arXiv:2301.01936v1 [math.PR] 5 Jan 2023

# 移动平均过程中大偏差的聚集：长记忆情形

Arijit Chakrabarty
*Theoretical Statistics and Mathematics Unit*
*Indian Statistical Institute, Kolkata*
*e-mail:* arijit.isi@gmail.com和

Gennady Samorodnitsky *
*School of Operations Research*
*and Information Engineering*
*Cornell University*
*e-mail:* gs18@cornell.edu

摘要：我们研究轻尾噪声和长记忆的无限移动平均过程中大偏差事件如何聚集。长记忆会使聚集簇变大，而聚集簇大小的渐近行为最终由带漂移的随机平移的分数布朗运动的首次到达时刻刻画。

AMS 2000 学科分类：主要分类 60F10。
关键词与短语：大偏差、聚集、无限移动平均、长记忆。

## 1. 引言

我们考虑如下形式的无限移动平均过程

$$X_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i Z_{n-i}\,,\ n \geq 0\,, \tag{1.1}$$

其中，噪声变量 $(Z_n:\ n \in \mathbb{Z})$ 假设为独立同分布的非退化随机变量。噪声分布 $F_Z$ 假设具有有限指数矩：

$$\int_{\mathbb{R}} e^{tz}\, F_Z(dz) < \infty \text{ for all } t \in \mathbb{R}\,. \tag{1.2}$$

此外，假设噪声是中心化的：

$$\int_{\mathbb{R}} z\, F_Z(dz) = 0\,, \tag{1.3}$$

**通讯作者。研究部分得到康奈尔大学美国国家科学基金会（NSF）项目 DMS-2015242 的资助。本工作的部分内容是在 GS 访问新加坡国立大学数学系期间完成的，谨此衷心感谢该系的热情接待。

定义过程（1.1）的级数收敛，当且仅当系数$a_0$， $a_1$， $a_2 \ldots$满足

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 < \infty \,. \tag{1.4}$$

在此情形下，$X_n$ 是一个均值为零的平稳遍历过程。对于 $\varepsilon > 0$，我们考虑以下大偏差事件序列

$$E_j(n,\varepsilon) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n+j-1} X_i \geq \varepsilon \right\}, \; j \geq 0. \tag{1.5}$$

根据平稳性，每个事件 $E_j(n,\varepsilon)$ 发生的概率都同样低；我们关注的是：在事件 $E_0(n,\varepsilon)$ 发生的条件下，这些事件所形成的簇。

在 Chakrabarty和 Samorodnitsky (2022) 中，研究了短记忆情形。在此背景下，“短记忆”对应于以下情形

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \text{ and } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \neq 0. \tag{1.6}$$

在这一短记忆情形下，给定 $E_0(n,\varepsilon)$ 的序列$\big(\mathbf{1}(E_j(n,\varepsilon) \;\; j = 1,2,...)$ 的分布 $n \to \infty$ 在 条件下弱收敛于一个几乎处处仅有有限个非零项的序列的分布。非零项的总数 $D_\varepsilon$ 的规模为 $\varepsilon^{-2}$，而 $\varepsilon^2 D_\varepsilon$ 在 $\varepsilon \to 0$下具有一个有趣的弱极限。有关详情以及上述结论所需的一项次要技术条件，请参阅 Chakrabarty 和 Samorodnitsky (2022)。

本文关注长记忆情形。对于移动平均过程（1.1），“长记忆”指的是系数（$a_j$）满足平方可和假设（1.4），但不满足（1.6）中的绝对可和假设。对此，一个典型的假设是

$$(a_n) \text{ is regularly varying with exponent } -\alpha, \; 1/2 < \alpha < 1; \tag{1.7}$$

参见 Samorodnitsky (2016）。结果表明，在这种情况下（在满足某些技术假设的前提下，下面将给出一个例子），当 $E_0(n,\varepsilon)$ 条件下，序列 $\big(\mathbf{1}(E_j(n,\varepsilon)$ $j = 1,2,\ldots)$ 的分布在 $n \to \infty$时弱收敛至退化概率测度 $\delta_{(1,1,\ldots)}$。也就是说，一旦事件 $E_0(n,\varepsilon)$ 发生，事件（$E_j(n,\varepsilon)$）就很可能发生。为了理解它们的结构，我们将重点研究随机变量

$$I_n(\varepsilon) = \inf\{j \geq 1 : E_j(n,\varepsilon) \text{ does not occur}\}, \; n \geq 1 \tag{1.8}$$

