arXiv:2301.01916v1 [math.CV] 5 Jan 2023

凸函数反函数的第三个汉克尔行列式的精确界

BISWAJIT RATH[1], K. SANJAY KUMAR [2], D. VAMSHEE KRISHNA[3]

Abstract. 本文旨在求出凸函数反函数的第三个汉克尔行列式的最佳上界。

1. Introduction

记 $\mathcal{H}$ 为单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}$ 内所有解析函数的族； $|z|<1\}$，并设 $\mathcal{A}$ 为由条件$f(0)=f'(0)-1=0$规范化的函数 f 的子族，即具有如下形式

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n,\ a_1:=1, \tag{1.1}$$

且 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{A}$ 中具有单叶（schlicht）映射的子族。对于 $f\in\mathcal{S}$，其反函数 f^{-1} 由下式给出

$$f^{-1}(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty}t_nw^n,\ |w|<r_o(f);\left(r_o(f)\geq\frac{1}{4}\right). \tag{1.2}$$

几何函数论中的一个典型问题是研究由原函数的系数组合构成的泛函。对于正整数 r、 n，Pommerenke [16] 刻画了式（1.1）中给出的 n^{th}阶 r^{th}-汉克尔行列式f，定义如下:

$$H_{r,n}(f)=\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+r-1}\\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n+r-1} & a_{n+r} & \cdots & a_{n+2r-2}\end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

求 $r=3$ 和 $n=1$ 在（1.2）中给出的第三汉克尔行列式精确估计的问题

$$H_{3,1}(f):=\begin{vmatrix} a_1=1 & a_2 & a_3\\ a_2 & a_3 & a_4\\ a_3 & a_4 & a_5\end{vmatrix}=2a_2a_3a_4-a_3^3-a_4^2+a_3a_5-a_2^2a_5, \tag{1.4}$$

在技术上比 $r=n=2$ 困难得多。

近年来，许多作者致力于求取上界（参见 [2, 8,17, 18, 20]），也有少数论文专门研究某些解析函数子类的 $H_{3,\ 1}(f)$ 的最佳上界估计（参见 [3, 6, 7, 9, 10, 19]）。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 30C45，30C50。*Key words and phrases.* 全纯函数，单叶函数，汉克尔行列式，凸函数的反函数，Carath´eodory 函数。

最近，Lecko 等人 [6] 求得了凸函数类 $\mathcal{S}^c$ 的最佳界，该类定义如下：

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0. \tag{1.5}$$

受这些结果启发，本文在 $f\in\mathcal{S}^c$ as $1/36$ 时，得到了 $H_{3,\ 1}(f^{-1})$ 的精确估计。

集合 $\mathcal{P}$ 由所有函数 p 组成，其中每个函数都称为 Carath´eodory 函数 [5]，其形式为：

$$p(z)=1+\sum_{t=1}^{\infty}c_t z^t, \tag{1.6}$$

在 $\mathbb{D}$ 中具有正实部。根据 (1.4) 和 (1.5)，$\mathcal{S}^c$ 中函数的系数可以用 $\mathcal{P}$ 中函数的系数表示。随后，我们基于系数的熟知公式 c_2 （见 [15, 第 166] 页）、 c_3 （见 [11, 12]）以及可在 [10] 中找到的 c_4 ，得到了 $H_{3,\ 1}(f^{-1})$ 的上界。

证明主要结果的基础是以下引理，我们采用了 Libera 和 Zlotkiewicz [12] 提出的步骤。

引理 1.1. 若 $p\in\mathcal{P}$ 具有 (1.5) 的形式，且 $c_1\geq 0$ 满足 $c_1\in[0,2]$ ，则

$$\begin{aligned}
&2c_2=c_1^2+\nu\mu,\\
&4c_3=c_1^3+2c_1\nu\mu-c_1\nu\mu^2+2\nu\left(1-|\mu|^2\right)\rho,\\
&\textit{and}\\
&8c_4=c_1^4+3c_1^2\nu\mu+\left(4-3c_1^2\right)\nu\mu^2+c_1^2\nu\mu^3+4\nu\left(1-|\mu|^2\right)\left(1-|\rho|^2\right)\psi\\
&\qquad+4\nu\left(1-|\mu|^2\right)\left(c_1\rho-c\mu\rho-\bar{\mu}\rho^2\right),
\end{aligned}$$

