arXiv:2301.01907v1 [math.CO] 5 Jan 2023

余图拟阵的图拟阵初等提升

Shital Dilip Solanki[1], Ganesh Mundhe[2] 和 S. B. Dhotre[3]

1. Ajeenkya DY Patil University，印度马哈拉施特拉邦浦那 411047。2. 印度马哈拉施特拉邦浦那 411015 陆军理工学院。3. 萨维特里拜·普勒浦那大学数学系，印度马哈拉施特拉邦浦那 411007。电子邮箱：1. shital.solanki@adypu.edu.in，2. gmundhe@aitpune.edu.in，3. dsantosh2@yahoo.co.in。

Abstract. 拟阵 N 是二元拟阵 M的提升，当且仅当 $N = Q\backslash X$ 在 $Q/X = M$为某个二元拟阵 Q 且 $X \subseteq E(Q)$ 时；若 $|X| = 1$，则称其为 M的初等提升。对二元拟阵进行分裂运算可能产生初等提升。余图拟阵或图拟阵的初等提升未必是余图拟阵或图拟阵。我们旨在刻画其初等提升为图拟阵的余图拟阵。

数学主题分类（2010）：05C83、05C50、05B35 关键词：初等提升、可图的、余图的、拟阵子式、商、分裂。

1. Introduction

有关模糊概念和符号，请参阅 Oxley [4]。对于拟阵 M，若存在拟阵N，使得 $N = Q\backslash X$（若 $Q/X = M$，其中 Q 是某个二元拟阵，且 $X \subseteq E$（Q））， 则称 N为 M 的提升；若 $|X| = 1$，则称其为初等提升。分裂运算会产生一个初等提升。图上的分裂运算由 Fleischner[3]引入。随后，Raghunathan 等人 [8] 定义了二元拟阵的分裂。之后，Shikare 等人 [6] 将分裂推广为使用一个集合的运算，定义如下。

定义 1.1. 设二元拟阵 M 由矩阵 A表示。在 A 底部添加一行：对于 S 中的元素，对应位置填入 1，其余位置均填入 0，其中$S \subseteq E$（M）。设所得矩阵为 A_S。则 $M_S = M$（A_S）是分裂拟阵，而该运算称为使用集合 S的分裂运算。

对于余图二元拟阵 B，拟阵 B_S 不一定是余图拟阵或图拟阵。因此，分裂运算并不能保证拟阵的性质，例如图性、余图性等。N. Pirouz [7] 刻画了这样一种余图拟阵：对其中两个元素进行分裂后得到的拟阵是图拟阵。在下述定理中，Ganesh 等人 [2] 刻画了这样一种图拟阵：对其中三个元素进行分裂后得到的分裂拟阵是图拟阵。

定理 1.1. [2] 设 $S \subseteq E(M)$，其中 $|S| = 3$，且 M 是二元图拟阵，则 M_S 是图拟阵，当且仅当拟阵 M 不含拟阵子式 $M(F_i)$；图 1 展示了图 F_i，其中 $i = 1$、$2 \cdots 7$。

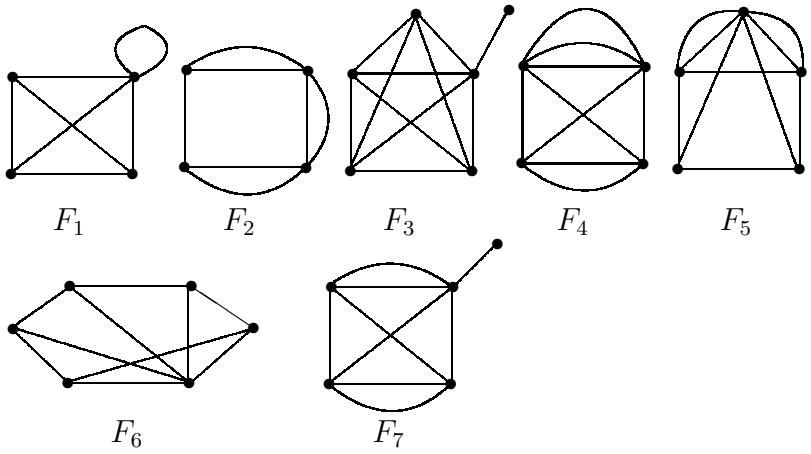

FIGURE 1. 使用三个元素对图拟阵进行分裂的排除子式。

设 $\mathcal{C}_k$ 为这样一类余图拟阵：使用 k 个元素进行分裂后得到的拟阵是可图的。据观察，不存在满足 $E \notin \mathcal{C}_1$的极小子式 E。