并在适当的缩放下，为该序列建立一个弱极限定理。有趣的是，极限恰好是带漂移的随机平移分数布朗运动的首次到达时刻分布。

包含上述极限定理及其所需技术假设的主要结果见第2节。主要定理的证明需要一系列初步结果，这些结果均在该节中给出。最后，证明所需的一些有用事实汇总于第3节。

## 2. 假设与主要结果

关于长记忆情形下大偏差事件聚集的结果需要若干假设，现陈述如下。首先，我们将用渐近幂函数假设取代正则变差假设（1.7）

$$a_n \sim n^{-\alpha},\ 1/2 < \alpha < 1,\ \text{and is eventually monotone.} \tag{2.1}$$

毫无疑问，本文的结果在更一般的正则变差假设下同样成立。然而，这种额外的一般性会使本已高度技术化的论证变得更加复杂，由此可能造成的表述不清，降低了这种一般性带来的价值。最终单调性假设也同样如此。

我们还需要对噪声变量的分布作出一些额外假设。我们假设某个 $\theta_0 > 0$,

$$\sup_{|\theta|\le\theta_0} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{(it+\theta)z}\, F_Z(dz) \right| dt < \infty\,. \tag{2.2}$$

接下来，令

$$\sigma_Z^2 = \int_{\mathbb{R}} z^2\, F_Z(dz) \tag{2.3}$$

为噪声方差。记

$$\kappa = \text{the smallest integer} > \frac{4\alpha - 1}{2 - 2\alpha}. \tag{2.4}$$

换言之，$\kappa = \big[(1+2\alpha)/(2-2\alpha)\big]$。我们假设一个一般的噪声变量$Z$ 满足

$$EZ^i = EG^i \text{ for } 1 \le i \le \kappa, \tag{2.5}$$

其中 $G \sim N(0, \sigma_Z^2)$。

注 2.1. 容易验证，(2.2) 蕴含噪声分布具有二阶连续可微的密度 $f_Z$。另一方面，(2.2) 的一个充分条件是噪声分布具有四阶连续可微的密度 $f_Z$ 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta_0|x|} \left| \frac{d^i}{dx^i} f_Z(x) \right| dx < \infty \text{ for } i = 1, 2, 3, 4.$$

矩相等假设（2.5）限制了噪声分布与正态分布的差异程度。注意，在范围 $1/2 < \alpha < 5/8$内，我们有 $\kappa = 2$，此时该假设是空泛的。由于 $\kappa \ge 2$ 对所有$\alpha \in (1/2,\ 1)$, (1.3) 可由（2.5）推出。

为了陈述我们的主要结果，我们需要引入几个关键量。令

$$\beta = \frac{4-4\alpha}{3-2\alpha} \in (0,1) \tag{2.6}$$

and

$$H = 3/2 - \alpha \in (1/2, 1). \tag{2.7}$$

我们将 $(B_H(t)\colon\ t \geq 0)$ 记为赫斯特指数为 $H$ 的标准分数布朗运动，即一个均值为零、具有连续路径且协方差函数为

$$E\left(B_H(s)B_H(t)\right) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right),\ s,t \geq 0\,. \tag{2.8}$$

若 $T_0$ 是与分数布朗运动独立的标准指数随机变量，则

$$\tau_\varepsilon = \inf\left\{t \geq 0:\ B_H(t) \leq (2C_\alpha)^{-1/2}\varepsilon t^{2H} - (C_\alpha/2)^{1/2}\sigma_Z^2\varepsilon^{-1}T_0\right\},\ \varepsilon > 0, \tag{2.9}$$

是一个几乎处处有限且严格为正的随机变量。这里 $\sigma_Z^2$ 是（2.3）中噪声的方差，并且

$$C_\alpha = \frac{\mathrm{B}(1-\alpha, 2\alpha-1)}{(1-\alpha)(3-2\alpha)}, \tag{2.10}$$

