arXiv:2301.01909v2 [math-ph] 4 Jun 2023

液体极限中的固体相变

Yury Grabovsky* Lev Truskinovsky†

2023年6月6日

谨以此文纪念杰里·埃里克森——一位奇才

摘要

我们在 Ericksen 非线性弹性范式下探讨固-固相变与液-液相变之间的根本差异。为突出核心思想，我们考虑最简单的非平凡二维问题，并采用一种典型的两相 Hadamard 材料；这种材料允许我们弱化刚性，并在“近液体”极限下探究固-固相变的本质。用变分法的术语来说，我们通过比较协同成核（基于层片）与非协同成核（基于夹杂）的阈值，考察“近液态”固体中拟凸性的极限。利用这两种成核测试，我们针对所研究的模型材料得到了弹性双节线令人惊讶地紧密的双侧界，而无需直接计算拟凸包络。

1 引言

1975年，J. Ericksen 首次将固-固相变问题纳入非线性弹性理论框架。他实际上将这一经典物理问题重新表述为向量值变分法问题。当时的物理理论认为，承受非静水应力的固体处于亚稳态，因此并未区分固-固相变与液-液相变。Ericksen 洞察到，相变过程中非静水应力可能在所关注的时间尺度上持续存在；这一发现彻底改变了弹性理论，并开创了一项极为成功的研究计划，旨在研究具有非拟凸能量的材料 [44, 13, 37, 6, 10]。本文旨在 Ericksen 非线性弹性范式下阐明固-固相变与液-液相变之间的差异。

从弹性理论的角度来看，液体与固体之间的主要区别在于，液体不抵抗剪切 [8, 14]。液体弹性本构结构的这种退化，导致其在一级相变过程中的特殊行为不同于固体的行为；固体的特征是具有有限刚性 [21]。对于固体和液体而言，

*天普大学数学系，美国宾夕法尼亚州费城 19122
†PMMH，法国国家科学研究中心 – UMR 7636，巴黎高等工业物理化学学院，巴黎文理研究大学，法国巴黎 75005

达到相平衡通常意味着形成相混合物。然而，液相转变中的相组织主要受表面张力控制，而在固体相变中，弹性长程相互作用占据主导地位，使表面张力在尺度选择中仅发挥次要作用。固体中能量对各相几何排列的依赖，会导致特定的形态，而这些形态在很大程度上受能量阱的位置及其运动学相容性之间相互作用的控制 [5]。

液体中的一级相变在物理和数学层面上都已得到充分理解 [39, 13]。这是因为液体情形所面对的标量问题是完全可解的 [11]。相反，尽管经过了许多专门研究，而且在很大程度上受到 Ericksen 本人开创性贡献的启发 [16, 15, 17, 18, 19], ，固体中弹性相变的数学理解仍远未完善。尤其是，变分法中一些基本的底层向量问题仍未解决 [6, 3]。

为此，我们首先回顾一下，在非线性弹性中，能量泛函可以写成 $E[\boldsymbol{y}] = \int_\Omega W(\nabla \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x}$ 的形式，其中 $W(\boldsymbol{F})$ 是描述材料弹性性质的能量密度函数。对于能量极小构型，具有物理依据的能量密度 $W(\boldsymbol{F})$ 会被其拟凸化 $QW(\boldsymbol{F})$ 所取代 [12]。后者可以通过一个隐式公式给出，但只有在已知能量极小微结构的情况下，该公式才能变为显式形式。在液体情形中，这类微结构的几何形态并不重要，而 $QW(\boldsymbol{F})$ 的构造则归结为凸化。在固体情形中，在一般情况下寻找平衡微观结构是一项艰巨的任务。

为在液体和固体中的弹性相变之间搭建桥梁，本文考察一类特殊的“近液态”固体极限，其特征是抗剪切能力可以任意弱。我们提出一个一般性问题：在这一极限下，弹性相互作用对最优微观结构几何形状的严格约束如何消失。为回答这一问题，我们转而研究一个更简单的问题：描述该极限下稳定单相构型集合的边界。当平衡微观结构为简单层状结构时，这一问题可在“强固态”弹性相变的情形下得到解决 [27]。本文旨在理解与之相反的“弱固态”极限，在这一极限下，最简单的基于层状结构的微观结构显然并非最优。

在物理学文献中，稳定单相构型集合的边界由经典的麦克斯韦-吉布斯平衡条件界定；这些条件最初是为描述液体中的相平衡而提出的 [41, 20]。这些条件可以识别出对范围很小、但幅度未必很小的扰动不稳定的均匀构型。在物理学中，这类构型被认为构成双节线区域 [45]。在弹性相变的数学理论中，双节线区域的“固体”对应物将包含那些不是能量泛函强局部极小值的均匀态。

从这一角度看，双节线区域是应变测度构型空间中的一个子集，在该区域内，拟凸包络低于能量密度。在一般情形下确定双节线区域的边界（物理学中称为双节线）是一项重大挑战。尽管这项工作仍非易事，但至少从初步看来，它比构造实际的拟凸包络更容易处理。本文探讨“近液态”极限下的双节线问题，并表明在这种极限下，明确了解双节线可直接导出拟凸包络至少某些部分的显式公式

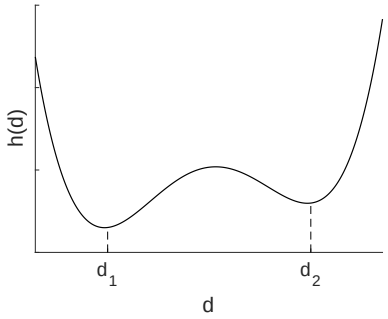


图1：能量密度 $h(d)$ 的双阱结构。

拟凸包络的部分。

在先前的工作中，我们提出了通用方法，用于识别双节线的子集，以标示新相 [24] 的相干区域出现（成核）的位置。这类分析的主要工具是刻画跳跃集 [23]——相空间中的一个余维一簇，对应于相干层片的成核。了解跳跃集提供了一种从内部约束（界定）双节线的通用方法，但不能保证所得界限是最优的。应用我们识别跳跃集稳定部分和不稳定部分的方法，最终可在“近液体”极限下对整个双节线作出符合实际的近似。

为突出这些思想，本文聚焦于描述 Hadamard材料 [31, 32] 的最简单一类非拟凸能量密度： $W(\boldsymbol{F}) = \frac{\mu}{2}|\boldsymbol{F}|^2 + h(\det \boldsymbol{F})$。具体而言，我们研究二维空间[1] 中的情形，并假设函数 $h(d)$ 描述一种用于模拟各向同性到各向同性相变的通用双阱势（见图1）。这类能量密度的主要优点在于只含一个参数 μ，可将其视为有效刚度的尺度。通过改变这一尺度，可以研究从“强”($\mu \gg 1$)到“弱”($\mu \ll 1$)的整个中间刚度响应范围，从而揭示从“固体”到“液体”行为的转变。

Hadamard材料一个有趣的性质是两个各向同性相之间微妙的不对称性。这一点颇耐人寻味，因为它既不能归因于两相弹性模量的差异，也不能归因于模型的几何非线性。事实上，即便非线性势 $h(d)$ 的两个势阱完全相同，也就是说它们具有相同的势阱高度和相同的切向弹性模量，这种不对称性依然存在。此时，两相之间唯一的差异由小项 $\mu|\boldsymbol{F}|^2/2$ 决定：该项在低密度相中较大，在高密度相中较小。然而，正是由于这一差异，与表面上相似的几何线性模型 [35, 43, 36],相比，Hadamard材料的两个相呈现出截然不同的失稳机制体系。因此，颇为出人意料的是，低能相的失稳通过高能少数相紧致区域的成核而发生；而高能相失稳时，形成的却是层状微结构。我们表明，这种不对称性会使同一种材料模型同时呈现“强固态”和“弱固态”

[1]原则上，我们的方法也适用于三维。本文选择了二维设定，以便充分阐明相关思想和技术，并通过图形加以说明。

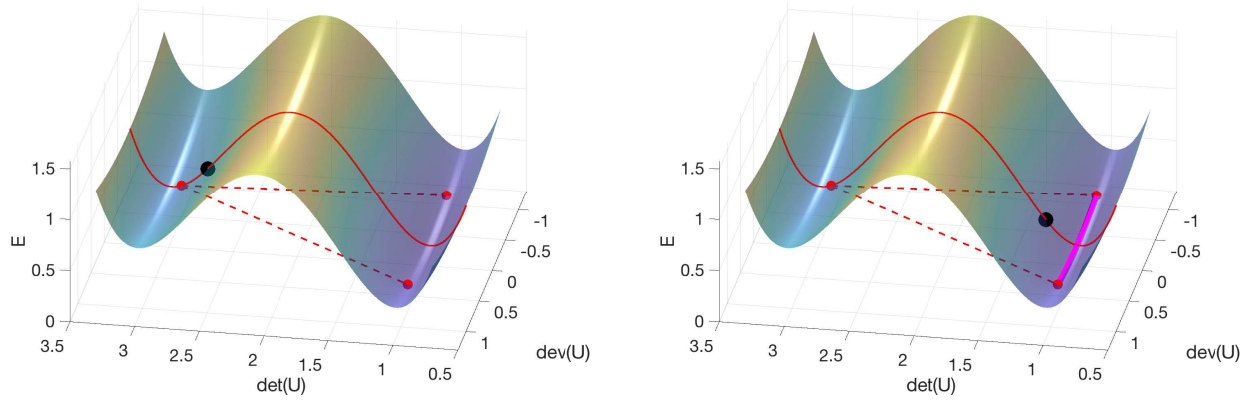


图 2：Hadamard材料的示意性能量景观，展示均匀态失稳（相变初现）时的弹性场。左图：高能相失稳。右图：低能相失稳。初始态以黑点表示。

（甚至“准液态”）响应。特别是，即便不存在滞后，这种材料中的正向和反向相变也可能遵循形态各异的转变机制。

为理解这一行为，我们首先回顾：对于 Hadamard材料，双阱能量结构可用单个标量势 $h(d)$ 描述；然而，由于相关能量阱固有的不相容性，以及所隐含相变纯粹具有体积性质，对 $W(\boldsymbol{F})$ 进行松弛会得到非平凡结果。若只有一个能量阱，即不存在相变的可能性，则这种松弛的结果是平凡的，因为众所周知， $W(\boldsymbol{F})$ 为拟凸，当且仅当 $h(d)$ 为凸 [4]。对于具有两个能量阱且 $h(d)$ 非凸的 $W(\boldsymbol{F})$，在 $\mu = 0$ 条件下，“无限弱”固体（实际上是液体）的松弛问题已有研究，其中 $QW(\boldsymbol{F}) = h^{**}(\det \boldsymbol{F})$ [11]；而在“强固体”极限下，当剪切模量 μ 足够大时，该问题也已有研究 [27]。后一种情况下，能量中的二次项占主导地位，超过双阱项； $QW(\boldsymbol{F})$ 的公式将 $|\boldsymbol{F}|$ 与 $\det \boldsymbol{F}$ 联系起来，使松弛能量介于上方的 $W(\boldsymbol{F})$ 与下方的 $U(\boldsymbol{F}) = \frac{\mu}{2}|\boldsymbol{F}|^2 + h^{**}(\det \boldsymbol{F})$ 之间。

本文表明， [27] 中刚度度量 μ的下限并非技术上的限制；随着 μ 减小，对于满足静水Dirichlet边界条件的双节线子集，上述关于$QW(\boldsymbol{F})$的“强固体”表达式将不再成立。更具体地说，我们表明，当 μ趋于较小时， $W(\boldsymbol{F})$的松弛会经历一系列结构转变：简单层化只在高剪切硬器件加载时以及较高能量势阱附近持续存在。在低能量势阱附近，简单层化则被更复杂的最优微观结构所取代，而这些结构尚未得到完整表征。图2示意了Hadamard材料在变量 $\det \boldsymbol{U} = \varepsilon_1\varepsilon_2$和$\mathrm{dev}(\boldsymbol{U}) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$中的能量景观，其中 $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F})^{1/2}$和$\varepsilon_1$ 以及 ε_2 是变形梯度 $\boldsymbol{F}$的奇异值；两个图中的黑点均表示所施加的仿射静水Dirichlet边界条件。左图

展示了高能相失稳初始时的场及其秩一连接。相容场（处于一个简单层合体内）取两个值，分别由左图中的红点和右图中的两个红点之一表示。右图展示了低能相失稳初始时的场。相应的相容场取值于由左图中的红点和右图中的红色线段所表示的集合。此处，系统利用浅谷（μ 较小），得以通过低能弹性变形适应载荷（在某种程度上令人联想到流体流动）。但请注意，沿直接和返回变形路径出现不同类型的失稳机制，不能仅仅归因于Hadamard模型的几何非线性，因为在几何线性模型中，只要两个相的弹性模量按大小排序不同，也会出现某种类似的不对称性：在这种情况下，弹性模量较大的材料扮演高能相 [1, 22, 9, 2]的角色。

本文的主要技术方法是为双节面构造界。最简单的界是通过成核一阶层合体来探测双节面而得到的。通过证明这些界具有多凸性（因此也具有拟凸性），我们证明了它们的最优性；相应的问题是代数问题，因为可以显式构造相应的支撑零拉格朗日量 [28]。与大 μ 时的 “ 强固体 ” 状态相比，在小 μ 时的 “ 近液体 ” 状态下，并非所有一阶层合体界都是最优的。

首先，通过考察二阶层合体的成核来改进简单层合体界，尽管正如 [29]，中将要说明的，二阶层合体界也并非最优。对于静水应变，我们只能通过考察无限平面中有界圆形夹杂的成核来解析地改进这些界。此外，我们还阐明了“圆形夹杂界”实际上是最优界这一猜想的依据。我们表明，若这一猜想得以证明，则圆形核外部区域中的变形梯度取值将从双节线区域外侧为整个双节面提供一个界。基于夹杂成核的界若被证实为最优，其另一推论便是可在所有静水应变下得到拟凸包络 $QW(\boldsymbol{F})$ 的显式公式。为佐证这一猜想，我们并列比较了有界夹杂与无界二阶层合体所得的结果，并推导出双节面的紧双侧界。正如我们将在别处报告的，数值计算表明，在这些界具有意义的全部参数范围内，两种界都保持紧致；假设的界与数值计算得到的秩一凸双节线完全吻合。

