arXiv:2301.01899v1 [cs.IT] 5 Jan 2023

关于稀疏回归LDPC码

Jamison R. Ebert、Jean-Francois Chamberland、Krishna R. Narayanan，德克萨斯农工大学电气与计算机工程系

摘要——近年来，应用于迭代译码的置信传播和通过近似消息传递（AMP）实现稀疏恢复这两个研究领域取得了巨大进展。受这些进展启发，本文介绍了稀疏回归LDPC码及其译码。稀疏回归码（SPARC）是一类基于压缩感知思想构造、可使用AMP进行译码的纠错码。在某些条件下，SPARC已知能够达到信道容量；然而，其在有限码长下的性能有所不足。同样，LDPC码可以通过置信传播高效译码，也能够达到信道容量。本文提出了一种新颖的级联编码结构，将LDPC外码与受SPARC启发的内码相结合。对于这类码，可以使用AMP进行高效译码，其中的去噪器在外层LDPC码的因子图上执行置信传播。与SPARC和标准LDPC码相比，所提出的框架在有限码长下性能有所提升，并且误码性能呈现陡峭的瀑布效应；未编码的SPARC中并未观察到这一现象。数值结果支持了这些发现。

索引词—低密度奇偶校验码、稀疏回归码、近似消息传递、置信传播。

I. 引言与背景

低密度奇偶校验（LDPC）码长期以来一直是许多科学研究的课题，相关里程碑式成果涵盖了从理论进展到实际应用的各个方面 [1]–[8]。LDPC系综便于分析；在特定条件下，利用迭代置信传播（BP）译码可以高效地恢复编码消息。有趣的是，BP译码的复杂度随码长线性增长，因此，这一范式为长码长场景提供了切实可行的解决方案 [9]。某些空间耦合LDPC构造具有接近信道容量的迭代译码阈值，同时还能避免误码平台这一问题 [10]–[15]。遗憾的是，工作在较短码长下的系统可能并不适合采用空间耦合。在这种情况下，非二元LDPC码已被用于提供足够的性能 [6], [7], [16]–[18]。

在一个看似毫不相关的研究方向中，Joseph 和 Barron 提出了稀疏回归码（SPARC）的概念，从而建立了码设计与高维稀疏恢复之间的联系 [19]–[21]。SPARC码本中的码字由设计矩阵列的稀疏叠加构成；在压缩感知（CS）文献中，设计矩阵也称为测量矩阵 [22]，[23]。从某种意义上说，SPARC的译码过程等同于恢复经过适当设计的索引向量中的非零项。研究人员已提出低复杂度算法，以高效译码SPARC码字。值得注意的是，Rush等人在 [24], [25]中讨论了一种用于SPARC的近似消息传递（AMP）译码器。还值得一提的是，近年来AMP也独立获得了大量研究关注，这得益于其较低的实现成本、良好的数学可处理性和出色的性能 [26]–[30]。采用AMP译码的稀疏回归码，在功率分配选择适当的情况下，已知能够渐近达到单用户加性高斯白噪声信道容量。与此同时，研究人员也一直在努力提升SPARC在有限码长下的性能 [31], [32]。

本材料部分基于美国国家科学基金会（NSF）CCF-2131106号资助的研究工作，并得到高通技术公司大学关系计划的支持。

在实际应用中，提升码性能的一种常见策略是采用级联结构。例如，过去曾将SPARC与低密度奇偶校验码配对，构成能够提升性能的级联方案 [31]–[34]。在无源随机接入中，也有人提出了采用SPARC类内码的级联结构 [35]–[37]。[36], 中表明，经过精心设计的外码结构可以集成到内层AMP恢复算法的去噪函数中。令人意外的是，尽管Liu等人在 [34] 中将这种方法列为未来可能的研究方向之一，但它尚未在单用户场景中得到研究。本文旨在通过引入稀疏回归LDPC码来弥补这一不足。

稀疏回归LDPC码采用级联结构，由内层SPARC类码和外层非二进制低密度奇偶校验码组成。这种级联结构适用于在内码与外码之间交换信息的译码器，信息交换通过动态AMP去噪器实现。在这种设置下，去噪器在外层低密度奇偶校验码的因子图上执行置信传播，以改进AMP状态估计。进而，这能改进有效观测，从而为BP-LDPC译码器提供更好的局部置信向量。这样的去噪器可改善AMP的收敛性，并降低估计得到的SPARC码字的残余均方误差（MSE）。当迭代AMP-BP译码的MSE趋于稳定后，还可以再次利用外层低密度奇偶校验码进一步提升性能。我们的目标是利用AMP-BP译码提高有效观测的信噪比，使其超过该图的BP阈值，然后对外层低密度奇偶校验码应用消息传递来恢复消息。数值结果表明，在码长相当短的情况下，与相关架构相比，所提出的模型具有性能优势。

II. 系统模型

我们考虑一个点对点、无记忆的加性高斯白噪声（AWGN）信道，其中一个发射机和一个接收机均配备单天线。接收信号 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}, \tag{1}$$

其中，$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 表示发送信号，$\mathbf{z} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \mathbf{I}\right)$ 表示加性高斯白噪声（AWGN）。如上所述，我们希望研究一种由稀疏回归内码 [19]–[21], 和非二进制LDPC外码 [6]–[8] 组成的编码架构。下面将详细介绍编码过程和译码方案。

A. 稀疏回归LDPC编码

所提出的编码过程包含三个不同的步骤：q元低密度奇偶校验码编码、低密度奇偶校验符号索引以及内部压缩感知编码。首先，通过成熟的操作 [6]–[8]将信息比特编码为一个 q元低密度奇偶校验码字。第二步将 q元低密度奇偶校验码字转换为合适的稀疏向量。最后一步是稀疏回归码的典型矩阵乘法；其输出有时称为大型随机矩阵系统 [19]–[21], [34]。下面总结与此编码过程相关的概念，并同时介绍必要的符号。

1) q元 LDPC 编码：LDPC 编码器以二进制序列 $\mathbf{w} \in \mathbb{F}_2^B$ 作为输入，并将其映射为 q元码字 $\mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^L$。我们将所得码字表示为串接形式：

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_L) \tag{2}$$

其中，第 ℓ 个元素 v_ℓ 属于有限域 $\mathbb{F}_q$，而 L 是码字的长度。

注意，$\mathbb{F}_q$的元素与整数 $[q] = (0, 1, \ldots, q-1)$之间存在一个双射 $\Phi : \mathbb{F}_q \to [q]$，其中 $0 \in \mathbb{Z}$ 映射到 $0 \in \mathbb{F}_q$，而 $1 \in \mathbb{Z}$ 映射到 $1 \in \mathbb{F}_q$。在全文中，我们采用这样一个任意但固定的双射，并利用这一关系，对域元素 $g \in \mathbb{F}_q$ 及其对应的整数表示$\Phi(g) \in [q]$使用同一个变量。这种轻微的符号滥用大大简化了论述；由于可以根据上下文明确判断某处指的是域元素还是其整数表示，因此不会造成混淆。

2) LDPC 符号索引：编码符号稀疏化/索引的过程包括将 $v_\ell \in \mathbb{F}_q$ 映射为标准基向量 $\mathbf{e}_{v_\ell} \in \mathbb{R}^q$，随后将这些 L 基向量堆叠在一起。借此机会，我们再次强调，$\mathbf{v}$ 的第 ℓ 个分量是 $\mathbb{F}_q$中的一个元素，但在我们采用的重载记法中，$\mathbf{e}_{v_\ell}$ 中的 v_ℓ 指的是 $[q]$ 中的一个整数。由此，索引过程的输出为

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{v_1} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{v_L} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中，$\mathbf{s}$ 是一个长度为 qL的 L-稀疏向量。在乘以一个大型随机矩阵之前，向量 $\mathbf{s}$ 的结构与稀疏回归码类似。译码时可以利用这种结构化稀疏性。

3) 内部压缩感知编码：编码过程的最后一个阶段是将向量 $\mathbf{s}$ 左乘矩阵 $\mathbf{A}$，得到 $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$，其中 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times qL}$ 且 $\mathbf{A}_{i,\ j} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$。注意，$n \ll qL$ 以符合压缩感知框架。因此，方程 (1) 可改写为：

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{z}. \tag{4}$$

在明确了码结构后，我们现在可以讨论如何从 $\mathbf{y}$ 中恢复信息。

B. 稀疏回归低密度奇偶校验解码

借鉴稀疏回归码 [24] 的近似消息传递发展，并从级联近似消息传递系统 [33], [34], 汲取灵感，我们希望构建一个复合迭代过程，从 $\mathbf{y}$ 中恢复状态向量 $\mathbf{s}$，同时利用 $\mathbf{s}$ 的稀疏性和低密度奇偶校验码的奇偶校验结构。为此，可以将低密度奇偶校验码因子图上的消息传递融入近似消息传递去噪器中。 [36]中也采用了类似方法；不过，我们下面要使用的去噪器有所不同，因为 $\mathbf{y}$ 中只包含一个码字。

我们的 AMP 复合算法如下，

$$\mathbf{r}^{(t)} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}^{(t)} + \mathbf{s}^{(t)} \tag{5}$$

$$\mathbf{z}^{(t)} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}^{(t)} + \frac{\mathbf{z}^{(t-1)}}{n} \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_{t-1}\left(\mathbf{r}^{(t-1)}\right) \tag{6}$$

$$\mathbf{s}^{(t+1)} = \boldsymbol{\eta}_t\left(\mathbf{r}^{(t)}\right) \tag{7}$$

其中，上标 t 表示迭代次数。该算法以条件 $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{y}$ 初始化。

