arXiv:2301.01910v1 [math.DS] 5 Jan 2023

平面开放台球的最大李雅普诺夫指数的可微性

Amal AlDowais [a] [b]

摘要

本文估计了平面中的开台球系统的最大李雅普诺夫指数。我们证明，最大李雅普诺夫指数关于台球变形是可微的。

关键词：开台球；李雅普诺夫指数；非游荡集；台球变形 数学主题分类（2010）：37D50、37B10、37D20、34D08

1 引言

可以借助李雅普诺夫指数研究动力系统的稳定性与不稳定性。若一个动力系统具有正的李雅普诺夫指数，则称其为混沌系统。混沌系统的例子包括散射台球或所谓的西奈台球（参见 [15], [16]）。台球系统是一类动力系统，其中粒子以恒定速度运动，并根据几何光学定律撞击台球的壁（台球区域的边界）："入射角等于反射角"。开台球是无界区域中的台球系统的一种特殊情形。该区域是有限多个满足无日食条件的严格凸紧障碍物的外部(**H**)，该条件由 Ikawa 提出 [6]：任意两个障碍物的凸包均不与其他障碍物相交；换言之，不存在一条直线与多于两个障碍物相交。根据 Sinai 的结果 [15], [16] (另见 [14])，开台球映射的非游荡集是双曲的（即存在正、负李雅普诺夫指数）。已有许多研究探讨了台球系统的李雅普诺夫指数（参见 [22], [1], [4], [9], [10]）。本文估计了 $\mathbb{R}^2$中的开台球的最大李雅普诺夫指数。我们证明，李雅普诺夫指数关于一个参数连续变化 α；该参数与台球系统的变形有关，其定义见 [21]。此外，我们证明，李雅普诺夫指数关于变形参数可微 α。

下面陈述主要结果：

在以下定理中，我们用 $K(\alpha)$ 表示 $\alpha \in [0, b]$。精确定义见第 4节。

[a]西澳大利亚大学物理、数学与计算学院数学与统计系，珀斯，西澳大利亚州 6009，澳大利亚*Email address:* amal.aldowais@research.uwa.edu.au[b]奈季兰大学理学院数学系，沙特阿拉伯奈季兰*Email address:* amalduas@nu.edu.sa

定理 1.1.（连续性）设 $K(\alpha)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 $\mathcal{C}^4$, 2 台球变形。设 $\lambda_1(\alpha)$ 为 $K(\alpha)$ 的最大李雅普诺夫指数。那么，最大李雅普诺夫指数是 α 的连续函数。

定理 1.2。（可微性）设 $K(\alpha)$ 是 $\mathcal{C}^5$, 3 在 $\mathbb{R}^2$ 中的台球变形。设 $\lambda_1(\alpha)$ 是 $K(\alpha)$ 的最大李雅普诺夫指数。那么 $\lambda_1(\alpha)$ 关于 α 是 $\mathcal{C}^1$ 。

许多研究探讨了李雅普诺夫指数的连续性（例如参见 [20], [3]）。然而，据我们所知，所有这些工作都是在一般情形下证明连续性的，也就是说，相对于所涉及参数/扰动的“大多数”（典型）取值而言。对于本文研究的开台球，我们证明了连续性，甚至证明了对扰动中出现的参数的所有取值都具有可微性；这确实是该物理系统一项非同寻常的性质。

2 预备知识

本节介绍开台球、台球流、符号编码以及稳定/不稳定流形的一些预备概念。我们还介绍一些与曲率、距离和碰撞角相关的记号。本节最后一部分将陈述奥塞莱德茨乘法遍历定理及其在开台球中的推论。

2.1 开台球

设 K_i，其中 $i = 1$，2，3，...，z_0 是边界为光滑边界 ∂K_i 的严格凸紧域，且 ∂K_i位于 $\mathbb{R}^2$ 中。本文假设 $K = \bigcup_i K_i$ 满足 Ikawa [6] 的以下条件 (H)：对于任意 $i \neq j \neq k$， $K_i \cup K_k$ 的凸包与 K_j 没有任何公共点。令 Ω 为 K 的外部（即 $\Omega = \overline{\mathbb{R}^2 \backslash K}$ ）。令 $\Phi_t, t \in \mathbb{R}$ 为台球流，使得对于任意粒子$x = (q, v)$，其中 $q \in \Omega$ 表示粒子 x 的位置， v 是粒子 x 的单位速度，则 $\Phi_t(x) = (q_t, v_t) = (q + tv, v)$。当粒子撞击边界时，其速度遵循碰撞定律 $v_{new} = v_{old} - 2 < v_{old}, n > n$，其中 n 是 ∂K 在 q 处的外向单位法向量， ϕ 是 $n = n(q)$ 与 v 之间的夹角。

我们将 x 的第 j 次反射时间记为 $t_j(x) \in (-\infty, \infty)$，其中 $j \in \mathbb{Z}$。若 x 的正向（反向）轨道反射次数少于 j ，则称 $t_j(q) = \infty (t_j(q) = -\infty)$。我们将流 Φ_t 的非游荡集记为 $\Lambda = \{x \in \Omega \ | t_j(x) | < \infty, \ for \ all \ j \in \mathbb{Z}\}$，其中

$$\widetilde{\Omega} = \{(q, v) \in int \ \Omega \times \mathbb{S}^1 \ or \ (q, v) \in \partial\Omega \times \mathbb{S}^1 : \langle n(q), v \rangle \geq 0\}.$$

现在令 $M = \{x = (q, v) \in \partial K \times \mathbb{S}^1 : \langle n(q) \ v \rangle \geq 0\}$，并令 $\pi : M \to \partial K$ 为由 $\pi(q, v) = q$ 定义的规范投影映射。令 $t_1(x)$ 表示 x 的第一次反射时间，并令$M_1 = \{x \in M : t_1(x) < \infty\}$。定义台球映射 $B : M_1 \to M$ 为 $B(x) = \Phi_{t_1(x)}(x)$（例如，若 $y = (p_0, w_0)$，其中 p_0 位于 ∂K_i 上，则 $B(y) = B(p_0, w_0) = (p_1, w_1)$，其中 $p_1 = p_0 + t_1 w_0 \in \partial K_j$ 且 $w_1 = w_0 - 2 < w_0, n > n$）。开台球映射的非游荡集为 $M_0 = \{x \in M : |t_j(x)| < \infty\}$ ，它是 Λ的子集。最后，令 $B : M_0 \to M_0$ 为开台球映射在非游荡集 M_0上的限制。显然，非游荡集是不变集。关于台球动力系统的一般信息，参见 [15], [16], [4], [5], [14], 。

2.2 开台球的符号编码

每个特定的 $x \in M_0$ 都可以用一个双无限序列编码

$$\xi(x) = (..., \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, ...) \in \{1, 2, ..., z_0\}^{\mathbb{Z}},$$

其中，对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，$\xi_i \neq \xi_{i+1}$，而 ξ_j 表示满足 $\pi B^j(x) \in \partial K_{\xi_j}$ 的障碍物 K_{ξ_j}。例如，若如上所述有三个障碍物 K_1、K_2 和 K_3，且某个特定的 q 反复撞击 K_1、K_3、K_2、K_1、K_3、K_2，那么对应的双无限序列为 (..., 1, 3, 2, 1, 3, 2, ...)。令 Σ 为定义如下的符号空间：

$$\Sigma = \{\xi = (..., \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, ...) \in \{1, 2, ..., z_0\}^{\mathbb{Z}} : \xi_i \neq \xi_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

定义表示映射 $R: M_0 \to \Sigma$，使得 $R(x) = \xi(x)$。令 $\sigma: \Sigma \to \Sigma$ 为由 $\sigma(\xi_i) = \xi_{i+1}$ 定义的双边子移位映射。给定 $\theta \in (0,1)$，在 Σ 上定义度量 d_θ 如下：

$$d_\theta(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \xi_i = \eta_i \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z} \\ \theta^n & \text{if} \quad n = max\{j \geq 0 : \xi_i = \eta_i \quad \text{for all } |i| < j\} \end{cases}$$

那么 σ 关于 d_θ ([2]) 连续。另已知表示映射$R : M_0 \to \Sigma$ 是一个同胚（例如参见 [14]）。关于开台球的符号动力系统相关主题，参见 [6], [8], [11], [14], [17], 。