本文结构安排如下。第 2 节回顾变分法中非凸向量问题的一般结果，这些结果将在本文后续部分使用。第 3 节针对 Hadamard材料具体化这些结果，并给出所得界的数值示例。第 4 节给出极限情形 $\mu \to 0$ 的解析结果，并将其与数值计算结果进行比较。第 5 节展示假定成核界达到最优所带来的深远影响。本文最后在第 6 节进行一般性讨论并给出结论。

2 预备知识

双节线区域。我们回顾一下，在 n维空间中，超弹性材料的特征是变形弹性体中储存的能量具有以下形式

$$E[\boldsymbol{y}] = \int_{\Omega} W(\nabla \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x}.$$

这里，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是参考构形，$\boldsymbol{y} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是变形。为了处理物体的稳定（即实验上可观测的）构形，可以用松弛后的能量密度 $QW(\boldsymbol{F})$ 替代能量密度 $W(\boldsymbol{F})$；后者称为 $W(\boldsymbol{F})$ 的拟凸化。尽管 $QW(\boldsymbol{F})$ [12] 有如下公式：

$$QW(\boldsymbol{F}) = \inf_{\boldsymbol{\phi} \in C_0^{\infty}(B;\mathbb{R}^n)} \frac{1}{|D|} \int_B W(\boldsymbol{F} + \nabla \boldsymbol{\phi})d\boldsymbol{x}, \tag{2.1}$$

其中，B 是单位球，但目前尚无系统方法可以实际计算它。一个更简单、但同样有用的对象是弹性双节线。

定义 2.1。弹性双节线是双节线区域的边界

$$\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{F} : QW(\boldsymbol{F}) < W(\boldsymbol{F})\}. \tag{2.2}$$

定义 2.2。若矩阵 $\boldsymbol{F}$满足 $W(\boldsymbol{F}) = QW(\boldsymbol{F})$，则称其为稳定的。

因此，双节线是将双节线区域与稳定点集合分隔开的边界。

跳跃集。虽然可能存在秩一凸但非拟凸的函数，但在实际关注的弹性相变中，多数情形涉及的多势阱能量并非秩一凸。这类函数具有非平凡的跳跃集，其中的稳定点构成双节线的一部分（如果足够幸运，则构成整个双节线）。跳跃集是满足方程 [23] 的解集 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_-$

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_+ = \boldsymbol{F}_- + \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{n}, \\ [\![\boldsymbol{P}]\!]\boldsymbol{n} = 0, \\ [\![\boldsymbol{P}^T]\!]\boldsymbol{a} = 0, \\ [\![W]\!] - \langle \{\!\{\boldsymbol{P}\}\!\}, [\![\boldsymbol{F}]\!] \rangle = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

其中使用了 $\boldsymbol{a} \neq 0$、$|\boldsymbol{n}| = 1$ 以及以下标准记号。

$$\boldsymbol{P}_{\pm} = W_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}_{\pm}), \quad [\![\boldsymbol{F}]\!] = \boldsymbol{F}_+ - \boldsymbol{F}_-, \quad \{\!\{\boldsymbol{P}\}\!\} = \frac{\boldsymbol{P}_+ + \boldsymbol{P}_-}{2}, \quad \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T),$$

其中 $W_{\boldsymbol{F}}$ 表示偏导数矩阵 $P_{ij} = \partial W / \partial F_{ij}$。从（2.3）中可以消去向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{n}$，得到一个关于 $\boldsymbol{F}$ 的单一标量方程，用来描述跳跃集。跳跃集上的点要么属于双节线，要么属于双节线区域 $\mathfrak{B}$，参见

[23] 了解详情。因此，跳跃集始终构成双节线区域内部的一条边界。

检测跳跃集不稳定部分的一种简便方法是使用魏尔斯特拉斯条件，该条件是稳定性的必要条件。

$$W^{\circ}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{m}) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n,\ |\boldsymbol{m}|=1, \tag{2.4}$$

其中

$$W^{\circ}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}) = W(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{H}) - W(\boldsymbol{F}) - \langle W_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}), \boldsymbol{H}\rangle.$$

我们已在 [25] 证明，跳跃集上的点对 $\boldsymbol{F}_{\pm}$ 要么都稳定，要么都不稳定。因此，即使满足（2.4）的点 $\boldsymbol{F}_{+}$，如果 $\boldsymbol{F}_{-}$不满足（2.4），仍可将其归类为不稳定。虽然还有其他不由（2.4）推出的稳定性条件（见 [26]），但我们只会用到（2.4）的一个易于验证的推论：该推论将秩一测试场 $\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{m}$ 限制在 $[\![\boldsymbol{F}]\!] = \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n}$ 的无穷小邻域内（见 [23, （4.5）]）。

目前，确立仿射构型 $\boldsymbol{F}$ 稳定性的唯一通用工具，是证明 W 在 $\boldsymbol{F}$处具有多凸性；这虽是充分条件，却远非必要条件。在二维情形下，这归结为求一个常数 $m\in\mathbb{R}$，使得

$$W^{\circ}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}) - m\det\boldsymbol{H} \geq 0, \qquad \forall \boldsymbol{H}\in\mathbb{R}^{2\times 2}. \tag{2.5}$$

若 (2.5) 成立，则按照定义 2.2 的意义， $\boldsymbol{F}$ 是稳定的。正如 [28], 所示，对于跳跃集上的点 $\boldsymbol{F}_{\pm}$, m 唯一可能适用的取值为,

$$m = \frac{\langle [\![\boldsymbol{P}]\!], \operatorname{cof}[\![\boldsymbol{F}]\!]\rangle}{|[\![\boldsymbol{F}]\!]|^2}. \tag{2.6}$$

次级跳跃集。(2.3) 所描述的跳跃集确定了双节线上对应于在原相占据的无限域中成核形成一层新相的点。正如我们已经提到的，整个跳跃集都位于双节线区域 [23] 的闭包内，因此构成了从内部对双节线的一个界限。另一个这样的界限可通过检验均匀相对于成核形成孪晶层或二阶层合的稳定性得到。从数学上说，我们可以将其视为部分松弛能量 $\overline{W}$的跳跃集，该能量定义为 $\overline{W}(\overline{\boldsymbol{F}}) = \lambda W(\boldsymbol{F}_{+}) + (1-\lambda)W(\boldsymbol{F}_{-})$，其中 $\overline{\boldsymbol{F}} = \lambda\boldsymbol{F}_{+} + (1-\lambda)\boldsymbol{F}_{-}$，且 $\boldsymbol{F}_{\pm}$为跳跃集上对应的一对。因此，次级跳跃集由以下方程组定义

$$\begin{cases} \boldsymbol{F} = \overline{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{m}, \\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{m} = \overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{m}, \\ \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{P}}^T\boldsymbol{b}, \\ W(\boldsymbol{F}) - \overline{W} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{b}, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中

$$\overline{W} = \lambda W(\boldsymbol{F}_{+}) + (1-\lambda)W(\boldsymbol{F}_{-}), \qquad \overline{\boldsymbol{P}} = \lambda\boldsymbol{P}_{+} + (1-\lambda)\boldsymbol{P}_{-}, \tag{2.8}$$

对于某个 $\lambda \in [0,1]$，它也作为（2.7）中待求解的变量，与 $\boldsymbol{F}$、 $\boldsymbol{b} \neq 0$ 和 $|\boldsymbol{m}| = 1$ 一起。显然，如此定义的次级跳跃集从内部给出了双节线区域的另一条边界。

成核判据。探究双节线的另一种方法，是研究给定形状 [7, 40, 38] 或必须确定的最优形状 [33, 42, 34]的有界夹杂的成核。阐明为何这些测试能够探究双节线的理论见 [24]。对于“有界夹杂的成核”，使 $\boldsymbol{F}_0$ “临界稳定”（即位于 $\mathfrak{B}$的闭包中）的判据，是存在一个场

$$\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{S} = \{\boldsymbol{\phi} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \nabla\boldsymbol{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\},$$

使得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}_0 + \nabla\boldsymbol{\phi}) = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{P}^*(\boldsymbol{F}_0 + \nabla\boldsymbol{\phi}) = 0 \tag{2.9}$$

在 $\mathbb{R}^n$中以分布的意义成立，其中

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}) = W_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}), \qquad \boldsymbol{P}^*(\boldsymbol{F}) = W(\boldsymbol{F})\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}),$$

且解 $\boldsymbol{\phi}$满足非退化条件

$$\int_{\mathbb{R}^n} W^\circ_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}_0, \nabla\boldsymbol{\phi})d\boldsymbol{x} \neq 0. \tag{2.10}$$

对于具有光滑边界的有界夹杂成核 ω，验证 (2.9) 需要检查场 $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{S}$ 在 ω内外均满足 $\nabla \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}_0 + \nabla\boldsymbol{\phi}) = 0$，并确认对于每个 $\boldsymbol{x} \in \partial\omega$， $\partial\omega$ 两侧的迹 $\boldsymbol{F}_\pm(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}_0 + \nabla\boldsymbol{\phi}_\pm(\boldsymbol{x})$ 在跳跃集上构成相应的一对。此外，如果我们能够以定义 2.2 的意义证明，对于每个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{F} + \nabla\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ 都是稳定的，那么 $\boldsymbol{F}_0$ 必位于双节线上。反之，若已知 $\boldsymbol{F}_0$ 稳定，则对于所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，所有矩阵 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}_0 + \nabla\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ 都是稳定的。

3 Hadamard材料

本文着重研究一种特别简单但并非平凡的能量

$$W(\boldsymbol{F}) = \frac{\mu}{2}|\boldsymbol{F}|^2 + h(d), \quad \boldsymbol{F} \in \{\boldsymbol{F} \in GL(n) : \det\boldsymbol{F} > 0\}, \quad d = \det\boldsymbol{F}, \tag{3.1}$$

其中， $h(d)$ 是一个具有双势阱形状的 $C^2(0,+\infty)$ 函数。在我们的显式计算和图示中，我们使用四次双势阱能量[2]

$$h(d) = (d - d_1)^2(d - d_2)^2, \tag{3.2}$$

[2]公式（3.2）只需在 $[d_1, d_2]$ 的任意邻域内成立。只要 $h^{**}(d) = h(d)$ 在该邻域内成立，就可以任意修改势函数 $h(d)$ 在该邻域外的形式。特别是，非线性弹性力学所要求的 $h(d)$ 在 $d \to 0^+$ 时的奇异行为，可以很容易地得到保证。

这为一般公式提供了某些简化。在本节中，我们给出该能量双节线的一个近似，尽管其拟凸包络尚未知晓。我们首先计算这类材料的跳跃集。

跳跃集。为求完整起见，我们在附录 A 中概述了 [27]，中关于跳跃集的讨论，该讨论针对我们的二维情形进行了调整。

附录 A 的主要结果是，(3.1) 的跳跃集由矩阵 $\boldsymbol{F}_\pm$ 组成，其标记为[3] ε_0 和 $\varepsilon_\pm$ 的两个奇异值满足方程

$$\varepsilon_0[\![h']\!] + \mu[\![\varepsilon]\!] = 0, \quad [\![h]\!] - \{\!\{h'\}\!\}[\![d]\!] = 0, \quad d_\pm = \det \boldsymbol{F}_\pm = \varepsilon_0\varepsilon_\pm. \tag{3.3}$$

回想一下 $d_\pm$ 的定义（见 (3.3) 中的第三个方程），便可知 (3.3) 中的第一个方程等价于 (A.4)。我们的记号体现了这样一个事实：对于跳跃集上的每一对 $\boldsymbol{F}_\pm$，都存在一个坐标架，使两个矩阵均为对角矩阵，并且共享同一个奇异值 ε_0 和同一个特征向量。

现在可以利用方程 (3.3) 推导跳跃集的半显式参数方程，其中 $d_+ = \varepsilon_0\varepsilon_+$ 作为参数。给定 d_+，可利用 (3.3) 中的第二个方程求出 d_-。该解记为 $d_- = D(d_+)$。将 (3.3) 中的第一个方程乘以 ε_0，即可得到参数方程

$$\begin{cases} \varepsilon_0(d_+) = \sqrt{-\frac{\mu[\![d]\!]}{[\![h']\!]}}, \\ \varepsilon_+(d_+) = \frac{d_+}{\varepsilon_0(d_+)}. \end{cases}$$

对于势函数 (3.2) 这一特殊情形，还可以进一步简化。例如，

$$[\![h]\!] - \{\!\{h'\}\!\}[\![d]\!] = [\![d]\!]^3(d_1 + d_2 - d_+ - d_-),$$

因此，$d_- = d_1 + d_2 - d_+ =: D(d_+)$。由此可得

$$\{\!\{h'\}\!\} = 0, \qquad \varepsilon_+ + \varepsilon_- = \frac{d_1 + d_2}{\varepsilon_0}. \tag{3.4}$$

特别地，我们可以利用 (3.3) 和 (3.4) 消去 $h'(d_\pm)$，得到：

$$h'(d_\pm) = \{\!\{h'\}\!\} \pm \frac{1}{2}[\![h']\!] = \mp\frac{\mu}{2}\frac{[\![\varepsilon]\!]}{\varepsilon_0}. \tag{3.5}$$

此外，对于四次能量 (3.2)，我们可以将跳跃集的方程显式写为$\varepsilon_\pm = \varepsilon_\pm(\varepsilon_0)$，其中 $\varepsilon_\pm = d_\pm/\varepsilon_0$，而 $d_\pm$ 满足

$$(d_\pm - d_1)(d_\pm - d_2) = -\frac{\mu}{4\varepsilon_0^2}. \tag{3.6}$$

[3]我们采用记号 $\pm$，以同时表达两个命题：一个对应“+”号，另一个对应“–”号。例如，我们的命题指出，矩阵 $\boldsymbol{F}_+$ 有两个奇异值 ε_0 和 ε_+，而矩阵 $\boldsymbol{F}_-$ 有两个奇异值 ε_0 和 ε_-。

(3.6) 的两个根为 $d_\pm$ 的取值；按照惯例，我们用 d_+ 表示较大的根。当且仅当 $\varepsilon_0 > \sqrt{\mu}/(d_2 - d_1)$ 时，方程（3.6）恰有两个实根。因此，显式地，

$$\varepsilon_\pm = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(d_1 + d_2 \pm \sqrt{(d_2 - d_1)^2 - \frac{\mu}{\varepsilon_0^2}}\right), \qquad \varepsilon_0 \geq \frac{\sqrt{\mu}}{d_2 - d_1}. \tag{3.7}$$

