义为任意满足 P 为投射对象的满态射 $P \to M$ 的核。我们指出，$\Omega(M)$ 在稳定范畴 $\underline{\mathcal{A}}$ 中是唯一确定的。用 $\langle M\rangle$ 表示 $\mathcal{A}$ 的最小全子范畴，它包含 $\{M\}\cup\mathcal{P}$，并且对直和项和扩张封闭。扩张封闭条件是指，对任意短正合列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$，若 X、$Z \in \langle M\rangle$ 属于该子范畴，则 Y 必然也属于 $\langle M\rangle$。

设 $d \geq 1$。回顾一下，非投射对象 M 若存在同构 $\Omega^d(M) \simeq M$ in $\underline{\mathcal{A}}$，则称其为 d-周期对象。d-周期对象必然具有无限投射维数。对周期模的研究可追溯至 [4]。值得一提的是，周期模在奇点范畴 [25]中发挥着重要作用。

定义 2.1。设 $d \geq 1$。若对象 M in $\mathcal{A}$ 满足：M 具有无限投射维数，且 $\Omega^d(M)$ 属于 $\langle M\rangle$，则称其为虚拟 d- 周期对象。

我们注意到，d-周期对象也是虚拟 d-周期对象。下面的事实显而易见。

引理 2.2。假设 M 是虚拟 d-周期对象。那么对于任意 $n \geq 1$，M 都是虚拟 (nd)-周期对象。

证明。我们对 n 使用归纳法，并假设 M 是虚拟 (nd)-周期对象。应用马蹄引理以及 $\Omega^{nd}(M) \in \langle M\rangle$这一事实，可推得

$$\Omega^{(n+1)d}(M) = \Omega^d(\Omega^{nd}(M)) \in \langle \Omega^d(M)\rangle \subseteq \langle M\rangle.$$

这里，后一个包含关系用到了 $\Omega^d(M) \in \langle M\rangle$ 这一事实。由此可推知，M 也是几乎 $(n+1)d$-周期的。□

对于左诺特环 Λ，我们用 Λ-mod 表示有限生成左 Λ-模构成的阿贝尔范畴。以下例子为定义 2.1 提供了动机。

例 2.3. 设 Λ 是一个具有无限全局维数的左阿廷环。令 $\Lambda_0 = \Lambda/J$，其中 J 是其雅各布森根。则 Λ_0 在 Λ-mod 中几乎 1-周期。

事实上，Λ_0 的投射维数等于 Λ 的整体维数，因此是无限的。此外，$\Omega(\Lambda_0)$ 显然是由简单模构成的迭代扩张。由此可推知，$\Omega(\Lambda_0) \in \langle\Lambda_0\rangle$。

对于 $\mathcal{A}$ 中的对象 X，我们用 add X 表示包含 X 且对直和项封闭的最小全加性子范畴。

例 2.4. 回顾 [18, 第 3] 节，若存在 $d \geq 1$，以及 add $(M \oplus \Omega(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^{d-1}(M))$ 中的某个对象 X，使得 $\Omega^d(M)$ 与 X 在 $\underline{\mathcal{A}}$ 中同构，则称对象 M （属于 $\mathcal{A}$）是最终闭合的。在这种情况下，对象 $M \oplus \Omega(M) \oplus$
$\cdots \oplus \Omega^{d-1}(M)$ 几乎是 1-周期的。

阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 称为最终闭合的，如果其中任意对象都是最终闭合的。根据 [18, 第 3], 节，左诺特环 Λ 是最终闭合的，当且仅当Λ-模是最终闭合的。

回顾一下，超曲面环具有形式 $S/(x)$，其中 S 是一个正则局部环， x 是一个非零元素。根据 [15, 定理 6.1], ，超曲面环上每个模的高阶 syzygy 都是 2-周期的，因此每个模最终闭合。由此，超曲面环是最终闭合的。回顾一下，域上的有限维代数若具有周期双模分解，则称为周期代数；具体例子见 [8] 。通过类似的推理，我们可以得出，周期代数是最终闭合的。