2.3 李雅普诺夫指数

这里陈述台球系统的奥塞莱德茨乘法遍历定理的一个推论（例如参见 [13], 第 2 章，另见 [12], [20], [7]）。

对于开台球映射 $B: M_0 \longrightarrow M_0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中，我们将使用第2.2节中的编码 $R: M_0 \longrightarrow \Sigma$，它将 B 与移位映射 $\sigma: \Sigma \longrightarrow \Sigma$共轭，以此定义李雅普诺夫指数。众所周知，存在遍历的 σ-不变测度 μ，定义在 Σ上。设 μ 为 σ上的一个遍历 Σ-不变概率测度。以下是奥塞莱德茨乘法遍历定理的一个推论：

定理 2.1（奥塞莱德茨乘法遍历定理的一个推论）。存在实数 $\lambda_1 > 0 > -\lambda_1$ 以及 $T_x(\partial K)$ 的一维向量子空间 $E^u(x)$ 和 $E^s(x)$，$x \in M_0$，它们可测地依赖于 $R(x) \in \Sigma$，使得：

(i) 对几乎所有的 $x \in M_0$，$E^u(x)$ 和 $E^s(x)$;

(ii) $D_x B(E^u(x)) = E^u(B(x))$ *and* $D_x B(E^s(x)) = E^s(B(x))$ *for almost all* $x \in M_0$, *and*

(iii) 对几乎所有的 $x \in M_0$，存在

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|D_x B^n(w)\| = \lambda_1$$

只要 $0 \neq w \in E^u(x)$。

这里的"几乎所有 x"是指相对于 μ 而言"几乎所有 $R(x)$"。数值 $\lambda_1 > 0 > -\lambda_1$称为李雅普诺夫指数，而不变子空间 $E^u(x)$ 和 $E^s(x)$ 称为奥塞莱德茨子空间。

2.4 开台球中不稳定流形的传播

我们描述一个有助于估算.....的公式

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\|D_xB^m w\|,\ (0\neq w\in E^u(x), x\in M_0).$$

Let M_0 为开台球的台球映射 B 的非游荡集。 n

$$\Lambda=\{\Phi_t(x): x\in M_0\ ,\ t\in\mathbb{R}\},$$

是非游 荡集，对应于台球流 Φ_t。对于 $x\in\Lambda$ 以及充分小的 $\epsilon>0$ ，令

$$\widetilde{W}^s_\epsilon(x)=\{y\in\Lambda: d(\Phi_t(x),\Phi_t(y))\le\epsilon \text{ for all } t\ge 0\ ,\ d(\Phi_t(x),\Phi_t(y))\to_{t\to\infty}0\ \},$$

$$\widetilde{W}^u_\epsilon(x)=\{y\in\Lambda: d(\Phi_t(x),\Phi_t(y))\le\epsilon \text{ for all } t\le 0\ ,\ d(\Phi_t(x),\Phi_t(y))\to_{t\to-\infty}0\ \}$$

~ ~为台球流的大小为 ϵ 的（强）稳定流形和不稳定流形。那么 $E^u(x)=T_xW^u_\epsilon(x)$ ~ ~且 $E^s(x)=T_xW^s_\epsilon(x)$。类似地，可定义台球映射 B的稳定/不稳定流形。对于任意 $x=(q,v)\in M_0$ ，定义

$$W^s_\epsilon(x)=\{y\in M_0: d(B^n(x),B^n(y))\le\epsilon \text{ for all } n\in\mathbb{N}\ ,\ d(B^n(x),B^n(y))\to_{n\to\infty}0\ \}$$

$W^u_\epsilon(x)=\{y\in M_0:$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$， $d(B^{-n}(x)\ B^{-n}(y))\le\epsilon$， $d(B^{-n}(x)\ B^{-n}(y))\to_{n\to\infty}0\ \}$.

下文中，假设涉及某个选取得足够小的~ ~ $\epsilon>0$，我们将简写 $W^u_\epsilon(x)$ 和 $W^s_\epsilon(x)$ 为 $W^u(x)$ 和 $W^s(x)$。 W^u 和 W^s也同理。

众所周知，台球映射的稳定/不稳定流形与流的稳定/不稳定流形之间存在一一对应关系。从几何角度来看，最简单（也最方便）的描述方式如下。

给定 $x=(q,v)\in M_0$（因此 $q\in\partial K$ 和 $v\in\mathbb{S}^1$），以及一个小的 $0<r<t_1(x)$，令 $y=(q+rv,v)$。则存在一一对应关系

$$\varphi: W^u(x)\longrightarrow\widetilde{W}^u(y)$$

使得对于所有的 $(z,w)\in W^u(x)$，都有 $\varphi(z,w)=(z+t\,w,w)$，其中 $t=t(z,w)>0$。类似地，~在 $W^s(x)$ 与 $W^s(y)$ 之间存在对应关系。此外

$$D\varphi(x): T_xM_0\longrightarrow T_y\Lambda$$

~ ~满足 $D\varphi(x)(E^u(x))=E^u(y)$，且 $D\varphi(x)(E^s(x))=E^s(y)$。

~ ~已知 $W^u(y)$ 具有如下形式： $W^u(y)=Y$，其中

$$\widetilde{Y}=\{(p,\nu_Y(p)): p\in Y\}$$

对于某条位于 $\mathbb{R}^2$ 中、经过点 y 的光滑曲线 Y，使得 Y 相对于单位法向量场 ν_Y 严格凸，也就是说， Y 的曲率严格为正。

接下来，设 x 和 y 如上所述，并令 $x_1 = (q_1, v_1) = B(x)$。那么 $q_1 = q + t_1 v$. 定义$y_1 = (q_1 + r'v_1, v_1)$，其中取某个足够小的 $0 < r' < t_2(x) - t_1(x)$，且 $0 = t_0(x) < t_1(x) < t_2(x)$。那么存在一一对应关系

$$\varphi_1 : W^u(x_1) \longrightarrow \tilde{W}^u(y_1)$$

$\sim$ $\tilde{}$如上所定义。同样，我们可以写作 $W^u(y_1) = Y_1$，其中

$$\widetilde{Y}_1 = \{(p_1, \nu_Y(p_1)) : p_1 \in Y_1\}$$

对于某条经过点 y_1、位于 $\mathbb{R}^2$ 中的光滑曲线 Y_1，使得相对于单位法向量场 ν_{Y_1}，Y_1 严格凸。此外，下图是交换图，其中 $t = t_1 + r'$:

$$\begin{array}{ccc} W^u(x) & \xrightarrow{B} & W^u(x_1) \\ \big\downarrow \varphi & & \big\downarrow \varphi_1 \\ \widetilde{W}^u(y) = \widetilde{Y} & \xrightarrow{\Phi_t} & \widetilde{W}^u(y_1) = \widetilde{Y}_1 \end{array}$$

类似地，以下图表是交换的:

$$\begin{array}{ccc} E^u(x) & \xrightarrow{DB(x)} & E^u(x_1) \\ \big\downarrow D\varphi & & \big\downarrow D\varphi_1 \\ \widetilde{E}^u(y) & \xrightarrow{D\Phi_t(y)} & \widetilde{E}^u(y_1) \end{array}$$

由于导数 $D\varphi$ 和 $D\varphi_1$ 一致有界，之后可以利用上述共轭，通过传播适当的凸曲线 Y 来计算台球映射的李雅普诺夫指数，具体描述如下。

令 $x_0 = (q_0, v_0) \in M_0$，并令 $W^u_\epsilon(x_0)$ 为 x_0 的局部不稳定流形，其中 $\tilde{}$ 足够小，$\epsilon > 0$。令 $t_1(x_0)$ 为 x_0 第一次反射的时刻。则 $X = W^u_\epsilon(x_0) = \{(q, n_X(q)) : q \in X\}$，其中 X 是 Ω 中的一条 $\mathcal{C}^3$ 曲线，使得 $q_0 \in X$，且 X 是相对于外单位法向量场 $n_X(q)$ 的严格凸曲线。令 X 由 $q(s)$ $s \in [0, a]$ 参数化，使得 $q(0) = q_0$，且其单位法向量场为 $n_X(q(s))$。设 $q_0(s) = q(s)$。令 $q_j(s)$ $j \geq 1$ 为由 $x(s) = (q(s)\ n_X(q(s))$ 生成的正向台球轨道 $\gamma(s)$ 的第 j 次反射点。假设 $a > 0$ 足够小，使得对每个 $s \in [0, a]$，第 j 次反射点 $q_j(s)$ 都属于同一边界分支 ∂K_{ξ_j}。令 $0 = t_0(x(s)) < t_1(x(s)) < ... < t_{m+1}(x(s))$ 为射线 $\gamma(s)$ 在 ∂K 处反射的时刻。令 $\kappa_j(s)$ 为 ∂K_{ξ_j} 在 $q_j(s)$ 处的曲率，$\phi_j(s)$ 为 ∂K 的外单位法向量与 $\gamma(s)$ 在 $q_j(s)$ 处的反射射线之间的碰撞角。此外，令 $d_j(s)$ 为两个反射点之间的距离，即 $d_j(s) = \|q_{j+1}(s) - q_j(s)\|, j = 0, 1, \ldots, m$。