其中 $\nu:=4-c_1^2$，对某些 μ、 ρ 和 ψ，满足 $|\mu|\leq 1$、 $|\rho|\leq 1$ 和 $|\psi|\leq 1$。

2. Main result

定理 2.1. 若 $f\in\mathcal{S}^c$，则

$$\left|H_{3,1}(f^{-1})\right|\leq\frac{1}{36}$$

且当 $p_0(z)=(1+z^3)/(1-z^3)$ 时，该不等式为锐界。

证明. 对于 $f\in\mathcal{S}^c$，存在一个全纯函数 $p\in\mathcal{P}$，使得

$$\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}=p(z)\Leftrightarrow\{f'(z)+zf''(z)\}=p(z)f'(z) \tag{2.1}$$

将 f 和 p 在 (2.1) 中的级数表示代入，经过简单计算可得

$$\begin{aligned}
&a_2=\frac{c_1}{2},\ a_3=\frac{c_1^2+c_2}{6},\ a_4=\frac{1}{12}\left[\frac{1}{2}c_1^3+\frac{3}{2}c_1c_2+c_3\right]\\
&\text{and } a_5=\frac{1}{20}\left[\frac{1}{6}c_1^4+c_1^2c_2+\frac{1}{2}c_2^2+\frac{4}{3}c_1c_3+c_4\right]
\end{aligned} \tag{2.2}$$

现在，根据定义 (1.2)，我们有

$$w=f(f^{-1})=f^{-1}(w)+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(f^{-1}(w))^n. \tag{2.3}$$

此外，我们有

$$w = f(f^{-1}) = w + \sum_{n=2}^{\infty} t_n w^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (w + \sum_{n=2}^{\infty} t_n w^n)^n. \tag{2.4}$$

化简后，我们得到

$$\begin{aligned}&(t_2 + a_2)w^2 + (t_3 + 2a_2t_2 + a_3)w^3 + (t_4 + 2a_2t_3 + a_2t_2^2 + 3a_3t_2 + a_4)w^4\\ &+(t_5 + 2a_2t_4 + 2a_2t_2t_3 + 3a_3t_3 + 3a_3t_2^2 + 4a_4t_2 + a_5)w^5 + ... = 0.\end{aligned} \tag{2.5}$$

比较式 (2.5) 中同次幂的系数，化简后，我们得到

$$\begin{aligned}&t_2 = -a_2; t_3 = \{-a_3 + 2a_2^2\}; t_4 = \{-a_4 + 5a_2a_3 - 5a_2^3\};\\ &t_5 = \{-a_5 + 6a_2a_4 - 21a_2^2a_3 + 3a_3^2 + 14a_2^4\}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

将式 (2.2) 中 $a_n(n = 2, 3, 4, 5)$ 的值代入式 (2.6)，化简后，我们得到

$$\begin{aligned}&t_2 = -\frac{c_1}{2},\ t_3 = \frac{1}{6}\left(2c_1^2 - c_2\right),\ t_4 = \frac{1}{24}\left(-6c_1^3 + 7c_1c_2 - 2c_3\right)\\ &\text{and } t_5 = \frac{1}{120}\left(-6c_4 + 22c_1c_3 - 46c_1^2c_2 + 7c_2^2 + 24c_1^4\right).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Now,

$$H_{3,1}(f^{-1}) = \begin{vmatrix} t_1 = 1 & t_2 & t_3 \\ t_2 & t_3 & t_4 \\ t_3 & t_4 & t_5 \end{vmatrix}, \tag{2.8}$$

将式 (2.7) 中 $t_j, (j = 2,3,4,5)$ 的值代入式 (2.8)，化简后可得

$$\begin{aligned}H_{3,1}(f^{-1}) = \frac{1}{8640}&\left[4c_1^6 - 24c_1^4c_2 + 12c_1^3c_3 + 39c_1^2c_2^2 - 44c_2^3 + 36c_1c_2c_3\right.\\ &\left.-36c_1^2c_4 - 60c_3^2 + 72c_2c_4\right].\end{aligned} \tag{2.9}$$