下文将介绍更多最终闭合环的类别。

例 2.5. 对任意 $d \geq 1$，我们将 $\Omega^d(\mathcal{A})$ 记为 $\mathcal{A}$ 的全子范畴，它由那些与 $\underline{\mathcal{A}}$ 中某个对象 M 的 $\Omega^d(M)$ 同构的对象组成。若存在 $d \geq 1$ 和一个对象 E ，使得 $\Omega^d(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{add} E$，则阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 是 syzygy 有限的。在这种情况下，若 $\mathcal{A}$ 的整体维数为无限，则对象 E 几乎 d-周期。此外，如果这样的对象 E 已属于 $\Omega^d(\mathcal{A})$，那么 E 几乎 1-周期。

我们注意到，syzygy 有限的 Krull-Schmidt 阿贝尔范畴必然是最终闭合的；参见 [6, 第73]页。例如，设 Λ 是一个 syzygy 有限的左阿廷环，也就是说， Λ-模是 syzygy 有限的。那么，模范畴Λ-模是最终闭合的，因此 Λ 是最终闭合的。

我们指出，syzygy 有限的阿廷环包括有限表示类型的阿廷环、Jacobson 根平方为零的阿廷环，以及有限维单项式代数，见 [26, 定理 I]。

例 2.6. 假设 R 是一个非正则且具有有限 Cohen-Macaulay 型的交换诺特完全局部环 [5]。令 E 为所有不可分解极大 Cohen-Macaulay R-模的直和，并令 d 为 R 的 Krull 维数。由于任意有限生成 R-模的 d次 syzygy 都是极大 Cohen-Macaulay 模，因此有 $\Omega^d(R\text{-模}) \subseteq \operatorname{add} E$。特别地，范畴 R-模是 syzygy 有限的。R 的完备性意味着 R-模是 Krull-Schmidt 的，因此是最终闭合的。因此，环 R 是最终闭合的。

此外，我们假设 R 是 Gorenstein 的。于是有 $\Omega^d(R\text{-模}) = \operatorname{add} E$，在这种情况下， E 几乎是 1-周期的。关于此类模 E 的另一种选择，参见 [19, 命题 3.2]。

记 $\mathrm{D}^b(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的有界导出范畴。利用典范函子，我们将有界同伦范畴 $\mathrm{K}^b(\mathcal{P})$ 视为 $\mathrm{D}^b(\mathcal{A})$ 的厚三角子范畴。按照 [9], ， $\mathcal{A}$ 的奇点范畴定义为以下 Verdier 商三角范畴

$$\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A}) = \mathbf{D}^b(\mathcal{A})/\mathbf{K}^b(\mathcal{P}).$$

照例，我们将 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 M 与相应的、集中在零次的茎复形等同，后者仍记为 M。后者也被视为 $\mathrm{D_{sg}}(\mathcal{A})$ 中的对象。因此， $\Sigma^n(M)$ 表示相应的、集中在 $-n$ 次的茎复形。

以下事实众所周知；参见 [11, 引理 2.2] 和 [9, 引理 2.2.2]。

引理 2.7. 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中的一个对象。那么存在一个同构 $M \simeq \Sigma\Omega(M)$，它属于 $\mathrm{D_{sg}}(\mathcal{A})$。

证明。回想一下， $\mathcal{A}$ 中的任意短正合列都会典范地诱导出 $\mathrm{D}^b(\mathcal{A})$ 中的正合三角，进而诱导出 $\mathrm{D_{sg}}(\mathcal{A})$ 中的正合三角。我们考虑以下

正合列 $0 \to \Omega(M) \to P \to M \to 0$。由于投射对象 P 在 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 中消失，$\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 中诱导出的正合三角具有如下形式

$$\Omega(M) \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow \Sigma\Omega(M).$$

由 [16, 引理 I.1.7], 可推得，态射 $M \to \Sigma\Omega(M)$是一个同构，正如所需。

□

定理 2.8. 设 M 是 $\mathcal{A}$中的一个近乎 d-周期对象。那么我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(M, \Sigma^{nd}(M)) \neq 0$$

对任意整数 n。

证明. 鉴于引理 2.2，只需证明 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(M, \Sigma^{d}(M)) \neq 0 \neq \mathbf{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(M, \Sigma^{-d}(M))$。