方程 (5) 给出了有效观测，这是 AMP 的典型特征。方程 (6) 计算加入 Onsager 校正项后的残差误差，而方程 (7) 给出了状态估计。去噪函数$(\boldsymbol{\eta}_t(\cdot))_{t \geq 0}$旨在利用 $\mathbf{s}$ 的结构来计算状态更新。

一般而言，所选去噪器是给定 $\mathbf{r}^{(t)}$ 时 $\mathbf{s}$ 的条件期望。不幸的是，在当前情境下，这种方法在计算上难以实现，因为它需要对所有可能的码字求和。作为替代方案，我们知道，置信传播可以高效地应用于q元低密度奇偶校验码。此外，在置信传播的任何阶段，都可以根据相邻因子节点传来的消息和局部观测，形成对各个低密度奇偶校验符号的置信度。因此，我们可以利用 $\mathbf{s}$ 的各个区段与低密度奇偶校验符号之间的联系，将置信传播迭代若干次，以估计状态向量。从这个意义上说，迭代消息传递可以为实用去噪函数奠定基础。下文将详细阐述这种联系，同时回顾置信传播应用于 q元低密度奇偶校验码时的相关概念。

III. 为近似消息传递构建置信传播去噪器

本节将介绍我们希望在近似消息传递中使用的去噪函数。首先要强调的是，$\mathbf{r}$ 也可以像式（3）中的状态向量 $\mathbf{s}$ 一样，表示为由多个区段组成的形式。也就是说，我们可以将状态估计和有效观测都视为由 L 个向量串接而成，每个向量的长度为 q。数学上，我们有

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_L \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{s}}_L \end{bmatrix}.$$

这一点至关重要，因为去噪器是按块构建的。顺带一提，为简化记号，在下文大部分讨论中，我们省略上标（t）。此外，我们强调，在没有迭代次数（t）时，带帽符号 $\hat{\mathbf{s}}$ 将估计值与真实状态向量 $\mathbf{s}$ 区分开来。

$\mathbf{r}$ 中的每个部分 $\mathbf{r}_\ell$ 都作为关于 $\mathbf{s}_\ell \in \{\mathbf{e}_g$ 取值的向量观测：$g \in [q]\}$。近似消息传递有一项令人惊叹且极具价值的性质：在满足某些技术条件时，有效观测 $\mathbf{r}$ 渐近服从 $\mathbf{s} + \tau\boldsymbol{\zeta}$，其中 $\boldsymbol{\zeta}$ 是一个各分量相互独立且服从 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分布的随机向量，而 τ 是一个确定量。这一事实依赖于式（6）中的 Onsager项，以及去噪函数满足的一些平滑性条件。我们暂且不讨论这些技术条件，而是先提出相关要求，并将其正式引入为一个条件。

条件1。有效观测 $\mathbf{r}^{(t)}$ 渐近服从 $\mathbf{s} + \tau_t\boldsymbol{\zeta}_t$，其中 $\boldsymbol{\zeta}_t$ 是一个随机向量，其分量相互独立且服从 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分布，而 τ_t 由一组确定性方程指定。这一渐近特征是在系统维度上成立的，而非在时间或迭代次数上成立。

下面我们说明在条件1成立的假设下，去噪函数的设计依据；我们在附录 B 中为该条件提供严格的理论基础，但只有在去噪器的结构确立后才能做到这一点。考虑限制在区段 ℓ 内的有效观测。在条件1下，给定区段 $\mathbf{S}_\ell = \mathbf{e}_g$ 时，随机观测向量 $\mathbf{R}_\ell$ 的分布为

$$f_{\mathbf{R}_\ell|\mathbf{S}_\ell}(\mathbf{r}_\ell|\mathbf{e}_g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}\tau^q} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r}_\ell - \mathbf{e}_g\|^2}{2\tau^2}\right).$$

在均匀输入分布下，$\mathbf{S}_\ell = \mathbf{e}_g$ 的条件概率变为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_\ell(g) &= \Pr(\mathbf{S}_\ell = \mathbf{e}_g|\mathbf{R}_\ell = \mathbf{r}_\ell) = \Pr(V_\ell = g|\mathbf{R}_\ell = \mathbf{r}_\ell) \\ &= \frac{f_{\mathbf{R}_\ell|V_\ell}(\mathbf{r}_\ell|g)}{\sum_{h\in\mathbb{F}_q} f_{\mathbf{R}_\ell|V_\ell}(\mathbf{r}_\ell|h)} = \frac{e^{-\frac{\|\mathbf{r}_\ell - \mathbf{e}_g\|^2}{2\tau^2}}}{\sum_{h\in\mathbb{F}_q} e^{-\frac{\|\mathbf{r}_\ell - \mathbf{e}_h\|^2}{2\tau^2}}} \\ &= \frac{e^{\frac{\mathbf{r}_\ell(g)}{\tau^2}}}{\sum_{h\in\mathbb{F}_q} e^{\frac{\mathbf{r}_\ell(h)}{\tau^2}}}. \end{aligned} \tag{8}$$

对于 $\mathbf{S}_\ell$，一种可能的估计方法是计算在观测 $\mathbf{R}_\ell = \mathbf{r}_\ell$ 条件下的条件期望，其中

$$\mathbb{E}[\mathbf{S}_\ell|\mathbf{R}_\ell = \mathbf{r}_\ell] = \sum_{g\in\mathbb{F}_q} \mathbf{e}_g \Pr(\mathbf{S}_\ell = \mathbf{e}_g|\mathbf{R}_\ell = \mathbf{r}_\ell). \tag{9}$$

对于不带外码的系统，[24] 中可以找到这种方法的一种变体。理想情况下，我们希望利用外码，采用形式为 $\mathbb{E}[\mathbf{S}_\ell|\mathbf{R} = \mathbf{r}]$ 的更精确的最小均方误差估计。不幸的是，如上所述，计算这一条件期望的复杂度过高，无法在实践中实现。一种可行的替代方案是在外层低密度奇偶校验码的因子图上执行置信传播，以此在性能和复杂度之间取得平衡。隐式地，这种方法基于该码的计算树，为每个 $\mathbf{S}_\ell$ 计算估计值，计算树的深度截至某个值 [8], [38]。

在因子图上执行置信传播的框架已十分成熟 [39]；因此，我们假设读者对这类迭代过程已有一定了解。我们将先探讨非二元 LDPC 因子图的特点，再介绍一种置信传播算法，最后提出一种适用于 SR-LDPC 码的动态去噪器。

A. 非二元 LDPC 图

$\mathbb{F}_q$ 低密度奇偶校验码的因子图包含 L 变量（左侧）节点和 $L(1-R)$校验（右侧）节点，用于施加奇偶校验约束，其中 R 是该低密度奇偶校验码的码率 [6]–[8]。二元与非二元低密度奇偶校验码的一个重要区别是，后者的因子图通常包含边标签。这些标签取值于 $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$。若向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^L$ 满足奇偶校验方程，则它是一个有效码字

$$\sum_{v_\ell\in N(c_p)} \omega_{\ell,p} \otimes v_\ell = 0 \qquad \forall p \in [L(1-R)], \tag{10}$$

其中，$N(c_p)$是与奇偶校验 c_p相邻的变量节点集合。(10) 中的求和与乘法运算符 $\otimes$ 在有限域 $\mathbb{F}_q$上进行。参数 $\omega_{\ell,\,p}$ 表示分配给连接变量节点 v_ℓ 与校验节点 c_p的边的标签或权重。采用因子图中的常见概念 [39], [40], ，我们将变量节点 v_ℓ 的图邻居记为 $N(v_\ell)$。与 c_p 相关、并由奇偶校验方程 (10) 导出的因子可表示为指示函数

$$\mathcal{G}_p(\mathbf{v}_p) = \mathbf{1}\left(\sum_{v_\ell\in N(c_p)} \omega_{\ell,p} \otimes v_\ell = 0\right) \tag{11}$$

其中，$\mathbf{v}_p = (v_\ell \in N(c_p))$ 是 $\mathbf{v}$ 在与图邻域$N(c_p)$ 相关联的条目上的限制的简写符号。根据这些定义，与我们的低密度奇偶校验码相关联的因子函数具有如下乘积分解：

$$\mathcal{G}(\mathbf{v}) = \prod_{p\in[L(1-R)]} \mathcal{G}_p(\mathbf{v}_p). \tag{12}$$

换言之，$\mathcal{G}(\mathbf{v})$ 是一个指示函数，用于判断其参数是否为有效码字。

B. 置信传播

我们将非二进制低密度奇偶校验码的消息视为定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的多维信念向量。从变量节点到校验节点的消息记为 $\boldsymbol{\mu}_{v\to c}$，反方向的消息记为 $\boldsymbol{\mu}_{c\to v}$。形式上，从校验节点 c_p 到变量节点 $v_\ell \in N(c_p)$ 的消息按分量计算如下：

$$\boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}(g) = \sum_{\mathbf{v}_p: v_\ell = g} \mathcal{G}_p(\mathbf{v}_p) \prod_{v_j \in N(c_p)\setminus v_\ell} \boldsymbol{\mu}_{v_j\to c_p}(g_j). \quad (13)$$

尽管式 (13) 以紧凑形式给出，但实际的求和运算相当繁琐。要找出被加项集合，必须识别满足局部条件 (10) 的形如 $(g_j \in \mathbb{F}_q:\ v_j \in N(c_p)\setminus v_\ell)$ 的序列，或者等价地，

$$\sum_{v_j \in N(c_p)\setminus v_\ell} \omega_{j,p} \otimes g_j = -\omega_{\ell,p} \otimes g. \quad (14)$$