N. Pirouz [7]刻画了类 $\mathcal{C}_2$。

定理 1.2. [7] 设 C 为一个余图二元拟阵，则 $C \in \mathcal{C}_2$ 当且仅当它没有 $M(G_1)$ 或 $M(G_2)$ 拟阵子式；图 2 展示了图 G_1 和 G_2。

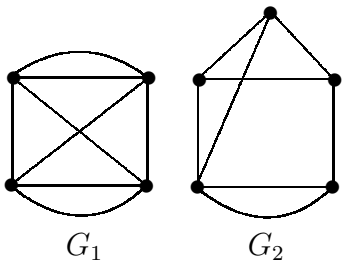

FIGURE 2. 不属于类 $\mathcal{C}_2$的极小拟阵

.

本文证明了以下定理。

定理 1.3. 一个余图二元拟阵 $M \notin \mathcal{C}_k$, $k \geq 2$，那么 M 包含一个拟阵子式 P，使得以下情况之一成立。

i) P 是极小子式 E 的扩张，使得 $E \notin \mathcal{C}_{k-1}$ 仅相差一个元素 t.

ii) $P = M(Q_i)$。

iii) P 是通过 n 个元素对 $M(Q_i)$ 进行的余扩张，其中 $n \leq k$，图 3 展示了图Q_i，对于 $i = 1$, $2, \cdots 9$。

我们证明，Mundhe 等人 [2] 得到的禁用拟阵是所有不属于该类 $\mathcal{C}_3$的极小拟阵子式。

定理 1.4. 设余图二元拟阵为 M，则 $M \in \mathcal{C}_3$ 当且仅当 M 不含拟阵子式 $M(F_i)$；图 1 展示了对应于 $i = 1$、2、$\cdots 7$ 的图 F_i。

2. Preliminary Results

我们将 $\mathcal{F} = \{F_7^*, M^*(K_{3,\ 3})\ F_7, M^*(K_5)\}$ 记为。 $F \in \mathcal{F}$ 的初等商记为 Q_F。

定理 2.1. [4] 二元拟阵是图拟阵，当且仅当它不含拟阵子式 $F \in \mathcal{F}$。

定理 2.2. [4] 二元拟阵是余图拟阵，当且仅当它不含集合 $\{F_7, M(K_5)\ F_7^*, M(K_{3,\ 3})\}$ 中的拟阵子式。

本文采用 Mundhe 等人发现的技术 [2] 来寻找排除子式。以下引理用于证明主要定理。

引理 2.3. 设 M_S 不是余图二元拟阵 M 的二元图拟阵，其中$S \subseteq E(M)$且 $|S| = k, k \geq 2$。那么 M 存在一个拟阵子式 P，使得下列情况之一成立。

(i) 对某些 $S' \subseteq S$ 和 $F \in \mathcal{F}$， $P_S \cong F$ 或 $P_S/S' \cong F$。(ii) P 是由一个元素扩张极小子式 E 所得，其中 $E \notin \mathcal{C}_{k-1}$。

证明. 证明思路与 [2]中引理 3.3 的证明类似。 □

引理 2.4. 设 P 为引理 2.3(i) 中所述的拟阵子式。那么 P 不含余环。

证明。参照 [2] 中引理 3.4 的证明思路。 □

引理 2.5。设 P 是引理 2.3(i) 中所述的不含余环的拟阵子式。则 P 是由 n 个元素对 Q_F 作余扩张所得，其中 $n \leq k$、 $k \geq 2$ 或 $P \cong Q_F$，对某个满足 $a \in E(N)$ 的二元拟阵 N，使得对于 $F \in \mathcal{F}$，有 $N \backslash a \cong F$。

证明。参照 [2] 中引理 3.6 的证明思路。 □

根据初等商的定义和上述引理， $N/a = Q_F$， $F \in \mathcal{F}$。因此，我们需要每个 $F \in \mathcal{F}$ 的商，以找出类 $\mathcal{C}_k$ 的排除子式；对于 $k \geq 2$，Mundhe 等人 [2] 得到了每个 $F \in \mathcal{F}$ 的图形商，如下所示。