根据 (2.9)，代入引理 1.1 中 c_2、 c_3 和 c_4 的值，可得

$$\begin{aligned}24c_1^4c_2 =&12\left[c_1^6 + c_1^4\nu\mu\right];\\ 12c_1^3c_3 =&3\left[c_1^6 + 2c_1^4\nu\mu - c_1^4\nu\mu^2 + 2c_1^3\nu(1 - |\mu|^2)\rho\right]\\ 44c_2^3 =&\frac{11}{2}\left[c_1^6 + 3c_1^4\nu\mu + 3c_1^2\nu^2\mu^2 + \nu^3\mu^3\right];\\ 39c_1^2c_2^2 =&\frac{39}{4}\left[c_1^6 + 2c_1^4\nu\mu + c_1^2\nu^2\mu^2\right];\\ 36c_1c_2c_3 =&\frac{9}{2}\left[c_1^6 + 3c_1^4\nu\mu + 2c_1^2\nu^2\mu^2 - c_1^4\nu\mu^2 - c_1^2\nu^2\mu^3\right.\\ &\left.+2\nu\left(c_1^3 + c_1\nu\mu\right)\left(1 - |\mu|^2\right)\rho\right];\\ 60c_3^2 =&\frac{15}{4}\left[c^6 + 4c^4\nu\mu + 4c^4\nu^2\mu^2 - 2c^4\nu\mu^2 - 4c^2\nu^2\mu^3 + c^2\nu^2\mu^4\right.\\ &\left.+4\nu(c^3 + 2c\nu\mu - c\nu\mu^2)(1 - |\mu|^2)\rho + 4\nu^2(1 - |\mu|^2)^2\rho^2\right];\\ 72c_2c_4 - 36c_1^2c_4 =&\frac{9}{2}\left[c_1^4\nu\mu + 3c_1^2\nu^2\mu^2 + \left(4 - 3c_1^2\right)\nu^2\mu^3 + c_1^2\nu^2\mu^4\right.\\ &+ 4\nu^2c_1\mu\left(1 - \mu\right)\left(1 - |\mu|^2\right)\rho - 4\nu^2\left(1 - |\mu|^2\right)|\mu|^2\rho^2\\ &\left.+4\nu^2\left(1 - |\mu|^2\right)\left(1 - |\rho|^2\right)\mu\psi\right].\end{aligned} \tag{2.10}$$

将 (2.10) 中的值代入表达式 (2.9)，化简后可得

(2.11)
$$H_{3,1}(f^{-1}) = \frac{1}{8640}\left[\frac{3}{4}c_1^2\nu^2\mu^2 - 3c_1^2\nu^2\mu^3 + \frac{3}{4}c_1^2\nu^2\mu^4 - \frac{11}{2}\nu^3\mu^3 + 18\nu^2\mu^3 \right.$$
$$- \left(3c_1\nu^2\mu + 3c_1\nu^2\mu^2\right)\left(1-|\mu|^2\right)\rho - 3\nu^2\left(5+|\mu|^2\right)\left(1-|\mu|^2\right)\rho^2$$
$$\left. +18\nu^2\mu\left(1-|\mu|^2\right)\left(1-|\rho|^2\right)\psi\right].$$

将 $u := c_1$ 代入（2.11），并取 $\nu = \left(4-u^2\right)$，可得

(2.12)
$$H_{3,1}(f^{-1}) = \frac{\left(4-u^2\right)^2}{8640}\left[\frac{3}{4}u^2\mu^2 + \frac{3}{2}u^2\mu^3 + \frac{3}{4}u^2\mu^4 - (4-u^2)\mu^3 \right.$$
$$- 3u\mu\left(1+\mu\right)\left(1-|\mu|^2\right)\rho - 3\left(5+|\mu|^2\right)\left(1-|\mu|^2\right)\rho^2$$
$$\left. +18\mu\left(1-|\mu|^2\right)\left(1-|\rho|^2\right)\psi\right].$$