从变量节点 v_ℓ 传递到校验节点c_p的信念向量，其中 $p \in N(v_\ell)$，按分量计算如下：

$$\boldsymbol{\mu}_{v_\ell\to c_p}(g) \propto \boldsymbol{\alpha}_\ell(g) \prod_{c_\xi \in N(v_\ell)\setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi\to v_\ell}(g). \quad (15)$$

“$\propto$”符号表示，在将正测度作为消息发送出去之前，可以先对其进行归一化。式 (15) 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_\ell$ 可以看作基于局部观测的一组信念，如式 (8) 所示。也就是说，条目 $\boldsymbol{\alpha}_\ell(g)$ 表示符号 g 是区段 ℓ 内真实域元素的概率。其他置信传播消息初始化为 $\boldsymbol{\mu}_{v\to c} = \mathbf{1}$ 和 $\boldsymbol{\mu}_{c\to v} = \mathbf{1}$。传统的并行和积算法在式 (13) 与式 (15) 之间迭代，交替更新右向消息和左向消息。

正如 [7], 所指出的，在 $\mathbb{F}_q$ 中使用域元素为向量编制索引的一项关键优势是，由此能够在这些向量上定义相关算子。与既有文献的做法一致，我们定义两种作用。

定义 2（向量 $+g$ 算子 [7]）。对于域元素 $g \in \mathbb{F}_q$，作用于 $\mathbf{b}$ 的向量 $+g$ 算子记作 $\mathbf{b}^{+g}$，其定义如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{b}^{+g} &= \left(b_g, b_{g\oplus 1}, \ldots, b_{g\oplus(q-1)}\right)\\ &= \left(b_{h\oplus g} : h \in \mathbb{F}_q\right)\end{aligned}$$

其中，下标加法 $\oplus$ 在 $\mathbb{F}_q$ 中进行。

定义 3（向量 $\times g$ 算子 [7]）。对于域元素 $g \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$，作用于 $\mathbf{b}$ 的向量 $\times g$ 算子记作 $\mathbf{b}^{\times g}$，定义为：

$$\begin{aligned}\mathbf{b}^{\times g} &= \left(b_0, b_g, b_{2\otimes g}, \ldots, b_{(q-1)\otimes g}\right)\\ &= \left(b_{h\otimes g} : h \in \mathbb{F}_q\right)\end{aligned}$$

其中，下标乘积 $\otimes$ 在 $\mathbb{F}_q$ 中进行。

经过这些运算，我们可以简洁地将（13）重写为：

$$\boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell} = \left(\bigodot_{v_j \in N(c_p)\setminus v_\ell} \left(\boldsymbol{\mu}_{v_j\to c_p}\right)^{\times \omega_{j,p}^{-1}} \right)^{\times(-\omega_{\ell,p})} \quad (16)$$

其中 $\omega_{j,p}$ 是变量节点 v_j 与因子节点 c_p 之间边上的标签。算子 $\odot$ 表示两个向量之间的 $\mathbb{F}_q$ 卷积，

$$[\boldsymbol{\mu} \odot \boldsymbol{\nu}]_g = \sum_{h\in\mathbb{F}_q} \mu_h \cdot \nu_{g-h} \qquad g \in \mathbb{F}_q.$$

如果将边标签并入消息本身，表述还可以进一步简化。具体而言，我们采用以下定义：

$$\overline{\boldsymbol{\mu}}_{v_j\to c_p} = \left(\boldsymbol{\mu}_{v_j\to c_p}\right)^{\times \omega_{j,p}^{-1}} \quad (17)$$

$$\overline{\boldsymbol{\mu}}_{c_p\to v_\ell} = \left(\boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right)^{\times\left(-\omega_{\ell,p}^{-1}\right)}. \quad (18)$$

于是，式 (16) 转化为更简单的表达式

$$\overline{\boldsymbol{\mu}}_{c_p\to v_\ell} = \bigodot_{v_j \in N(c_p)\setminus v_\ell} \overline{\boldsymbol{\mu}}_{v_j\to c_p}. \quad (19)$$

该方程突出了 $\mathbb{F}_q$ 卷积在非二元LDPC码的置信传播中的作用。式 (15) 中从变量节点 v_ℓ 到校验节点 c_p 的消息也可以写成更紧凑的形式。对于 $p \in N(v_\ell)$，从变量节点发出的传统消息可以写成

$$\boldsymbol{\mu}_{v_\ell\to c_p} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_\ell \circ \left(\bigcirc_{c_\xi \in N(v_\ell)\setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi\to v_\ell}\right)}{\left\|\boldsymbol{\alpha}_\ell \circ \left(\bigcirc_{c_\xi \in N(v_\ell)\setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi\to v_\ell}\right)\right\|_1} \quad (20)$$

其中，$\circ$ 表示哈达玛积。

与变量节点 v_ℓ相关的分布（包括内在信息）的一种自然估计为

$$\hat{\mathbf{S}}_\ell = \frac{\boldsymbol{\alpha}_\ell \circ \left(\bigcirc_{c_p \in N(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right)}{\left\|\boldsymbol{\alpha}_\ell \circ \left(\bigcirc_{c_p \in N(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right)\right\|_1}. \quad (21)$$

正如我们很快将会看到的，式 (21) 正是我们所提出的去噪器的输出。

注 4。在我们的构造中，$q = 2^m$、$m \geq 1$，因为索引是由比特序列导出的。这为应用快速技术来实现相应因子图上的消息传递提供了可能。具体而言，可以利用快速沃尔什–哈达玛变换（FWHT）快速且高效地计算式 (19)，其中

$$\overline{\boldsymbol{\mu}}_{c_p\to v_\ell} \propto \mathrm{fwht}^{-1}\left(\prod_{v_j \in N(c_p)\setminus v_\ell} \mathrm{fwht}\left(\overline{\boldsymbol{\mu}}_{v_j\to c_p}\right)\right).$$

或者，也可以采用另一种有限域卷积，或采用适用于循环卷积的环结构，以构造适合快速傅里叶变换的局部因子函数 *[6], [41], [42]*。

有了这些工具，我们现在可以正式定义所提出的去噪器。

C. 稀疏回归 LDPC 去噪器

从概念上讲，可以用有效观测 $\mathbf{r}$ 初始化 LDPC 因子图的状态，运行 BP，然后根据 (21) 得到状态的估计值。如前所述，在不进行 BP 迭代时，局部估计会简化为 (9) 中给出的条件期望 $\mathbb{E}[\mathsf{S}_\ell|\mathsf{R}_\ell = \mathbf{r}_\ell]$。然而，随着 BP 算法迭代次数的增加，基于外码的计算树，S_ℓ 的估计值会逐步细化，直至达到一定深度。

定义 5（BP-N 去噪器）。令 N 表示要执行的 BP 迭代次数，其中 N 小于 LDPC 因子图的围长。BP-N 去噪器

1）根据（8），用针对 $\ell \in [L]$ 从 $\mathbf{r}_\ell$ 计算得到的估计值 $\boldsymbol{\alpha}_\ell$初始化 LDPC 因子图；2）沿因子图的边交替地进行 N 次变量到校验节点的消息（见（20））和校验节点到变量的消息（见（17）、（19）、（18）及注 4）的计算与传递；3）根据（21）计算更新后的状态估计。

随后，可将该去噪器的输出传递给 AMP 复合算法，以计算下一个残差，并用 Onsager项加以增强。

附录 A 中给出了与该去噪器对应的 Onsager 校正项的推导。接下来，我们通过数值模拟评估稀疏回归LDPC码的性能。

IV. 仿真结果

本节旨在刻画 SR-LDPC 码的性能。[1] 作为基准，我们将结果与 [31] 中介绍的级联 SPARC/LDPC 方案以及采用 5G-NR 二进制低密度奇偶校验码编码的 BPSK 方案进行比较。需要指出的是，后一种比较的参考价值有限，因为 SR-LDPC 码可以使用实数信道输入，而 5G-NR 码则受限于二进制输入；尽管如此，我们仍进行这项比较，以考察 SR-LDPC 码能否与当前最先进且广泛使用的码相媲美。

所关注的场景是通过 7350 次实数信道使用传输 5888 个信息比特。我们将 SR-LDPC 码率定义为信息比特数与信道使用次数之比；因此，有$R_{\mathrm{SRLDPC}} \approx 0.80$。所采用的非二元 LDPC 码是一个定义在 GF(256) 上的 (751, 736) 码（$R_{\mathrm{LDPC}} \approx 0.98$），其边通过渐进式边增长（PEG）生成，权重则从 $\mathbb{F}_{256} \setminus 0$的元素中均匀随机选取。度为 2 的变量节点占比设置得比通常更高，以便 AMP-BP 迭代能在高噪声环境中启动。AMP-BP 解码器最多运行 100 次迭代，随后非二进制 LDPC BP 解码器再运行 100 次迭代，或直到获得有效码字。图 1 展示了我们的结果。