由于 M 具有无限投射维数，它在 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 中不为零。因此，我们有 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(M, M) \neq 0$。由引理 2.7，我们在 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 中有一个同构$M \simeq \Sigma^{d}\Omega^{d}(M)$。特别地，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(M, \Sigma^{d}\Omega^{d}(M)) \neq 0. \tag{2.1}$$

我们断言 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(M, \Sigma^{d}(M)) \neq 0$。否则，对象 M 属于以下全子范畴

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(M, \Sigma^{d}(X)) = 0\}.$$

由于 $\mathcal{A}$ 中的任意短正合列都会在 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 中诱导出一个正合三角，因此 $\mathcal{S}$ 对扩张封闭。显然，它包含 $\mathcal{P}$，并且对直和项封闭。因此，$\mathcal{S}$ 包含 $\langle M\rangle$。由于 M 几乎是 d- 周期的，我们有 $\Omega^{d}(M)$ 属于 $\langle M\rangle$，因而包含于 $\mathcal{S}$ 中。这与不等式 (2.1) 矛盾，从而证明了该断言。

对偶地，我们注意到

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(\Sigma^{d}\Omega^{d}(M), M) \neq 0.$$

考虑全子范畴

$$\mathcal{S}' = \{Y \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(\Sigma^{d}(Y), M) = 0\},$$

它包含 $\mathcal{P}$，并且对直和项和扩张封闭。通过与上述对偶的论证，我们证明

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(\Sigma^{d}(M), M) \neq 0.$$

整个证明至此完成。 □

3. Two consequences

在本节中，我们推导出定理 2.8 的两个结果。我们证明，无限全局维数的左阿廷环的奇异性范畴不具有 silting 子范畴；参见推论 3.3。我们对两类 Artin 代数验证奇异预 silting 猜想：奇点极小代数和最终闭代数；参见命题 3.4 和 3.5。我们证明，与任意具有无限全局维数的 Artin 代数相关的微分分次 Leavitt 代数 [13] 在每个次数上都有非消失的上同调；参见命题 3.10。

3.1. silting 子范畴。设 $\mathcal{T}$ 是一个三角范畴。回顾 [2, 定义 2.1] ，如果满足以下两个条件，则称一个全加性子范畴 $\mathcal{M}$ 为 silting 子范畴。

(1) 子范畴 $\mathcal{M}$ 是预倾斜的，也就是说，对于任意 $M \in \mathcal{M}$ 和 $n > 0$，Ho $\mathrm{m}_{\mathcal{T}}(M, \Sigma^n(M)) = 0$。(2) 子范畴 $\mathcal{M}$ 生成 $\mathcal{T}$，其含义是，$\mathcal{T}$ 本身是包含 $\mathcal{M}$ 的最小厚三角子范畴。

若对象 X 满足 add X 是预倾斜（分别为倾斜）子范畴，则称 X 为预倾斜（分别为倾斜）对象。我们提及，倾斜对象的研究可追溯至 [20]。

以下结果归功于 [2, 命题 2.4]。

引理 3.1. 假设 $\mathcal{T}$ 有一个倾斜子范畴。那么对于任意对象 X，当 d 足够大时，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, \Sigma^d(X)) = 0$。□

下文中，$\mathcal{A}$ 是一个有足够多投射对象的阿贝尔范畴。我们得到定理 2.8 的第一个推论。

命题 3.2. 假设 $\mathcal{A}$ 包含一个对某个$d \geq 1$而言几乎 d-周期的对象。那么 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 没有 silting 子范畴。

证明. 取 $\mathcal{A}$中的一个几乎 d-周期对象 M。由定理 2.8 可知

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(M, \Sigma^{nd}(M)) \neq 0$$

对任意整数 n 都成立。特别地，n 可以足够大。根据引理 3.1，我们得到所需结论：不存在 silting 子范畴。□

对于左诺特环 Λ，我们通常用 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\Lambda)$ 表示 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\Lambda\text{-模})$。

以下结果加强了 [1, 定理 1], ，该定理是在自内射维数满足有限性假设的条件下证明相应结果的；比较[2, 例 2.5(b)] 和 [17, 推论 3.12]。这里的论证完全不同。