其中 B(·, ·) 为标准贝塔函数。

现在我们可以陈述本文的主要结果。

**定理 2.1。** 假设有限指数矩条件 （1.2）成立，系数满足幂型条件 （2.1）、正则性条件 （2.2）和矩相等条件 （2.5）。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，首次非出现时刻 （1.8）满足

$$P\left(n^{-\beta}I_n(\varepsilon) \in \cdot \middle| E_0(n,\varepsilon)\right) \Rightarrow P\left(\tau_\varepsilon \in \cdot\right),\ n \to \infty\,. \tag{2.11}$$

**注 2.2。** 值得注意的是，定理2.1 中得到的极限分布仅通过噪声分布的方差 $\sigma_Z^2$ 受到影响。这可以这样理解：在本文考察的长记忆情形下，我们有 Var( $X_1 + \cdots + X_n) \gg n$；见下文引理 2.1 。因此，事件$E_j(n,\varepsilon$应被视为中等偏差事件，而非大偏差事件。在许多情况下，人们都观察到，中等偏差事件会受到相关量的高斯弱极限影响。从直观上看，这解释了为什么极限中出现的是该过程的方差。

作为比较，在短记忆情形（1.6）中，我们有 Var$(X_1+\cdots+X_n) \sim cn$ 对于某个 $c > 0$，事件 $E_j(n,\varepsilon)$ 应视为大偏差事件，其行为所依赖的因素远不止噪声的方差。详情请参见 Chakrabarty 和 Samorodnitsky (2022。

我们首先证明定理 2.1 ，为此先建立若干基本估计，这些估计将在全文中使用。记

$$A_j = \sum_{i=0}^{j} a_i,\ j \in \mathbb{Z}\,, \tag{2.12}$$

按照约定，当下限大于上限时，求和（或积分）为零（例如， $A_j = 0$ for $j \le -1$）。令

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} X_i,\ n \ge 1\,, \tag{2.13}$$

并记

$$\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(S_n),\ n \ge 1\,. \tag{2.14}$$

下文采用以下记号。我们将用

$$\varphi_Z(t) = \log\left(\int_{\mathbb{R}} e^{tz}\, F_Z(dz)\right),\ t \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$

表示噪声变量的对数拉普拉斯变换。我们将频繁使用以下显然的事实

$$\varphi \text{ is convex and } \varphi_Z(x) \sim x^2\sigma_Z^2/2,\ x \to 0, \tag{2.16}$$

and

$$\varphi_Z' \text{ is continuous, nondecreasing and } \varphi_Z'(x) = x\sigma_Z^2 + O(x^2),\ x \to 0. \tag{2.17}$$

我们将 $G_\theta$ 记作通过 $\theta \in \mathbb{R}$对分布 $F_Z$ 进行指数倾斜后得到的概率测度。也就是说,

$$G_\theta(dz) = \left(Ee^{\theta Z}\right)^{-1} e^{\theta z} F_Z(dz). \tag{2.18}$$

显然，当 $\theta \to 0$时,

$$\int_{\mathbb{R}} z\, G_\theta(dz) \sim \theta\sigma_Z^2,\ \left|\int_{\mathbb{R}} z\, G_\theta(dz) - \theta\sigma_Z^2\right| = O(\theta^2) \text{ and } = O(|\theta|^3) \text{ if } \kappa \ge 3, \tag{2.19}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |z|^k\, G_\theta(dz) \to \int_{\mathbb{R}} |z|^k\, F(dz),\ k = 1, 2, \ldots.$$

引理 2.1. 渐近地，我们有

$$A_j \sim (1-\alpha)^{-1} j^{1-\alpha},\ j \to \infty \tag{2.20}$$

*and*

$$\sigma_n^2 \sim C_\alpha \sigma_Z^2 n^{3-2\alpha},\ n \to \infty\,. \tag{2.21}$$

此外，对于任意 $t>0$，当 $n\to\infty$ 时，

$$\sum_{i=0}^{[n^\beta t]}(A_i-A_{i-n})^2\sim K_1 t^{3-2\alpha}n^{4-4\alpha}\,, \tag{2.22}$$

*and*

$$\sum_{i=n-[n^\beta t]+1}^{n}(A_i-A_{i-n})^2\sim\sum_{i=n+1}^{n+[n^\beta t]}(A_i-A_{i-n})^2\sim(1-\alpha)^{-2}n^{2-2\alpha+\beta}t\,, \tag{2.23}$$