在计算中，我们将使用方程（3.5）消去所有出现的 $h'(d_\pm)$，并使用方程（3.7）消去 $\varepsilon_\pm$；二者都由单个参数 ε_0 唯一确定。

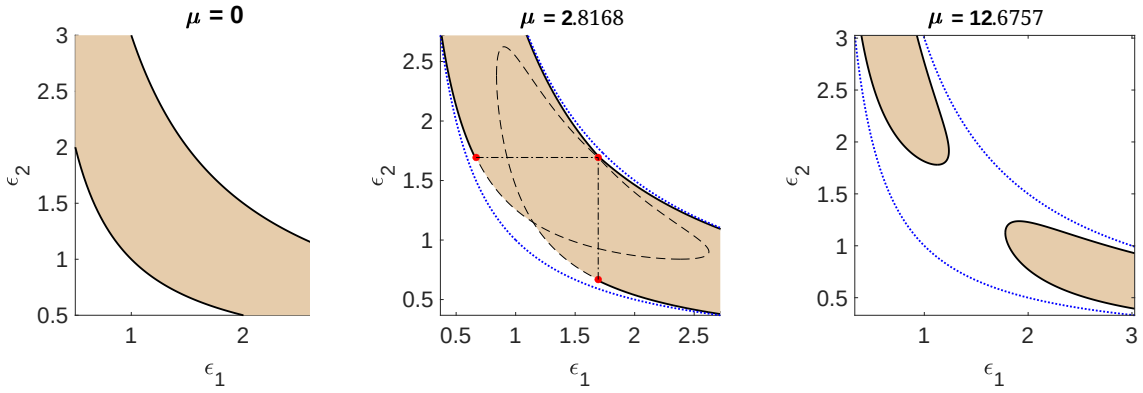


图3：当 $h(d)$ 由（3.2）给出，且 $d_1 = 1$、$d_2 = 3$ 取不同的 μ 值时的跳跃集。凸化双曲线 $\varepsilon_1\varepsilon_2 = d_{1,\ 2}$ 以蓝色点线表示。粗黑线表示跳跃集的稳定部分。黑色虚线表示跳跃集的不稳定部分。W点以红点表示，点划线表示W点之间的秩一连接。阴影区域是由跳跃集界定的双节线区域部分，其内部是不稳定的。

数值示例。当 μ 足够大时，已知跳跃集包含整个双节线区域。由于此类双节线上的每个点都对应于一个简单层合体的成核，因此可以立即得到松弛 $QW(\boldsymbol{F})$ 的显式公式。然而，随着剪切模量 μ 减小，跳跃集的某些部分可能变得不稳定，这也会影响 $QW(\boldsymbol{F})$ 的结构。为说明这一点，我们在图3中展示了当 $h(d)$ 由（3.2）给出时的跳跃集，并选取剪切模量 μ 的三个不同值，分别为 $\mu = 0$、$\mu_{\text{top}}/3$ 和 $1.5\mu_{\text{top}}$；其中 μ_{top} 是跳跃集具有自交点时 μ 的最大值。图3中的点线表示“凸化双曲线”，即双曲线 $\varepsilon_2 = d_1/\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2 = d_2/\varepsilon_1$，其中区间 $[d_1, d_2]$ 是 $h(d)$ 与其凸包不同的区间。由跳跃集界定的阴影区域是不稳定的，而凸化双曲线所围区域之外的所有点都是稳定的。我们的主要目标是确定极限 $\mu \to 0$ 下不稳定域的精确边界。

W点。在 [26] 中，我们已证明，能量 (3.1) 的魏尔斯特拉斯条件 (2.4) 的一个易于计算的推论具有如下形式

$$\varepsilon_0 \geq \varepsilon_\pm. \tag{3.8}$$

在 [27] 中，我们已证明，对于较大的 μ，该条件总是得到满足，这一点从图3的右图中可以明显看出；而在中图中，该条件具有明显的几何解释，其中不满足 (3.8) 的跳跃集部分以虚线表示。图3中以红点标出的、界定满足 (3.8) 的跳跃集部分的点，将被称为魏尔斯特拉斯点，简称W点。在 [29] 中将证明，对于所有充分小的 μ，由W点界定的跳跃集实线部分都是多凸的。

W点的多凸性。W点本质上要么是不稳定的，要么界定跳跃集稳定性的边界。我们的直觉是，跳跃集上某一点的剪切分量越大，该点就越稳定；这一点将在 [29], 中得到论证。因此，W点具有多凸性的 μ取值范围，也就是由W点界定的、跳跃集中剪切分量较大的部分具有多凸性的 μ 取值范围。

在假设存在四次非线性（3.2）的情况下，可以对所有使W点同时也是多凸性点的 μ 取值作出近乎显式的刻画。事实上，如上所述，要证明W点的多凸性，我们需要证明（2.5），其中 m由（2.6）给出。这个问题已在 [27], 中进行过分析；为求完整起见，我们在此简要总结所得结果。

要证明能量 (3.1) 满足 (2.5)，等价于证明

$$\Psi(\boldsymbol{F}) = \frac{\mu}{2}|\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_\pm|^2 + h(\det \boldsymbol{F}) - h_\pm - h'_\pm\langle \operatorname{cof}\boldsymbol{F}_\pm, \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_\pm\rangle - m\det(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_\pm) \tag{3.9}$$

在 $\boldsymbol{F}_\pm$ 处取得全局最小值。(3.9) 中的记号强调了这样一个事实： $\boldsymbol{F}_\pm$ 中无论选择哪种符号，都会得到同一个函数 $\Psi(\boldsymbol{F})$。

我们首先注意到， $\Psi(\boldsymbol{F})$ 的极小化点必定是临界点，因为当 $|\boldsymbol{F}| \to \infty$ 时， $\Psi(\boldsymbol{F}) \to +\infty$。随后我们证明，除了自交点以外，跳跃集上的所有点处的临界点 $\boldsymbol{F}$ 必须与 $\boldsymbol{F}_\pm$ 在同一坐标系下为对角形式。记 $\boldsymbol{F}$ 的两个对角元分别为 x 和 y，可得

$$\Psi(\boldsymbol{F}) = \Phi(x, y) + \text{const},$$

其中

$$\Phi(x,y) = \frac{\mu}{2}(x^2+y^2) - \alpha x - \beta y + h(xy) - mxy,$$

$$\alpha = \mu(\varepsilon_+ + \varepsilon_-), \quad \beta = \mu\left(\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{\varepsilon_0}\right), \quad m = \frac{[\![h'd]\!]}{[\![d]\!]}. \tag{3.10}$$

将 $\Phi(x,y)$ 对所有满足 $xy = d$ 的 (x,y) 取极小值后，我们得出极小化点为 $(d/y, y)$，其中 $y = y(d)$ 是下式的最大根

$$y^4 - \beta_0 y^3 + d\alpha_0 y - d^2 = 0, \quad \alpha_0 = \varepsilon_+ + \varepsilon_-, \quad \beta_0 = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{\varepsilon_0}. \tag{3.11}$$

因此， $\Phi(x,y)$ 在一个有限点处达到最小值，该点对应于 $\phi(d) = \Phi(d/y(d), y(d))$ 的一个临界点。

在 W点 的特殊情况下，我们有[4] $\varepsilon_+ = \varepsilon_0$，因此 $\alpha_0 = \beta_0 = \varepsilon_- + \varepsilon_0$。此时，方程 (3.11) 可因式分解

$$(y^2 - d)(y^2 - \alpha_0 y + d) = 0. \tag{3.12}$$

[4]严格来说，在 W点处可能还存在其他不一定是对角的临界状态；不过，根据连续性，对角临界点仍将给出 $\Psi(\boldsymbol{F})$ 的全局最小值。

最大根为 $y = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 - 4d})$，条件是 $0 < d \le \alpha_0^2/4$。如果 $d > \alpha_0^2/4$，那么该四次多项式只有两个实根 $y = \pm\sqrt{d}$。因此，

$$y(d) = \begin{cases} (\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 - 4d})/2, & d \le \alpha_0^2/4, \\ \sqrt{d}, & d > \alpha_0^2/4. \end{cases}$$

Now,

$$\phi(d) = \min_{y \in \mathbb{R}} \{\Phi_0(d/y, y) + h(d) - md\}, \quad \Phi_0(x, y) = \frac{\mu}{2}(x^2 + y^2) - \alpha x - \beta y$$

因此，

$$\phi'(d) = \frac{1}{y(d)} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(d/y, y) + h'(d) - m = \mu \frac{d - \alpha_0 y(d)}{y(d)^2} + h'(d) - m.$$

对于满足 $y(d)$ 是 (3.12) 的解的 W点，我们看到

$$\frac{d - \alpha_0 y(d)}{y(d)^2} = -1$$

当 $d \le \alpha_0^2/4$ 时。因此，在此情形下，$\phi(d)$ 的任何临界点都必须满足

$$h'(d) - \mu - m = 0.$$

其中一个解是 d_-，它总是满足 $d_- \le \alpha_0^2/4$。如果该方程有 3 个解，则中间的解对应于 $\phi(d)$ 的一个局部极大值，而第三个解 $d^* > d_+$ 总是不满足 $d^* \le \alpha_0^2/4$，因为根据 (3.8)，$d_+ = \varepsilon_0^2 > (\varepsilon_- + \varepsilon_0)^2/4$。由此可知，需要检验的 $\phi(d)$ 的临界点只有满足 $d > \alpha_0^2/4$ 的那些。在此情形下，$y(d)^2 = d$，并且

$$\phi'(d) = \mu \left(1 - \frac{\alpha_0}{\sqrt{d}}\right) + h'(d) - m.$$

注意，当 $d \ge \max(\alpha_0^2, d_+)$ 时，$\phi'(d) > 0$；其中 d_+ 是 $h'(d) - m$ 的最大根。因此，我们只需检验特定有界区间内的临界点。事实上，若 $h(d)$ 由 (3.2) 给出，则容易看出，对于所有 $d \ge \alpha_0^2$，都有 $\phi'(d) > 0$。因此，我们只需检验区间 $(\alpha_0^2/4, \alpha_0^2)$ 上 $\phi(d)$ 的临界点。此外，由于 $\{\!\{h'\}\!\} = 0$，对于由 (3.2) 给出的 $h(d)$，有 $m = -\mu\{\!\{\varepsilon\}\!\}/\varepsilon_0 = -\mu\alpha_0/(2\varepsilon_0)$。由此得到 W点多凸性的如下刻画。

THEOREM 3.1. 设 $h(d)$ 由 (3.2) 给出，则 W点是多凸的，只要

$$\min_{d \in \left[\frac{\alpha_0^2}{4}, \alpha_0^2\right]} \left(h(d) + \mu \left(d + \frac{\alpha_0 d}{2\varepsilon_0} - 2\alpha_0\sqrt{d}\right)\right) = h(\varepsilon_0^2) - \mu\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{3\varepsilon_-}{2}\right). \tag{3.13}$$

其中 $\alpha_0 = \varepsilon_0 + \varepsilon_-$，$(\varepsilon_0, \varepsilon_-)$、$(\varepsilon_-, \varepsilon_0)$ 和 $(\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ 是 W点的坐标。

(3.13) 的右侧就是 $\phi(\varepsilon_0^2)$，其中 $\phi(d)$ 是 (3.13) 中被最小化的函数。对于四次能量 (3.2)，我们通过求解来计算 W点的坐标

$$-4d(d-d_1)(d-d_2)=\mu.$$

那么 ε_0^2 是最大根，并且

$$\varepsilon_-=\frac{d_1+d_2-\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0}.$$

将 $\mu=-4\varepsilon_0^2(\varepsilon_0^2-d_1)(\varepsilon_0^2-d_2)$代入 (3.13)，并将 $\varepsilon_0\le\sqrt{d_2}$ 视为参数，即可计算使 (3.13) 成立的 μ 的最大值。当 $\varepsilon_0=\sqrt{d_2}$时，$\phi(d)-\phi(d_2)$ 是关于$x=\sqrt{d}$的正多项式。接下来，我们通过数值方法求出使多项式 $P(x)=(\phi(x^2)-\phi(\varepsilon_0^2))/(x-\varepsilon_0)^2$ 出现二重根时 $\varepsilon_0<\sqrt{d_2}$ 的最大值。从代数角度看，这意味着求判别式的最大根 $\varepsilon_0<\sqrt{d_2}$。该解给出了一个最大值：低于此值时，W点是多凸的。例如，当$d_1=1$时，$d_2=3$，对于所有 $\mu<6.35888$，W点都是多凸的。当 μ 增大并超过该值时，系统进入一个区域，在此区域中，W点不再是多凸的，但仍可能是拟凸的。继续增大 μ，系统将进入另一个区域，在此区域中，W点无法通过 [26]提出的更复杂的稳定性检验。W点不再稳定时 μ的确切值尚不清楚。本文仅研究 μ足够小的情形，此时W点是多凸的。

次级跳跃集。对于 μ 的一般取值，描述次级跳跃集的代数方程 (2.7) 只能通过数值方法求解。相反，当 μ 很小时，可以显式求得解的渐近行为，从而为计算得到的 $\mu<3$ 对应的次级跳跃集提供极佳的近似，其中 $d_1=1$、$d_2=3$。尽管整个次级跳跃集都不稳定，但正如将在 [29], 中证明的那样，我们将看到，它为双节线提供了极佳的（内部）界。这里，我们将一般方程 (2.7) 专门化为特定的能量密度 (3.1)，且不假设刚度度量 μ 很小。

假设 $\boldsymbol{F}_0$ 位于次级跳跃集上。那么存在 $\varepsilon_\pm$、y 和 $\lambda\in[0,1]$，使得由 $\boldsymbol{F}_0$、$\boldsymbol{F}$ 构成的这对量，其中

$$\overline{\boldsymbol{F}}=\begin{bmatrix}\overline{\varepsilon} & 0\\ 0 & \varepsilon_0\end{bmatrix},\qquad \overline{\varepsilon}=\lambda\varepsilon_++(1-\lambda)\varepsilon_-,$$