推论 3.3. 设 Λ 是一个具有无限整体维数的左阿廷环。那么 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\Lambda)$ 没有 silting 子范畴。

证明。根据例 2.3，半单 Λ-模 Λ_0 是几乎 1-周期的。于是我们应用命题 3.2。□

上述不存在性结果部分支持以下猜想 [14]；比较 [17]。

奇异预 silting 猜想。对于任意 Artin 代数 Λ，在 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\Lambda)$ 中不存在非零预 silting 子范畴。

根据 [17, 引理 3.4] 或 [24, 命题 1.21], ，该猜想蕴含以下众所周知的猜想，该猜想见于 [6, 第 70] 页；比较 [14, 第 1] 节。

Auslander-Reiten 猜想。对于任意 Artin 代数 Λ上的非投射模 M，存在某个 $n \geq 1$，使得 $\mathrm{Ext}^n_{\Lambda}(M, M \oplus \Lambda) \neq 0$。

我们指出，根据 [9, 定理 4.4], ，当 Λ 是 GorensteinArtin 代数时，Λ 的奇异预 silting 猜想等价于 Λ的 Auslander-Reiten 猜想。

如果左阿廷环 Λ 的任意厚子范畴都等于零或 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\Lambda)$ 本身，我们就称它是奇异极小的。例如，根据 [11, 例 3.11]，域 k 上的代数 $k[x_1, \cdots, x_n]/(x_i x_j, 1 \leq i, j \leq n)$ 是奇异极小的。关于更多此类平凡扩张代数的例子，请参见 [12, 推论 4.3]。

以下结果表明，奇异极小 Artin 代数满足奇异预倾斜猜想，因此也满足 Auslander-Reiten 猜想。

命题 3.4. 设 Λ 是一个奇异极小左 Artin 环。那么 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\Lambda)$ 中不存在非零预 silting 子范畴。

证明。由 Λ 的奇异极小性，$\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\Lambda)$ 中任意非零预 silting 子范畴都是 silting。然后应用推论 3.3。□

下述结果表明，奇异预 silting 猜想对最终闭 Artin 代数成立；比较 [6, 命题 1.3]。回顾一下，有限维周期代数和有限协同核 Artin 代数都是最终闭的；参见第 2 节或 [6, 第 73] 页。

命题 3.5。假设 $\mathcal{A}$ 是最终闭的。那么 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 不含非零预 silting 子范畴。特别地，对于最终闭环 Λ，$\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\Lambda)$ 中不存在非零预 silting 子范畴。

证明。只需证明 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 不含非零预 silting 对象。假设 X 是 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 中的非零预 silting 对象。令 $\mathcal{T}$ 为包含 X 的最小厚子范畴。根据 [11, 引理 2.1], , 存在对象 M 属于 $\mathcal{A}$，使得 X 与某个整数 n 对应的 $\Sigma^n(M)$ 同构。由于 M 是最终闭的，存在 $d \geq 1$，使得 $E = M \oplus \Omega(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^{d-1}(M)$ 几乎 1-周期；参见例 2.4。根据引理 2.7，对象 E 属于 $\mathcal{T}$。然而，由定理 2.8，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E, \Sigma^n(E)) \neq 0$$

对任意整数 n。由于 X 是 $\mathcal{T}$的 silting 对象，根据引理 3.1，我们得到所需的矛盾。□

注 3.6。命题 3.5 似乎可以加强。若阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 满足：对每个对象 M，都存在 $d \geq 1$使得 $\Omega^d(M)$ 属于 $\langle M \oplus \Omega(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^{d-1}(M) \rangle$，则称其为虚拟最终闭范畴。在这种情况下，对象$M \oplus \Omega(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^{d-1}(M)$ 仍然是几乎 1-周期的。于是，沿用上述相同的论证可知，命题 3.5 对虚拟最终闭范畴成立。然而，我们不知道是否存在并非最终闭合的虚拟最终闭范畴。

注 3.7。与非分次情形不同，分次 Artin 代数的分次奇点范畴可能具有 silting 对象；例如，参见 [23, 定理 3.0.3]和[21, 定理 1.4]。