引理 2.6. [2]一个图拟阵初等商 $Q_{F_7^*} \cong M(Q_1)$ 或 $Q_{F_7^*} \cong M(Q_2)$。图 Q_1 和 Q_2 如图 3 所示。

引理 2.7. [2] 一个图拟阵初等商 $Q_{F_7} \cong M(Q_3)$。图 Q_3 如图 3 所示。

引理 2.8. [2]一个图拟阵初等商 $Q_{M^*(K_{3,3})} \cong M(Q_4)$ 或 $Q_{M^*(K_{3,3})} \cong M(Q_5)$。图 Q_4 和 Q_5 如图 3 所示。

引理 2.9. [2] 一个图拟阵初等商 $Q_{M^*(K_5)} \cong M(Q_i)$，图 Q_i 如图 3 所示，其中 $i = 6$、7、8、9。

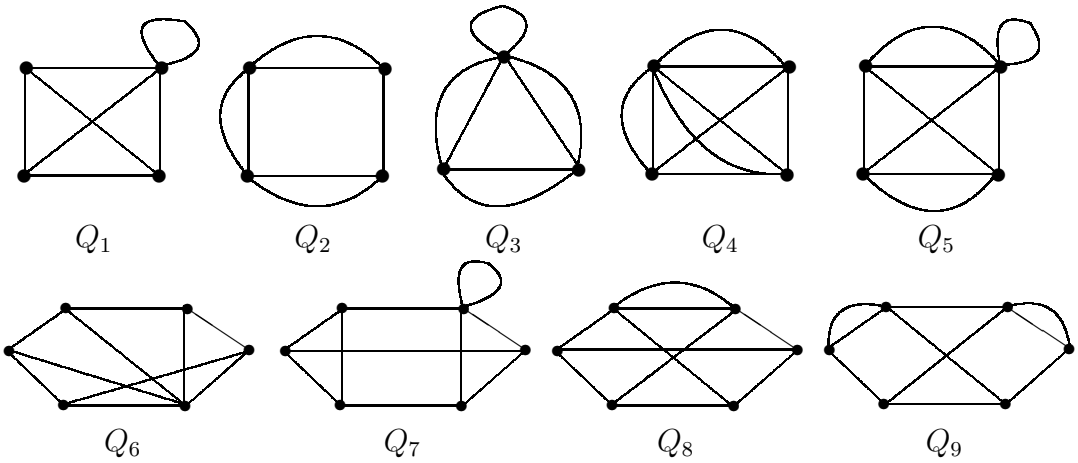

FIGURE 3. 非图拟阵的图拟阵商

要为 $\mathcal{C}_k$ 寻找 $k \geq 3$的排除小拟阵，我们需要为每个 $F \in \mathcal{F}$找到图拟阵商和非图形商。Mundhe 为每个 $F \in \mathcal{F}$找到了图拟阵商。本文为每个 $F \in \mathcal{F}$找到了非图形商。由于商 Q 或 Q 的余扩张将是某个余图拟阵的拟阵子式，根据定理 2.2， Q 不应包含 F_7 和 F_7^*。因此，对于每个 $F \in \mathcal{F}$，我们找到了不包含 F_7 和 F_7^*的非图形商。我们证明了以下引理。

引理 2.10. 不含 F_7 和 F_7^* 的商 Q_{F_7} 是可图的。

证明。设 $N\backslash a \cong F_7$，其中 N 是二元拟阵，且 $a \in E(N)$，则 $Q_{F_7} = N/a$；若 a 是余环或环，则 $Q_{F_7} = N\backslash a \cong F_7$，这就产生矛盾。若 a 既不是余环也不是环，则 $r(N\backslash a) = r(F_7) = 3$。因此 $r(Q_{F_7}) = 2$。于是，Q_{F_7} 不可能有拟阵子式 $F \in \{M^*(K_{3,3})\ M^*(K_5)\}$，因为 $r(F) \geq 3$。因此，根据定理 2.1， Q_{F_7} 是可图的。□