满足次级跳跃集方程 (2.7)。我们计算得

$$\overline{\boldsymbol{P}}=\lambda\boldsymbol{P}_++(1-\lambda)\boldsymbol{P}_-=\begin{bmatrix}\mu\overline{\varepsilon}+\overline{h'}\varepsilon_0 & 0\\ 0 & \mu\varepsilon_0+\overline{\varepsilon h'}\end{bmatrix}.$$

我们有

$$\boldsymbol{P}_0=\mu\boldsymbol{F}_0+h'(d_0)\mathrm{cof}\boldsymbol{F}_0=\mu\begin{bmatrix}\overline{\varepsilon} & 0\\ 0 & \varepsilon_0\end{bmatrix}+\mu\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{m}+h'(d_0)\left(\begin{bmatrix}\varepsilon_0 & 0\\ 0 & \overline{\varepsilon}\end{bmatrix}+\boldsymbol{b}^\perp\otimes\boldsymbol{m}^\perp\right).$$

因此，次级跳跃集系统 (2.7) 中的第二个和第三个方程变为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} (h'(d_0)-\overline{h'})\varepsilon_0 & 0 \\ 0 & h'(d_0)\overline{\varepsilon}-\overline{\varepsilon h'} \end{bmatrix} \boldsymbol{m} = -\mu \boldsymbol{b}, \\ \begin{bmatrix} (h'(d_0)-\overline{h'})\varepsilon_0 & 0 \\ 0 & h'(d_0)\overline{\varepsilon}-\overline{\varepsilon h'} \end{bmatrix} \boldsymbol{b} = -\mu |\boldsymbol{b}|^2 \boldsymbol{m}. \end{cases}$$

这些方程得出 3 种可能：

(a) $(h'(d_0)-\overline{h'})\varepsilon_0 = h'(d_0)\overline{\varepsilon}-\overline{\varepsilon h'} = -\gamma$, $\mu\boldsymbol{b} = \gamma\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m} \in \mathbb{S}^1$;

(b) $(h'(d_0)-\overline{h'})\varepsilon_0 = -(h'(d_0)\overline{\varepsilon}-\overline{\varepsilon h'}) = -\gamma$, $\mu\boldsymbol{b} = \gamma\boldsymbol{I}_-\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{I}_- = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{m} \in \mathbb{S}^1$;

(c) $(h'(d_0)-\overline{h'})\varepsilon_0 \neq \pm(h'(d_0)\overline{\varepsilon}-\overline{\varepsilon h'})$.

可能性（c）意味着 $\boldsymbol{F}_0$ 必须是对角矩阵，这也是我们重点讨论的情形。在 [29] 中将证明，情形（a）和（b）没有解。因此，假设 $\boldsymbol{F}_\pm$ 是对角矩阵，其形式为

$$\boldsymbol{F}_\pm = \begin{bmatrix} \varepsilon_\pm & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}.$$

这意味着 $\overline{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{F}_0 = \beta \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2$。特别是

$$\boldsymbol{F}_0 = \begin{bmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & y_0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \overline{\varepsilon} = \lambda\varepsilon_+ + (1-\lambda)\varepsilon_-, \quad \lambda \in (0,1).$$

我们来利用方程（3.4）和（3.5）计算对角矩阵 $\boldsymbol{P}_\pm$。

$$P_\pm^{11} = \mu\varepsilon_\pm + h'(d_\pm)\varepsilon_0 = \mu\{\!\{\varepsilon\}\!\} = \frac{\mu(d_1+d_2)}{2\varepsilon_0}, \quad P_\pm^{22} = \mu\varepsilon_0 + h'(d_\pm)\varepsilon_\pm = \mu\left(\varepsilon_0 \mp \frac{[\![\varepsilon]\!]\varepsilon_\pm}{2\varepsilon_0}\right).$$

我们来计算对角矩阵 $\boldsymbol{P}_0$。

$$P_0^{11} = \mu x_0 + h'(d_0)y_0 = \mu\overline{\varepsilon} + h'(d_0)\frac{d_0}{\overline{\varepsilon}}, \quad P_0^{22} = \mu y_0 + h'(d_0)x_0 = \frac{\mu d_0}{\overline{\varepsilon}} + h'(d_0)\overline{\varepsilon}.$$

牵引连续性方程（$\overline{\boldsymbol{P}} - \boldsymbol{P}_0$）$\boldsymbol{e}_2 = 0$ 于是变为

$$\varepsilon_0 + \frac{[\![\varepsilon]\!]}{2\varepsilon_0}(\varepsilon_- - 2\lambda\{\!\{\varepsilon\}\!\}) - \frac{d_0}{\overline{\varepsilon}} - \frac{h'(d_0)}{\mu}\overline{\varepsilon} = 0.$$

用 $\overline{\varepsilon}$ 作为变量代替 λ 会更方便。利用 $\overline{\varepsilon}=\varepsilon_-+\lambda[\![\varepsilon]\!]$ 替换上文中的 λ 后，我们得到

$$\frac{d_0}{\overline{\varepsilon}}=\varepsilon_0+\frac{1}{\varepsilon_0}(\varepsilon_+\varepsilon_- - \{\!\{\varepsilon\}\!\}\overline{\varepsilon})-\frac{h'(d_0)}{\mu}\overline{\varepsilon}. \tag{3.14}$$

现在来计算（2.7）中最后一个方程的所有项。

$$W(\boldsymbol{F}_0)=\frac{\mu}{2}(\overline{\varepsilon}^2+y_0^2)+h(d_0)=\frac{\mu}{2}\left(\overline{\varepsilon}^2+\frac{d_0^2}{\overline{\varepsilon}^2}\right)+h(d_0).$$

接下来计算

$$\overline{W}=W_-+\lambda[\![W]\!]=W_-+\lambda\mu[\![\varepsilon]\!]\{\!\{\varepsilon\}\!\}=W_-+\mu(\overline{\varepsilon}-\varepsilon_-)\{\!\{\varepsilon\}\!\},$$

其中用到了 $[\![h]\!]=-\{\!\{h'\}\!\}[\![d]\!]=0$。我们计算

$$h(d_-)=[(d_--d_1)(d_--d_1)]^2=\frac{\mu^2}{16\varepsilon_0^4},$$

根据（3.6）。因此,

$$W_-=\frac{\mu}{2}(\varepsilon_-^2+\varepsilon_0^2)+\frac{\mu^2}{16\varepsilon_0^4}.$$

然后计算 $\boldsymbol{F}_0-\overline{\boldsymbol{F}}=$ （$y_0-\varepsilon_0$）$\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2$。因此

$$\langle\overline{\boldsymbol{P}},\boldsymbol{F}_0-\overline{\boldsymbol{F}}\rangle=\mu\left(\frac{d_0}{\overline{\varepsilon}}-\varepsilon_0\right)\left(\varepsilon_0+\frac{1}{\varepsilon_0}(\varepsilon_+\varepsilon_- - \{\!\{\varepsilon\}\!\}\overline{\varepsilon})\right).$$

最后，麦克斯韦方程 W（$\boldsymbol{F}_0$）$-\overline{W}=\langle\overline{\boldsymbol{P}},\boldsymbol{F}_0-\overline{\boldsymbol{F}}\rangle$ 可写为

$$\frac{1}{2}\left(\overline{\varepsilon}^2+\frac{d_0^2}{\overline{\varepsilon}^2}\right)+\frac{h(d_0)}{\mu}-(\overline{\varepsilon}-\varepsilon_-)\{\!\{\varepsilon\}\!\}-\frac{1}{2}(\varepsilon_-^2+\varepsilon_0^2)-\frac{\mu}{16\varepsilon_0^4}=\left(\frac{d_0}{\overline{\varepsilon}}-\varepsilon_0\right)\left(\varepsilon_0+\frac{1}{\varepsilon_0}(\varepsilon_+\varepsilon_- - \{\!\{\varepsilon\}\!\}\overline{\varepsilon})\right). \tag{3.15}$$

接下来，在 (3.15) 中，我们将 $d_0/\overline{\varepsilon}$ 替换为其在 (3.14) 中的表达式。经过这样的代换，麦克斯韦关系也将变成关于 $\overline{\varepsilon}$ 的二次方程。这使我们能够将该变量消去，表示为关于 ε_0 和 d_0 的有理表达式。随后，麦克斯韦关系将化简为 d_0 与 ε_0 之间的有理关系。

由于剩余方程 $F(\varepsilon_0,d_0)=0$ 非常冗长且复杂，只有借助计算机代数系统才能完成所涉及的计算。给定 μ、d_1 和 d_2 的数值后，我们便可以对 $F(\varepsilon_0,d_0)=0$ 进行数值求解，并提取满足 $\lambda\in[0,1]$ 的解。$d_1=1$、$d_2=2$ 和 $\mu=\mu_{\mathrm{top}}/3$ 的结果在图 4 中以绿色曲线表示。正如我们所见，该曲线表明，绿色曲线与主跳跃集虚线之间的所有点都属于双节线区域，这是对主跳跃集界限的改进。

如图 4 右图所示，次级跳跃集由两条关于第一象限平分线对称的曲线组成。每条曲线始于

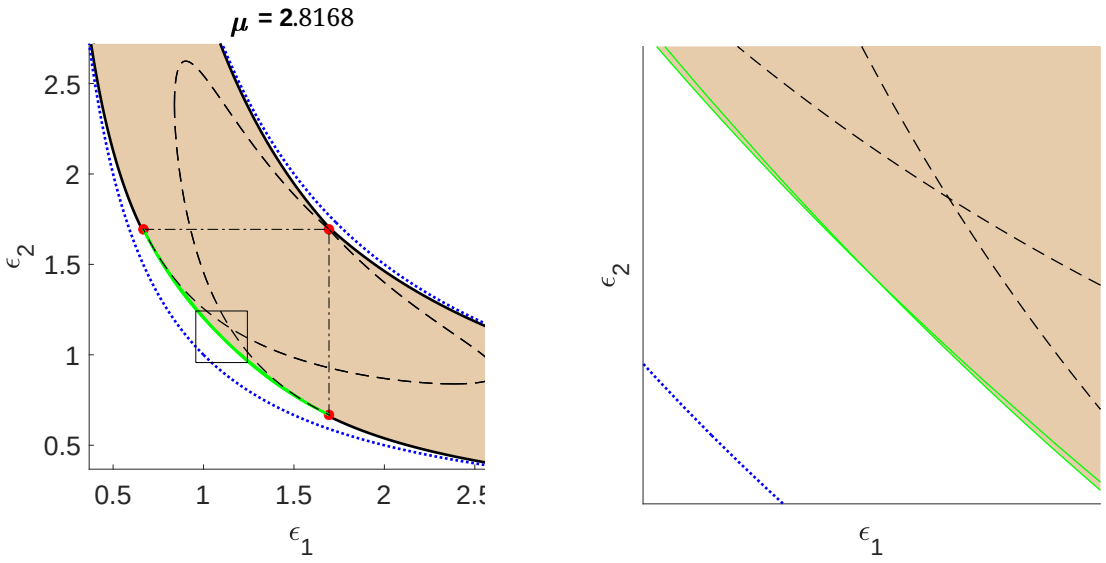


图4：通过对 (3.14) 和 (3.15) 进行数值计算得到的次级跳跃集（相交的绿线）。右图展示了左图中央方框的放大图。

一个 W点，终于跳跃集虚线段上的一个点（未标出）。次级跳跃集的端点对应于（2.8）中体积分数 λ 的极值 0 和 1，且必须位于主跳跃集上。存在两种可能。要么$\boldsymbol{F} \neq \overline{\boldsymbol{F}}$或 $\boldsymbol{F} = \overline{\boldsymbol{F}}$在 $\lambda = 0$ 或 1。在前一种情况下， $\overline{\boldsymbol{F}}$的极限位置 $\boldsymbol{F}_+$ 与跳跃集上的两个不同点秩一相关： $\boldsymbol{F}_-$ （层法向 $\boldsymbol{e}_1$）和 $\boldsymbol{F}$ （层法向$\boldsymbol{e}_2$）。W点 $\boldsymbol{F}_+$ 是唯一具有这一性质的点。跳跃集上的其他所有点 $\boldsymbol{F}_+$ 都只有一个对应点 $\boldsymbol{F}_-$。在后一种情况下，详细的渐近分析表明，$\boldsymbol{F}$和 $\overline{\boldsymbol{F}}$的共同极限点必须使 [26]中的“相界的 Legendre-Hadamard 条件”不等式取等号。当 μ 较小时，该点位于跳跃集的虚线段上，并用于数值计算。分析的技术细节将在别处报告。从 W点到象限平分线的两条曲线的各段，构成了新阴影不稳定点区域边界的一部分。

圆形核。正如我们已经提到的，次级跳跃集（图 4 中以绿色显示）是不稳定的 [29]。这意味着相应的双节线界限并非最优。为了改进这个界限，我们可以采用另一种探测双节线的方法：使有界的平衡能量中性夹杂成核。阐明这类成核测试为何能探测双节线的理论是在 [24] 中提出的。

对于各向同性客观能量 (3.1) 和静水加载，假设最优析出物呈圆形是很自然的。圆形析出物内部的变形梯度 $\boldsymbol{F}_0$ 必须是一个常静水场，并在夹杂的圆形边界处跃变为场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$。要使这样的构型能够探测双节线， $\boldsymbol{F}_0$ 和 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$必须是跳跃集上的对应点。跳跃集上只有一个点满足这些要求 $\boldsymbol{F}_0 = \varepsilon_0^{\mathrm{W}} \boldsymbol{I}_2$，其中 $(\varepsilon_0^{\mathrm{W}}, \varepsilon_0^{\mathrm{W}})$ 是位于象限平分线上的 W点。按要求，场 $\boldsymbol{F}_0$ 是秩一的

连接到一个无限域族

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} \varepsilon_-^{\mathrm{W}} & 0 \\ 0 & \varepsilon_0^{\mathrm{W}} \end{bmatrix}\boldsymbol{R}^T, \qquad \boldsymbol{R} \in SO(2),$$