$\sim$ $\tilde{}$给定一个较大的 $m \geq 1$，令 $t_m(x(s)) < t < t_{m+1}(x(s))$。设 $\Phi_t(X) = X_t$。令 $\pi(\Phi_t(x(s))) = p(s)$。则 $p(s)$ $s \in [0, a]$ 是 $X_t = \pi(\Phi_t(\widetilde{X})$ 的 $\mathcal{C}^3$ 曲线参数化。

接下来，令 $k_0(s) > 0$ 为 X 在 $q(s)$ 处的曲率。令 $t_j(x(s)) < \tau < t_{j+1}(x(s))$，$j = 1, 2, \ldots, m$。记 $u_\tau(s)$ 为 $(q(s)\ n(q(s)))$ 沿正向台球轨道$\gamma(s)$经过时间 $\tau > 0$后的平移。于是 $X_\tau = \{u_\tau(s) : s \in [0, a]\}$ 是相对于外法向场 $n(u_\tau(s))$ 的 $\mathcal{C}^3$ 凸曲线。令 $k_j(s) > 0$ 为 $X_{t_j} = \lim_{\tau \searrow t_j(s)} X_\tau$ 在 $q_j(s)$ 处的曲率。由 Sinai [15] 可知

$$k_{j+1}(s) = \frac{k_j(s)}{1 + d_j(s)k_j(s)} + 2\frac{\kappa_{j+1}(s)}{\cos\phi_{j+1}(s)} \quad , \quad 0 \leq j \leq m - 1 \, . \tag{2.1}$$

此外， X_τ 在 $u_\tau(s)$ 处的曲率为

$$k_\tau(s) = \frac{k_j(s)}{1 + (\tau - t_j(s))k_j(s)}. \tag{2.2}$$

Set

$$\delta_j(s) = \frac{1}{1 + d_j(s)k_j(s)} \quad , \quad 1 \le j \le m \, . \tag{2.3}$$

定理 2.2. [18] 对于所有 $s \in [0, a]$ 我们有

$$\|\dot{q}(s)\| = \|\dot{p}(s)\|\delta_1(s)\delta_2(s)\dots\delta_m(s) \, . \tag{2.4}$$

这在一般情形下由 [18] 证明，在 $2D$ 情形下由 [19] 证明。

最后，我们引入一些记号，用来表示先前双球特征量的最大值和最小值 $d_j(s)$,$\kappa_j(s)$, $\phi_j(s)$ 和 $k_j(s)$。对于所有 j，我们有 $d_{\min} \le d_j(s) \le d_{\max}$，其中 $d_{\max}$ 和 $d_{\min}$ 是与 j 无关的常数，使得 $d_{\max} = \max\{d(K_i, K_k)\}$ 和$d_{\min} = \min\{d(K_i, K_k)\}$ 对 $i \ne k$成立。此外，由于 ∂K 是严格凸的，存在与 j 无关的常数 $\kappa_{\min} > 0$和 $\kappa_{\max} > 0$ ，使得 $\kappa_{\min} \le \kappa_j(s) \le \kappa_{\max}$。由条件 (H) 可知，存在一个常数 $\phi_{\max} \in (0, \frac{\pi}{2})$，使得 $0 \le \phi_j(s) \le \phi_{\max} < \frac{\pi}{2}$ （例如，参见 [17]）。令 $k_j(s)$ 如方程 (2.1) 所示。容易推出 $k_{\min} \le k_j(s) \le k_{\max}$，其中 $k_{\min} = 2\kappa_{\min}$ 和 $k_{\max} = \frac{1}{d_{\min}} + \frac{2\kappa_{\max}}{\cos\phi_{\max}}$。

3 开台球最大李雅普诺夫指数的估计

一大类较为一般的台球系统的最大李雅普诺夫指数公式可见 [5]，（参见其中的定理 3.41）。在我们的情形下，我们再次推导该公式（见下文的（3.1））， 随后利用定理 2.2 推导最大李雅普诺夫指数的重要正则性。

设 μ 是 σ上的一个遍历 Σ-不变测度，并令 $x_0 = (q_0, \ v_0) \in M_0$ 是 Σ 中关于 μ，通过表示映射 R对应的典型点。也就是说，如定理2.1中所述，我们有

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \|D_{x_0} B^m(w)\|,$$

与 $0 \ne w \in E^u(x_0)$。与第 2.4 节一样，设 X 是一条包含 q_0 的（小）严格凸曲线 C^3，并具有单位法向量场 n_X，使得 $n_X(q_0) = v_0$。再次与第 2.4 节一样，设 X 通过弧长参数化为 $q(s)$, $s \in [0, a]$，且满足 $q(0) = q_0$。再设 $q_j(s)$， $j = 1$， 2， ...， $m + 1$ 为由 $x(s) = (q(s) \ n_X(q(s))$ 确定的台球轨道 $\gamma(s)$ 上依次出现的反射点。给定整数 $m > 0$ ，并假设区间 $[0, a]$ 足够小，则对所有 $s \in [0, a]$， 第 j 个反射点 $q_j(s)$ 都属于同一个边界分支 ∂K_{ξ_j}。接下来，按第 2.4 节中的方式定义 $d_j(s)$、$t_j(x(s))$ 等；设 $t_m(x(0)) < t < t_{m+1}(x(0))$，并设 $p(s)$ 为与 $q(s)$ 对应的 X_t 的参数化 $\widetilde{\ }$。那么，定理 2.2 中的公式 (2.4)（在我们的假设下， $\|\dot{q}(s)\| = 1$ 成立）。现在，第 2.4 节中的讨论表明，存在一些全局常数 $c_1 > c_2 > 0$，它们与 x_0、 X、 m 等无关，使得

$$c_2\|\dot{p}(s)\| \le \|D_{x_0} B^m(w)\| \le c_1\|\dot{p}(s)\|$$

对于所有 $s \in [0,a]$。因此，根据（2.4），

$$\frac{c_2}{\delta_1(0)\delta_2(0)\dots\delta_m(0)} \le \|D_{x_0}B^m(w)\| \le \frac{c_1}{\delta_1(0)\delta_2(0)\dots\delta_m(0)}$$

对所有 $s\in[0,a]$。将其用于 $s=0$，取对数并令 $m\to\infty$ 趋于极限，我们得到 in

$$\begin{aligned} -\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\left(\delta_1(0)\delta_2(0)\dots\delta_m(0)\right) &\le \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\|D_{x_0}B^m(w)\| \\ &\le -\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\left(\delta_1(0)\delta_2(0)\dots\delta_m(0)\right). \end{aligned}$$

因此，

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\log\delta_i(0).$$

这意味着，初始点 x_0 处的最大李雅普诺夫指数——也就是说，对于给定测度 μ 几乎处处的点——由下式给出

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\log\Big(1+d_i(0)k_i(0)\Big). \tag{3.1}$$

根据方程 (3.1)，我们可以从下方和上方估计最大李雅普诺夫指数：

$$\log\left(1+d_{\min}k_{\min}\right) \le \lambda_1 \le \log\left(1+d_{\max}k_{\max}\right).$$

4 台球变形

本节中，我们考虑平面台球系统的一些变化，例如移动、旋转以及改变一个或多个障碍物的形状。根据 [21] 中的定义，这类台球变换称为台球变形。我们通过在障碍物边界的参数化中加入一个额外的参数$\alpha \in [0,b]$ 来描述这种变形，其中 $b\in\mathbb{R}^+$称为变形参数；也就是说，若障碍物的边界由 $\varphi(u)$参数化，则它将变为$\varphi(u,\alpha)$。本节给出根据 [21] 定义的台球变形的定义。此外，我们还描述台球变形中不稳定流形的传播，并估计若干台球特征量关于变形参数 α 的高阶导数，例如距离、碰撞角和曲率。