*with*

$$K_1=(1-\alpha)^{-2}(3-2\alpha)^{-1}\,. \tag{2.24}$$

最后，对于任意 $t>0$，当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{\sigma_Z^2}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{\infty}(A_i-A_{i-n})\left(A_{i+[n^\beta t]}-A_{i+[n^\beta t]-n}\right)=1-n^{1-2\alpha}t^{3-2\alpha}(1+o(1))\,. \tag{2.25}$$

证明。 断言（2.20）显然是由假设（2.1）立即得出的。对于（2.21），首先注意到

$$\begin{aligned}R_n=\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_0,\mathrm{X}_\mathrm{n})&\sim\sigma_Z^2\sum_{j=1}^{\infty}j^{-\alpha}(j+n)^{-\alpha}\\&\sim n^{1-2\alpha}\sigma_Z^2\int_0^\infty x^{-\alpha}(1+x)^{-\alpha}\,dx\\&=C_\alpha\sigma_Z^2(1-\alpha)(3-2\alpha)n^{1-2\alpha}\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时。因此，

$$\begin{aligned}\sigma_n^2=\sum_{i=-(n-1)}^{n-1}(n-|i|)R_{|i|}&\sim 2C_\alpha\sigma_Z^2(1-\alpha)(3-2\alpha)\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)i^{1-2\alpha}\\&\sim 2C_\alpha\sigma_Z^2(1-\alpha)(3-2\alpha)n^{3-2\alpha}\int_0^1(1-x)x^{1-2\alpha}\,dx=C_\alpha\sigma_Z^2n^{3-2\alpha}\,,\end{aligned}$$

这就是（2.21）。接下来，固定 $t>0$ 并取足够大的 $n$，由（2.20）以及$\beta<1$,

$$\sum_{i=0}^{[n^\beta t]}(A_i-A_{i-n})^2=\sum_{i=0}^{[n^\beta t]}A_i^2\sim(1-\alpha)^{-2}\sum_{i=1}^{[n^\beta t]}i^{2-2\alpha}\sim K_1\left(n^\beta t\right)^{3-2\alpha}\,,$$

证明（2.22）。类似地，

$$\sum_{i=n-[n^\beta t]+1}^{n}(A_i-A_{i-n})^2\sim\sum_{i=n-[n^\beta t]+1}^{n}A_n^2\sim(1-\alpha)^{-2}n^{\beta+2-2\alpha}t\,,$$

证明（2.23）中的第一个等价关系，第二个等价关系也可用同样的方法证明。

对于（2.25），我们首先写出

$$S_n = \sum_{j=0}^{\infty} (A_j - A_{j-n}) Z_{n-1-j}\,, n \geq 1\,, \tag{2.26}$$

从而

$$\sigma_n^2 = \sigma_Z^2 \sum_{j=0}^{\infty} (A_j - A_{j-n})^2\,, n \geq 1\,. \tag{2.27}$$

因此，当 $n$ 足够大时，

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma_n^2}{\sigma_Z^2} - \sum_{i=0}^{\infty} (A_i - A_{i-n})(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n}) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{[n^\beta t]-1} (A_i - A_{i-n})^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i + A_{i-n}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(A_i - A_{i-[n^\beta t]}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=n-[n^\beta t]}^{\infty} \left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i + A_{i-n}\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{2.28}$$

由（2.20），

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1} \left(A_i - A_{i-[n^\beta t]}\right)^2 \sim (1-\alpha)^{-2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(i^{1-\alpha} - (i - [n^\beta t])_+^{1-\alpha}\right)^2 \\
&\sim n^{4-4\alpha} t^{3-2\alpha} (1-\alpha)^{-2} \int_0^{\infty} \left[y^{1-\alpha} - (y-1)_+^{1-\alpha}\right]^2 dy
\end{aligned}$$