[1]用于生成这些结果的源代码可在网上获取：https://github.com/EngProjects/mMTC/tree/code。

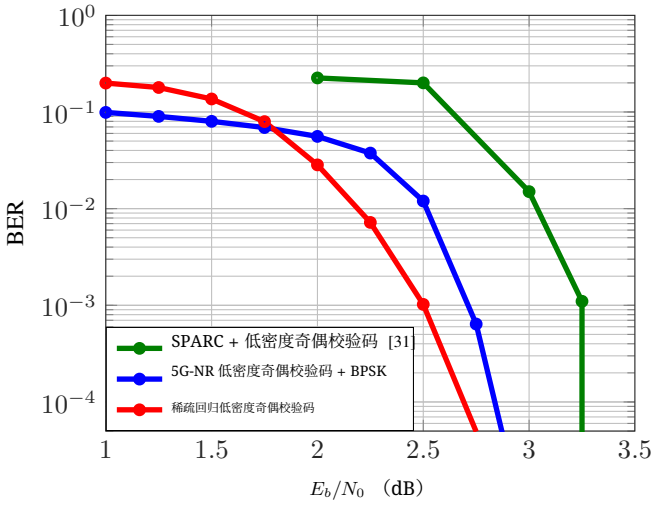

图 1：稀疏回归低密度奇偶校验码、 [31]，中的 SPARC/LDPC 级联结构，以及采用 5G-NR 二进制低密度奇偶校验码编码的 BPSK 的误码率性能比较，作为 E_b/N_0 的函数。与采用低密度奇偶校验码编码的 BPSK 以及 [31] 中的方案相比，SR-LDPC 码达到目标误码率所需的E_{b}/N_0 更低。

从图 1 可以清楚看出，在误码率为 10^{-3} 时，稀疏回归 LDPC 码相较于其他 SPARC/LDPC 级联编码结构，性能提升约 0.75 dB。此外，在某些工作区间内，SR-LDPC 码的性能优于采用 LDPC 编码的 5G-NR BPSK；不过需要指出的是，采用 LDPC 编码的 5G-NR BPSK 的误码平层低于 SR-LDPC 码。

V. 结论

总之，本文介绍了稀疏回归低密度奇偶校验码及其译码。稀疏回归码是一种级联结构，由内层 SPARC 类码和外层非二进制低密度奇偶校验码组成。内层码使用近似消息传递进行译码，其中动态去噪器在外层低密度奇偶校验码的因子图上运行置信传播，以在每次迭代中改进状态估计。经过多次 AMP-BP 解码器迭代后，将最终的有效观测输入标准的低密度奇偶校验置信传播译码器，以纠正接收信号中可能存在的任何残差误差。数值结果表明，稀疏回归码的性能优于标准低密度奇偶校验码和其他 SPARC/LDPC 级联结构。

如引言中所述，在某些条件下，SPARC 和低密度奇偶校验码均可达到信道容量，但这两类码通常在短码长时性能不佳。稀疏回归低密度奇偶校验码的成功表明，SPARC 与低密度奇偶校验码能够无缝结合，从而显著提升性能。未来的研究方向包括优化外层低密度奇偶校验码，并将编码解混 [37] 应用于 SR-LDPC 码，以支持多个用户。

参考文献

[1] R. Gallager, 《低密度奇偶校验码》, IEEE 信息论汇刊, 第 8 卷, 第 1 期, 第 21–28 页, 1962 年。[2] D. J. C. MacKay, 《基于极稀疏矩阵的优良纠错码》, IEEE 信息论汇刊, 第 45 卷, 第 2 期, 第 399–431 页, 1999 年。[3] M. G. Luby、M. Mitzenmacher、M. A. Shokrollahi 和 D. A. Spielman, 《利用非规则图改进低密度奇偶校验码》, IEEE 信息论汇刊, 第 47 卷, 第 2 期, 第 585–598 页, 2001 年。[4] T. J. Richardson 和 R. L. Urbanke, 《消息传递译码下低密度奇偶校验码的信道容量》, IEEE 信息论汇刊, 第 47 卷, 第 2 期, 第 599–618 页, 2001 年。[5] S.-Y. Chung、T. J. Richardson 和 R. L Urbanke, 《利用高斯近似分析低密度奇偶校验码的和积译码》, IEEE 信息论汇刊, 第 47 卷, 第 2 期, 第 657–670 页, 2001 年。[6] M. C. Davey 和 D. J. C. MacKay, 《GF(q) 上的低密度奇偶校验码》, 载于《信息论研讨会》。IEEE, 1998 年, 第 70–71 页。[7] A. Bennatan 和 D. Burshtein, 《适用于任意离散无记忆信道的非二元低密度奇偶校验码设计与分析》, IEEE 信息论汇刊, 第 52 卷, 第 2 期, 第 549–583 页, 2006 年。[8] T. J. Richardson 和 R. L. Urbanke, 《现代编码理论》, 剑桥大学出版社, 2008 年。[9] D. J. Costello、L. Dolecek、T. E. Fuja、J. Kliewer、D. G. M. Mitchell 和 R. Smarandache, 《图上的空间耦合稀疏码：理论与实践》, 《IEEE 通信杂志》, 第 52 卷, 第 7 期, 第 168–176 页, 2014 年。[10] A. J. Felstrom 和 K. Sh. Zigangirov, 《具有低密度奇偶校验矩阵的时变周期卷积码》, IEEE 信息论汇刊, 第 45 卷, 第 6 期, 第 2181–2191 页, 1999 年。[11] M. Lentmaier、A. Sridharan、D. J. Costello 和 K. Sh. Zigangirov, 《低密度奇偶校验卷积码的迭代译码阈值分析》, IEEE 信息论汇刊, 第 56 卷, 第 10 期, 第 5274–5289 页, 2010 年。[12] S. Kudekar、T. J. Richardson 和 R. L. Urbanke, 《空间耦合系综在置信传播下普遍达到信道容量》, IEEE 信息论汇刊, 第 59 卷, 第 12 期, 第 7761–7813 页, 2013 年。[13] A. Yedla、Y.-Y. Jian、P. S. Nguyen 和 H. D. Pfister, 《耦合标量递归中麦克斯韦饱和的一个简单证明》, IEEE 信息论汇刊, 第 60 卷, 第 11 期, 第 6943–6965 页, 2014 年。[14] S. Kumar、A. J. Young、N. Macris 和 H. D. Pfister, 《二元输入记忆无关对称信道上的空间耦合低密度奇偶校验码和低密度生成矩阵码的阈值饱和》, IEEE 信息论汇刊, 第 60 卷, 第 12 期, 第 7389–7415 页, 2014 年。[15] I. Andriyanova 和 A. Graell i Amat, 《二元擦除信道上非二元空间耦合低密度奇偶校验码的阈值饱和》, IEEE 信息论汇刊, 第 62 卷, 第 5 期, 第 2622–2638 页, 2016 年。[16] D. Declercq 和 M. Fossorier, 《GF (q) 上非二元低密度奇偶校验码的译码算法》, IEEE 通信汇刊, 第 55 卷, 第 4 期, 第 633–643 页, 2007 年。[17] A. Voicila、D. Declercq、F. Verdier、M. Fossorier 和 P. Urard, 《高阶域中非二元低密度奇偶校验码的低复杂度译码》, IEEE 通信汇刊, 第 58 卷, 第 5 期, 第 1365–1375 页, 2010 年。[18] B.-Y. Chang、D. Divsalar 和 L. Dolecek, 《适用于短码块长度的非二元原型图低密度奇偶校验码》, 载于《信息论研讨会》。IEEE, 2012 年, 第 282–286 页。[19] A. Joseph 和 A. R. Barron, 《中等字典大小的最小二乘叠加码在高达信道容量的码率下具有可靠性》, IEEE 信息论汇刊, 第 58 卷, 第 5 期, 第 2541–2557 页, 2012 年。[20] A. Joseph 和 A. R. Barron, 《快速稀疏叠加码具有近似指数级的误差概率，适用于 $R < C$》, IEEE 信息论汇刊, 第 60 卷, 第 2 期, 第 919–942 页, 2013 年。[21] R. Venkataramanan、S. Tatikonda 和 A. Barron, 《稀疏回归码》, 《通信与信息论基础与趋势》, 第 15 卷, 第 1–2 期, 第 1–195 页, 2019 年。[22] D. L. Donoho, 《压缩感知》, IEEE 信息论汇刊, 第 52 卷, 第 4 期, 第 1289–1306 页, 2006 年。[23] E. J. Candès、J. Romberg 和 T. Tao, 《稳健不确定性原理：从高度不完整的频率信息中精确重构信号》, IEEE 信息论汇刊, 第 52 卷, 第 2 期, 第 489–509 页, 2006 年。[24] C. Rush、A. Greig 和 R. Venkataramanan, 《通过近似消息传递译码实现容量可达稀疏叠加码》, IEEE 信息论汇刊, 第 63 卷, 第 3 期, 第 1476–1500 页, 2017 年。