设 $\alpha \in I = [0,b]$ 是某个 $b \in \mathbb{R}^+$ 的变形参数，令 $\partial K_i(\alpha)$ 由 $\varphi_i(u_i,\alpha)$ 按逆时针方向参数化，并由弧长 u_i 参数化。设 $q_i = \varphi_i(u_i,\alpha)$ 是位于 $\partial K_i(\alpha)$ 上的一点。用 $L_i(\alpha)$ 表示 $\partial K_i(\alpha)$ 的周长，并令 $P_i = \{(u_i,\alpha) : \alpha\in I, u_i\in[0,L_i(\alpha)]\}$。

定义 4.1. [21] 对于任意 $\alpha\in I=[0,b]$，令 $K(\alpha)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集。对于整数 $r\ge 4$、$r'\ge 2$，如果满足以下条件对所有 $\alpha\in I$ 均成立，我们称 $K(\alpha)$ 为 $\mathcal{C}^{r,r'}$-台球变形（即相对于 u 的 $\mathcal{C}^r$，以及相对于 α 的 $\mathcal{C}^{r'}$）：

1. $K(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{z_0} K_i(\alpha)$ 满足无日食条件 (H)。

2. 每个 $K_i(\alpha)$ 都是紧致的严格凸集，具有 $\mathcal{C}^r$ 边界和总弧长 $L_i(\alpha)$。

3. 每个 K_i 都按弧长逆时针参数化，且 $\mathcal{C}^{r,\ r'}$ 函数 $\varphi_i:\ P_i \to \mathbb{R}^2$.

4. 对所有整数 $0 \le l \le r, 0 \le l' \le r'$ （除 $l = l' = 0$ 外），存在常数 $C^{(l,l')}{}_{\varphi}$，它们仅取决于所选的台球变形和参数化方式 φ_i，使得对所有整数 $i = 1, 2, 3, ..., z_0$,

$$\left|\frac{\partial^{l+l'}\varphi_i}{\partial u_i^l \partial \alpha^{l'}}\right| \le C_{\varphi}^{(l,l')}.$$

设 B_α 是 $K(\alpha)$ 在非游荡集 M_α 上的开台球映射。令 Σ 为第2.2节中定义的对象，我们通过 $R_\alpha(x(\alpha)) = \xi(x(\alpha))$ 定义 $R_\alpha:\ M_\alpha \to \Sigma$。按照前述定义中的参数化方式，我们可以将与台球轨道对应的点写为：$\pi(B^j(x(\alpha))) = q_{\xi_j}(\alpha) = \varphi_{\xi_j}({}^{u_{\xi_j}}(\alpha)\ \alpha) \in \partial K_{\xi_j}(\alpha)$，其中 ${}^{u_{\xi_j}}(\alpha) \in [0, L_{\xi_j}(\alpha)]$。为简便起见，我们将写作 $q_j(\alpha) = \varphi_j({}^{u_j}(\alpha)\ \alpha)$。

下一个推论表明，对于固定的 $\xi \in \Sigma$，${}^{u_j}(\alpha) = {}^{u_{\xi_j}}(\alpha)$ 关于 α 可微。该推论在 [21] 中得到证明。

定理 4.2. [21] 设 $K(\alpha)$ 是一个带有 $r, r' \ge 2$ 的 $\mathcal{C}^{r,\ r'}$ 台球变形。那么 ${}^{u_j}(\alpha)$ 关于 α 是 $\mathcal{C}^{min\{r-1,r'-1\}}$，并且存在常数 $C_u^{(n)} > 0$ 使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n u_j(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^n}\right| \le C_u^{(n)}.$$

下一个推论由定义 4.1 和定理 4.2 得出。

推论4.3. 设 $K(\alpha)$ 是一个带有 $r, r' \ge 2$ 的 $\mathcal{C}^{r,\ r'}$ 台球变形。设 $q_j(\alpha)$ 属于 ∂K_{ξ_j}。那么 $q_j(\alpha)$ 是 $\mathcal{C}^n$，其中 $n = \min\{r-1, r'-1\}$，关于 α，并且存在常数$C_q^{(n)} > 0$ 使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n q_j(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^n}\right| \le C_q^{(n)}.$$

4.1 台球变形的不稳定流形传播

我们在第2.4 节描述了开台球中不稳定流形的传播。本节将描述台球变形中的不稳定流形传播。

设 $K(\alpha)$ $\alpha \in [0, b]$ 是定义 4.1 中的 $\mathcal{C}^r$、$^{r'}$台球变形，且满足 $r \ge 3$、$r' \ge 1$。$x_0(\alpha) = (q_0(\alpha)\ v_0(\alpha)) \in M_\alpha$并设 $W_\epsilon^u(x_0(\alpha))$ 是当 $x_0(\alpha)$ 且 $\epsilon > 0$充分小时的局部不稳定流形。取一条包含 $q_0(\alpha)$ 的曲线 X_α，使得 $X_\alpha = \{q_0(s,\alpha):\ s \in [0, a]\}$ 是凸曲线，其外单位法向量场为 $n_X(q_0(s,\alpha)) = v_0(\alpha)$，并且相对于 s 满足 $\mathcal{C}^3$。由 Sinai [15], [16] 可知，$W_\epsilon^u(x_0(\alpha)) = \{(q_0(s,\alpha)\ n_X(q_0)):\ s \in [0, a]\}$。令 $X_\alpha = W_\epsilon^u(x_0(\alpha))$。取足够小的 $a \in \mathbb{R}^+$，使得由 $x_0(s,\alpha) = (q_0(s,\alpha)\ n_X(q_0(s,\alpha)))$ 产生的所有反射点 $q_j(s,\alpha)$ $j = 1$、2、$.....$、m 都属于同一边界 $\partial K_{\xi_j}(\alpha)$。令 $d_j(s,\alpha) = \|q_{j+1}(s,\alpha) - q_j(s,\alpha)\|$ 表示两个反射点 $q_{j+1}(s,\alpha)$ 与$q_j(s,\alpha)$之间的距离。记 $\partial K(\alpha)$ 在 $q_j(s,\alpha)$ 处的曲率为 $\kappa_j(s,\alpha)$，$\partial K(\alpha)$ 的单位法向量与 $q_j(s,\alpha)$ 处反射向量之间的碰撞角为 $\phi_j(s,\alpha)$，并记 X 在 $q_0(s,\alpha)$ 处的曲率为 $k_0(s,\alpha)$。

设 $t_j(x(s,\alpha)) = t_j(s,\alpha)$ 为第 j 次反射的时间。给定满足 $t_j < t < t_{j+1}$ 的 t，其中某个 $j = 1$、2、.....、m，令 $\pi(\Phi_t(\widetilde{X}_\alpha)) = X_{\alpha_t}$。那么，$X_{\alpha_t} = \{u_{\alpha_t}(s,\alpha) : s \in [0,a]\}$ 相对于 s 是 $\mathcal{C}^3$，且为一条外单位法向量场为 $n_{X_{\alpha_t}}(u_{\alpha_t}(s,\alpha))$ 的凸曲线。记 $X_{\alpha_{t_j}}(s,\alpha)$ 在 $q_j(s,\alpha)$ 处的曲率为 $k_j(s,\alpha)$，其中 $X_{\alpha_{t_j}(s,\alpha)} = \lim_{t\searrow t_j(s,\alpha)} X_{\alpha_t}$。按照方程 (2.1)，可如下定义 $k_j(s,\alpha)$:

$$k_{j+1}(s,\alpha) = \frac{k_j(s,\alpha)}{1 + d_j(s,\alpha)k_j(s,\alpha)} + 2\frac{\kappa_{j+1}(s,\alpha)}{\cos\phi_{j+1}(s,\alpha)} \quad , \quad 0 \le j \le m-1 \, . \tag{4.1}$$

从现在起，在情形 $s = 0$ 下，我们需要用到前述特征量。为简洁起见，将 $d_j(\alpha) = d_j(0,\alpha)$ etc 记作如此。此外，我们将台球变形记为 $K(\alpha)$，因此其所有特征量将分别记为 $d_j(\alpha)$ $k_j(\alpha)$ 等。初始开台球为 $K(0)$，因此其所有特征量将分别记为 $d_j(0)$ 等。