作为 $n \to \infty$。根据（3.1），有 $H = 3/2 - \alpha$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \left[y^{1-\alpha} - (y-1)_+^{1-\alpha}\right]^2 dy \\
&= \left[(3-2\alpha)(1-\alpha)\right]^{-1} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2-\alpha)^2 \\
&= \frac{1-\alpha}{3-2\alpha} \mathrm{B}(2\alpha-1, 1-\alpha) = (1-\alpha)^2 \mathrm{C}_\alpha,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

so

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(A_i - A_{i-[n^\beta t]}\right)^2 \sim C_\alpha t^{3-2\alpha} n^{4-4\alpha},\ n \to \infty\,. \tag{2.30}$$

由于

$$\sum_{i=n}^{\infty}\left(A_i - A_{i-[n^\beta t]}\right)^2 = O\left(n^{2\beta}\sum_{i=n}^{\infty} i^{-2\alpha}\right) = O\big(n^{2\beta+1-2\alpha}\big) = o\big(n^{4-4\alpha}\big), \quad (2.31)$$

我们还可以得出

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(A_i - A_{i-[n^\beta t]}\right)^2 \sim C_\alpha t^{3-2\alpha} n^{4-4\alpha},\ n\to\infty\,. \quad (2.32)$$

由（2.31）和（2.32）可知

$$\sum_{i=n-[n^\beta t]}^{\infty}\left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i + A_{i-n}\right)^2$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\left[-A_j + A_{j-[n^\beta t]} + \left(A_{j+n} - A_{j+n-[n^\beta t]}\right)\right]^2 \sim C_\alpha t^{3-2\alpha} n^{4-4\alpha}\,.$$

结合（2.28）和（2.30）可得

$$\frac{\sigma_n^2}{\sigma_Z^2} - \sum_{i=0}^{\infty}(A_i - A_{i-n})(A_{i+[n^\beta t]}A_{i+[n^\beta t]-n}) \sim C_\alpha t^{3-2\alpha} n^{4-4\alpha}\,.$$

将两边除以 $\sigma_Z^{-2}\sigma_n^2$ 并应用（2.21）、（2.25）即可得到。 □

现在我们在测度变换下考虑部分和 $S_n$ 的某些大偏差。鉴于后续的应用，我们允许以（2.26）形式给出的部分和受到“扰动”。对于 $n \geq 1$ 和 $t \geq 0$，定义

$$\xi_n^1(t) = \sum_{i=1}^{[n^\beta t]}(A_i - A_{i-n})\,Z_{n-i-1}\,, \quad (2.33)$$

$$\xi_n^2(t) = \sum_{i=n-[n^\beta t]}^{n-1}(A_i - A_{i-n})\,Z_{n-i-1}\,, \quad (2.34)$$

$$\xi_n^3(t) = \sum_{i=n+1}^{n+[n^\beta t]}(A_i - A_{i-n})\,Z_{n-i-1}\,. \quad (2.35)$$

引理 2.2. 固定 $t_1$、$t_2$、$t_3 > 0$，记

$$\bar{S}_n = S_n - \sum_{i=1}^{3}\xi_n^i(t_i),\ n \geq 1\,. \quad (2.36)$$

设 $(\gamma_n)$、$(\theta_n)$ 和 $(\eta_n)$ 是满足以下条件的实数序列

$$\gamma_n = o\left(n^{3/2-\alpha}\right),\ \theta_n = o\left(n^{-(1-\alpha)}\right),\ 1 \ll \eta_n \ll n^{1/2}\,.$$

˜如果 $S_n$ 是一个分布为

$$P\left(\tilde{S}_n \in dx\right) = \left(E(e^{\theta_n \bar{S}_n})\right)^{-1} e^{\theta_n x} P\left(\bar{S}_n \in dx\right), \, n \geq 1\,, \tag{2.37}$$

那么对所有 $x \in \mathbb{R}$ 和 $h > 0$,

$$P\left(\eta_n \sigma_n^{-1}\left(\tilde{S}_n - E(\tilde{S}_n) + \gamma_n\right) \in [x, x+h]\right) \sim \eta_n^{-1}(2\pi)^{-1/2} h,\ n \to \infty. \tag{2.38}$$

此外,

$$\sup_{n\geq 1,\, x\in\mathbb{R}} \eta_n P\left(\eta_n \sigma_n^{-1} \tilde{S}_n \in [x, x+1]\right) < \infty\,. \tag{2.39}$$