其中，$(\varepsilon_-^{\mathrm{W}}, \varepsilon_0^{\mathrm{W}})$ 是另一个 W点的坐标。圆形夹杂外部区域的变形梯度必须满足能量 (3.1) 的欧拉-拉格朗日方程

$$\mu\Delta\boldsymbol{y} + (\mathrm{cof}\nabla\boldsymbol{y})\nabla h'(\det\nabla\boldsymbol{y}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus B(\boldsymbol{0}, 1), \tag{3.16}$$

并且与在圆形夹杂边界上的点 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1$ 处的 $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{R}}$ 相等：

$$\nabla\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_-^{\mathrm{W}}\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} + \varepsilon_0^{\mathrm{W}}\boldsymbol{n}^{\perp}\otimes\boldsymbol{n}^{\perp}, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial B(\boldsymbol{0}, 1). \tag{3.17}$$

在这些条件下，对于可能临界稳定的矩阵，两个方程 (2.9) 都将成立

$$\boldsymbol{F}_{\infty} = \lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \nabla\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{\infty}\boldsymbol{I}_2.$$

我们还知道，圆形夹杂内部的 $\nabla\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 值及其在夹杂外部边界上的迹必须稳定。根据 [24] 得出的结果，我们知道有两种可能。第一种是 $\boldsymbol{F}_{\infty}$ 位于双节线上，且夹杂外部区域中的所有 $\nabla\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 值都稳定。第二种可能是，$\boldsymbol{F}_{\infty}$ 位于双节线区域 $\mathfrak{B}$的内部。

在我们的特殊径向对称情形下，我们寻求方程 (3.16) 的径向对称解

$$\boldsymbol{y} = \eta(r)\hat{\boldsymbol{x}}, \qquad |\boldsymbol{x}| > 1.$$

未知函数 $\eta(r)$ 必须满足

$$\begin{cases} \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}h'\left(\frac{\eta\eta'}{r}\right) + \mu\left(\eta' + \frac{\eta}{r}\right)' = 0, \quad r > 1, \\ \eta'(1) = \varepsilon_-^{\mathrm{W}}, \qquad \eta(1) = \varepsilon_0^{\mathrm{W}}. \end{cases} \tag{3.18}$$

非线性二阶常微分方程 (3.18) 无法显式积分，但可以通过数值方法求解。为此，我们需要通过自变量 $x = 1/r^2$ 的变换，将无限区间 $r > 1$ 转换为有限区间。改变因变量 $v = \eta/r$ 也会很方便，这样当 $x \to 0$ 时，$v(x)$ 将有有限极限。于是，$v(x)$ 满足

$$v'' = -\frac{(v')^2 v h''(v^2 - 2xvv')}{\mu + v^2 h''(v^2 - 2xvv')}, \quad x \in [0,1], \quad v(1) = \varepsilon_0^{\mathrm{W}}, \quad v'(1) = \frac{\varepsilon_0^{\mathrm{W}} - \varepsilon_-^{\mathrm{W}}}{2}. \tag{3.19}$$

数值求得的值 $\varepsilon_{\infty} = v(0)\boldsymbol{I}_2$ 在图 6 中以蓝点表示。虽然我们仍无法确定相应的值 $\boldsymbol{F}_{\infty}$ 是否确实位于双节线上，但通过证明蓝点与绿线之间的静水应变不稳定，我们得到了比次级跳跃集（图 6 中的绿线）更精确的双节线界限

。只要验证非退化条件 (2.10)，这一结论便成立。直接计算可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} W^{\circ}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}_0, \nabla\boldsymbol{\phi}) d\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{I}_2 \int_{\mathbb{R}^2} h''(\varepsilon_\infty^2)\varepsilon_\infty^2 \left(\eta'(r) + \frac{\eta(r)}{r} - 2\varepsilon_\infty\right) d\boldsymbol{x}.$$

因此，

$$\int_{\mathbb{R}^2} W^{\circ}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}_0, \nabla\boldsymbol{\phi}) d\boldsymbol{x} = -2\pi h''(\varepsilon_\infty^2)\varepsilon_\infty^2 \boldsymbol{I}_2 \lim_{r\to\infty}(r\eta(r) - \varepsilon_\infty r^2).$$

为说明上述极限存在且非零，至少对于充分小的 $\mu > 0$，我们只需由 (3.18) 求解 $\mu = 0$，其中 $\varepsilon_0^{\mathrm{W}} = \sqrt{d_2}$, $\varepsilon_-^{\mathrm{W}} = \frac{d_1}{\sqrt{d_2}}$。解为 $\eta(r) = \sqrt{d_1 r^2 + d_2 - d_1}$，并且容易看出

$$\lim_{r\to\infty}(r\eta(r) - \varepsilon_\infty r^2) = \frac{d_2 - d_1}{2\sqrt{d_1}}.$$

因此，对于充分小的 $\mu > 0$，非退化条件 (2.10) 成立。在拓扑转变以下，所有 μ 的情形下，非退化性也成立，因为若记 $\widetilde{\eta}(r) = \eta(r) - \varepsilon_\infty r$，那么（假设 $\widetilde{\eta}'(r) \to 0$，当 $r \to \infty$ 时） $\widetilde{\eta}(r)$ 将在 r 较大时满足微分方程

$$\varepsilon_\infty h''(\varepsilon_\infty^2)\left(\varepsilon_\infty\left(\widetilde{\eta}' + \frac{\widetilde{\eta}}{r}\right) + \frac{\widetilde{\eta}'\widetilde{\eta}}{r}\right) + \mu\left(\widetilde{\eta}' + \frac{\widetilde{\eta}}{r}\right) = 0.$$

积分可得

$$\varepsilon_\infty h''(\varepsilon_\infty^2)(2\varepsilon_\infty r\widetilde{\eta} + \widetilde{\eta}^2) + 2\mu r\widetilde{\eta} = 2c.$$

由于 $\widetilde{\eta}$ 满足 $\widetilde{\eta}'(r) \to 0$（当 $r \to \infty$ 时），且不可能为零（它是 $\eta(r) - \varepsilon_\infty r$ 的首项），我们得出积分常数 c 也不可能为零。因此，我们得到

$$\lim_{r\to\infty}(r\eta(r) - \varepsilon_\infty r^2) = \lim_{r\to\infty} r\widetilde{\eta}(r) = \frac{c}{\mu + \varepsilon_\infty^2 h''(\varepsilon_\infty^2)} \neq 0.$$

沿 $\varepsilon\boldsymbol{I}_2$ 的多凸性界限。为了证明点 $\varepsilon_\infty\boldsymbol{I}_2$ 的稳定性，我们转而研究点 $\boldsymbol{F} = \varepsilon\boldsymbol{I}_2$ 处的多凸性问题。该问题归结为求出一个常数 $m \in \mathbb{R}$，使得式 (2.5) 成立。对于我们的能量，我们计算得

$$W^{\circ}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}) = \frac{\mu}{2}|\boldsymbol{H}|^2 + h(\varepsilon^2 + d + \varepsilon\theta) - h(\varepsilon^2) - \varepsilon h'(\varepsilon^2)\theta, \qquad \theta = \operatorname{Tr}\boldsymbol{H},\ d = \det\boldsymbol{H}.$$

我们还有

$$|\boldsymbol{H}|^2 = 4s^2 - 2d + \theta^2,$$

其中

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^T) = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix}.$$

$(\theta,\ d,\ s)$ 的所有可容许值集合由不等式[5] $s^2 \geq d - \theta^2/4$描述。因此，证明对于所有 $\boldsymbol{H}$，$W^\circ(\varepsilon \boldsymbol{I}_2,\ \boldsymbol{H}) \geq m \det \boldsymbol{H}$ 等价于证明

$$2\mu \max\left\{0, d - \frac{\theta^2}{4}\right\} + \frac{\mu\theta^2}{2} + h(\varepsilon^2 + d + \varepsilon\theta) - h(\varepsilon^2) - \varepsilon h'(\varepsilon^2)\theta \geq (m+\mu)d.$$

证明这个不等式可分为两种情形

$$\frac{\mu\theta^2}{2} + h(\varepsilon^2 + d + \varepsilon\theta) - h(\varepsilon^2) - \varepsilon h'(\varepsilon^2)\theta \geq (m+\mu)d, \quad \forall d \leq \frac{\theta^2}{4}, \tag{3.20}$$

and

$$h(\varepsilon^2 + d + \varepsilon\theta) - h(\varepsilon^2) - \varepsilon h'(\varepsilon^2)\theta \geq (m-\mu)d, \quad \forall d \geq \frac{\theta^2}{4}. \tag{3.21}$$

特别地，对于 $d = \theta^2/4$，这两个不等式都必须成立。在这种情况下，必有

$$m \leq \mu + 4 \min_{\theta\in\mathbb{R}} \frac{h(\varepsilon^2 + \theta^2/4 + \varepsilon\theta) - h(\varepsilon^2) - \varepsilon h'(\varepsilon^2)\theta}{\theta^2} = m^*. \tag{3.22}$$

作变量代换 $\delta = \varepsilon^2 + d + \varepsilon\theta$，我们得到 $\boldsymbol{F} = \varepsilon \boldsymbol{I}_2$ 是多凸的，当且仅当存在 $m \leq m_*$，使得

$$\inf_{\delta \leq (\varepsilon+\theta/2)^2} F_1(\delta,\theta) \geq 0, \quad F_1(\delta,\theta) = \frac{\mu\theta^2}{2} + h(\delta) - h(\varepsilon^2) - \varepsilon h'(\varepsilon^2)\theta - (m+\mu)(\delta - \varepsilon\theta - \varepsilon^2), \tag{3.23}$$

and

$$\inf_{\delta \geq (\varepsilon+\theta/2)^2} F_2(\delta,\theta) \geq 0, \quad F_2(\delta,\theta) = h(\delta) - h(\varepsilon^2) - \varepsilon h'(\varepsilon^2)\theta - (m-\mu)(\delta - \varepsilon\theta - \varepsilon^2). \tag{3.24}$$

情形 (3.24) 显然成立，因为 $F_2(\delta,\theta)$ 关于 θ 是线性的，而最小值总是在可容许域的边界上取得，即 $\delta = (\varepsilon + \theta/2)^2$，或等价地，$d = \theta^2/4$。在这种情况下，只要 $m \leq m^*$，不等式 (3.24) 就成立。

函数 $F_1(\delta,\theta)$ 关于 θ 是二次的，因此其最小值要么在边界上取得，对应于 $d = \theta^2/4$；要么在临界点处取得，该临界点满足

$$\theta = \frac{\varepsilon(h'(\varepsilon^2) - m - \mu)}{\mu}, \quad h'(\delta) = m + \mu, \tag{3.25}$$

前提是 $\delta \leq (\theta/2 + \varepsilon)^2$，，这当且仅当以下条件成立

$$\delta \leq \frac{\varepsilon^2(h'(\varepsilon^2) + \mu - m)^2}{4\mu^2}. \tag{3.26}$$

我们指出，将 $\theta = -4\varepsilon$ 代入 (3.22)，可推得 $m^* \leq \mu + h'(\varepsilon^2)$。因此，当 $m \leq m^*$ 时，(3.26) 的右端关于 m 单调递减。

Let d_1 是 $h'(d)$ 的局部最大值点，而点 d_2 是 $h'(d)$ 的局部极小值点。根据 m^* 的取值，存在几种情形。

[5]这个不等式等价于 $|\mathrm{dev}(\boldsymbol{H})|^2 \geq 0$，其中 $2\mathrm{dev}(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T - (\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{H})\boldsymbol{I}_2$。

• 若 $m^* + \mu > h'(\widetilde{d_1})$，则方程 $h'(\delta) = m^* + \mu$ 有唯一解 δ^*。若 $\delta = \delta^*$不满足 (3.26) 且 $m = m^*$，则我们有 $m = m^*$意义下的多凸性，因为 $F_1(\delta, \theta)$ 在 $d < \theta^2/4$中没有临界点。若 $\delta = \delta^*$ 满足 (3.26)，那么，若 $f(\delta^*) \geq 0$，则 $m = m^*$意义下的多凸性成立。这里

$$f(\delta) = F_2(\delta, \theta(\delta)) = h(\delta) - h(\varepsilon^2) - h'(\delta)(\delta - \varepsilon^2) - \frac{\varepsilon^2(h'(\delta) - h'(\varepsilon^2))^2}{2\mu}. \tag{3.27}$$

如果 $f(\delta^*) < 0$，那么我们可以尝试为 $m < m^*$ 找到更好的取值。在这种情况下，$h'(\delta) = m + \mu$ 的所有解 δ 都会小于 δ^*，因此对于任意 $m \leq m_*$，$h'(\delta) = m + \mu$ 的所有根都满足 (3.26)。对于某个 $m \leq m^*$ 的取值，如果 $h'(\delta) = m + \mu$ 的所有根都满足 $f(\delta) \geq 0$，则多凸性成立。

• 如果 $m^* + \mu < h'(\widetilde{d_2})$，那么方程 $h'(\delta) = m^* + \mu$ 有唯一解 δ_*。如果 $\delta = \delta_*$ 在 $m = m^*$ 下不满足 (3.26)，那么当 $F_1(\delta, \theta)$ 在 $d < \theta^2/4$ 中没有临界点时，由于 $m = m^*$，我们有多凸性。如果 $\delta = \delta_*$ 满足 (3.26)，那么对于任意 $m \leq m^*$，方程 $h'(\delta) = m + \mu$ 都有唯一解 δ，且满足 $\delta \leq \delta_*$。在这种情况下，当且仅当对所有 $\delta < \delta_*$，$f(\delta) < 0$ 时，多凸性不成立。

• 若 $m^* + \mu \in (h'(\widetilde{d_2}) \; h'(\widetilde{d_1}))$，则 $h(\delta) = m^* + \mu$ 有 3 个实根。若连最小的根 δ_* 都不满足关于 $m = m^*$的条件 (3.26)，则多凸性成立，因为 $F_1(\delta, \theta)$ 没有临界点。若最小的根 δ_* 满足 (3.26)，则$h(\delta) = m + \mu$ 的最小根对所有 $m \leq m^*$都满足 (3.26)。因此，若对所有 $\delta \leq \delta_*$，$f(\delta) < 0$，则多凸性不成立。然而，若存在某些 $\delta \leq \delta_*$，使得 $f(\delta) \geq 0$，则这并不意味着多凸性成立。要使多凸性成立，必须对满足 (3.26) 的 $h'(\delta) = m + \mu$ 的所有根，都有 $f(\delta) \geq 0$ 。