我们提及以下已知的不存在性结果。

命题 3.8. 设 R 是一个非正则的交换诺特局部环。那么 $\mathbf{D}^{\mathrm{sg}}(R)$ 没有 silting 子范畴。

证明. 记 k 为 R的剩余域。由 [3, 定理 6.5], , 我们可推得

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(R)}(k, \Sigma^n(k)) \neq 0 \tag{3.1}$$

对任意整数 n均成立。这里，我们将 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(R)}(k, \Sigma^n(k))$ 与稳定上同调群 $\widehat{\mathrm{Ext}}^n_R(k,k)$ 等同；参见 [3, 1.4.2]。于是，不存在性由引理 3.1 得出。□

3.2. 微分分次 Leavitt 代数。 在本小节中，我们假设 Λ 是交换阿廷环 k上的 Artin 代数。

回忆一下， $\Lambda_0 = \Lambda/J$ ，其中 J 是其 Jacobson根。我们假设 Λ_0 是 Λ 的一个子代数，并且有一个 Λ_0-Λ_0-双模的分解 $\Lambda = \Lambda_0 \oplus J$ 。若 Λ 由带有容许关系的有限箭图给出，或者若 Λ是完美域上的有限维代数，则此假设成立。

考虑 Λ_0-对偶 $J^* = \mathrm{Hom}(J, \Lambda_0)$，它具有自然的 Λ_0-Λ_0- 双模结构。我们有卡西米尔元 $c = \sum_{i \in S} \alpha_i^* \otimes \alpha_i \in J^* \otimes J$，

其中 $\{\alpha_i \mid i \in S\}$ 和 $\{\alpha_i^* \mid i \in S\}$ 构成 J的对偶基。 J 上的乘法诱导出一个 Λ_0-Λ_0-双模映射

$$\partial_+ \colon J^* \longrightarrow J^* \otimes J^*.$$

更确切地说，对于任意 $a, b \in J$，我们有 $\partial_+(g) = \sum g_1 \otimes g_2$，使得 $g(ab) = \sum g_2(ag_1(b))$。

与 Artin 代数 Λ 相关联的微分分次 Leavitt 代数 $L = L_{\Lambda_0}(J)$ 在 [13] 中引入。作为一个代数，它定义为

$$L = T_{\Lambda_0}(J \oplus J^*)/(a \otimes g - g(a),\ 1 - c \mid a \in J, g \in J^*).$$

这里， $T_{\Lambda_0}(J \oplus J^*)$ 表示张量代数。它自然带有 $\mathbb{Z}$-分次，使得$|e| = 0$ 对于任意 $e \in \Lambda_0$, $|a| = -1$ 对于任意 $a \in J$，并且 $|g| = 1$ 对于任意 $g \in J^*$。 L 上的微分 ∂ 由分次 Leibniz 法则以及条件 $\partial|_{\Lambda_0} = 0$ 和 $\partial|_{J^*} = \partial_+$ 唯一确定；参见 [13, 注 3.6]。我们提到，经典 Leavitt 代数在 [22] 中就已出现。

对于任意微分分次代数 A，我们用 $H^*(A) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(A)$ 表示其总上同调，它继承了来自 A 的分次代数结构。回忆一下，若 A 是无圈的，则有 $H^*(A) = 0$，这等价于条件 $H^0(A) = 0$。

我们将 Λ_0 视为相应的、集中在零次的茎复形，并将其视为 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\Lambda)$ 中的一个对象。于是，下面这个分次 k-模

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\Lambda)}(\Lambda_0, \Sigma^n(\Lambda_0)) \tag{3.2}$$

成为一个分次 k-代数，其乘法由 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\Lambda)$ 中态射的复合诱导。

以下结果隐含于 [13]，之中，并揭示了微分分次 Leavitt 代数与奇点范畴之间的密切联系。

引理 3.9。沿用上述记号。则存在一个分次代数的同构

$$H^*(L)^{\mathrm{op}} \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\Lambda)}(\Lambda_0, \Sigma^n(\Lambda_0)),$$