˜证明。设 $(Z_{ni},\, n \geq 1,\, i \geq 0)$ 是一组独立随机变量˜，使得 $Z_{ni}$ 的分布为 $G_{(A_i - A_{i-n})\theta_n}$ 按照 (2.18) 中的记号。则当 $n$ 足够大时,

$$\tilde{S}_n \stackrel{d}{=} A_0 \tilde{Z}_{n0} + (A_n - A_0)\tilde{Z}_{nn} + \sum_{i=[n^\beta t_1]+1}^{n-[n^\beta t_2]-1} A_i \tilde{Z}_{ni} + \sum_{i=n+[n^\beta t_3]+1}^{\infty} (A_i - A_{i-n})\tilde{Z}_{ni}\,. \tag{2.40}$$

证明可将附录中的界 (2.40)–(3.2) 应用于 ( $n = \infty$。对任意 $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\left| P\left(\tilde{S}_n - E(\tilde{S}_n) \leq z\sqrt{\mathrm{Var}(\tilde{S}_n)}\right) - \Phi(z) \right| \\ &\leq C_u \left(\mathrm{Var}(\tilde{S}_n)\right)^{-3/2} \sum_{i=0}^{\infty} |A_i - A_{i-n}|^3 E\left(|\tilde{Z}_{ni} - E\tilde{Z}_{ni}|^3\right),\, n \geq 1\,. \end{aligned} \tag{2.41}$$

由 (2.1) 立即可得

$$\sup_{i\geq 0} |A_i - A_{i-n}| = O(n^{1-\alpha})\,, \tag{2.42}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n \sup_{i\geq 0} |A_i - A_{i-n}| = 0\,.$$

由式（2.19）可得

$$E\tilde{Z}_{ni} \to 0,\quad \mathrm{Var}(\tilde{Z}_{ni}) \to \sigma_Z^2,\quad E\left(|\tilde{Z}_{ni} - E\tilde{Z}_{ni}|^3\right) \to \int_{-\infty}^{\infty} |z^3|\, F_Z(dz) \tag{2.43}$$

一致地成立于 $i$ 当 $n \to \infty$。由于这是引理 2.1的一个初等结论，即对任意 $\kappa > 1/\alpha$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |A_i - A_{i-n}|^\kappa = O\big(n^{\kappa+1-\kappa\alpha}\big), \tag{2.44}$$

由（2.41）可得

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|P\left(\tilde{S}_n - E(\tilde{S}_n) \le z\sqrt{\mathrm{Var}(\tilde{S}_n)}\right) - \Phi(z)\right| = O\left(n^{4-3\alpha}\left(\mathrm{Var}(\tilde{S}_n)\right)^{-3/2}\right).$$

再次使用（2.43）可得

$$\mathrm{Var}(\tilde{S}_n) \sim \sigma_n^2 - \sum_{i=1}^{3}\mathrm{Var}\left(\xi_n^i(t_i)\right) \sim C_\alpha\sigma_Z^2 n^{3-2\alpha}, \tag{2.45}$$

第二个等价关系则由引理 2.1中的若干结论推出。因此，

$$\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|P\left(\tilde{S}_n - E(\tilde{S}_n) \le z\sqrt{\mathrm{Var}(\tilde{S}_n)}\right) - \Phi(z)\right| = O(n^{-1/2}) = o\left(\eta_n^{-1}\right). \tag{2.46}$$

因此，对于 $x\in\mathbb{R}$ 和 $h>0$，当 $n\to\infty$时，

$$\begin{aligned}&P\left(\eta_n\sigma_n^{-1}\left(\tilde{S}_n - E(\tilde{S}_n) + \gamma_n\right) \in [x, x+h]\right)\\ &= o\left(\eta_n^{-1}\right) + \int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}\big[\mathrm{Var}(\tilde{S}_n)^{-1/2}(x\eta_n^{-1}\sigma_n - \gamma_n) \le z\\ &\qquad\qquad \le \mathrm{Var}(\tilde{S}_n)^{-1/2}((x+h)\eta_n^{-1}\sigma_n - \gamma_n)\big]\phi(z)\,dz,\end{aligned}$$