[25] C. Rush、K. Hsieh 和 R. Venkataramanan, 《采用 AMP 译码的容量可达空间耦合稀疏叠加码》, IEEE 信息论汇刊, 第 67 卷, 第 7 期, 第 4446–4484 页, 2021 年。[26] D. L. Donoho、A. Maleki 和 A. Montanari, 《压缩感知中的消息传递算法》, 美国国家科学院院刊, 第 106 卷, 第 45 期, 第 18914–18919 页, 2009 年。[27] M. Bayati 和 A. Montanari, 《稠密图上的消息传递动态及其在压缩感知中的应用》, IEEE 信息论汇刊, 第 57 卷, 第 2 期, 第 764–785 页, 2011 年。[28] A. Javanmard 和 A. Montanari, 《一般近似消息传递算法的状态演化及其在空间耦合中的应用》, IMA 信息与推断, 第 2 卷, 第 2 期, 第 115–144 页, 2013 年。[29] M. Bayati、M. Lelarge 和 A. Montanari, 《多面体相变与消息传递算法的普适性》, 应用概率年刊, 第 25 卷, 第 2 期, 第 753–822 页, 2015 年。[30] R. Berthier、A. Montanari 和 P.-M. Nguyen, 《采用非可分函数的近似消息传递的状态演化》, IMA 信息与推断, 第 9 卷, 第 1 期, 第 33–79 页, 2020 年。[31] A. Greig 和 R. Venkataramanan, 《提升稀疏叠加码有限长度性能的技术》, IEEE 通信汇刊, 第 66 卷, 第 3 期, 第 905–917 页, 2017 年。[32] H. Cao 和 P. O. Vontobel, 《利用列表译码提升稀疏回归码的有限长度性能》, IEEE 通信汇刊, 第 69 卷, 第 7 期, 第 4282–4293 页, 2021 年。[33] S. Liang 、 C. Liang 、 J. Ma 和 L. Ping, 《压缩编码、基于 AMP 的译码与模拟空间耦合》, IEEE 通信汇刊, 第 68 卷, 第 12 期, 第 7362–7375 页, 2020 年。[34] L. Liu、C. Liang、J. Ma 和 L. Ping, 《编码系统中 AMP 的容量最优性》, IEEE 信息论汇刊, 第 67 卷, 第 7 期, 第 4429–4445 页, 2021 年。[35] A. Fengler、P. Jung 和 G. Caire, 《用于无源随机接入的 SPARC》, IEEE 信息论汇刊, 第 67 卷, 6915, 2021 年, 第 10 期, 第 6894 页。[36] V. K. Amalladinne、A. K. Pradhan、C. Rush、J.-F. Chamberland 和 K. R. Narayanan, 《采用编码压缩感知的无源随机接入：融合近似消息传递与置信传播》, IEEE 信息论汇刊, 第 68 卷, 第 4 期, 第 2384–2409 页, 2022 年。[37] J. R. Ebert、V. K. Amalladinne、S. Rini、J.-F. Chamberland 和 K. R. Narayanan, 《面向无源随机接入的编码解混》, IEEE 信号处理汇刊, 第 70 卷, 第 2972–2984 页, 2022 年。[38] N. Wiberg、H.-A. Loeliger 和 R. Kotter, 《一般图上的码与迭代译码》, 欧洲电信汇刊, 第 6 卷, 第 5 期, 第 513–525 页, 1995 年。[39] F. R. Kschischang、B. J. Frey 和 H.-A. Loeliger, 《因子图与和积算法》, IEEE 信息论汇刊, 第 47 卷, 第 2 期, 第 498–519 页, 2001 年。[40] H.-A. Loeliger, 《因子图导论》, IEEE 信号处理杂志, 第 21 卷, 第 1 期, 第 28–41 页, 2004 年。[41] H. Song 和 J. R. Cruz, 《面向磁记录的 Q 元低密度奇偶校验码低复杂度译码》, IEEE 磁学汇刊, 第 39 卷, 第 2 期, 第 1081–1087 页, 2003 年。[42] A. Goupil、M. Colas、G. Gelle 和 D. Declercq, 《阿贝尔群上一般低密度奇偶校验码的基于 FFT 的置信传播译码》, IEEE 通信汇刊, 第 55 卷, 第 4 期, 第 644–649 页, 2007 年。

附录 A Onsager项的推导

直观而言，Onsager 项的作用是（渐近地）消除 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{z}^{(t)}$ 与 $\mathrm{s}^{(t)}$ 之间的一阶相关性，从而保持一种有利于快速收敛和分析的结构。这个因子是 AMP 算法的典型特征，出现在式（6）中，其表达式为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbf{z}^{(t-1)}}{n}\operatorname{div}\boldsymbol{\eta}_{t-1}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}^{(t-1)}+\mathbf{s}^{(t-1)}\right)\\&=\frac{\mathbf{z}^{(t-1)}}{n}\operatorname{div}\boldsymbol{\eta}_{t-1}\left(\mathbf{r}^{(t-1)}\right)\end{aligned}$$

其中，散度算子可以展开为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{r}\right)=\sum_{\ell\in[L]}\operatorname{div}\hat{\mathbf{s}}_{\ell}(\mathbf{r},\tau)=\sum_{\ell\in[L]}\sum_{g\in\mathbb{F}_q}\frac{\partial\hat{s}_{\ell}\left(g,\mathbf{r},\tau\right)}{\partial\mathbf{r}_{\ell}(g)}.\quad(22)$$

因此，作为中间步骤，我们必须计算 $\hat{s}_{\ell}(g,\mathrm{r}\ \tau)$ 关于 $\mathrm{r}_{\ell}(g)$ 的偏导数。在以下条件下，这一计算会大大简化。

条件 6（子周长 AMP-BP）。当每个 AMP 去噪步骤在低密度奇偶校验码的因子图上执行的消息传递迭代次数少于该图的最短环长度时，则称 BP-N 去噪器满足子周长 AMP-BP 条件。

该条件确保去噪过程中采用的消息传递操作能够生成不含环的有效计算树。幸运的是，这正是我们主要关注的情形。

引理 7。在条件 6 下，$\hat{s}_{\ell}(g,\mathrm{r}\ \tau)$ 关于 $\mathrm{r}_{\ell}(g)$ 的偏导数等于

$$\frac{\partial\hat{s}_{\ell}\left(g,\mathbf{r},\tau\right)}{\partial\mathbf{r}_{\ell}(g)}=\frac{1}{\tau^2}\hat{s}_{\ell}\left(g,\mathbf{r},\tau\right)\left(1-\hat{s}_{\ell}\left(g,\mathbf{r},\tau\right)\right)\quad(23)$$

其中 $g\in\mathbb{F}_q$。

证明：回顾一下，式 (21) 中定义的 BP去噪器的输出可表示为

$$\begin{aligned}\hat{s}_{\ell}\left(g,\mathbf{r},\tau\right)&=\frac{\boldsymbol{\alpha}_{\ell}(g)\prod_{p\in N(v_{\ell})}\boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_{\ell}}(g)}{\sum_{h\in\mathbb{F}_q}\boldsymbol{\alpha}_{\ell}(h)\prod_{p\in N(v_{\ell})}\boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_{\ell}}(h)}\\&=\frac{\boldsymbol{\alpha}_{\ell}(g)\boldsymbol{\mu}_{v_{\ell}\to c_0}(g)}{\sum_{h\in\mathbb{F}_q}\boldsymbol{\alpha}_{\ell}(h)\boldsymbol{\mu}_{v_{\ell}\to c_0}(h)}.\end{aligned}\quad(24)$$

在条件 6 下，信念向量 $\boldsymbol{\mu}_{v_{\ell}\to c_0}$ 仅基于外部信息，因此由 $\{\mathbf{r}^{j}:\ j\in[L]\setminus\{\ell\}\}$ 确定。由此，我们得出

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mu}_{v_{\ell}\to c_0}(g)}{\partial\mathbf{r}_{\ell}(g)}=0.$$

在这种情况下，我们可以直接计算所需的导数，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{s}_{\ell}\left(g,\mathbf{r},\tau\right)}{\partial\mathbf{r}_{\ell}(g)}&=\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_{\ell}(g)}\frac{e^{\frac{\mathbf{r}_{\ell}(g)}{\tau^2}}\boldsymbol{\mu}_{v_{\ell}\to c_0}(g)}{\sum_{h\in\mathbb{F}_q}e^{\frac{\mathbf{r}_{\ell}(h)}{\tau^2}}\boldsymbol{\mu}_{v_{\ell}\to c_0}(h)}\\&=\frac{1}{\tau^2}\frac{e^{\frac{\mathbf{r}_{\ell}(g)}{\tau^2}}\boldsymbol{\mu}_{v_{\ell}\to c_0}(g)}{\sum_{h\in\mathbb{F}_q}e^{\frac{\mathbf{r}_{\ell}(g)}{\tau^2}}\boldsymbol{\mu}_{v_{\ell}\to c_0}(g)}\\&\quad-\frac{1}{\tau^2}\frac{\left(e^{\frac{\mathbf{r}_{\ell}(g)}{\tau^2}}\boldsymbol{\mu}_{v_{\ell}\to c_0}(g)\right)^2}{\left(\sum_{h\in\mathbb{F}_q}e^{\frac{\mathbf{r}_{\ell}(g)}{\tau^2}}\boldsymbol{\mu}_{v_{\ell}\to c_0}(g)\right)^2}\\&=\frac{1}{\tau^2}\hat{s}_{\ell}\left(g,\mathbf{r},\tau\right)\left(1-\hat{s}_{\ell}\left(g,\mathbf{r},\tau\right)\right).\end{aligned}$$

最后一行对应于引理的陈述。 ■

值得强调的是，只要满足条件 6，无论在因子图上计算多少轮置信传播轮次，式 (23) 中的导数都保持不变。在这种情况下，式 (22) 的散度也具有相同的简单形式。

命题 8。 $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ 关于 $\mathbf{r}$ 的散度等于

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{r}\right)=\frac{1}{\tau^2}\left(\left\|\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{r}\right)\right\|_1-\left\|\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{r}\right)\right\|^2\right).\quad(25)$$

证明：我们将散度算子展开为

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{r}\right)&=\sum_{\ell\in[L]}\operatorname{div}\hat{\mathbf{s}}_{\ell}\left(\mathbf{r},\tau\right)=\sum_{\ell\in[L]}\sum_{g\in\mathbb{F}_q}\frac{\partial\hat{s}_{\ell}\left(g,\mathbf{r},\tau\right)}{\partial\mathbf{r}_{\ell}(g)}\\&=\sum_{\ell\in[L]}\sum_{g\in\mathbb{F}_q}\frac{1}{\tau^2}\hat{s}_{\ell}\left(g,\mathbf{r},\tau\right)\left(1-\hat{s}_{\ell}\left(g,\mathbf{r},\tau\right)\right)\\&=\frac{1}{\tau^2}\left(\left\|\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{r}\right)\right\|_1-\left\|\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{r}\right)\right\|^2\right).\end{aligned}\quad(26)$$