其中 $H^*(L)^{\mathrm{op}}$ 表示 $H^*(L)$ 的反代数。

证明。由 [13, 定理 9.5], 中的同构可知， $H^*(L)^{\mathrm{op}}$ 与奇异 Yoneda 微分分次范畴中 Λ_0 的微分分次自同态代数的总上同调代数同构。由 [13, 推论 9.3], 中的拟等价可知，后一个代数与 (3.2) 同构。□

一般而言，微分分次 Leavitt 代数 L 的结构似乎非常复杂。定理 2.8 的第二个推论是关于其总上同调 $H^*(L)$ 的二分性。下文命题 4.3 给出了一个加强版本。

命题 3.10. 设 Λ 是一个 Artin 代数，其关联的 dg Leavitt 代数为 L。则以下结论成立。

(1) 微分分次 Leavitt 代数 L 无圈，当且仅当 Λ 具有有限整体维数。(2) 若 Λ 具有无限全局维数，则对任意整数 n， $H^n(L) \neq 0$ 。

证明。根据引理 3.9，当且仅当 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\Lambda)}(\Lambda_0, \Lambda_0) = 0$ 时，微分分次 Leavitt 代数 L 是无圈的；这等价于 Λ_0 在 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\Lambda)$ 中消失。由于Λ_0 生成 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\Lambda)$，最后一个条件等价于 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\Lambda)$ 消失，而众所周知，这又等价于 Λ的整体维数有限。总之，我们得出 (1)。

对于 (2)，我们假设 Λ 的整体维数无限。根据例 2.3， Λ_0 几乎 1-周期。定理 2.8 表明

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\Lambda)}(\Lambda_0, \Sigma^n(\Lambda_0)) \neq 0 \tag{3.3}$$

对任意整数 n。现在，所需结论可立即由引理 3.9 中的同构得到。□

注 3.11。不等式 (3.3) 与 (3.1) 类似。本着同样的精神，命题 3.10 与 [3,定理 6.5] 中通过剩余域的稳定上同调代数刻画正则局部环的结果类似。

4. The Hom-finiteness

设 k 是一个交换环。我们假设阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$是 k-线性的。因此，奇点范畴 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 是 k-线性的。我们研究奇点范畴的 Hom-有限性，并得到关于微分分次 Leavitt 代数上同调的三分法；见命题 4.3。

对于一个对象 M 在 $\mathcal{A}$ 和 $d \geq 1$中，我们考虑一个分次的 k-代数

$$\Gamma(M; d) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(M, \Sigma^{nd}(M)), \tag{4.1}$$

其乘法由 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 中态射的复合诱导。

下面引理的证明与定理 2.8 的证明相似。

引理 4.1. 设 $d \geq 1$ 和 M 是 $\mathcal{A}$中的一个虚拟 d-周期对象。假设X 和 Y 是 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 中的对象。那么以下结论成立。

(1) 假设 k-模 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(X, M)$ 的长度无限。那么，对每个 $n \geq 0$， $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(X, \Sigma^{nd}(M))$ 的长度也无限。(2) 假设 k-模 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(M, Y)$ 的长度无限。那么，对每个 $n \geq 0$， $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(\Sigma^{nd}(M), Y)$ 的长度也无限。(3) $\Gamma(M; d)$ 的每个齐次分量长度无限，当且仅当其中一个齐次分量长度无限。

证明。我们只给出 (1) 的证明，因为 (2) 可对偶地证明，而 (3) 可由结合 (1) 和 (2) 立即推出。

现在证明 (1)。由引理 2.2，只需说明 k-模 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(X, \Sigma^d(M))$ 具有无限长度。由引理 2.7， M与$\Sigma^d\Omega^d(M)$同构。因此，$\Omega^d(M)$不属于以下全子范畴

$$\mathcal{S}'' = \{Z \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(X, \Sigma^d(Z)) \text{ is of finite length}\}.$$

注意到 $\mathcal{S}''$ 包含 $\mathcal{P}$，且对直和项和扩张封闭。由于 $\Omega^d(M) \in \langle M \rangle$ ，而 $\Omega^d(M)$不属于 $\mathcal{S}''$，因此可知 M 也不属于 $\mathcal{S}''$ 。这就证明了该断言，进而证明了 (1)。□