在极限情形 $\mu \to 0$ 下，可以更清楚地确定我们需要处理哪种情形。

4 极限情形 $\mu \to 0$

在上一节中，我们推导出了次级跳跃集的方程、点 $\varepsilon \boldsymbol{I}_2$ 的多凸性条件，以及一个隐式确定成核界 $\varepsilon_\infty \boldsymbol{I}_2$ 的微分方程。在渐近极限 $\mu \to 0$ 下，这些隐式条件可以显式写出。我们强调，这里考虑的是一族非线性势 $h(d)$ 固定而 $\mu \to 0$ 可变的双井 Hadamard 材料。

S次级跳跃集。将方程 (3.7) 按 μ 展开至一阶，我们得到

$$\varepsilon_+ = \frac{d_2}{\varepsilon_0} - \frac{\mu}{4\varepsilon_0^3(d_2 - d_1)} + O(\mu^2), \qquad \varepsilon_- = \frac{d_1}{\varepsilon_0} + \frac{\mu}{4\varepsilon_0^3(d_2 - d_1)} + O(\mu^2). \tag{4.1}$$

由于 d_1 和 d_2 固定，我们将应变 $\varepsilon_\pm$ 视为 ε_0 和 μ 的函数，尽管记号中省略了这一点。显然，当 $\mu \to 0$ 时，我们有 $\varepsilon_+ \to d_2/\varepsilon_0$，$\varepsilon_- \to d_1/\varepsilon_0$。

次级跳跃集的参数方程（$x_0(\varepsilon_0; \mu)$ $y_0(\varepsilon_0; \mu)$）在$\mu \to 0$时收敛于双曲线 $x_0 y_0 = d_1$。特别地，当 $\mu \to 0$时，$d_0(\varepsilon_0, \mu) \to d_1$。体

分数 λ是二阶层合中所用秩一层合的体积分数，它也是ε_0 和 μ 的函数，因此必须存在极限（至少沿某个子列），即当 $\mu \to 0$时， λ（ε_0； μ） $\to \lambda_0$（ε_0）。公式（3.14）表明， $d_0 = d_1 + \mu\delta + O$（$\mu^2$），其中 δ 满足

$$\frac{\overline{d}}{\varepsilon_0}\left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{d_2}\varepsilon_0^2 - \frac{d_1+d_2}{2\varepsilon_0^2}\overline{d}\right)\right) - d_1 - 2\delta(d_2-d_1)^2\frac{\overline{d}^2}{\varepsilon_0^2} = 0, \tag{4.2}$$

其中 $\overline{d} = \lambda d_2 +$(1 − λ)d_1。公式（4.2）只需在公式（3.14）中令$\mu \to 0$ 并取极限即可得到。

在（3.15）中令 $\mu \to 0$ 并取极限，我们得到

$$\frac{(\overline{d}-d_1)^2(\varepsilon_0^4 + \overline{d}^2 - 2d_2\overline{d})}{2\varepsilon_0^2\overline{d}^2} = 0. \tag{4.3}$$

其对体积分数 λ 的依赖至关重要，在极限 $\mu \to 0$中不应消失。因此，我们所要寻找的（4.3）的解为

$$\overline{d} = d_2 - \sqrt{d_2^2 - \varepsilon_0^4}, \tag{4.4}$$

其中，根的选择由以下要求决定：$\overline{d} \le d_2$。将其与$\overline{d} \ge d_1$ 这一要求结合起来，我们得到不等式

$$\sqrt[4]{d_2^2 - (d_2-d_1)^2} \le \varepsilon_0 \le \sqrt{d_2}. \tag{4.5}$$

将（4.4）代入（4.2），现在可以写出关于 δ的显式公式：

$$\delta = \frac{\varepsilon_0^4(d_2-d_1) - 2(d_2^2-\varepsilon_0^4)(d_2 - \sqrt{d_2^2-\varepsilon_0^4})}{4\varepsilon_0^2(d_2-d_1)^2(d_2-\sqrt{d_2^2-\varepsilon_0^4})^2}. \tag{4.6}$$

看来，为了得到次级跳跃集的正确渐近行为，我们需要计算 $\overline{\varepsilon}$的一阶渐近行为：

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d_2 - \sqrt{d_2^2-\varepsilon_0^4}}{\varepsilon_0} + \widetilde{\varepsilon}\mu + O(\mu^2). \tag{4.7}$$

事实上，这并非必要，因为 d_0 的主阶渐近行为是一个常数 d_1。在这种情况下，就 $\mu \to 0$ 时的一阶渐近行为而言，使用 (4.7) 仅仅相当于对曲线重新参数化

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{d_2 - \sqrt{d_2^2-\varepsilon_0^4}}{\varepsilon_0}, \\ y_0 = \dfrac{d_1 + \mu\delta(\varepsilon_0)}{x_0}, \end{cases} \tag{4.8}$$

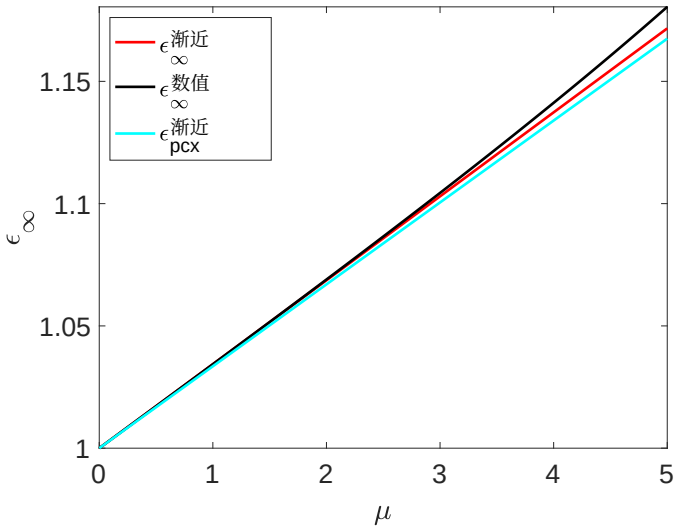


图5： ε_∞ 的渐近行为（4.12）（此处记为 $\varepsilon_\infty^{\text{asymptotic}}$）与通过数值求解（3.18）得到的$\varepsilon_\infty^{\text{numerical}}$的比较。图中还显示了 ε_{pcx} 的渐近行为（此处记为 $\varepsilon_{\text{pcx}}^{\text{asymptotic}}$），该结果由（4.16）得出。

其中，参数 ε_0 在次级跳跃集上的取值范围由 (4.5) 给出。事实上，如果我们将曲线参数 ε_0 改为 $\varepsilon_0 + \mu\widetilde{\varepsilon}/x_0'(\varepsilon_0)$，那么

$$x_0\left(\varepsilon_0 + \frac{\mu\widetilde{\varepsilon}}{x_0'(\varepsilon_0)}\right) = x_0(\varepsilon_0) + \mu\widetilde{\varepsilon} + O(\mu^2).$$

同时

$$y_0\left(\varepsilon_0 + \frac{\mu\widetilde{\varepsilon}}{x_0'(\varepsilon_0)}\right) = \frac{d_1}{x_0(\varepsilon_0)} - \frac{\mu d_1\widetilde{\varepsilon}}{x_0(\varepsilon_0)^2} + \frac{\mu\delta(\varepsilon_0)}{x_0(\varepsilon_0)} + O(\mu^2) = \frac{d_1 + \mu\delta}{x_0 + \mu\widetilde{\varepsilon}} + O(\mu^2).$$

我们得出结论，方程 (4.8) 以 $O(\mu^2)$ 的误差正确描述了次级跳跃集的渐近行为，其中参数 ε_0 按照 (4.5) 变化。当 $\varepsilon_0 = \sqrt{d_2}$ 时，次级跳跃集经过其中一个 W点。当 $\varepsilon_0 = \sqrt[4]{d_2^2 - (d_2 - d_1)^2}$ 时，它经过“相界的 Legendre-Hadamard 条件”界的极限点（见 [26]）；当 μ 较小时，该点位于图 4 中跳跃集的虚线部分。若将 (4.8) 绘制在图 4 中，其曲线将与数值求得的次级跳跃集无法区分。

圆形核。在近液态极限 $\mu \to 0$下，我们可以显式求出该解的渐近行为。我们知道，在极限 $\mu \to 0$ 下，场 $d(\boldsymbol{x}) = \det \nabla \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 必须趋近于 d_1。因此，

$$\frac{\eta\eta'}{r} = d_1 + \mu\delta(r) + O(\mu^2), \quad r > 1.$$

这意味着

$$\eta(r) = \sqrt{d_1 r^2 + c_0} + \mu\widetilde{\eta}(r) + O(\mu^2), \tag{4.9}$$

因此，

$$\delta(r)=\frac{1}{r}\left(\widetilde{\eta}(r)\sqrt{d_1r^2+c_0}\right)'.$$

将此试探形式代入（3.18），得到

$$\mu\frac{\sqrt{d_1r^2+c_0}}{r}h''(d_1)\delta'(r)+\mu\left(\frac{d_1r}{\sqrt{d_1r^2+c_0}}+\frac{\sqrt{d_1r^2+c_0}}{r}\right)'+O(\mu^2)=0. \tag{4.10}$$

由（3.18）可知初始条件为

$$c_0=d_2-d_1,\quad \widetilde{\eta}(1)=-\frac{d_2-d_1}{4d_2^{3/2}h''(d_2)},\quad \widetilde{\eta}'(1)=\frac{d_1(d_2-d_1)}{2d_2^{3/2}}\left(\frac{1}{d_1h''(d_1)}+\frac{1}{2d_2h''(d_2)}\right).$$

方程（4.10）很容易积分（注意到 $\sqrt{d_1r^2+c_0}/r$ 从 $\sqrt{d_2}$ 减小到 $\sqrt{d_1}$，因此始终与零和 ∞ 保持有界距离）。

$$h''(d_1)\widetilde{\eta}(r)=\frac{c_1r^2+c_2}{\sqrt{d_1r^2+c_0}}-\frac{r^2}{2\sqrt{d_1r^2+c_0}}\ln\frac{\sqrt{d_1r^2+c_0}}{r}. \tag{4.11}$$

由 $\widetilde{\eta}(r)$ 的初始条件可得

$$c_1=\frac{1}{2}\ln\sqrt{d_2},\qquad c_2=-\frac{(d_2-d_1)h''(d_1)}{4d_2h''(d_2)},$$

因此

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\infty=\left(\sqrt{d_1}+\frac{\mu}{2h''(d_1)\sqrt{d_1}}\ln\frac{\sqrt{d_2}}{\sqrt{d_1}}\right)\boldsymbol{I}_2+O(\mu^2). \tag{4.12}$$

图5展示了整个剪切模量 μ 范围内的渐近行为质量。y 轴上的数字表明，即使 μ 的取值并不是特别小，渐近式（4.12）仍能很好地近似 ε_∞ 的实际值。例如，当 $\mu=3$ 时，相对偏差仅约为 0.1%。

沿 $\varepsilon\boldsymbol{I}_2$的多凸性界限。若 $\mu=0$，那么我们知道，只要$\varepsilon\notin[\sqrt{d_1},\sqrt{d_2}]$，沿 $\varepsilon\boldsymbol{I}_2$的多凸性就成立。在这个极限情形下，我们对 $\varepsilon=\sqrt{d_1}$ 的多凸性分析从极小化问题（3.22）开始，该问题可简化为[6]:

$$m\le\min_{\theta\in\mathbb{R}}\frac{h(d_1+\theta\sqrt{d_1}+\theta^2/4)}{\theta^2}=0=m^*. \tag{4.13}$$

我们首先注意到，一般而言，$\theta=0$ 不是极小化点。因此有 3 个极小化点:

$$\theta=-4\sqrt{d_1},\qquad \theta=\pm2\sqrt{d_2}-2\sqrt{d_1}.$$

当 μ 为正但较小时，我们考察点 $\varepsilon=\sqrt{d_1}+x$（其中 x 较小）的多凸性。我们知道，随着 x 增大，多凸性会在 $\varepsilon\boldsymbol{I}_2$ 到达次级跳跃集上的点之前失效，而该点已知是不稳定的。因此，我们可以将

[6]我们不失一般性地假设，$h(d)\ge0$ 且 $h(d)=0$ 仅在 $d=d_1$ 和 $d=d_2$处成立。

变量 x 视为 μ 阶，从而能够计算出确立多凸性所需所有量的渐近行为。

当 $x > 0$ 时，(3.22) 的极小化点 $\theta(x)$ 必须位于上述 (4.13) 的 3 个极小化点之一附近。因此，我们可以将极小化点写为 $\theta = \theta_0 + y$，其中 θ_0 表示这 3 个中的一个。若将取最小值的函数写为 $H(\varepsilon, \theta)$，那么在极小值处必须有 $\partial H/\partial\theta = 0$，由此得到方程

$$x\frac{\partial^2 H}{\partial\theta\partial\varepsilon} + y\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2} = 0$$

该方程关联了无穷小量 x 和 y。解出 y 并代回 H 后，我们得到

$$H = x\left(\frac{\partial H}{\partial\varepsilon} - \frac{\partial H}{\partial\theta}\frac{\dfrac{\partial^2 H}{\partial\theta\partial\varepsilon}}{\dfrac{\partial^2 H}{\partial\theta^2}}\right),$$

其中导数在 $(\sqrt{d_1}, \theta_0)$ 处取值。Maple 计算得到

$$H = \begin{cases} \frac{x}{2}\sqrt{d_1}h''(d_1), & \theta_0 = -4\sqrt{d_1}, \\ \frac{xd_1h''(d_1)}{\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}}, & \theta_0 = -2\sqrt{d_2} - 2\sqrt{d_1}, \\ \frac{xd_1h''(d_1)}{\sqrt{d_1}-\sqrt{d_2}}, & \theta_0 = 2\sqrt{d_2} - 2\sqrt{d_1}. \end{cases}$$

这表明 $\theta = 2\sqrt{d_2} - 2\sqrt{d_1} + y$ 是极小化点，而

$$m^* = \mu - \frac{4xd_1}{\sqrt{d_2} - \sqrt{d_1}}h''(d_1) + O(x^2).$$

特别地，方程 $h'(\delta) = m^* + \mu$ 将有 3 个实根。下面确定其中有多少个满足 (3.26)；当 $\mu \to 0$ 时，$x \to 0$ 可写为

$$\delta \le \left(d_1h''(d_1)\frac{\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}}{\sqrt{d_2} - \sqrt{d_1}}\frac{x}{\mu}\right)^2. \tag{4.14}$$