最后一个等式成立，是因为根据引理 7，既然 $\hat{s}_{\ell}(g,\mathrm{r}\ \tau)$ 介于零和一之间，那么相应的关于 $\mathrm{r}_{\ell}(g)$ 的偏导数始终非负。 ■

附录 B 去噪器是利普希茨连续的

本文中 AMP 严格应用的数学基础由 Berthier、Montanari 和 Nguyen 在 [30] 中给出。要使非可分函数的状态演化成立，条件之一是去噪器必须满足某个阶数的伪利普希茨条件。对于当前问题，我们能够证明更强的利普希茨条件，而这已足够。因此，本节的主要目标是证明定义 5 中引入的去噪器在条件 6 下是利普希茨连续的。为此，我们将证明 $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ 关于 $\mathbf{r}$ 的雅可比矩阵各元素的绝对值一致有界。

回顾一下，去噪器采用分段形式，如定义 5 所述。区段 ℓ 的向量估计为

$$\hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}) = \sum_{g\in\mathbb{F}_q} \Pr\left(V_\ell = g|\mathbf{R}_{\text{tree}} = \mathbf{r}_{\text{tree}}\right)\mathbf{e}_g,$$

其中，$\mathbf{R}_{\text{tree}}$ 表示与以区段 ℓ 为根的低密度奇偶校验码计算树相关的测量值。(21) 中得到的（实际）缩放因子为

$$\hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}) = \frac{\bigcirc_{p\in N_0(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}}{\left\|\bigcirc_{p\in N_0(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right\|_1}. \tag{27}$$

其中，$N_0(v_\ell)$ 表示 v_ℓ 的邻域，包括局部观测和 $\boldsymbol{\mu}_{c_0\to v_\ell} = \boldsymbol{\alpha}_\ell$。我们最终关注如下形式的雅可比矩阵元素：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r},g)}{\partial\mathbf{r}_j(h)} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_j(h)}\frac{\prod_{p\in N_0(v_\ell)}\boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}(g)}{\left\|\bigcirc_{p\in N_0(v_\ell)}\boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right\|_1}\\ &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_j(h)}\frac{\boldsymbol{\alpha}_\ell(g)\prod_{p\in N(v_\ell)}\boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}(g)}{\sum_{k\in\mathbb{F}_q}\boldsymbol{\alpha}_\ell(k)\prod_{p\in N(v_\ell)}\boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}(k)}\end{aligned} \tag{28}$$

对于 g、$h\in\mathbb{F}_q$ 和 ℓ、$j\in[L]$。我们采用分治法来识别并界定这些导数。具体而言，我们关注这样一棵有根树：取外层低密度奇偶校验码的因子图，以 v_ℓ 为根，并仅保留参与计算 $\hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}\ g)$ 的节点。根据条件 6，该子图必须构成一棵真树；图2给出了一个示意图，以说明这一过程的结果。

我们希望根据 v_ℓ 和 v_j 在这棵有根树中的距离，界定 (28) 中导数的大小。我们从局部观测开始。

命题 9。（局部观测） $\boldsymbol{\alpha}_j$ 关于 $\mathbf{r}_k(h)$ 的偏导数为

$$\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}_j}{\partial\mathbf{r}_k(h)} = \begin{cases}\frac{1}{\tau^2}\boldsymbol{\alpha}_j(h)\left(\mathbf{e}_h-\boldsymbol{\alpha}_j\right) & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases} \tag{29}$$

$\forall h\in\mathbb{F}_q$，其中 $\tau>0$ 是有效观测的标准差。

证明：根据式（8）的定义，向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 为

$$\boldsymbol{\alpha}_j(g) = \frac{e^{\frac{\mathbf{r}_j(g)}{\tau^2}}}{\sum_{k\in\mathbb{F}_q}e^{\frac{\mathbf{r}_j(k)}{\tau^2}}} \qquad \forall g\in\mathbb{F}_q.$$

当 $j\neq k$ 时，立即可得 $\partial\boldsymbol{\alpha}_j/\partial\mathbf{r}_k(h) = 0$ 不依赖于 $\mathbf{r}_k(h)$。因此，我们考虑 $k=j$ 的情形。当 $g=h$ 时，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}_j(h)}{\partial\mathbf{r}_j(h)} &= \frac{1}{\tau^2}\frac{e^{\frac{\mathbf{r}_j(h)}{\tau^2}}}{\sum_{k\in\mathbb{F}_q}e^{\frac{\mathbf{r}_j(k)}{\tau^2}}} - \frac{1}{\tau^2}\frac{e^{\frac{\mathbf{r}_j(h)}{\tau^2}}e^{\frac{\mathbf{r}_j(h)}{\tau^2}}}{\left(\sum_{k\in\mathbb{F}_q}e^{\frac{\mathbf{r}_j(k)}{\tau^2}}\right)^2}\\ &= \frac{1}{\tau^2}\boldsymbol{\alpha}_j(h)\left(1-\boldsymbol{\alpha}_j(h)\right).\end{aligned}$$

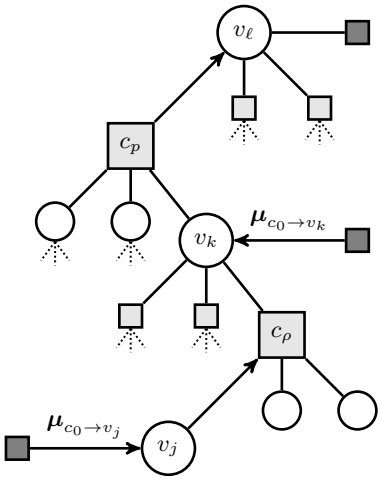

图2：变量节点 v_ℓ 的计算树。该计算树通过取外层低密度奇偶校验码的因子图、将 v_ℓ设为根节点，并仅保留计算 $\hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}\ g)$ 所涉及的节点而获得。我们使用这一数据结构来计算式（28）中的偏导数。

当 $g\neq h$ 时，可得

$$\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}_j(g)}{\partial\mathbf{r}_j(h)} = -\frac{1}{\tau^2}\frac{e^{\frac{\mathbf{r}_j(g)}{\tau^2}}e^{\frac{\mathbf{r}_j(h)}{\tau^2}}}{\left(\sum_{\kappa\in\mathbb{F}_q}e^{\frac{\mathbf{r}_j(\kappa)}{\tau^2}}\right)^2} = -\frac{1}{\tau^2}\boldsymbol{\alpha}_j(g)\boldsymbol{\alpha}_j(h).$$

汇总这些结果并将其压缩为更紧凑的形式后，我们得到式（29），这就是所需的表达式。 ■

推论 10。$\boldsymbol{\alpha}_j$ 关于 $\mathbf{r}_k(h)$ 的偏导数的绝对值有界于

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}_j}{\partial\mathbf{r}_k(h)}\right| \le \frac{1}{4\tau^2} \tag{30}$$

其中，$\tau>0$ 是有效观测的标准差。

当 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 是一个有效的概率向量时，这个推论的证明是显然的，本文正是这种情况。我们还注意到，根据近似消息传递的状态演化，在每次迭代中 $\tau^2\ge\sigma^2$，与迭代次数无关。因此，我们可以在各次迭代之间建立一个统一的界。现在我们可以证明，只要$\ell=j$，即在计算树的根层级，(28) 的绝对值就是有界的。

命题 11（根导数）。$\hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}\ g)$ 关于 $\mathbf{r}_\ell(h)$ 的偏导数为

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}_\ell(h)} = \frac{1}{\tau^2}\hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r},h)\left(\mathbf{e}_h-\hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r})\right) \qquad \forall h\in\mathbb{F}_q \tag{31}$$

其中，$\tau>0$ 是有效观测的标准差。

证明：利用命题 9，并以 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示标准内积，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_\ell(h)} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\ell(h)} \frac{\boldsymbol{\alpha}_\ell \circ \bigcirc_{p\in N(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}}{\left\|\boldsymbol{\alpha}_\ell \circ \bigcirc_{p\in N(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right\|_1} \\
&= \frac{\boldsymbol{\alpha}_\ell(h)}{\tau^2} \frac{(\mathbf{e}_h - \boldsymbol{\alpha}_\ell) \circ \left(\bigcirc_{c_p\in \mathrm{N}(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right)}{\left\|\boldsymbol{\alpha}_\ell \circ \left(\bigcirc_{c_p\in \mathrm{N}(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right)\right\|_1} \\
&- \frac{\boldsymbol{\alpha}_\ell(h)}{\tau^2} \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}) \frac{\left\langle \mathbf{e}_h - \boldsymbol{\alpha}_\ell, \bigcirc_{c_p\in \mathrm{N}(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right\rangle}{\left\|\boldsymbol{\alpha}_\ell \circ \left(\bigcirc_{c_p\in \mathrm{N}(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right)\right\|_1} \\
&= \frac{\boldsymbol{\alpha}_\ell(h)}{\tau^2} \frac{\mathbf{e}_h \circ \left(\bigcirc_{c_p\in \mathrm{N}(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right)}{\left\|\boldsymbol{\alpha}_\ell \circ \left(\bigcirc_{c_p\in \mathrm{N}(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right)\right\|_1} \\
&- \frac{\boldsymbol{\alpha}_\ell(h)}{\tau^2} \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}) \frac{\left\langle \mathbf{e}_h, \bigcirc_{c_p\in \mathrm{N}(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right\rangle}{\left\|\boldsymbol{\alpha}_\ell \circ \left(\bigcirc_{c_p\in \mathrm{N}(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right)\right\|_1} \\
&= \frac{1}{\tau^2} \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}, h)\left(\mathbf{e}_h - \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r})\right),
\end{aligned}$$