引理 2.11. 不含 F_7 和 F_7^* 的商 $Q_{F_7^*}$ 是可图的。

证明。设 $N\backslash a \cong F_7^*$，对于含有一个元素 a 的二元拟阵 N，则 $Q_{F_7^*} = N/a$；若 a 是余环或环，则 $Q_{F_7^*} = N\backslash a \cong F_7^*$，因此 $Q_{F_7^*} \cong F_7^*$，矛盾。若 a 不是余环或环，则 $r(N\backslash a) = r(F_7^*) = 4$。 $Q_{F_7^*}$ 不可能包含 $F \in \{M^*(K_{3,3})\ M^*(K_5)\}$ 拟阵子式，因为 $r(F) \geq 4$ 且 $r(Q_{F_7^*}) = 3$。因此，由定理 2.1， $Q_{F_7^*}$ 是可图的。□

引理 2.12。设二元拟阵为 N，且含有一个元素 a，使得 a 不是环或余环，则 $Q_{M^*(K_5)}$ 不包含 F_7 或 F_7^*，且是可图的。

证明。设二元拟阵 N 含有一个元素 a 且 a 不是余环或环，使得 $N\backslash a \cong M^*(K_5)$ 那么 $r(N\backslash a) = 6$并且 $E(N\backslash a) = 10$，那么 $r(N) = 6$并且 $E(N) = 11$那么 $Q_{M^*(K)} = N/a$. Thus, $r(Q_{M^*(K)}) = 5$ 和 $E(Q_{M^*(K)}) = 10$. 假设 $Q_{M^*(K)}$ 不是可图的。于是根据定理 2.1，$Q_{M^*(K_5)}$ 包含 $M^*(K_3,3)$ 或 $M^*(K_5)$ 拟阵子式。$Q_{M^*(K_5)}$ 不包含 $M^*(K_5)$ 拟阵子式，因为 $r(Q_{M^*(K_5)}) = 5$且 $r(M^*(K_5)) = 6$。如果$Q_{M^*(K_5)}$ 包含 $M^*(K_3,3)$ 拟阵子式，那么对于某些子集 A_1和 A_2，有 $Q_{M^*(K_5)}\backslash A_1/A_2 \cong M^*(K_3,3)$，其中它们属于 $E(Q_{M^*(K_5)})$。a) 若 $A_1 = \emptyset$ 且 $A_2 = \emptyset$，则 $Q_{M^*(K_5)} \cong M^*(K_3,3)$，矛盾，因为 $r(Q_{M^*(K_5)}) = 5$ 且 $r(M^*(K_3,3)) = 4$。b) 若 $A_1 = \emptyset$ 且 $A_2 \neq \emptyset$，那么若 $|A_2| >1$，$Q_{M^*(K_5)}/A_2 \cong M^*(K_3,3)$，这与 $r(Q_{M^*(K_5)}/A_2) \leq 3$且 $r(M^*(K_3,3)) =4$ 矛盾。若 $|A_2| = 1$，则 $Q_{M^*(K_5)}/b \cong M^*(K_3,3)$，也就是说，对于某个 $b \in$，有 $N/a/b \cong M^*(K_3,3)E(Q_{M^*(K_5)})$。因此，$(N/a/b)^* \cong N^*\backslash a\backslash b \cong M(K_3,3)$。此外，我们有 $N\backslash a \cong M^*(K_5)$，因此$N^*/a \cong M(K_5)$。 $M(K_3,3)$ 含有超过六个奇余圈。因此，N^*至少含有两个奇余圈，但不含 a。所以 N^*/a 至少含有一个奇余圈，这与 $N^*/a \cong M(K_5)$ 和 $M(K_5)$ 是欧拉的矛盾。c) 若 $A_1 \neq \emptyset$且 $A_2 = \emptyset$，则$Q_{M^*(K_5)}\backslash A_1 \cong M^*(K_3,3)$，矛盾，因为当$|A_1| = 1$ 且 $E(Q_{M^*(K_5)}\backslash A_1) \leq 8$ 时，$r(Q_{M^*(K_5)}\backslash A_1) = 5$且 $r(M^*(K_3,3)) = 4$；而当 $|A_1| > 1$时，$E(M^*(K_3,3)) = 9$。d) 若 $A_1 \neq \emptyset$且 $A_2 \neq \emptyset$，则 $Q_{M^*(K_5)}\backslash A_1/A_2 \cong M^*(K_3,3)$，矛盾，因为 $E(M^*(K_3,3)) = 9$ 且 $E(Q_{M^*(K_5)}\backslash A_1/A_2) \leq 8$。因此，$M^*(K_3,3)$ 不是 $Q_{M^*(K_5)}$ 的拟阵子式，所以根据定理 2.1，我们可以说 $Q_{M^*(K_5)}$ 是可图的。□