若对于任意对象 X 和 Y， k-模 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})}(X, Y)$ 都具有有限长度，则称 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 关于 k 是 Hom-有限的。

下面的结果利用几乎周期对象刻画 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 的 Hom-有限性。

命题 4.2. 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中一个几乎 1-周期对象，且它生成 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$。则以下陈述等价。

(1) 范畴 $\mathbf{D}_{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ 在 k 上 Hom-有限。(2) $\Gamma(M; 1)$ 的某个齐次分量非零且具有有限长度。(3) $\Gamma(M; 1)$ 的每个齐次分量都非零且具有有限长度。

证明。由定理 2.8， $\Gamma(M;1)$ 的每个齐次分量都非零。由于 M 生成 $\mathrm{D_{sg}}(\mathcal{A})$，一个标准事实是：当且仅当对任意整数 n，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D_{sg}}(\mathcal{A})}(M,\Sigma^n(M))$ 具有有限长度时，$\mathrm{D_{sg}}(\mathcal{A})$ 才是 Hom-有限。这证明了“(1) $\Leftrightarrow$ (2)”。蕴含关系“(2) $\Leftrightarrow$ (3)”由引理 4.1(3) 得出。□

在下文中，我们假设 Λ 是交换 Artin 环 k 上的 Artin 代数。我们沿用第 3.2 小节中的设定。我们指出，某些 Artin 代数的奇点范畴的 Hom-有限性已在 [11, 第 5] 节中研究。

对于关联的微分分次 Leavitt 代数的总上同调代数 $H^*(L)$ 的 Hom-有限性，我们有如下三分法。

命题 4.3. 设 Λ 为 Artin 代数， L 为关联的微分分次 Leavitt 代数。则以下结论成立。

(1) 代数 Λ 的整体维数有限，当且仅当 $H^*(L)=0$。 (2) 代数 Λ 的整体维数无限，且 $\mathrm{D_{sg}}(\Lambda)$ 是 Hom-有限的，当且仅当 $H^*(L)$ 的每个齐次分量均非零且具有有限长度。 (3) 范畴 $\mathrm{D_{sg}}(\Lambda)$ 不是 Hom-有限的，当且仅当 $H^*(L)$ 的每个齐次分量都具有无限长度。

证明。由例 2.3， Λ_0 是几乎 1-周期的，并且显然生成 $\mathrm{D_{sg}}(\Lambda)$。由引理 3.9，我们将 $H^*(L)^{\mathrm{op}}$ 与 (4.1) 中定义的 $\Gamma(\Lambda_0;1)$ 等同。于是结论由命题 3.10 和 4.2 得出。□

注 4.4。我们指出，命题 4.3(2) 在某种程度上类似于 [3, 定理 6.4]中对 Gorenstein 局部环的刻画；比较注 3.11。

假设 Λ 是一个 Gorenstein Artin 代数。由 [9, 定理 4.4], ，奇点范畴 $\mathrm{D_{sg}}(\Lambda)$ 与 Gorenstein- 投射 Λ- 模的稳定范畴三角等价。特别地，$\mathrm{D_{sg}}(\Lambda)$ 是 Hom- 有限的，因此 $H^*(L)$ 的每个齐次分量都具有有限长度。一般而言，与交换情形不同，$\mathrm{D_{sg}}(\Lambda)$ 的 Hom-有限性并不意味着 Λ具有 Gorenstein 性；具体例子见 [10,例 4.3] 。

致谢。作者感谢 Takuma Aihara、Hongxing Chen、Wei Hu 和 Zhengfang Wang 进行的许多有益讨论。本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12171207、12131015 和 12161141001）的资助。