这就是所需的表达式。 ■

推论 12. $\hat{\mathrm{s}}_\ell(\mathbf{r})$ 关于 $\mathrm{r}_\ell(h)$ 的偏导数的绝对值有如下界：

$$\left|\frac{\partial \hat{\mathrm{s}}_\ell(\mathrm{r})}{\partial \mathrm{r}_\ell(h)}\right| \le \frac{1}{4\tau^2} \tag{32}$$

该推论的证明与推论 10 的证明类似，因为和 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 一样，$\hat{\mathrm{s}}_\ell(\mathrm{r})$ 也是一个有效的概率向量。

命题 11 为我们希望确立的一般性结果提供了蓝图。然而，$\ell \neq j$ 的情况更为复杂，因为我们必须涉及消息传递规则。为此，我们利用数学归纳法得到了一个关键的中间结果。我们从最接近根节点的变量节点开始，然后逐步向外推进。

为避免符号上的混乱，我们将证明限制在所有边权重均等于 $1 \in \mathbb{F}_q$ 的情形。从概念上讲，边可以解释为对置信向量进行置换。从界定偏导数的角度来看，这种操作无伤大雅，但置换所带来的计算十分繁琐，因此我们聚焦于更简单的情形。接下来，我们假设满足以下条件。

条件 13。低密度奇偶校验码外码的因子图中，所有边权重均等于 $1 \in \mathbb{F}_q$。

将以下命题推广到边权重任意的情形（即超出条件 13 的情形），在概念上是直接明了的。

命题 14. 假设条件 6 成立，并设 v_j 是计算树中根节点 v_ℓ 的一个后代。此外，设 $c_p \in N(v_\ell)$ 是树中从 v_ℓ 到 v_j 的路径上 v_ℓ 的唯一校验邻居。那么，存在向量 $\boldsymbol{\nu}$，满足 $\mathbf{0} \preceq \boldsymbol{\nu} \preceq \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}$，使得 $\boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}$ 关于 $\mathrm{r}j(h)$ 的偏导数为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} = \frac{1}{\tau^2}\left(\boldsymbol{\nu} - \|\boldsymbol{\nu}\|_1 \boldsymbol{\mu}_{c_p\to v_\ell}\right), \tag{33}$$

其中，$\tau > 0$ 是有效观测的标准差。这里，$\preceq$ 表示对向量中各个分量进行逐元素比较。

证明：根据条件 6，我们知道 v_j 在以 v_ℓ 为根的计算树中至多出现一次。因此，我们通过对计算树上 v_ℓ 与其后代 v_j 之间的距离进行数学归纳，证明式（33）。我们所考虑的距离仅计算 v_ℓ 与 v_j 之间变量节点的数量。在开始之前，我们指出，如果 v_j 不是 v_ℓ 的后代，那么相应的偏导数为零，结论显然成立。

我们首先给出对基例和归纳步骤都很有用的一般性结果。设 v_j 是 v_ℓ 的后代，且设 v_k 是从 v_ℓ 到 v_j 的路径上 v_ℓ 的变量子节点。设 c_p 是 $N(v_\ell) \cap N(v_k)$ 中的唯一校验节点，并设 c_ϱ 是从 v_k 到 v_j 的路径上 v_k 的唯一校验节点子节点；如果 $v_k = v_j$，则令 $\varrho = 0$。于是，我们有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{v_k\to c_p}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \frac{\bigcirc_{c_\xi\in N_0(v_k)\setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi\to v_k}}{\left\|\bigcirc_{c_\xi\in N_0(v_k)\setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi\to v_k}\right\|_1}. \tag{34}$$

我们还可以考察概率向量 $\boldsymbol{\mu}_{c_\varrho\to v_k}$ 的偏导数。设 $v_k \neq v_j$，并令 v_o 为从 v_ℓ 到 v_j 的路径上 v_k 的唯一变量子节点。利用 $\mathbb{F}_q$ 卷积，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{c_\varrho\to v_k}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \left(\bigodot_{v_l\in N(c_\varrho)\setminus v_k} \boldsymbol{\mu}_{v_l\to c_\varrho}\right) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{v_o\to c_\varrho}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \odot \left(\bigodot_{v_l\in N(c_\varrho)\setminus\{v_k,v_o\}} \boldsymbol{\mu}_{v_l\to c_\varrho}\right) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{v_o\to c_\varrho}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \odot \boldsymbol{\nu}_{c_\varrho\setminus v_k, v_o}.
\end{aligned} \tag{35}$$

我们强调，$\boldsymbol{\nu}_{c_\varrho\setminus v_k,\ v_o}$（如上文隐式定义）是一个概率分布。

在确立了这些结果之后，我们将注意力转向基例：v_j 是 v_ℓ（$v_k = v_j$的变量子节点，

$\varrho = 0$)。应用（34）和命题 9，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{v_j \to c_p}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \frac{\boldsymbol{\alpha}_j \circ \left(\bigcirc_{c_\xi \in N(v_j) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_j} \right)}{\left\| \boldsymbol{\alpha}_j \circ \left(\bigcirc_{c_\xi \in N(v_j) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_j} \right) \right\|_1} \\
&= \frac{\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_j}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \circ \left(\bigcirc_{c_\xi \in N(v_j) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_j} \right)}{\left\langle \boldsymbol{\alpha}_j, \bigcirc_{c_\xi \in N(v_j) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_j} \right\rangle} \\
&- \boldsymbol{\mu}_{v_j \to c_p} \frac{\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_j}{\partial \mathbf{r}_j(h)}, \bigcirc_{c_\xi \in N(v_j) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_j} \right\rangle}{\left\langle \boldsymbol{\alpha}_j, \bigcirc_{c_\xi \in N(v_j) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_j} \right\rangle} \\
&= \frac{1}{\tau^2} \frac{\boldsymbol{\alpha}_j(h) \mathbf{e}_h \circ \left(\bigcirc_{c_\xi \in N(v_j) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_j} \right)}{\left\langle \boldsymbol{\alpha}_j, \bigcirc_{c_\xi \in N(v_j) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_j} \right\rangle} \\
&- \frac{1}{\tau^2} \boldsymbol{\mu}_{v_j \to c_p} \frac{\left\langle \boldsymbol{\alpha}_j(h) \mathbf{e}_h, \bigcirc_{c_\xi \in N(v_j) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_j} \right\rangle}{\left\langle \boldsymbol{\alpha}_j, \bigcirc_{c_\xi \in N(v_j) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_j} \right\rangle} \\
&= \frac{1}{\tau^2} \left(\boldsymbol{\nu}_{v_j \to c_p} - \left\| \boldsymbol{\nu}_{v_j \to c_p} \right\|_1 \boldsymbol{\mu}_{v_j \to c_p} \right),
\end{aligned} \tag{36}$$

其中

$$\boldsymbol{\nu}_{v_j \to c_p} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_j(h) \mathbf{e}_h \circ \left(\bigcirc_{c_\xi \in N(v_j) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_j} \right)}{\left\langle \boldsymbol{\alpha}_j, \bigcirc_{c_\xi \in N(v_j) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_j} \right\rangle}.$$

根据构造，我们有 $\mathbf{0} \preceq \boldsymbol{\nu}_{v_j \to c_p} \preceq \boldsymbol{\mu}_{v_j \to c_p}$。接下来考虑第二个图操作，并应用 (35)，得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} &= \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{v_j \to c_p}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \odot \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_j} \\
&= \frac{1}{\tau^2} \left(\boldsymbol{\nu}_{v_j \to c_p} - \left\| \boldsymbol{\nu}_{v_j \to c_p} \right\|_1 \boldsymbol{\mu}_{v_j \to c_p} \right) \odot \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_j} \\
&= \frac{1}{\tau^2} \left(\boldsymbol{\nu}_{v_j \to c_p} \odot \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_j} - \left\| \boldsymbol{\nu}_{v_j \to c_p} \right\|_1 \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell} \right).
\end{aligned} \tag{37}$$

因此，在这种情况下，我们取 $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_{v_j \to c_p} \odot \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell,\ v_j}$ 作为一个合适的向量。根据 $\boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell,\ v_j}$ 是概率向量这一事实，再结合前述分量逐项序，可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} \preceq \boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\nu}_{v_j \to c_p} \odot \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_j} \\
&\preceq \boldsymbol{\mu}_{v_j \to c_p} \odot \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_j} = \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}.
\end{aligned}$$

此外，利用 $\mathbb{F}_q$ 卷积对非负向量的性质，可得

$$\|\boldsymbol{\nu}\|_1 = \left\| \boldsymbol{\nu}_{v_j \to c_p} \right\|_1 \left\| \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_j} \right\|_1 = \left\| \boldsymbol{\nu}_{v_j \to c_p} \right\|_1.$$

因此，对于 $\boldsymbol{\nu}$这一选择，我们得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} = \frac{1}{\tau^2} \left(\boldsymbol{\nu} - \|\boldsymbol{\nu}\|_1 \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell} \right), \tag{38}$$