对（2.12）两边取模，并利用 $|\mu| = v \in [0,1]$、$|\rho| = w \in [0,1]$、$c_1 = u \in [0,2]$ 和 $|\psi| \le 1$，可得

$$\left|H_{3,1}(f^{-1})\right| \le \frac{\vartheta(u,v,w)}{8640}, \tag{2.13}$$

其中 ϑ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 定义为

(2.14)
$$\vartheta(u,v,w) = \left(4-u^2\right)^2\left[\frac{3}{4}u^2v^2 + \frac{3}{2}u^2v^3 + \frac{3}{4}u^2v^4 + \left(4-u^2\right)v^3 \right.$$
$$+ 3uv\left(1+v\right)\left(1-v^2\right)w + 3\left(5+v^2\right)\left(1-v^2\right)w^2$$
$$\left. +18v\left(1-v^2\right)\left(1-w^2\right)\right]$$

现在，我们尝试在 $\Omega := [0,2]\times[0,1]\times[0,1]$ 上使函数 $\vartheta(u,v,w)$ 最大化。

A. 由（2.14）可知，在 Ω 的顶点上，我们得到 g et
$$\vartheta(0,0,0) = \vartheta(2,0,0) = \vartheta(2,1,0) = \vartheta(2,0,1) = \vartheta(2,1,1) = 0,$$
$$\vartheta(0,0,1) = 240,\ \vartheta(0,1,0) = \vartheta(0,1,1) = 64.$$

B. 在 Ω 的边上，由 (2.14) 可得

(i) 对于边 $u=0,\ v=0,\ 0<w<1$，我们得到。
$$\vartheta(0,0,w) = 240w^2 \le 240.$$

(ii) 对于边 $u=0,\ v=1,\ 0<w<1$，我们得到
$$\vartheta(0,1,w) = 64.$$

(iii) 对于 $u=0,\ w=0,\ 0<v<1$,
$$\vartheta(0,v,0) = 32v(9-7v^2) \le 192\sqrt{\frac{3}{7}},, \text{ for } v=\sqrt{2}.$$

(iv) 对于 $u=0,\ w=1,\ 0<v<1$,
$$\vartheta(0,v,1) = 240 - 192v^2 + 64v^3 - 48v^4 \le 240.$$

(v) 对于 $v=0,\ w=1, 0<u<2$,
$$\vartheta(u,0,1) = 15(4-u^2)^2 \le 240.$$

(vi) 对于边: $v=1,\ w=0, 0<u<2$ 或 $v=1,\ w=1, 0<u<2$, 我们有

$$\vartheta(u,1,w)=(4-u^2)^2(4+2u^2)\leq 64.$$

(vii) 对于边: $u=2,\ v=0,\ 0<w<1$ 或 $u=2,\ v=1,\ 0<w<1$ 或$u=2,\ w=0,$ $0<v<1$ 或 $c=2,\ w=1,\ 0<v<1$ 或 $v=0,\ w=0,\ 0<u<2$, 我们得到

$$\vartheta(2,v,w)=0.$$

C. 现在, 我们考虑 Ω 的六个面。

(i) 在面 $u=2$ 上, 由 (2.14) 可得

$$\vartheta(2,v,w)=0.$$

(ii) 在面 $u=0,\ v\in$ (0, 1) 和 $w\in$ (0, 1) 上, 由 (2.14) 可得

$$\begin{aligned}\vartheta(0,v,w)&=288v-224v^3+(240-288v-192v^2+288v^3-48v^4)w^2\\&=288v-224v^3+48(5-v)(-1+v)^2(1+v)w^2\\&\leq 288v-224v^3+48(5-v)(-1+v)^2(1+v)\\&=240-192v^2+64v^3-48v^4\leq 240.\end{aligned}$$

(iii) 在面 $v=0$ $u\in$ (0, 2) $w\in$ (0, 1) 上, 由 (2.14) 可得

$$\vartheta(u,0,w)=15(4-u^2)^2w^2\leq 15(4-u^2)^2\leq 240.$$

(iv) 在面 $v=1,\ u\in$ (0, 2) $w\in$ (0, 1) 上, 由 (2.14) 可知, 函数 $\vartheta(u,1,w)$ 与 w 无关; 由 B(vi) 可得 $\vartheta(u,1,w)\leq 240$.