4.2 台球特征量的高阶导数

设 $K(\alpha)$ 是一个 $\mathcal{C}^{r,\,r'}$ 如定义 4.1 中所述的台球变形，且 $r \ge 4$，$r' \ge 2$。回顾一下，$\partial K_{\xi_j}(\alpha)$ 以弧长 u_j 为参数，而 $q_j(\alpha) = \varphi_j(u_j(\alpha)\ \alpha) \in \partial K_{\xi_j}(\alpha)$。这里，我们陈述一些推论，它们涉及台球变形的曲率、距离和碰撞角的高阶导数的界。这些推论直接由定义 4.1中的条件 4 得出。

推论 4.4. 设 $K(\alpha)$ 是一个具有 $r \ge 4, r' \ge 2$ 的 $\mathcal{C}^{r,\,r'}$ 台球变形。那么在 $q_j(\alpha)$ 处的曲率$\kappa_j(\alpha)$ 为 $\mathcal{C}^n$，其中 $n =$相对于 α取最小值，并且存在仅依赖于 n 的常数$C_\kappa^{(n)} > 0$，使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n\kappa}{\mathrm{d}\alpha^n}\right| \le C_\kappa^{(n)}.$$

证明. 设 $K(\alpha)$ 是一个具有 $r \ge 3, r' \ge 1$ 的 $\mathcal{C}^{r,\,r'}$ 台球变形。由于 $\partial K_j(\alpha)$ 由弧长 u_j 参数化，因此在 $q_j(\alpha)$ 处，$\partial K_j(\alpha)$ 的曲率 $= \varphi_j(u_j(\alpha)\ \alpha)$ 为 $\kappa_j = \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial u_j^2}$，其中 $j = 0, 1, ..., m$。于是 $\kappa_j(\alpha)$ 关于 α 为 $\mathcal{C}^{\min\{r-3,r'-1\}}$。

对于一阶导数，我们有

$$\left|\frac{d\kappa_j}{d\alpha}\right| = \left|\frac{\partial^3\varphi_j}{\partial u_j^3}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha} + \frac{\partial^3\varphi_j}{\partial u_j^2\partial\alpha}\right| \le C_\kappa^{(1)},$$

这个估计是在 [21] 中得到的。接下来，我们继续估计二阶导数，因此有

$$\left|\frac{d^2\kappa_j}{d\alpha^2}\right| = \left|\frac{\partial^4\varphi_j}{\partial u_j^4}\left(\frac{\partial u_j}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{\partial^3\varphi_j}{\partial u_j^3}\frac{\partial u_j^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^4\varphi_j}{\partial u_j^3\partial\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha} + \frac{\partial^4\varphi_j}{\partial u_j^2\partial\alpha^2}\right|.$$

利用定义4.1 和定理4.2，存在常数 $C_\kappa^{(2)} > 0$ 使得

$$\left|\frac{d^2\kappa_j}{d\alpha^2}\right| \le C_\varphi^{(4,0)}(C_u^{(1)})^2 + C_\varphi^{(3,0)}C_u^{(2)} + 2C_\varphi{}^{(3,1)}C_u^{(1)} + C_\varphi^{(2,2)} = C_\kappa^{(2)}.$$

继续使用归纳法可知，当 $n = \min\{r-3, r'-1\}$ 时， n 阶导数有界于常数 $C_\kappa^{(n)} > 0$，该常数仅取决于 n，使得 $\left|\mathrm{d}^n\kappa\,\mathrm{d}\alpha^n\right| \le C_\kappa^{(n)}$.

——

□

推论 4.5. 设 $K(\alpha)$ 是一个 $\mathcal{C}^r,\ ^{r'}$ 台球变形，满足 $r \ge 3, r' \ge 1$。则两点 $q_{j+1}(\alpha)$ 和 $q_j(\alpha)$ 之间的距离$d_j(\alpha)$ 为 $\mathcal{C}^n$，其中 $n = \min\{r-1, r'-1\}$ 是关于 α的最小值，并且存在仅依赖于 n 的常数 $C_d^{(n)} > 0$，使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n d_j}{\mathrm{d}\alpha^n}\right| \le C_d^{(n)}.$$

证明。由于 $d_j = \|q_{j+1}(\alpha) - q_j(\alpha)\| = \|\varphi_{j+1}(u_{j+1}(\alpha)\ \alpha) - \varphi_j(u_j(\alpha)\ \alpha)\|$ 对于 $j = 0, 1, ..., m$ 成立，因此 d_j 是 $\mathcal{C}^{\min\{r-1,r'-1\}}$。一阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}d_j}{\mathrm{d}\alpha} = \left\langle \frac{\varphi_{j+1}(u_{j+1}(\alpha),\alpha) - \varphi_j(u_j(\alpha),\alpha)}{\|\varphi_{j+1}(u_{j+1}(\alpha),\alpha) - \varphi_j(u_j(\alpha),\alpha)\|}, \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial u_{j+1}}\frac{\partial u_{j+1}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial\alpha}\right\rangle.$$

然后

$$\left|\frac{\mathrm{d}d_j}{\mathrm{d}\alpha}\right| = \left|\frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial u_{j+1}}\frac{\partial u_{j+1}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial\alpha}\right| \le C_d^{(1)},$$

这在 [21] 中已估计。对于二阶导数，利用定义 4.1 中的条件 4 以及定理4.2 可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}^2 d_j}{\mathrm{d}\alpha^2}\right| = \Big|&\frac{\partial^2\varphi_{j+1}}{\partial u_{j+1}^2}\Big(\frac{\partial u_{j+1}}{\partial\alpha}\Big)^2 + \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial u_{j+1}}\frac{\partial^2 u_{j+1}}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2\varphi_{j+1}}{\partial u_{j+1}\partial\alpha}\frac{\partial u_{j+1}}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2\varphi_{j+1}}{\partial\alpha^2}\\ &+ \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial u_j^2}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial\alpha}\Big)^2 + \frac{\partial\varphi_j}{\partial u_j}\frac{\partial^2 u_j}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial u_j\partial\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial\alpha^2}\Big|.\end{aligned}$$

利用定义4.1 中的条件 4 以及定理 4.2，存在常数 $C_\kappa^{(2)} > 0$ 使得

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}^2 d_j}{\mathrm{d}\alpha^2}\right| &\le 2C_\varphi^{(2,0)}(C_u^{(1)})^2 + 2C_u^{(2)} + 4C_\varphi^{(1,1)}(C_u^{(1)})^2 + 2C_\varphi^{(0,2)}\\ &= C_d^{(2)}.\end{aligned}$$

继续用归纳法可知，存在常数 $C_d^{(n)} > 0$，它仅依赖于 n，使得 $\left|\mathrm{d}^n d_j\,\mathrm{d}\alpha^n\right| \le C_d^{(n)}$.

——

□

推论 4.6. 设 $K(\alpha)$ 是一种 $\mathcal{C}^r,\ ^{r'}$ 台球变形，满足 $r \ge 4, r' \ge 2$。那么 $\cos\ \phi_j(\alpha)$ 是 $\mathcal{C}^{\min\{r-1,r'-1\}}$，且存在一个常数 $C_\phi^{(n)} > 0$，它仅依赖于 n，使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n\cos\phi_j}{\mathrm{d}\alpha^n}\right| \le C_\phi^{(n)}.$$

证明。我们可以写成

$$\cos 2\phi_j = \frac{\big(q_{j+1}(\alpha) - q_j(\alpha)\big)\cdot\big(q_j(\alpha) - q_{j-1}(\alpha)\big)}{|q_{j+1}(\alpha) - q_j(\alpha)||q_j(\alpha) - q_{j-1}(\alpha)|}$$
$$= \frac{\big(\varphi_{j+1}(,u_{j+1},\alpha) - \varphi_j(u_j,\alpha)\big)\cdot\big(\varphi_j(u_j,\alpha) - \varphi_{j-1}(u_{j-1}\alpha)\big)}{|\varphi_{j+1}(u_{j+1},\alpha) - \varphi_j(u_j,\alpha)||\varphi_j(u_j,\alpha) - \varphi_{j-1}(u_{j-1},\alpha)|}.$$

然后，$\cos\ \phi_j(\alpha) = \sqrt{\cos 2\phi_j(\ \alpha\ +1)_\circ}$ 因此，该结论由定义 4.1 中的条件 4 和推论 4.2可得。

□

下面的推论由推论 4.4、4.6推出。

推论 4.7. 设 $K(\alpha)$ 是一个 $\mathcal{C}^{r,\ r'}$ 台球变形，满足 $r \geq 4, r' \geq 2_\circ$ 则表达式$g_j(\alpha) = {}^{2\kappa_j}\cos\ \phi_j$是 $\mathcal{C}^{\min\{r-3,r'-1\}}$，并且存在仅依赖于 n 的常数 $C_g^{(n)} > 0$，使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n g_j}{\mathrm{d}\alpha^n}\right| \leq C_g^{(n)}.$$