引理 2.13. 设 $a \in E(N)$，其中 N 是一个二元拟阵，且 a 既不是环也不是余环，则 $Q_{M^*(K_3,\ 3)}$ 不包含 F_7 或 F_7^*，是可图的。

证明. 假设 $a \in E(N)$，其中 N 是一个二元拟阵，且 a 既不是余环也不是环，使得 $N\backslash a \cong M^*(K_3,3)$，则 $E(N\backslash a) = 9$和 $r(N\backslash a) = 4$，于是 $r(N) = 4$，$E(N) = 10$。我们有 $Q_{M^*(K_3,3)} = N/a$，于是 $r(Q_{M^*(K_3,3)}) = 3$，$E(Q_{M^*(K_3,3)}) = 9$。假设 $Q_{M^*(K_3,3)}$ 不是可图的。那么根据定理 2.1，$Q_{M^*(K_3,3)}$ 有一个拟阵子式 $M^*(K_5)$ 或 $M^*(K_3,3)$。

情形（i）如果 $Q_{M^*(K_{3,3})}$包含 $M^*(K_5)$，那么对于 $E(Q_{M^*(K_{3,3})})$ 的某些子集 A_1 或 A_2，有 $Q_{M^*(K_{3,3})}\backslash A_1/A_2 \cong M^*(K_5)$，这与 $r(Q_{M^*(K_{3,3})}\backslash A_1/A_2) \leq 3$ 然而 $r(M^*(K_5)) = 6$ 矛盾。

情形（ii）如果 $Q_{M^*(K_3,3)}$ 有一个拟阵子式 $M^*(K_3,3)$，那么对于 $E(Q_{M^*(K_3,3)})$ 的某些子集 A_1 或 A_2，有 $Q_{M^*(K_3,3)}\backslash A_1/A_2 \cong M^*(K_3,3)$，这与 $r(Q_{M^*(K_3,3)}\backslash A_1/A_2) \leq 3$然而 $r(M^*(K_3,3)) = 4$ 矛盾。

因此，根据 情形（i）和情形（ii），并由定理 2.1 可知，$Q_{M^*\ (K_3,\ 3)}$ 是可图的。□

引理 2.14. $M^*(K_5)$ 是非可图商 $Q_{M^*(K_5)}$，不包含 F_7和 F_7^* .

证明。设 $a \in E(N)$，其中 N 是二元拟阵，满足 $N\backslash a \cong M^*(K_5)$。（i）如果 a 是余环或环，则 $N/a \cong N\backslash a \cong M^*(K_5)$。

(ii) 如果 a 既不是余环也不是环，那么根据引理 2.12，N/a 是可图的。

因此，由上述结果可知，$M^*(K_5)$ 是 $M^*(K_5)$ 唯一一个不包含 F_7 和 F_7^* 的非可图初等商。□

引理 2. 15. $M^*(K_{3,3})$ 是非可图商 $Q_{M^*(K_{3,3})}$，且不包含 F_7 和 F_7^* .

证明。设 $a \in E(N)$，其中 N 是一个二元拟阵，使得 $N\backslash a \cong M^*(K_{3,3})$。（i）如果 a 是余环或环，那么 $N\backslash a \cong N/a \cong M^*(K_{3,3})$。（ii）如果 a 既不是余环也不是环，那么根据引理 2.13，N/a 是可图的。因此，由上述结果可知，$M^*(K_{3,3})$ 是 $M^*(K_{3,3})$ 唯一一个不包含 F_7 和 F_7^* 的非可图初等商。