最小的根 δ_* of $h'(\delta) = m^* + \mu$ 具有渐近行为

$$\delta_* = d_1 + \frac{\mu + m^*}{h''(d_1)} + O(\mu^2 + x^2).$$

因此，当满足以下条件时，它将不满足（4.14）：

$$x \le \frac{\mu}{h''(d_1)\sqrt{d_1}}\frac{\sqrt{d_2} - \sqrt{d_1}}{\sqrt{d_2} + \sqrt{d_1}} + O(\mu^2). \tag{4.15}$$

如果 x大于上界（4.15），那么 δ_* 满足（4.14）。

现在我们来证明，在这种情况下，对于所有 $\delta \le \delta_*$，当 μ 足够小时，$f(\delta) < 0$。事实上，$h'(\delta)$ 是定义在 $\delta \le \delta_*$ 上的单调递增函数。因此，要么 δ 接近 d_1，要么

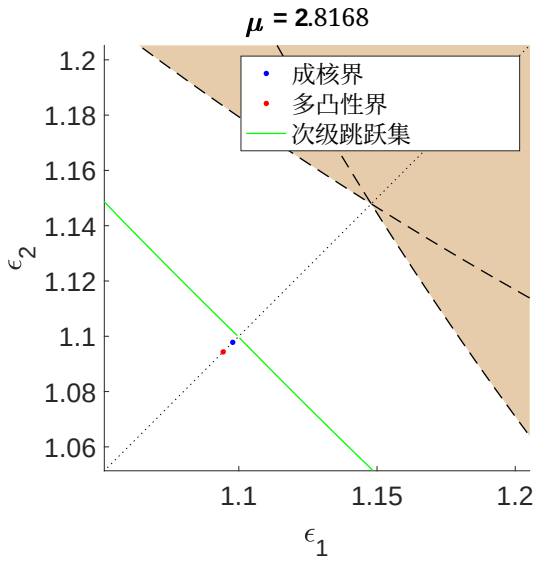


图 6：沿静水应变从双节线区域的内侧和外侧对双节线的界定。

$h'(\delta) - h'(\varepsilon^2)$ 不小。在后一种情况下，由 (3.27) 给出的 $f(\delta)$ 显然为负，因为当 $\mu \to 0$ 时，其最后一项趋于 $-\infty$。当 δ 接近 d_1 时，利用以 ε^2 为中心对 $h(\delta)$ 作泰勒展开，可得

$$f(\delta) = -\frac{1}{2}h''(\varepsilon^2)(\delta-\varepsilon^2)^2 - \frac{\varepsilon^2 h''(\varepsilon^2)^2(\delta-\varepsilon^2)^2}{2\mu} + O\left(\frac{(\delta-\varepsilon^2)^3}{\mu}\right),$$

当 μ 足够小时，该式显然为负。我们得出，当 $\varepsilon \le \varepsilon_{\mathrm{pcx}}$ 时，$\varepsilon \boldsymbol{I}_2$ 处成立多凸性，其中

$$\varepsilon_{\mathrm{pcx}} = \sqrt{d_1} + \frac{\mu}{h''(d_1)\sqrt{d_1}}\frac{\sqrt{d_2}-\sqrt{d_1}}{\sqrt{d_2}+\sqrt{d_1}} + O(\mu^2). \tag{4.16}$$

在图 6 中，$\varepsilon_{\mathrm{pcx}}\boldsymbol{I}_2$ 由红点表示。图中显示，$\varepsilon_\infty \boldsymbol{I}_2$ 并非多凸，但差距非常小。我们的数值研究（将在其他地方报告）表明，图 6 中各界限的排序在 μ 的整个范围内都保持不变。从图 6 可以看出，已确认稳定的区域（红点下方的角平分线上）与已确认失稳的区域（蓝点上方的角平分线上）之间剩余的差距非常小。

5 一窥松弛能量

关于双节线的假设性界限。我们在前面的讨论中已经看到，能量$W(\boldsymbol{F})$在 $\boldsymbol{F} = \varepsilon_\infty \boldsymbol{I}_2$处不是多凸的。这并不十分令人意外，因为多凸性通常严格强于拟凸性，而我们预期并猜想 $\boldsymbol{F} = \varepsilon_\infty \boldsymbol{I}_2$位于双节线上——正处于拟凸性的边缘。

首先，我们回顾一下之前的观察：如果 $\boldsymbol{F} = \varepsilon_\infty \boldsymbol{I}_2$ 稳定，那么对于每个 $|\boldsymbol{x}| > 1$ ，变形梯度

$$\nabla \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \eta'(r)\hat{\boldsymbol{x}} \otimes \hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\eta(r)}{r}(\boldsymbol{I}_2 - \hat{\boldsymbol{x}} \otimes \hat{\boldsymbol{x}})$$

根据定义 2.2，它们也稳定。因此，这一观察将为整个双节线提供一个外部界。

接下来请注意，在 W点具有多凸性的整个 μ 取值范围内，以下曲线的并集

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\eta(r)}{r}, \\ \varepsilon_2 = \eta'(r), \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \eta'(r) \\ \varepsilon_2 = \frac{\eta(r)}{r}, \end{cases} \qquad r > 1 \tag{5.1}$$

看起来与图 4 中以绿色显示的次级跳跃集曲线几乎无法区分。图 7 更清楚地展示了这一点：它放大了图 6 中的应变空间部分，其中以品红色显示的曲线 (5.1) 在图 6 的蓝色点处相交，并以斜率 -1 进入该点。假设关于 $\varepsilon_\infty \boldsymbol{I}_2$ 稳定性的猜想成立，那么品红色曲线必定位于双节线区域之外，而次级跳跃集则位于其内部。因此，能量 (3.1) 的双节线必定位于绿色曲线与品红色曲线之间。我们猜想，品红色曲线实际上就是能量 (3.1) 的真实双节线。无论这一更一般的猜想是否成立，品红色曲线都为双节线区域提供了一个相当紧的外部界，而这一界仅依赖于关于 $\varepsilon_\infty \boldsymbol{I}_2$ 稳定性这一较温和的假设。

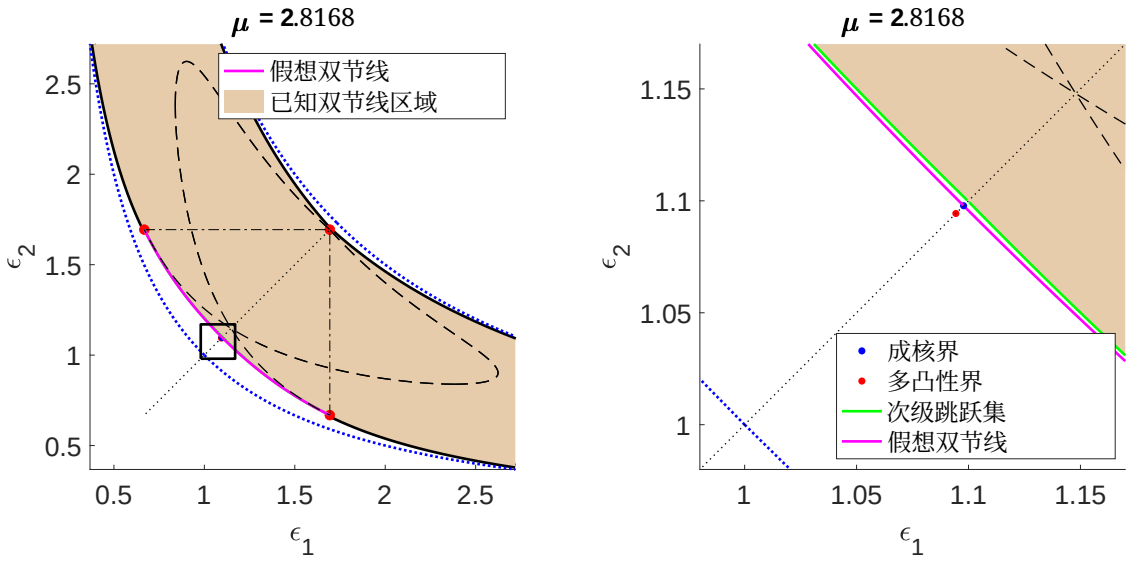


图 7：在 $\varepsilon_\infty \boldsymbol{I}_2$ 稳定的条件下，从外部对双节线区域作出的假想界限。右图是左图中方框区域的放大图。

假设 $\varepsilon_\infty \boldsymbol{I}_2$ 稳定的另一个副产品，将是静水应变 $\boldsymbol{F}$ 的拟凸包络 $QW(\boldsymbol{F})$ 的公式。如果 $\boldsymbol{F} = \varepsilon_\infty \boldsymbol{I}_2$ 稳定，那么我们的径向解 $\nabla \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \eta(r)\hat{}\boldsymbol{x}$ （方程（3.18））也是每个有限球 $B(0, R)$ 中的全局极小值点，

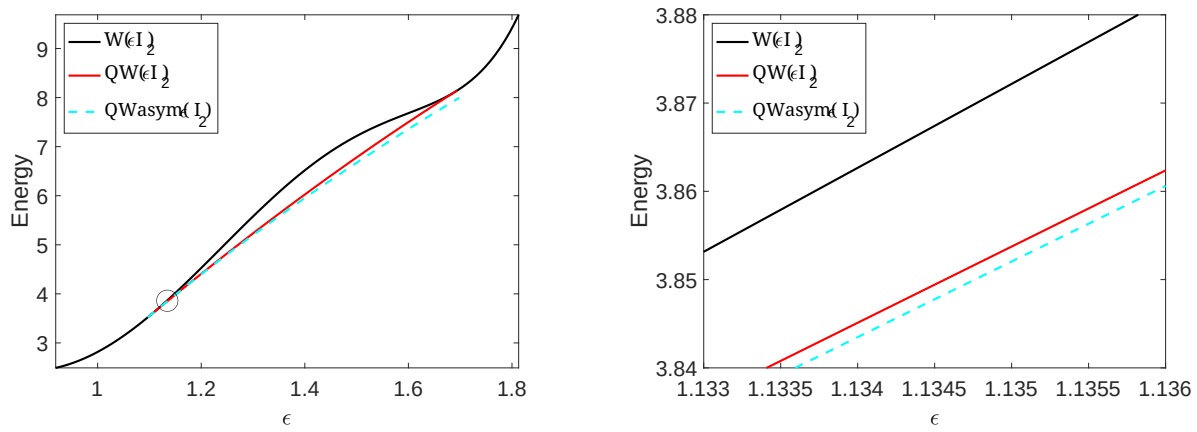


图8： $W(\boldsymbol{F})$在静水应变 $\boldsymbol{F}=\varepsilon \boldsymbol{I}_2$上的拟凸包络。右图展示了左图中小圆一部分的放大图。

在该有限球中，它满足仿射边界条件 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})=(\eta(R)/R)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\in\partial B(0,R)$ [30]。这类构型的能量必然为 $QW(\eta(R)\boldsymbol{I}_2/R)|B(0,R)|$。因此，我们可以将所有 ε 的 $QW(\varepsilon \boldsymbol{I}_2)$ 计算为球 $B(0,R)$ 中构型 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})=\eta(r)\hat{}\boldsymbol{x}$ 的能量。利用平衡静态构型中储存的非线性弹性能的克拉佩龙型公式，我们得到 $\boldsymbol{F}=\eta(R)\boldsymbol{I}_2/R$: [30]。

$$|B(0,R)|QW(\boldsymbol{F})=\frac{1}{2}\int_{\partial B(0,R)}\{\boldsymbol{P}(\nabla \boldsymbol{y})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{P}^*(\nabla \boldsymbol{y})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}\}dS. \tag{5.2}$$

最后，将 $\boldsymbol{n}=\hat{}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}=\eta(r)\hat{}\boldsymbol{x}$ 代入 (5.2)，得到

$$QW\left(\frac{\eta(R)}{R}\boldsymbol{I}_2\right)=2(\mu-h'(d))d-\mu\eta'(R)^2+(2h'(d)+\mu)\frac{\eta(R)^2}{R^2}+2h(d), \tag{5.3}$$

其中

$$d=\frac{\eta'(R)\eta(R)}{R}.$$

当 μ 较小时，我们可以使用渐近公式 (4.9)、(4.11) 来描述 $\eta(r)$，从而得到 $QW(\varepsilon \boldsymbol{I}_2)$的显式渐近式 $QW^{\text{asym}}(\varepsilon \boldsymbol{I}_2)$。图8展示了由 (3.18) 的数值解得到的 $QW(\varepsilon \boldsymbol{I}_2)$曲线，以及其显式渐近近似 $QW^{\text{asym}}(\varepsilon \boldsymbol{I}_2)$；这两条曲线叠加在 $W(\varepsilon \boldsymbol{I}_2)$的曲线上。

6 结论

本文提出了在刚度度量 μ 足够小时，解析求解二维空间中双井哈达玛能量 (3.1) 的松弛问题。然而，我们最终只实现了一个更为有限的目标：确定应变空间中相应双节线区域的一个相当大的部分。

为了从解析角度处理这些棘手问题，我们采用了此前开发的一些方法，这些方法围绕跳跃集的计算及其稳定部分的识别展开

。虽然我们的一般方法适用于整个参数范围内的 Hadamard 材料，且便于进行数值实现，但本文选择只对“近液态”区域进行显式的渐近研究。

特别是，我们成功证明，在此极限下，与高应变相相邻的跳跃集子集仍然稳定，因此简单层化能够给出双节线的相应部分。这意味着，即使参数 μ 极小，趋近于零，高应变相仍保持切向刚度，其程度足以确保初始相变具有类固-固性质。

相比之下，我们的分析表明，在 $\mu \to 0$ 极限下，与低应变、低能相相邻的跳跃集子集是不稳定的。此外，次级跳跃集在此极限下也不稳定。这一结果意味着，任何有限阶的层状结构都不稳定，在该情形下也无法与双节线的任何部分对应。