(v) 在面 $w=0,\ u\in$ (0, 2) $v\in$ (0, 1) 上, 由 (2.14) 可得

$$\begin{aligned}\vartheta(u,v,0)&=(4-u^2)^2\left(\frac{3u^2v^2}{4}+\frac{3u^2v^3}{2}+(4-u^2)v^3+\frac{3u^2v^4}{4}+18v(1-v^2)\right)\\&=(4-u^2)^2\left(18v-14v^3+u^2\left(\frac{3v^2}{4}+\frac{v^3}{2}+\frac{3v^4}{4}\right)\right)\\&\leq(4-u^2)^2\left(12\sqrt{\frac{3}{7}}+2u^2\right)\leq 192\sqrt{\frac{3}{7}},\ u\in(0,2).\end{aligned}$$

(vi) 在面 $w=1$ 上, 由 (2.14) 可得

$$\begin{aligned}\vartheta(u,v,1)=(4-u^2)^2\Big(&\frac{3}{4}u^2v^2+\frac{3}{2}u^2v^3+\frac{3}{4}u^2v^4+(4-u^2)v^3\\&+3uv(1+v)(1-v^2)+3(5+v^2)\left(1-v^2\right)\Big)\\:=g_3(u,v),&\ \text{with}\ (u,v)\in\mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

注意, 通过数值计算得到的方程组的所有实数解 (u,v) 为

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_3}{\partial u}=\frac{3}{2}(-4+u^2)\big[&8(-1+v)v(1+v)^2-10u^2(-1+v)v(1+v)^2\\&+u^3v^2(3+2v+3v^2)-4u(-10+9v^2-2v^3+3v^4)\big]=0\end{aligned}$$

and

$$\frac{\partial g_3}{\partial v} = \frac{3}{2}(-4+u^2)^2(-8v(2-v+v^2)+u^2v(1+v+2v^2) + u(2+4v-6v^2-8v^3)) = 0$$

通过数值计算得到的结果如下。

$$(0,0),(-2.63625,-1.53087),(-1.0493,1.14045) \text{ and } (\pm 2,x), x \in \mathbb{R}.$$

因此， g_3 在 (0, 2) $\times$ (0, 1) 中没有临界点。

D. 现在，考虑 Ω 的内部部分，即 (0, 2) $\times$ (0, 1) $\times$ (0, 1)。

对 $\vartheta(u,v,w)$ 关于 w 求偏导，我们得到

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial w} = \frac{1}{2}(4-u^2)^2\left[60w^2+3v^2(u^2+4uw-16w^2)+12v(6+uw-6w^2) +3v^4(u^2-4uw-4w^2)+2v^3(-28+u^2-6uw+36w^2)\right]$$

解 $\frac{\partial \vartheta}{\partial w} = 0$ 后，得到

$$w_0 = -\frac{uv(1+v)}{2(5-v)(1-v)} \notin (0,1) \text{ for } (u,v) \in (0,2)\times(0,1)$$

因此， $\vartheta(u,v,w)$ 在 Ω 的内部没有临界点。

考察情形 A、B、C 和 D，可得

$$\max\left\{\vartheta(u,v,w) : u \in [0,2], v \in [0,1],\ w \in [0,1]\right\} = 240. \tag{2.15}$$