□

3. 主要定理

在上一节中，我们提到了每个$F \in \mathcal{F}$的可图商和非可图商。本节将证明主要定理。

定理 3.1. 设余图二元拟阵 $M \notin \mathcal{C}_k$, $k \geq 2$，则 M 包含一个拟阵子式 P，使得以下情况之一成立。

i) P 是由一个元素扩张极小子式 E 得到的扩张，且 $E \notin \mathcal{C}_{k-1}$。 ii) $P = M(Q_i)$。 iii) P 是由 n 个元素对 M作余扩张得到的余扩张(Q_i)，其中 $n \leq k$；图 3 展示了图Q_i，对于 $i = 1$、2、$\cdots 9$。

证明. 设余图二元拟阵为 M，使得 $M \notin \mathcal{C}_k$, $k \geq 2$，也就是说，对于 $S \subseteq E(M)$，其中 $|S| = k$，M_S 是非可图拟阵。由引理 2.3，M 有一个拟阵子式 P，满足$S \subseteq E(P)$，使得 $P_S \cong F$或 $P_S/S' \cong F$，对某个 $S' \subseteq S$和 $F \in \mathcal{F}$成立；或者 P是由一个元素扩张某个极小子式 E 得到的扩张，且 $E \notin \mathcal{C}_{k-1}$。若 $P_S \cong F$ 或$P_S/S' \cong F$，对某个 $S' \subseteq S$ 成立，则由引理 2.5，$P \cong Q_F$，或者 P 是由n 个元素扩张 Q_F 得到的扩张，其中 $n \leq k$ 且 $Q_F = N/a$ 是 $F \in \mathcal{F}$的商。

情形 (i) 若商是可图的，则 a) 若 $F = F_7^*$，则根据引理 2.6，$Q_{F_7^*} \cong M(Q_1)$ 或 $Q_{F_7^*} \cong M(Q_2)$。b) 若 $F = F_7$，则根据引理 2.7，$Q_{F_7} \cong M(Q_3)$。若 $F = M^*(K_{3,3})$，则根据引理 2.8，$Q_{M^*(K_{3,3})} \cong M(Q_4)$ 或 $Q_{M^*(K_{3,3})} \cong M(Q_5)$。若 $F = M^*(K_5)$，则根据引理 2.9，$Q_{M^*(K_5)} \cong M(Q_i)$。图 3 展示了图 Q_i，对于 $i = 1$，2，$\cdots 9$。

情形 (ii) 若该商不可图，则根据引理 2.14，有一个非可图商$Q_{M^*(K_5)} = M^*(K_5)$；根据引理 2.15，有一个非可图商 $Q_{M^*(K_{3,3})} = M^*(K_{3,3})$。由图 4 可知，$M^*(Q_1)$ 是拟阵 $M(K_5)$ 的一个拟阵子式，因此 $M(Q_1)$ 是该

拟阵 $M^*(K_5)$ 的一个拟阵子式；由图 5 可知， $M^*(Q_2)$ 是拟阵 $M(K_{3,\ 3})$ 的一个拟阵子式，因此 $M(Q_2)$ 是拟阵 $M^*(K_{3,\ 3})$ 的一个拟阵子式。因此我们排除非图形商。

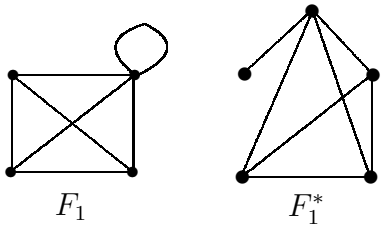

FIGURE 4. 图 $F_1 \cong Q_1$ 和 $F_1^* \cong Q_1^*$。

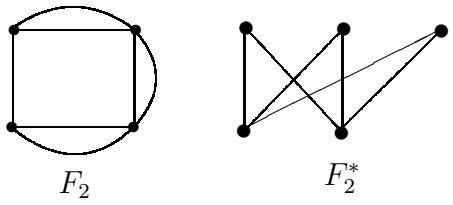

FIGURE 5. 图 $F_2 \cong Q_2$ 和 $F_2^* \cong Q_2^*$

因此，根据上述内容，要么是拟阵子式 $P = Q_F$，要么是对 Q_F 的余扩张，且元素数不超过 k，对于 $F \in \mathcal{F}$。由此得证。□

现在我们得到类 $\mathcal{C}_3$ 的排除小拟阵。

定理3.2. 设一个余图二元拟阵为 M，则 $M \in \mathcal{C}_3$ 当且仅当 M 不含拟阵子式 M（F_i），其中图 1 展示了图 F_i，对于 $i = 1$、2、$\cdots 7$。