如所声称。也就是说，基例符合命题 14 的结构。

现在我们考虑证明中的归纳步骤。作为假设，我们假定，对于所有根节点与 v_j 之间的距离小于或等于 $\gamma \in \mathbb{N}$ 的计算树，式 (33) 均成立。考虑一棵有根计算树，并假设树中 v_ℓ 与其后代 v_j 之间的距离恰好为 $\gamma+1$。根据条件 6，从 v_ℓ 到节点 v_j 存在唯一路径。令 v_k 为 v_ℓ 的变量子节点，且也是 v_j 的祖先；并将连接二者的唯一校验节点记为 $c_p \in N(v_\ell) \cap N(v_k)$。此外，令 $c_\varrho \in N(v_k)$ 为该邻域内唯一一个在计算树上是 v_j 祖先的校验节点。最后，令 $v_o \in N(c_\varrho)$ 为 v_k 的唯一变量子节点，且也是 v_j（或者也可能是 v_j 本身）的祖先。

以 v_k 为起点的子树可视为一棵包含 v_j 的有根树；这两个变量节点在该子树中的图距离恰为 γ。因此，我们的归纳假设适用。也就是说，存在向量 $\boldsymbol{\nu}$，使得 $\mathbf{0} \preceq \boldsymbol{\nu} \preceq \boldsymbol{\mu}_{c_\varrho \to v_k}$，其中 $\boldsymbol{\mu}_{c_\varrho \to v_k}$ 关于 $\mathbf{r}_j(h)$ 的偏导数等于

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{c_\varrho \to v_k}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} = \frac{1}{\tau^2} \left(\boldsymbol{\nu} - \|\boldsymbol{\nu}\|_1 \boldsymbol{\mu}_{c_\varrho \to v_k} \right). \tag{39}$$

应用 (34) 和归纳假设，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{v_k \to c_p}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \frac{\bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_k) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_k}}{\left\| \bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_k) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_k} \right\|_1} \\
&= \frac{\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{c_\varrho \to v_k}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \circ \left(\bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_k) \setminus c_p, c_\varrho} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_k} \right)}{\left\langle \boldsymbol{\mu}_{c_\varrho \to v_k}, \bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_k) \setminus c_p, c_\varrho} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_k} \right\rangle} \\
&- \boldsymbol{\mu}_{v_k \to c_p} \frac{\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{c_\varrho \to v_k}}{\partial \mathbf{r}_j(h)}, \bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_k) \setminus c_p, c_\varrho} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_k} \right\rangle}{\left\langle \boldsymbol{\mu}_{c_\varrho \to v_k}, \bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_k) \setminus c_p, c_\varrho} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_k} \right\rangle} \\
&= \frac{1}{\tau^2} \frac{\boldsymbol{\nu} \circ \left(\bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_k) \setminus c_p, c_\varrho} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_k} \right)}{\left\langle \boldsymbol{\mu}_{c_\varrho \to v_k}, \bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_k) \setminus c_p, c_\varrho} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_k} \right\rangle} \\
&- \frac{1}{\tau^2} \boldsymbol{\mu}_{v_k \to c_p} \frac{\left\langle \boldsymbol{\nu}, \bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_k) \setminus c_p, c_\varrho} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_k} \right\rangle}{\left\langle \boldsymbol{\mu}_{c_\varrho \to v_k}, \bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_k) \setminus c_p, c_\varrho} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_k} \right\rangle} \\
&= \frac{1}{\tau^2} \left(\boldsymbol{\nu}_{v_k \to c_p} - \left\| \boldsymbol{\nu}_{v_k \to c_p} \right\|_1 \boldsymbol{\mu}_{v_k \to c_p} \right),
\end{aligned} \tag{40}$$

其中我们使用了简写符号

$$\boldsymbol{\nu}_{v_k \to c_p} = \frac{\boldsymbol{\nu} \circ \left(\bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_k) \setminus c_p, c_\varrho} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_k} \right)}{\left\langle \boldsymbol{\mu}_{c_\varrho \to v_k}, \bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_k) \setminus c_p, c_\varrho} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_k} \right\rangle}.$$

我们强调，与之前一样，上述推导中的两项相互抵消。此外，根据构造，我们立即得到 $\mathbf{0} \preceq \boldsymbol{\nu}_{v_k \to c_p} \preceq \boldsymbol{\mu}_{v_k \to c_p}$。这些观察与基例的描述非常相似。

归纳步骤中第二个图操作的推导与基例完全类似，除了标记之外。具体而言，我们应用 (35) 并得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} &= \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{v_k \to c_p}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \odot \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_k} \\
&= \frac{1}{\tau^2} \left(\boldsymbol{\nu}_{v_k \to c_p} - \left\| \boldsymbol{\nu}_{v_k \to c_p} \right\|_1 \boldsymbol{\mu}_{v_k \to c_p} \right) \odot \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_k} \\
&= \frac{1}{\tau^2} \left(\boldsymbol{\nu}_{v_k \to c_p} \odot \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_k} - \left\| \boldsymbol{\nu}_{v_k \to c_p} \right\|_1 \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell} \right).
\end{aligned} \tag{41}$$

对于归纳步骤，我们将 $\boldsymbol{\nu}' = \boldsymbol{\nu}_{v_k \to c_p} \odot \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_k}$ 定义为候选向量。根据分量逐项序，我们可以写成

$$\begin{aligned}\mathbf{0} \preceq \boldsymbol{\nu}' &= \boldsymbol{\nu}_{v_k \to c_p} \odot \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_k} \\ &\preceq \boldsymbol{\mu}_{v_k \to c_p} \odot \boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_k} = \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}.\end{aligned}$$

如前所述，我们有

$$\|\boldsymbol{\nu}'\|_1 = \left\|\boldsymbol{\nu}_{v_k \to c_p}\right\|_1 \left\|\boldsymbol{\nu}_{c_p \setminus v_\ell, v_k}\right\|_1 = \left\|\boldsymbol{\nu}_{v_k \to c_p}\right\|_1 .$$

因此，候选向量 $\boldsymbol{\nu}'$ 满足 $\mathbf{0} \preceq \boldsymbol{\nu}' \preceq \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}$ 且

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} = \frac{1}{\tau^2}\left(\boldsymbol{\nu}' - \|\boldsymbol{\nu}'\|_1 \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}\right). \tag{42}$$

命题 14 的证明至此完成。■

我们几乎已经实现了证明 $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ 关于 $\mathbf{r}$ 的雅可比矩阵中各元素的绝对值均一致有界这一目标。为得到所需结果，只需将传入消息的偏导数与状态估计 $\hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}\ g)$ 的偏导数联系起来即可。下面给出具体论证。

命题 15. 在条件 6 下，雅可比矩阵中各元素的绝对值有界为

$$\left|\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}, g)}{\partial \mathbf{r}_j(h)}\right| \le \frac{1}{\tau^2} \quad \forall g, h \in \mathbb{F}_q, \ell, j \in [L], \tag{43}$$

其中，$\tau > 0$ 是有效观测的标准差。

证明：当 v_j 不出现在 v_ℓ的有根树中时，偏导数等于零，结论立即成立。此外，当 $v_\ell = v_j$时，结论由推论12得出。因此，我们可以只考虑 v_j 是 v_ℓ的后代这一情形。

令 c_p 为 $N(v_\ell)$ 中位于 v_ℓ 与 v_j之间路径上的唯一校验节点。根据命题 14，存在向量$\boldsymbol{\nu}$，满足 $\mathbf{0} \preceq \boldsymbol{\nu} \preceq \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}$，使得 $\boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}$关于 $\mathbf{r}_j(h)$ 的偏导数为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}}{\partial \mathbf{r}_j(h)} = \frac{1}{\tau^2}\left(\boldsymbol{\nu} - \|\boldsymbol{\nu}\|_1 \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}\right). \tag{44}$$

类比式 (40)，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_j(h)} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \frac{\bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_\ell}}{\left\|\bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_\ell)} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_\ell}\right\|_1} \\ &= \frac{1}{\tau^2} \frac{\boldsymbol{\nu} \circ \left(\bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_\ell) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_\ell}\right)}{\left\langle \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}, \bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_\ell) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_\ell} \right\rangle} \\ &\quad - \frac{1}{\tau^2} \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}) \frac{\left\langle \boldsymbol{\nu}, \bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_\ell) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_\ell} \right\rangle}{\left\langle \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}, \bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_\ell) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_\ell} \right\rangle} \\ &= \frac{1}{\tau^2}\left(\boldsymbol{\nu}_{v_\ell} - \|\boldsymbol{\nu}_{v_\ell}\|_1 \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r})\right),\end{aligned} \tag{45}$$

其中我们隐式定义了

$$\boldsymbol{\nu}_{v_\ell} = \frac{\boldsymbol{\nu} \circ \left(\bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_\ell) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_\ell}\right)}{\left\langle \boldsymbol{\mu}_{c_p \to v_\ell}, \bigcirc_{c_\xi \in N_0(v_\ell) \setminus c_p} \boldsymbol{\mu}_{c_\xi \to v_\ell} \right\rangle}.$$

注意到 $\mathbf{0} \preceq \boldsymbol{\nu}_{v_\ell} \preceq \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r})$。因此，我们有：

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \le \frac{1}{\tau^2}\boldsymbol{\nu}_{v_\ell} \le \frac{1}{\tau^2}\hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}). \tag{46}$$

由于我们关注的是偏导数绝对值的上界，因此也考虑一个下界。

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_j(h)} \ge -\frac{1}{\tau^2}\|\boldsymbol{\nu}_{v_\ell}\|_1 \hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}) \ge -\frac{1}{\tau^2}\hat{\mathbf{s}}_\ell(\mathbf{r}). \tag{47}$$

结合这两个观察结果与概率向量的性质，我们得到所需的表达式。■

定理16。在条件 6 下，定义 5 中给出的 BP-N 去噪器是利普希茨连续的。

证明：根据命题 15，$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ 关于 $\mathbf{r}$ 的雅可比矩阵各元素的绝对值均有统一上界。因此，该去噪器是利普希茨连续的。■