由表达式 (2.13) 和 (2.15)，可得

$$\left|H_{3,1}(f^{-1})\right| \leq \frac{1}{36}. \tag{2.16}$$

对于 $p_0 \in \mathcal{S}^c$，我们得到 $t_2 = t_3 = t_5 = 0$, $t_4 = 1/6$，由此可得该结果。 □

数据可用性：本文稿没有相关数据

References

[1] M. Arif、Mohsan Raza、Huo Tang、Shehzad Hussain 和 Hassan Khan，关于与正弦函数相关的解析函数常见子类的三阶汉克尔行列式，Open Math.，17(1)(2019)，1615–1630。[2] K. O. Babalola，关于某些单叶函数类的 H_3(1) 汉克尔行列式，Inequal Theory Appl，6（编者 Y. J. Cho）（Nova Science Publishers，纽约，2010），1-7。[3] S. Banga 和 S. Sivaprasad Kumar， $\mathcal{SL}^*$类的二阶和三阶汉克尔行列式的精确界，Math. Slovaca，70(4)(2020)，849-862，doi: 10.1515/ms-2017-0398。[4] D. Bansal、S. Maharana 和 J. K. Prajapat，某些单叶函数的三阶汉克尔行列式，J. Korean Math. Soc. 52 (2015)，1139–1148, http://dx.doi.org/10.4134/JKMS.2015.52.6.1139。[5] P. L. Duren， *Univalent functions*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 第259卷，施普林格，纽约，美国，1983。[6] B. Kowalczyk、A. Lecko 和 Y. J. Sim，凸函数三类汉克尔行列式的精确界，Bull. Aust. Math. Soc.，97(3)(2018)，435–445。[7] B. Kowalczyk、A. Lecko、M. Lecko 和 Y. J. Sim，某些解析函数类的三阶汉克尔行列式的精确界，Bull. Korean Math. Soc.，55(6) (2018)，1859–1868, https://doi.org/10.4134/BKMS.b171122。[8] O. S. Kwon、A. Lecko、Y. J. Sim，星形函数三类汉克尔行列式的界，Bull. Malays. Math. Sci. Soc.，42(2)(2019)，767-780。

[9] O. S. Kwon、Y. J. Sim，实系数星形函数三类汉克尔行列式的精确界，Mathematics，2019，doi:10.3390/math7080721。[10] A. Lecko、Y. J. Sim、B. Smiarowska，阶为 1/2 的星形函数三类汉克尔行列式的精确界，Complex Anal. Oper. Theory，13(5)(2019)，2231–2238。[11] R. J. Libera、E. J. Zlotkiewicz， *Early coefficients of the inverse of a regular convex function*，Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982)，第2期，225–230。[12] R. J. Libera 和 E. J. Zlotkiewicz，导数属于 $\mathscr{P}$ 的函数反函数的系数界，Proc. Amer. Math. Soc.，87(2)(1983)，251–257。[13] S. Maharana、J. K. Prajapat 和 D Bansal，单方向凸函数反函数的系数界，Honam Mathematical J. 42 (2020)，781–794 https://doi.org/10.5831/HMJ.2020.42.4.781。[14] Ozaki，S. 关于多叶函数理论。II. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku. Sect. A 4 (1941)，45–87。[15] Ch. Pommerenke， *Univalent functions*，Vandenhoeck & Ruprecht，Gottingen 1975。[16] Ch. Pommerenke，单叶函数的系数与汉克尔行列式，J. Lond. Math. Soc.，41(s-1)(1966)，111–122。[17] Y. J. Sim 和 P. Zaprawa，两个实系数解析函数类的三阶汉克尔行列式，Forum Math.，33(4)(2021)，973-986，https://doi.org/10.1515/forum-2021-0014。[18]H. M. Srivastava、B. Khan、N. Khan、M. Tahir、S. Ahmad、NasirKhan，与 q-指数函数相关的 q-星形函数子类的三阶汉克尔行列式上界，Bull. Sci. math.，167 (2021)，https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2020.102942。[19] K. Ullah、H. M. Srivastava、A. Rafiq、M. Arif 和 S. Arjika，新星形函数子族的精确系数界研究，J. Inequal. Appl.，(2021)，https://doi.org/10.1186/s13660-021-02729-1。[20] P. Zaprawa、M. Obradovic 和 N. Tuneski，单叶星形函数的三阶汉克尔行列式，RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F ́ıs. Nat. Ser. A Mat.，115(2021)，https://doi.org/10.1007/s13398-020-00977-2。

[1,2,3]Department of Mathematics GITAM School of Science GITAM (Deemed to be , , , University) Visakhapatnam- 530 045 A.P. India
Email address: brath@gitam

.edu[1*] ,skarri9@gitam.in[2] ,vamsheekrishna1972@gmail.com[3]