下面关于曲率 k_j（定义见式 4.1）的推论由推论 4.5 和4.7得出。

推论 4.8. 设 $K(\alpha)$ 是一个 $\mathcal{C}^{r,\ r'}$ 台球变形，满足 $r \geq 4, r' \geq 2_\circ$ 则曲率$k_j(\alpha)$ 为 $\mathcal{C}^n$，其中 $n = \min\{r-3, r'-1\}$，并且存在仅依赖于 n 的常数 $C_k^{(n)}$，使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n k_j}{\mathrm{d}\alpha^n}\right| \leq C_k^{(n)}.$$

证明。首先，我们回顾

$$k_{j+1}(\alpha) = \frac{k_j(\alpha)}{1 + d_j(\alpha)k_j(\alpha)} + 2\frac{\kappa_{j+1}(\alpha)}{cos\phi_{j+1}(\alpha)} \quad , \quad 0 \leq j \leq m-1\ .$$

我们将 $k_{j+1}(\alpha)$简写如下

$$k_{j+1}(\alpha) = \frac{k_j(\alpha)}{1 + d_j(\alpha)k_j(\alpha)} + g_{j+1}(\alpha),$$

其中 $g_{j+1}(\alpha) = {}^{2\kappa_{j+1}}$余弦 $\phi_{j+1\circ}$ [21] 给出了关于 $k_j(\alpha)$ 对 α 的一阶导数有界于常数 $C_k^{(1)}$ 的估计。这里，我们对 [21] 采用相同的论证，并证明 $k_j(\alpha)$ 对 α 的二阶导数也有界。这些估计很有用，稍后将在第 5节中使用。

接下来，我们从 k_{j+1} 对 α 的一阶导数开始，并将使用记号 $\dot{}$. $\ddot{}k$, k,...等来简化方程。因此，我们有

$$\dot{k}_{j+1} = \frac{\dot{k}_j}{(1 + d_j k_j)^2} - \frac{\dot{d}_j k_j^2}{(1 + d_j k_j)^2} + \dot{g}_{j+1}.$$

而对于二阶导数，我们有

$$\ddot{k}_{j+1} = \frac{\ddot{k}_j}{(1 + d_j k_j)^2} - \frac{k_j^2(\ddot{d}_j + \ddot{d}_j d_j k_j - 2\dot{d}_j^2 k_j) + 2\dot{k}_j(\dot{k}_j d_j + 2\dot{d}_j k_j)}{(1 + d_j k_j)^3} + \ddot{g}_{j+1}.$$

Let

$$\beta_j = \frac{1}{(1+d_j k_j)^2},$$
$$\eta_j = -\frac{k_j^2(\ddot{d}_j + \ddot{d}_j d_j k_j - 2\dot{d}_j^2 k_j) + 2\dot{k}_j(\dot{k}_j d_j + 2\dot{d}_j k_j)}{(1+d_j k_j)^3} + \ddot{g}_{j+1} \quad , \quad 0 \le j \le m-1 \, .$$

根据推论 4.5 和 4.7以及 k_j的估计，我们有

$$|\beta_j| \le \beta_{\max} = \frac{1}{(1+d_{\min}k_{\min})^2},$$
$$|\eta_j| \le \eta_{\max} = \frac{k_{\max}^2(C_d^{(2)} + C_d^{(2)} d_{\max} k_{\max} + 2(C_d^{(1)})^2 k_{\max})}{(1+d_{\min}k_{\min})^3} + \frac{2C_k^{(1)}(C_k^{(1)} d_{\max} + 2C_d^{(1)} k_{\max})}{(1+d_{\min}k_{\min})^3} + C_g^{(2)}.$$

于是，我们有

$$\ddot{k}_m(\alpha) = \eta_{m-1} + \beta_{m-1}\ddot{k}_{m-1}(\alpha)$$
$$= \eta_{m-1} + \beta_{m-1}\,\eta_{m-2} + ... + \beta_{m-1}....\beta_1\,\eta_0 + \beta_{m-1}....\beta_0\,\ddot{k}_0(\alpha).$$

为求解该方程，我们假设 (q(α) v(α)) 是周期的，使得 B_α^m(q(α) v(α)) =(q(α) v(α))。于是 k_m(α) = k_0 (α)。由此，我们可以如下求解前面的方程

$$\ddot{k}_m(\alpha) - \beta_{m-1}....\beta_0\,\ddot{k}(\alpha) = \eta_{m-1} + \beta_{m-1}\,\eta_{m-2} + ... + \beta_{m-1}....\beta_1\,\eta_0$$
$$\ddot{k}_m(\alpha) = \frac{1}{1-\beta_{m-1}....\beta_0}\Big(\eta_{m-1} + \beta_{m-1}\,\eta_{m-2} + ... + \beta_{m-1}....\beta_1\Big)$$

由 η_j 和 β_i 的最大值，我们有

$$|\ddot{k}_m(\alpha)| \le \frac{\eta_{\max}}{1-\beta_{\max}^m}\Big(1 + \beta_{\max} + ... + \beta_{\max}^{m-1}\Big)$$
$$= \frac{\eta_{\max}}{1-\beta_{\max}^m}\Big(\frac{1-\beta_{\max}^m}{1-\beta_{\max}}\Big)$$
$$= \frac{\eta_{\max}}{1-\beta_{\max}}.$$

这意味着存在一个常数 $C_k^{(2)} > 0$，它不依赖于 m 或 α，使得对于每个 $j = 0, 1, ..., m$, 都有 $|\ddot{k}_j(\alpha)| \le C_k^{(2)}$。继续运用归纳法可知， k_j(α) 关于 α 的 n 阶导数有界，其界为常数 $C_k^{(n)} > 0$，该常数仅取决于 n。 □

5 最大李雅普诺夫指数的连续性

在本节中，我们证明最大李雅普诺夫指数 λ_1 关于平面台球变形连续。设 $K(\alpha)$ 是定义 4.1 中所定义的台球变形，并设 K(0) 为初始开台球。设 $k_j(\alpha)$ k_j(0) 和 $d_j(\alpha)$ d_i(0) 分别为第 4.1 节中所述的曲率和距离。

对于每个 $\alpha \in [0,b]$，令 M_α 为台球映射的非游荡集，并令 $R_\alpha : M_\alpha \longrightarrow \Sigma$ 为共轭映射 $R : M_0 \longrightarrow \Sigma$ 的对应映射，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{B_\alpha} & M_\alpha \\ \downarrow{\scriptstyle R_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle R_\alpha} \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

其中 B_α 是定义在 M_α上的台球映射。由定理 2.1 ，存在一个子集 A_α ，它属于 Σ ，且满足$\mu(A_\alpha)$, $= 1$ 使得

$$\lambda_1(\alpha) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \|D_{x_0} B_\alpha^m(w)\| \tag{5.1}$$

对所有 $x \in M_\alpha$ 满足 $R_\alpha(x) \in A_\alpha$的情形。同样，令 A_0 为满足 $\mu(A_0) = 1$ 的集合，该集合由定理 2.1 针对 $\alpha = 0$得到。

引理 5.1。给定任意序列

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots$$

中元素的序列 $[0,b]$，对于 μ几乎所有的 $\xi \in \Sigma$ ，公式 (5.1) 对 $\alpha = \alpha_p$ 以及 $x = R_\alpha^{-1}(\xi)$对所有 $p = 1$、2、.....均成立，并且对 $\alpha = 0$和 $x = R^{-1}(\xi)$也成立。

证明。集合 $A = A_0 \cap \cap_{p=1}^{\infty} A_{\alpha_p}$ 具有 $\mu(A) = 1$ ，因为

$$\Sigma \setminus A = (\Sigma \setminus A_0) \cup \cup_p^{\infty} (\Sigma \setminus A_{\alpha_p})$$

是零测集的可数并，因此测度为零。若 $\alpha = \alpha_p$ 对某个 p 成立，且 $R_\alpha(x) \in A$，那么 $R_\alpha(x)$ $\in A_{\alpha_p}$ ，因此公式 (5.1) 成立。类似地，(5.1) 对 $\alpha = 0$ 也成立。 □

因此，使用记号 $x(0,\alpha) \in M_\alpha$，我们可以选取 $\xi \in \Sigma$ 使得公式（5.1）对$\alpha = \alpha_p$ 以及 $x = x$ $(0, \alpha_p)$ 对所有 $p = 1,2,\ldots$都成立，并且对 $\alpha = 0$和 $x = (0,0)$.