References

[1] T. Aihara, T. Honma, K. Miyamoto, and Q. Wang, *Report on the finiteness of silting objects* **64** 2 2021 217 233 , Proc. Edinb. Math. Soc. ( ) ( ), – . [2] T. Aihara, and O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories*, J. Lond. Math. Soc. 85 (3) (2012), 633–668. [3] L.L. Avramov, and O. Veliche, *Stable cohomology of local rings*, 数学进展 213 (2007), 93–139. [4] M. Auslander, M.I. Pletzeck, and I. Reiten, *Periodic modules over weakly symmetric algebras* **11** 3 1977 279 291 , 纯粹与应用代数杂志 ( ) ( ), – . [5] M. Auslander, and I. Reiten, *The Cohen-Macaulay type of Cohen-Macaulay rings*, 数学进展 73 (1989), 1–23. [6] M. Auslander, and I. Reiten, *On a generalized version of the Nakayama conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 69-74. [7] M. Auslander, I. Reiten, and S.O. Smalø, Artin 代数表示论, Cambridge Stud. Adv. Math. 36, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1995.[8] S. Brenner, M.C.R. Bulter, and A.D. King, *Periodic algebras which are almost Koszul*, Algebr. Representat. Theor. 5 (2002), 331–368.

[9] R.O. Buchweitz, 极大 Cohen–Macaulay 模与 Gorenstein 环上的 Tate 上同调，附录由 L.L. Avramov、B. Briggs、S.B. Iyengar 和 J.C. Letz 撰写，数学调查与专著 262，美国数学会，2021.
[10] X.W. Chen, *Singularity categories, Schur functors and triangular matrix rings*, 代数表示论 12 (2009), 181–191. [11] X.W. Chen,
The singularity category of an algebra with radical square zero, 数学文献 16 (2011), 921–936.
[12] X.W. Chen, *Singular equivalences of trivial extensions*, 通讯代数 44 (5) (2016), 1961–1970.
[13] X.W. Chen, and Z. Wang,
The dg Leavitt algebra singular Yoneda category and singu- , , ,
larity category with an appendix by Bernhard Keller and Yu Wang 2109 11278 2,
arXiv: . v 2021. [14] Y. Chen, W. Hu, Y. Qin, and R. Wang,
Singular equivalences and Auslander-Reiten
conjecture **623** 2023 42 63 , 代数杂志
( ), – . [15] D. Eisenbud,
Homological algebra on a complete intersection with an application to group , , 美国数
representations **260** 1980 35 64
学会汇刊 ( ), – . [16] D. Happel, 有限维代数表示论中的三角范畴, 伦敦数学会讲义丛书 119, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1988. [17] O. Iyama, and D. Yang,
Silting reduction and Calabi-Yau reduction of triangulated cate-
gories **370** 2018 7861 7898 , 美国数
学会汇刊 ( ), – . [18] J.P. Jans, *Some generalizations of finite projective dimension*, 伊利诺伊数学杂志 5 (1961), 334–344. [19] M. Kalck,
A new equivalence between singularity categories of commutative algebras, 数学进展 390 (2021), 107913. [20] B. Keller, and D. Vossieck, *Aisles in derived categories*, 比利时数学会通报 40 (1988), 239–253. [21] Y. Kimura, H. Minomoto, and K. Yamaura,
Tilting theory for finite dimensional 1-
Iwanaga-Gorenstein algebras 2210 06211 1, 2022 , arXiv: .
v . [22] W.G. Leavitt, *The module type of a ring*, 美国数学会汇刊 103 (1962), 113–130. [23] M. Lu,
and B. Zhu, *Singularity categories of Gorenstein monomial algebras*, 纯粹与应用代数杂志 225 (2021), 106651. [24] D. Orlov,
Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg mod-
els **246** 3 2004 227 248 , Steklov
数学研究所论文集 ( ) ( ), – . [25] S. Usui,
Characterization of eventually periodic modules in the singularity categories, 纯粹与应用代数杂志 226 (12) (2022), 107145. [26] B. Zimmermann-Huisgen,
Predicting syzygies over monomial relation algebras, 数学手稿 70 (1991), 157–182.

XIAO-WU CHEN，吴文俊数学重点实验室，中国科学院，数学科学学院，中国科学技术大学，中华人民共和国安徽省合肥市 230026

ZHI-WEI LI、XiaojinZhang，江苏师范大学数学与统计学院，中华人民共和国江苏省徐州市 221116

ZHIBING ZHAO，安徽大学数学科学学院，中华人民共和国安徽省合肥市 230601