证明。设余图拟阵 M 包含拟阵子式 $M(F_i)$，其中 $i = 1, 2, \cdots 7$，则 $M \notin \mathcal{C}_3$，证明显然。

反之，若 M 不包含拟阵子式 $M(F_i)$，其中 $i = 1, 2, \cdots 7$，那么我们将证明 $M \in \mathcal{C}_3$。反设如此，则对于某个 $S \subseteq E(M)$，其中 $|S| = 3$, M_S 不是图拟阵。于是，根据定理 2.1，M_S 包含拟阵子式 F，其中某个 $F \in \mathcal{F}$。接着， M 包含一个含有 S 的拟阵子式 P。根据引理 2.3， $P_S \cong F$ 或 $P_S/S' \cong F$，其中某个 $S' \subseteq S$ 或 P 是图 G_1 或 G_2 的回路拟阵的单元素扩张，而图 G_1、G_2 如图 2 所示。可以看出， $M(G_1)$ 的单元素扩张要么同构于 $M(F_4)$ 或 $M(F_7)$，要么包含拟阵子式 $M(F_1)$ 或 $M(F_2)$。此外， $M(G_2)$ 包含拟阵子式 $M(F_2)$。因此， P 不可能是 $M(G_1)$ 或 $M(G_2)$ 的单元素扩张。

因此， $P_S \cong F$ 或 $P_S/S' \cong F$。然后根据引理 2.5，要么 P 是由 n个元素扩张得到的 Q_F，其中 $n \leq 3$，要么 $P \cong Q_F$。
情形（i）若该商是可图的。在 [2], Mundhe 等人从每个 $F \in \mathcal{F}$ 的图拟阵商中得到了禁用拟阵，如定理 1.1 所述。情形（ii）若该商不是可图的。设 $F = M^*(K_5)$，则由引理 2.14， $Q_{M^*(K_5)} \cong M^*(K_5)$；但由图 4，

$M^*(F_1)$ 是 $M(K_5)$ 的拟阵子式，因此 $M(F_1)$ 是 $M^*(K_5)$ 的拟阵子式。因此我们舍弃 $M^*(K_5)$。设 $F = M^*(K_{3,3})$，则由引理 2.15，$Q_{M^*(K_{3,3})} \cong M^*(K_{3,3})$；但由图 5，$M^*(F_2)$ 是 $M(K_{3,3})$ 的拟阵子式，因此 $M(F_2)$ 是 $M^*(K_{3,3})$ 的拟阵子式。因此，我们舍弃 $M^*(K_{3,3})$。

因此，根据情形 (i) 和情形 (ii)，类 $\mathcal{C}_3$ 的排除子式是拟阵 $M(F_i)$，图 F_i 如图 1 所示，其中 $i = 1$、2、$\cdots 7$。

□

References

1. F. Harary，《图论》，Narosa 出版社，新德里，1988。2. G. Mundhe、Y. M. Borse、K. V. Dalvi，关于图拟阵的图拟阵初等提升，《离散数学》，345，(2022) 113014。3. H. Fleischner，《欧拉图及相关主题》第 1 部分，第 1 卷，North Holland 出版社，阿姆斯特丹，1990。4. J. G. Oxley，《拟阵理论》第二版，牛津大学出版社，牛津，2011。5. M. M. Shikare 和 B. N. Waphare，图拟阵分裂拟阵类的排除子式，《组合艺术》97 (2010)，111-127。6. M. M. Shikare、Gh. Azadi、B. N. Waphare，广义分裂运算及其应用，《印度数学会杂志》，78，(2011)，145-154。7. Pirouz N.，余图拟阵的图拟阵分裂，《数学讨论：图论》35 (2015) 95–104。8. T. T. Raghunathan、M. M. Shikare 和 B. N. Waphare，二元拟阵中的分裂，《离散数学》184 (1998)，267-271。9. Y. M. Borse、M. M. Shikare 和 K. V. Dalvi，余图拟阵分裂拟阵类的排除子式，《组合艺术》115 (2014)，219-237。10. Y. M. Borse、M. M. Shikare 和 Pirouz Naiyer，产生余图拟阵分裂拟阵的图拟阵的刻画，《组合艺术》118 (2015)，357-366。