由最大李雅普诺夫指数的公式（3.1），我们可以写出 $K(\alpha)$ 和 $K(0)$ 的李雅普诺夫指数如下：

$$\lambda_1(\alpha) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \log\Big(1 + d_j(\alpha) k_j(\alpha)\Big) = \lim_{m\to\infty} \lambda_1^{(m)}(\alpha),$$
$$\lambda_1(0) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \log\Big(1 + d_j(0) k_j(0)\Big) = \lim_{m\to\infty} \lambda_1^{(m)}(0),$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(m)}(\alpha) &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \log\Big(1 + d_j(\alpha) k_j(\alpha)\Big) \\ \text{and} \quad \lambda_1^{(m)}(0) &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \log\Big(1 + d_j(0) k_j(0)\Big). \end{aligned} \tag{5.2}$$

现在，我们证明定理 **1.1**

定理 1.1的证明：设 $K(\alpha)$ 是 $\mathcal{C}^{4,2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的台球变形，并设$\alpha \in [0,b]$。假设 $\lambda_1(\alpha)$ 在 $\alpha = 0$ 处不连续。那么存在 $\varepsilon > 0$ 以及一个序列$\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_p > ... \to 0$，它属于 $[0,b]$ 且满足 $\alpha_p \to 0$，使得对所有 $p \geq 1$，$|\lambda_1^m(\alpha_k) - \lambda_1^m(0)| \geq \varepsilon$。

利用引理5.1 以及之前关于 $\lambda_1^m(\alpha)$ 和 $\alpha = \alpha_p$ 以及 $\lambda_1^m(0)$ 在 (5.2) 中的表达式，可得

$$\begin{aligned}
\left|\lambda_1^m(\alpha_p) - \lambda_1^m(0)\right| &= \left|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\log\delta_j(\alpha_p) - \log\delta_j(0))\right| \\
&= \left|\frac{-1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\log(1+d_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p)) - \log(1+d_j(0)k_j(0)))\right| \\
&\leq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left|\log(1+d_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p)) - \log(1+d_j(0)k_j(0))\right| \\
&\leq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{1+d_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p) - (1+d_j(0)k_j(0))}{1+\min\{d_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p), d_j(0)k_j(0)\}}\right| \\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{d_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p) - d_j(0)k_j(0)}{1+d_{\min}k_{\min}}\right| \\
&= \frac{1}{m}C_0\sum_{j=1}^{m}\left|d_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p) - d_j(0)k_j(0)\right| \\
&= \frac{1}{m}C_0\sum_{j=1}^{m}\left|(d_j(\alpha_p) - d_j(0))k_j(\alpha_p) + d_j(0)(k_j(\alpha_p) - k_j(0))\right|,
\end{aligned}$$

其中 $C_0 = \frac{1}{1+d_{\min}k_{\min}} > 0$ 是一个与 α_p无关的全局常数。

固定一个较小的 $\delta > 0$；我们稍后将说明 $\delta > 0$ 应当有多小。接下来，考虑充分大的 p，使得 满足 $\alpha_p < \delta$。对于所有 p，都有 $|k_j(\alpha_p)-k_j(0)| = \alpha_p|k_j(s(\alpha_p))|$ 以及 $|d_j(\alpha_p)-d_j(0)| = \alpha_p|d_j(r(\alpha_p))|$，其中某个 $s(\alpha_p \ r \ \alpha_p \in [0,\alpha_p]$ 4 5 4 8 ， C_k C_d) ( ) 。由推论 . 和 ., 存在常数 和 ，使得 $|k_j(s(\alpha_p))| \leq C_k$ 以及 $|d_j(s(\alpha_p))| \leq C_d$。因此，对于所有 j，$|k_j(\alpha_p) - k_j(0)| \leq \alpha_p C_k < \delta C_k$，且 $|d_j(\alpha_p) - d_j(0)| \leq \alpha_p C_d < \delta C_d$。于是

$$\begin{aligned}
\left|\lambda_1^m(\alpha_p) - \lambda_1^m(0)\right| &\leq \frac{1}{m}C_0\sum_{j=1}^{m}\left(\left|d_j(\alpha_p) - d_j(0)\right|\left|k_j(\alpha_p) + d_j(0)\right|\left|k_j(\alpha_p) - k_j(0)\right|\right) \\
&< \frac{1}{m}C_0\sum_{j=1}^{m}\delta(C_d k_{\max} + C_k d_{\max}) \\
&= C_0\delta(C_d k_{\max} + C_k d_{\max}) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

如果我们取 $\delta < \frac{\varepsilon}{C_d k_{\max} + C_k d_{\max}}$。现在我们得到了矛盾，因为对于序列 $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_p > ... \to 0$ in $[0,b]$ 的选择。因此命题得证。 □

6 最大李雅普诺夫指数的可微性

在此证明定理1.2

证明定理1.2：我们将证明在 $\alpha = 0$ 处的可微性。由此可推出在任意$\alpha \in [0, b]$ 处的可微性。为了证明在 $\alpha = 0$ 处的可微性，我们需要证明存在

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\lambda_1(\alpha) - \lambda_1(0)}{\alpha}.$$

等价地，存在一个数 F 使得

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\lambda_1(\alpha_p) - \lambda_1(0)}{\alpha_p} = F,$$

对于任意序列 $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_p > ... \to 0$ ，当 $p \to \infty$ 趋于 $[0, b]$时。

设 $K(\alpha) \subset \mathbb{R}^2$ 是一个 $\mathcal{C}^5$, [3] 台球变形，并且 $\alpha \in [0, b]$ 是一个正数 b。设 $\lambda_1(\alpha)$为 $K(\alpha)$的最大李雅普诺夫指数， $\lambda_1(0)$为 $K(0)$的最大李雅普诺夫指数。

利用引理5.1 以及式($\lambda_1^m(\alpha)$关于$\alpha = \alpha_p$ 和 $\lambda_1^m(0)$在式(5.2)中的表达式，可得$\lambda_1^{(m)}(\alpha_p) \to \lambda_1(\alpha_p)$ 以及 $\lambda_1^{(m)}(0) \to \lambda_1(0)$，当 $m \to \infty$时。此外，

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1^{(m)}(\alpha_p) - \lambda_1^{(m)}(0)}{\alpha_p} &= -\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\log \delta_j(\alpha_p) - \log \delta_j(0)}{\alpha_p} \\ &= -\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\log\big(1 + d_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p)\big) - \log\big(1 + d_j(0)k_j(0)\big)}{\alpha_p}.\end{aligned}$$

令 $f_j(\alpha_p) = \log\big(1 + d_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p)\big)$，并令 $f_j(0) = \log\big(1 + d_j(0)k_j(0)\big)$。那么

$$\frac{\lambda_1^{(m)}(\alpha_p) - \lambda_1^{(m)}(0)}{\alpha_p} = -\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{f_j(\alpha_p) - f_j(0)}{\alpha_p}.$$

泰勒公式给出

$$f_j(\alpha_p) = f_j(0) + \alpha_p \dot{f}_j(0) + \frac{\alpha_p^2}{2}\ddot{f}_j(r_j(\alpha_p))$$

对于某个 $r_j(\alpha_p) \in [0, \alpha_p]$。那么

$$\frac{f_j(\alpha_p) - f_j(0)}{\alpha_p} - \dot{f}_j(0) = \frac{\alpha_p}{2}\ddot{f}_j(r_j(\alpha_p)).$$

Let

$$F_m = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \dot{f}_j(0).$$

将上述结果对 $j = 1, 2, ..., m$ 求和，得到

$$\frac{\lambda_1^{(m)}(\alpha_p) - \lambda_1^{(m)}(0)}{\alpha_p} - F_m = -\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\Big[\frac{f_j(\alpha_p) - f_j(0)}{\alpha_p} - \dot{f}_j(0)\Big].$$

根据 $f_j(\alpha_p)$的定义，

$$\dot{f}_j(\alpha_p) = \frac{\dot{d}_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p) + d_j(\alpha_p)\dot{k}_j(\alpha_p)}{1 + d_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p)},$$