其中 $\phi$ 是标准正态密度。关于 $\gamma_n$ 和 $\eta_n$ 的假设以及（2.45）意味着积分区间收缩至原点。因此，上述积分渐近等价于 $\eta_n^{-1}\phi(0)h$，由此得到（2.38）。上述积分中 $\phi$ 的有界性可推出（2.39）。 □

现在我们更仔细地考察（2.33）、（2.34）和（2.35）中定义的过程。下一个引理描述了在与前一个引理相同的测度变换下，它们的增量的极限分布。

引理 2.3. 假设 $\theta_n\in\mathbb{R}$ 满足 $\theta_n = o\left(n^{-(1-\alpha)}\right)$。固定 $0\le s<t$，并考虑分布为

$$P(U_{ni}\in dx) = c_{ni}e^{\theta_n x}P\left(\xi_n^i(t) - \xi_n^i(s)\in dx\right),\ i=1,2,3,\ n\ge 1,$$

对于适当的 $c_{ni}$。然后，当 $n\to\infty$ 时，

$$n^{-(2-2\alpha)}\left(U_{n1} - E(U_{n1})\right) \Rightarrow N\left(0, K_1\sigma_Z^2\left(t^{3-2\alpha} - s^{3-2\alpha}\right)\right), \tag{2.47}$$

其中 $K_1$ 由 (2.24)给出，并且对于 $i=2,\ 3$，

$$n^{-(1-\alpha+\beta/2)}\left(U_{ni} - E(U_{ni})\right) \Rightarrow N\left(0, (1-\alpha)^{-2}\sigma_Z^2(t-s)\right). \tag{2.48}$$

证明。对于较大的 $n$,

$$U_{n1} \stackrel{d}{=} \sum_{i=[n^\beta s]+1}^{[n^\beta t]} A_i \tilde{Z}_{ni}$$

˜与前一个引理中的 $Z_{ni}$相同。也就是说， $U_{n1} - E(U_{n1})$ 是相互独立的零均值随机变量之和。由 (2.43) 和 (2.22) 可得,

$$\mathrm{Var}(U_{n1}) \sim \sigma_Z^2 \sum_{i=[n^\beta s]+1}^{[n^\beta t]} A_i^2 \sim K_1 \sigma_Z^2 n^{4-4\alpha} \left(t^{3-2\alpha} - s^{3-2\alpha}\right) ,$$

并利用 (2.43) 中的三阶矩界进行类似计算，可验证中心极限定理的林德伯格条件。因此，(2.47) 得证，而 (2.48) 的计算类似。

□

考虑如下定义的超越量

$$T_n^* = S_n - n\varepsilon,\ n \geq 1\,. \tag{2.49}$$

在事件 $E_0 = E_0(n,\varepsilon)$ 于 (1.5) 中发生的条件下，超越量非负。下一个引理给出了超越量与 (2.33)、(2.34) 和 (2.35) 中定义的过程的联合分布的联合弱极限定理。该联合分布是在给定 $E_0$的条件下计算的。

引理 2.4。设

$$\zeta_n = n\varepsilon/\sigma_n^2,\ n \geq 1\,, \tag{2.50}$$

在给定 $E_0$ 的条件下，当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
&\left(\zeta_n T_n^*,\ \left(n^{2\alpha-2}\left(\xi_n^1(t) - \sum_{i=1}^{[n^\beta t]} A_i \int_{-\infty}^{\infty} z\, G_{\zeta_n A_i}(dz)\right),\ t \geq 0\right),\right.\\
&\left(n^{\alpha-\beta/2-1}\left(\xi_n^2(t) - \sum_{i=n-[n^\beta t]}^{n-1} A_i \int_{-\infty}^{\infty} z\, G_{\zeta_n A_i}(dz)\right),\ t \geq 0\right),\\
&\left.\left(n^{\alpha-\beta/2-1}\left(\xi_n^3(t) - \sum_{i=n+1}^{n+[n^\beta t]} (A_i - A_{i-n}) \int_{-\infty}^{\infty} z\, G_{\zeta_n (A_i - A_{i-n})}(dz)\right),\ t \geq 0\right)\right)\\
&\Rightarrow \Big(T_0,\ \left(K_1^{1/2}\sigma_Z B_1(t^{3-2\alpha}),\ t \geq 0\right),\\
&\qquad \left((1-\alpha)^{-1}\sigma_Z B_2(t),\ t \geq 0\right), \left((1-\alpha)^{-1}\sigma_Z B_3(t),\ t \geq 0\right)\Big)\,,
\end{aligned}$$