直接转变与逆向转变之间所揭示的转变机制不对称性，究竟是 Hadamard材料所特有的，还是这一显著现象具有更普遍的性质，仍有待确定。然而，这表明刚性在结构转变中扮演着错综复杂的角色；即使刚性很弱，也能产生复杂的微观结构形态，并构成松弛能量的基础。这种复杂性表明，颇为值得注意的是，即便系统任意接近液体状态，弹性长程相互作用仍然具有重要作用。换言之，消失的刚性可视为 Hadamard 液体的微观结构选择机制；否则，这种液体将具有无穷多种可能的协调机制，且这些机制的能量代价均为零。

为了调和近液态材料行为中的固体特征与其纯粹“液态”极限下的行为，可以不再研究能量的全局极小值，转而研究能量仅略高于基态能量的近似极小化子。在这种情况下，当 μ 足够小但非零时，与 $\mu = 0$ 对应的纯液态微结构丰富多样的形态，可以通过 Hadamard 固体的此类近似极小化子来重现。评估这些投影在物理上的意义时，还必须权衡本研究中未考虑的其他因素，例如表面能、晶体各向异性、空间非均匀性和动力学。

经费支持。YG 获得美国国家科学基金会 DMS-2005538 项目资助。LT 的研究获得法国资助项目 ANR-10-IDEX-0001-02 PSL 的支持。

作者贡献。两位作者共同撰写了论文正文并审阅了稿件。

7 声明

利益冲突。作者声明不存在任何利益冲突。

Hadamard 材料跳跃集的计算

这里我们回顾根据 [27] 计算能量（3.1）的跳跃集。

我们从式 (2.3) 中表示变形梯度 $\boldsymbol{F}_+$ 和 $\boldsymbol{F}_-$ 运动学相容性的第一个方程开始。对等式两边取行列式，得到

$$d_+ = d_- + \operatorname{cof}\boldsymbol{F}_-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}, \quad d_\pm = \det \boldsymbol{F}_\pm. \tag{A.1}$$

利用公式

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}) = \mu\boldsymbol{F} + h'(\det \boldsymbol{F})\operatorname{cof}\boldsymbol{F}$$

对于 Piola-Kirchhoff 应力，我们计算得

$$[\![\boldsymbol{P}]\!]\boldsymbol{n} = \mu\boldsymbol{a} + [\![h']\!]\operatorname{cof}\boldsymbol{F}_-\boldsymbol{n},$$

其中我们已 使用了众所周知的关系 $\operatorname{cof}(\boldsymbol{F}_- + \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = (\operatorname{cof}\boldsymbol{F}_-)\boldsymbol{n}$。类似地 ，

$$[\![\boldsymbol{P}]\!]^T\boldsymbol{a} = \mu|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{n} + [\![h']\!]\operatorname{cof}\boldsymbol{F}_-^T\boldsymbol{a}.$$

因此，式 (2.3) 中的第二个和第三个方程变为

$$\boldsymbol{a} = -\frac{[\![h']\!]}{\mu}\operatorname{cof}\boldsymbol{F}_-\boldsymbol{n}, \qquad [\![h']\!]^2\operatorname{cof}(\boldsymbol{C}_-)\boldsymbol{n} = \mu^2|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{n}, \tag{A.2}$$

其中 $\boldsymbol{C}_\pm = \boldsymbol{F}_\pm^T\boldsymbol{F}_\pm$ 是 Cauchy-Green 应变张量。由此可知， $\boldsymbol{n}$ 必须是 $\boldsymbol{C}_-$ 的特征向量。方程 (A.2) 使我们能够求出两个 Cauchy-Green 张量 $\boldsymbol{C}_\pm$ 之间的关系。利用运动学相容方程 $(2.3)_1$ ，我们计算得

$$\boldsymbol{C}_+ = \boldsymbol{C}_- + \boldsymbol{F}_-^T\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{F}_-^T\boldsymbol{a} + |\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}.$$

将 $\boldsymbol{F}_-^T$ 应用于方程 (A.2) 的第一个方程，得到 $\boldsymbol{F}_-^T\boldsymbol{a} = -([\![h']\!]/\mu)d_-\boldsymbol{n}$，因此

$$[\![\boldsymbol{C}]\!] = \left(|\boldsymbol{a}|^2 - \frac{2[\![h']\!]d_-}{\mu}\right)\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}. \tag{A.3}$$

由此可知，Cauchy-Green 张量 $\boldsymbol{C}_+$ 和 $\boldsymbol{C}_-$ 同时可对角化，因为根据 (A.2)， $\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{C}_-$ 的特征向量。根据方程 (A.3)，对称矩阵 $\boldsymbol{C}_+$ 和 $\boldsymbol{C}_-$ 具有相同的一对相互正交的特征向量 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}^\perp$，且对应于 $\boldsymbol{n}^\perp$ 的特征值相同。因此， $\boldsymbol{F}_\pm$ 的奇异值为 ($\varepsilon_\pm$, ε_0)，其中第一个奇异值对应于 $\boldsymbol{C}_\pm$ 的特征向量 $\boldsymbol{n}$ 。将 (A.2) 的第一个方程代入 (A.1)，得到

$$d_+ = d_- - \frac{[\![h']\!]}{\mu}\operatorname{cof}\boldsymbol{C}_-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = d_- - \frac{[\![h']\!]d_-^2}{\mu\varepsilon_-^2},$$

可将其写成更对称的形式:

$$\mu\frac{[\![d]\!]}{[\![h']\!]} = -\varepsilon_0^2 = -\frac{d_\pm^2}{\varepsilon_\pm^2}. \tag{A.4}$$

当我们利用麦克斯韦关系（式 (2.3) 中尚未使用的最后一个方程）将 d_+ 确定为 d_- 的函数时，这就是跳跃集的方程。众所周知，向能量中添加任意关于 $\boldsymbol{F}$ 的二次函数，不会改变麦克斯韦关系。因此，可以忽略 $\mu|\boldsymbol{F}|^2/2$ 这一项，麦克斯韦关系变为

$$[\![h]\!] = \{\!\{h' \mathrm{cof} \boldsymbol{F}\}\!\}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a}.$$

回顾由 (A.1) $\boldsymbol{F}_+\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_-\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = [\![d]\!]$ 可得 n

$$[\![h]\!] = \{\!\{h'\}\!\}[\![d]\!]. \tag{A.5}$$

方程 (A.5) 具有几何意义。它说明，连接 $(d_-, h'(d_-))$ 与 $(d_-, h'(d_-))$ 的割线和 $h'(d)$ 的图像围成两个面积相等的区域。对于具有双阱形状的势函数 $h(d)$，存在唯一的区间 (d_1, d_2)，在该区间上 $h(d)$ 与其凸包不同；而在 (d_1, d_2) 上，凸包与在 d_1 和 d_2 处同 $h(d)$ 的图像相切的公切线重合。就 $h'(d)$ 而言，这种双切也可从几何上解释为具有等面积性质的水平“麦克斯韦线”。在这种情况下，存在 $d_0 \in (d_1, d_2)$，使得对任意 $d_- \in (d_1, d_0)$，都存在唯一的 $d_+ \in (d_0, d_2)$ 满足 (A.5)。此外，对每个 $d_- \in (d_1, d_0)$，都存在唯一的 $d_+ = D(d_-)$ 具有等面积性质。（由连续性可设 $D(d_0) = d_0$。）将函数 $D(d)$ 视为已知，方程 (A.4) 给出了用 $\boldsymbol{F}_\pm$ 的奇异值表示跳跃集的显式描述。

参考文献

[1] G. Allaire 和 R. V. Kohn。二维空间中双相复合材料弹性能的显式最优界。《应用数学季刊》，LI(4):675–699，1993年12月。[2] Mikhail A. Antimonov、Andrej Cherkaev 和 Alexander B. Freidin。相变界面与精确能量下界。《国际工程科学杂志》，90:153–182，2016年。[3] J. M. Ball。非线性弹性力学的进展与难题。载于 J¨org Schr¨oder 和 Patrizio Neff 编，《应用力学中的多重凸性、拟凸性与秩一凸性》，第1–15页。施普林格维也纳，维也纳，2010年。[4] J. M. Ball 和 F. Murat。 $W^{1,p}$-拟凸性与重积分变分问题。《泛函分析杂志》，58(3):225–253，1984年。[5] J.M. Ball 和 R.D. James。不相容梯度集与亚稳性。《理性力学与分析档案》，218(3):1363–1416，2015年。[6] John M. Ball。弹性力学中的一些开放问题。载于《几何、力学与动力学》，第3–59页。施普林格，纽约，2002年。[7] D. M. Barnett、J. K. Lee、H. I. Aaronson 和 K. C. Russel。共格椭球析出物的应变能。《金属学文摘》，8:1447–1450，1974年。

[8] Paul M Chaikin、Tom C Lubensky 和 Thomas A Witten。《凝聚态物理学原理》，第10卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[9] Isaac Chenchiah 和 Kaushik Bhattacharya。模量可能不相等时双势阱能量的松弛。《理性力学与分析档案》，187(3):409–479，2008年。[10] Philippe G Ciarlet。《数学弹性力学：三维弹性力学》。工业与应用数学学会，2021年。[11] B. Dacorogna。松弛定理及其在气体平衡中的应用。《理性力学与分析档案》，77(4):359–386，1981年。[12] B. Dacorogna。变分法中非凸问题的拟凸性与松弛。《泛函分析杂志》，46(1):102–118，1982年。[13] B. Dacorogna。《变分法的直接方法》。施普林格出版社，纽约，第2版，2008年。[14] Michelle M Driscoll、Bryan Gin-ge Chen、Thomas H Beuman、Stephan Ulrich、Sid- ney R Nagel 和 Vincenzo Vitelli。刚性在控制材料失效中的作用。《美国国家科学院院刊》，113(39):10813–10817，2016年。[15] J. Ericksen。晶体中的一些相变。《理性力学与分析档案》，73:99–124，1980年。[16] J. L. Ericksen。杆的平衡。《弹性力学杂志》，5(3–4):191–201，1975年。[17] J. L. Ericksen。晶体孪晶。I。载于《亚稳态与不完全适定问题》（明尼阿波利斯，明尼苏达州，1985年），第77–93页。施普林格，纽约，1987年。[18] J. L. Ericksen。关于运动学相容条件。《弹性力学杂志》，26(1):65–74，1991年。[19] J. L. Ericksen。布拉菲格子中的分岔与马氏体相变。《弹性力学杂志》，28(1):55–78，1992年。[20] J. Gibbs, Willard。论非均质物质的平衡。《康涅狄格科学院汇刊》，III:108–248 和 343–524，1873年和1874年。[21] Leonardo Golubovi´c 和 T. C. Lubensky。非晶固体的非线性弹性。《物理评论快报》，63(10):1082–1085，1989年。[22] Y. Grabovsky。双组分复合材料的界与极值微观结构：基于平移法的统一处理。《伦敦皇家学会会议录》，A辑，452(1947):945–952，1996年。[23] Y. Grabovsky 和 L. Truskinovsky。破裂极值曲线的粗化失稳。《理性力学与分析档案》，200(1):183–202，2011年。

[24] Y. Grabovsky 和 L. Truskinovsky。《边际材料稳定性》。非线性科学杂志，23(5)：891–969，2013年。[25] Yury Grabovsky 和 Lev Truskinovsky。《弹性力学中的正规性条件》。非线性科学杂志，24(6)：1125–1146，2014年。[26] Yury Grabovsky 和 Lev Truskinovsky。《两相构型的勒让德-哈达玛条件》。弹性力学杂志，123(2)：225–243，2016年。[27] Yury Grabovsky 和 Lev Truskinovsky。《双井哈达玛能量的显式松弛》。弹性力学杂志，135(1-2)：351–373，2019年。[28] Yury Grabovsky 和 Lev Truskinovsky。《当秩一凸性遇上多凸性：弹性双节线的代数方法》。J. Nonlinear Sci.，28(1)：229–253，2019年。[29] Yury Grabovsky 和 Lev Truskinovsky。《无限秩层状结构的普遍存在》。待提交，准备中。[30] Yury Grabovsky 和 Lev Truskinovsky。《一个存在许多全局极小值点但没有局部极小值点的矢量弹性问题》。J. Elasticity，即将发表。[31] J. Hadamard。《关于波的传播与流体动力学方程的讲义》。Hermann，巴黎，1903年。[32] Fritz John。《有限振幅的平面弹性波：哈达玛材料与调和材料》。纯粹与应用数学通讯，19(3)：309–341，1966年。[33] V. Kardonski 和 Roitburd。《关于共格析出物的形状》。Phys. Met. Metallurg. USSR，33：210–212，1972年。[34] A. G. Khachaturyan。《固体结构相变理论》。Wiley，纽约，1983年。[35] Armen G Khachaturyan。《关于固体相变理论的若干问题》。Soviet Phys. Solid State，8(9)：2163–2168，1967年。[36] R. V. Kohn。《双井能量的松弛》。Continuum Mech. Thermodyn.，3：193–236，1991年。[37] Martin Kruž´ík 和 Tom´áš Roub´íček。《固体连续介质力学的数学方法》。施普林格，2019年。[38] L. B. Kublanov 和 A. B. Freidin。《可变形材料中的固相晶核》。Prikl. Mat. Mekh.，52(3)：493–501，1988年。[39] 列夫·达维多维奇·朗道和叶夫根尼·米哈伊洛维奇·利夫希茨。《统计物理学：第5卷》，第5卷。Elsevier，2013年。

[40] J. K. Lee、D. M. Barnett 和 H. I. Aaronson。《各向异性晶体固体中共格椭球形析出物的弹性应变能》。Metall. Trans. A，8A：963–970，1977年。[41] J. C. Maxwell。《物体分子组成的动力学证据》。Nature，11(279-280)：357–359，374–377，1875年。[42] A. Pineau。《单轴应力对粗化过程中共格析出物形貌的影响——弹性能考量》。Acta Metall.，24：559–564，1976年。[43] Allen C Pipkin。《具有两种优选状态的弹性材料》。《力学与应用数学季刊》，44(1)：1–15，1991年。[44] Miroslav Silhavy。《连续介质的力学与热力学》。Springer Science & Business Media，2013年。[45] J.D. van der Waals。《固体与流体相之间的平衡，尤其是临界状态附近的情形》。载于荷兰皇家艺术与科学学院，《会议录》，第6卷，第1903–1904页，1903年。