因此，

$$\ddot{f}_j(\alpha_p) = \frac{\left(\ddot{d}_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p) + 2\dot{d}_j(\alpha_p)\dot{k}_j(\alpha_p) + d_j(\alpha_p)\ddot{k}_j(\alpha_p)\right)\left(1 + d_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p)\right)}{\left(1 + d_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p)\right)^2} - \frac{\left(\dot{d}_j(\alpha_p)k(\alpha_p) + d_j(\alpha_p)\dot{k}_j(\alpha_p)\right)^2}{\left(1 + d_j(\alpha_p)k_j(\alpha_p)\right)^2}.$$

于是，由推论 4.5 和4.8，我们得到

$$\left|\dot{f}_j(\alpha_p)\right| \le \frac{C_d^{(1)}k_{\max} + d_{\max}C_k^{(1)}}{1 + d_{\min}k_{\min}} = C_1,$$

$$\left|\ddot{f}_j(\alpha_p)\right| \le \frac{\left(C_d^{(2)}k_{\max} + 2C_d^{(1)}C_k^{(1)} + d_{\max}C_k^{(2)}\right)\left(1 + d_{\max}k_{\max}\right)}{\left(1 + d_{\min}k_{\min}\right)^2} + \frac{\left(C_d^{(1)}k_{\max} + d_{\max}C_k^{(1)}\right)^2}{\left(1 + d_{\min}k_{\min}\right)^2} = C_2.$$

因此

$$|\ddot{f}_j(r_j(\alpha_p))| \le C_2,$$

对于某个与 $r_j(\alpha_p)$ 和 j 无关的常数 $C_2 > 0$。这意味着

$$\left|\frac{\lambda_1^{(m)}(\alpha_p) - \lambda_1^{(m)}(0)}{\alpha_p} - F_m\right| \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_p}{2}\left|\ddot{f}_j(t_j(\alpha_p))\right| \le \frac{C_2}{2}\alpha_p.$$

由于 $|\dot{f}_j(\alpha_p)| \le C_1$，对于所有 m，我们有$|F_m| \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|\dot{f}_j(0)| \le C_1$。因此，序列$\{F_m\}$ 存在收敛子序列。例如，令 $F_{m_h} \to F$，其中 $\{m_h\}$是某个子序列。于是

$$\left|\frac{\lambda_1^{(m_h)}(\alpha_p) - \lambda_1^{(m_h)}(0)}{\alpha_p} - F_{m_h}\right| \le \frac{C_2}{2}\alpha_p,$$

对于所有 $h \ge 1$。因此，令 $h \to \infty$，我们得到

$$\left|\frac{\lambda_1(\alpha_p) - \lambda_1(0)}{\alpha_p} - F\right| \le \frac{C_2}{2}\alpha_p,$$

令 $\alpha_p \to 0$ 为 $p \to \infty$，可得存在

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\lambda_1(\alpha_p) - \lambda_1(0)}{\alpha_p} = F.$$

对于每个序列 $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_p > \ldots \to 0$，当 $p \to \infty$ 属于 $[0, b]$时。因此，存在$F = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\dot{f}_j(0)$。这对每个子序列 $\{m_h\}$都成立，因此对任意子序列，我们都有 $F_{m_h} \to F$。于是， F_m 也收敛到 F。这意味着存在

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\lambda_1(\alpha)-\lambda_1(0)}{\alpha}=F,$$

因此，λ_1 在 $\alpha=0$ 处可微，且 $\lambda_1(0)=F$。 □

推论 6.1. 设 $K(\alpha)$ 是一个 $\mathcal{C}^{5,\ 3}$ 台球变形。那么存在一个常数 $C_{\lambda_1}>0$使得

$$\left|\frac{\mathrm{d}\lambda_1(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|\le C_{\lambda_1},\quad for\,all\,\alpha\in[0,b].$$

证明。我们有

$$\lambda_1(\alpha)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\log(1+d_j(\alpha)k_j(\alpha)).$$

根据定理 1.2，$\lambda_1(\alpha)$ 是 $\mathcal{C}^1$。因此，由前一个证明中的公式$\dot\lambda_1(0)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\dot f_j(0)$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}\alpha}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\frac{\mathrm{d}d_j}{\mathrm{d}\alpha}k_j(\alpha)+d_j(\alpha)\frac{\mathrm{d}k_j}{\mathrm{d}\alpha}}{1+d_j(\alpha)k_j(\alpha)}.$$

根据推论 4.5 和 4.8，存在常数 $C_d^{(1)}$，$C_k^{(1)}>0$ 使得$\left|\frac{\mathrm{d}d_j}{\mathrm{d}\alpha}\right|\le C_d^{(1)}$ 和 $\left|\frac{\mathrm{d}k_j}{\mathrm{d}\alpha}\right|\le C_k^{(1)}$。于是，我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}\alpha}\right|&\le\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{C_d^{(1)}k_{\max}+d_{\max}C_k^{(1)}}{1+d_{\min}k_{\min}}\\&=\frac{C_d^{(1)}k_{\max}+d_{\max}C_k^{(1)}}{1+d_{\min}k_{\min}}\\&=C_{\lambda_1}.\end{aligned}$$

这证明了该命题。 □

致谢

作者谨向 Luchezar Stoyanov 教授致谢，感谢他提出的建议、发表的评论以及给予的帮助。本研究获得沙特阿拉伯奈季兰大学奖学金资助。

参考文献

[1] L. Barreira 和 Ya. Pesin，《李雅普诺夫指数与光滑遍历理论》。大学讲座系列 23，美国数学会，普罗维登斯，RI，2001 年。[2] R. Bowen，《双曲流的符号动力系统》。《美国数学杂志》95（1973），429-460。

[3] P. Duarte, S. Klein 和 M. Poletti，《双曲映射上线性余循环的李雅普诺夫指数的霍尔德连续性》。《数学杂志》302 (2022)，2285–2325。

[4] N. Chernov, 《台球系统的熵、李雅普诺夫指数与平均自由程》。《统计物理学杂志》88 (1997), 1-29。[5] N. Chernov 和 R. Markarian, 《混沌台球系统》。《数学调查与专著》第 127 卷，美国数学会，2006。[6] M. Ikawa, 《多个严格凸体外部波动方程解的衰减》。《傅里叶研究所年刊》38 (1988), 113-146。[7] A. Katok 和 J. M. Strelcyn, 《不变流形、熵与台球系统；带奇点的光滑映射》。《数学讲义》第 1222 卷，施普林格，1986。[8] A. Lopes 和 R. Markarian, 《开台球：康托尔集上的不变概率与条件不变概率》。《工业与应用数学学会应用数学杂志》56 (1996)，651-680。[9] R. Markarian, 《具有全测度 Pesin 区域的台球系统》。《数学物理通讯》118 (1988)，87-97。[10] R. Markarian, 《新的遍历台球系统：精确结果》。《非线性》6 (1993)，819-841[11] T. Morita, 《无边界条件的台球系统的符号表示》。《美国数学会汇刊》325 (1991)，819-828。[12] V. I. Oseledets, 《乘法遍历定理：动力系统的李雅普诺夫特征数》。《莫斯科数学会汇刊》19 (1968)，197-221。[13] M. Pollicott, 《紧流形上的遍历理论与 Pesin 理论讲义》. 剑桥大学出版社，剑桥，1993。[14] V. Petkov 和 L. Stoyanov, 《反射射线几何与逆谱问题》. 威利，奇切斯特，(1992)。[15] Ya. Sinai, 《具有弹性反射的动力系统》。《俄罗斯数学调查》25 (1970)，137-190。[16] Ya. Sinai, 《Krylov 思想的发展》，附于：N.S.Krylov 《统计物理学基础著作》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1979，239-281。[17] L. Stoyanov, 《一类散射台球的指数不稳定性与熵》。《遍历理论与动力系统》19 (1999)，201-226。[18] L. Stoyanov, 《Ruelle 算子的谱与开放台球流相关性的指数衰减》。《美国数学杂志》123 (2001)，715-759。[19] L. Stoyanov, 《开放台球流的非可积性与 Dolgopyat 型估计》。《遍历理论与动力系统》32 (2012), 295-313。[20] M. Viana, 《李雅普诺夫指数讲义》，《剑桥高等数学研究》第145卷，剑桥大学出版社，2014。[21] P. Wright, 《平面开放台球系统非游荡集豪斯多夫维数的可微性》，《离散与连续动力系统》36(7) (2016)，3993-4014。[22] M, P. Wojtkowski, 《具有非零李雅普诺夫指数的台球系统设计原理》。《数学物理通讯》105 (1986)，391-414。