在有限维分布意义下，其中 $T_0$ 是一个标准指数随机变量，且与相互独立的标准布朗运动 $B_1$、 $B_2$和$B_3$相互独立， $K_1$ 是 (2.24) 中的常数，且 $G_\theta$ 是 (2.18)中的指数倾斜分布。

证明。记

$$\psi_n(s) = \frac{\sigma_n^2}{n^2} \log E\left[\exp\left(s\frac{n}{\sigma_n^2}S_n\right)\right] = \frac{\sigma_n^2}{n^2}\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_Z\left(\sigma_n^{-2}n(A_j - A_{j-n})s\right)\,, \quad (2.51)$$

其中第二个等式由（2.26）得到。由（2.16）、（2.21）和（2.42），我们看到

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(s) = s^2/2 \quad (2.52)$$

在 $s$ 紧集上一致成立。此外，（2.51）中的级数可以逐项求导，由（2.17）、（2.21）和（2.42）可得

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n'(s) = s, \quad (2.53)$$

在紧集上一致成立。由于 $\psi_n'$ 递增且连续，当$n$ 充分大时，存在唯一的 $\tau_n > 0$ 使得

$$\psi_n'(\tau_n) = \varepsilon\,. \quad (2.54)$$

显然，当 $n \to \infty$时，$\tau_n \to \varepsilon$。记

$$\theta_n = \sigma_n^{-2}n\tau_n,\ n \geq 1\,, \quad (2.55)$$

我们有

$$\left(E\left(e^{\theta_n S_n}\right)\right)^{-1} E\left(S_n e^{\theta_n S_n}\right) = n\varepsilon. \quad (2.56)$$

固定 $k \geq 1$，对于每个 $i = 1,\ 2,\ 3$，固定点 $0 = t_{i0} < t_{i1} < \ldots < t_{ik}$。记

$$\bar{S}_n = S_n - \sum_{i=1}^{3}\xi_n^i(t_{ik}),\ n \geq 1\,.$$

设 $U_{nij},\ n \geq 1,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, \ldots, k,\ S_n,\ n \geq 1$ 是独立随机变量，且

$$\begin{aligned} &P\left(U_{nij} \in dx\right) \\ &= \left(E\left(e^{\theta_n(\xi_n^i(t_{ij}) - \xi_n^i(t_{i\,j-1}))}\right)\right)^{-1} e^{\theta_n x} P\left(\xi_n^i(t_{ij}) - \xi_n^i(t_{i\,j-1}) \in dx\right)\,, \end{aligned}$$

and

$$P\left(\tilde{S}_n \in dx\right) = \left(E\left(e^{\theta_n \bar{S}_n}\right)\right)^{-1} e^{\theta_n x} P\left(\bar{S}_n \in dx\right)$$

对于 $n \geq 1$、$i = 1$、2、3 和 $j = 1$、.....、$k$。令

$$\mu_{nij} = E\left(U_{nij}\right),\ \mu_n = E(\tilde{S}_n). \quad (2.57)$$

由（2.56）可得

$$\mu_n + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{k} \mu_{nij} = n\varepsilon,\ n \geq 1\,. \tag{2.58}$$

设 $t > 0$ 且 $(\alpha_{ij}) \subset \mathbb{R}_\circ$。我们有

$$P\Big(\big\{T_n^* > t\sigma_n^2/n\varepsilon\big\} \cap \Big(\bigcap_{j=1}^{k}\big\{n^{2\alpha-2}\left(\xi_n^1(t_{1j}) - \xi_n^1(t_{1\,j-1}) - \mu_{n1j}\right) > \alpha_{1j}\big\}\Big)$$
$$\cap \Big(\bigcap_{2\leq i\leq 3,\, 1\leq j\leq k}\big\{n^{\alpha-\beta/2-1}\left(\xi_n^i(t_{ij}) - \xi_n^i(t_{i\,j-1}) - \mu_{nij}\right) > \alpha_{ij}\big\}\Big)\Big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{3k+1}} \mathbf{1}\Big(x > n\varepsilon + t\sigma_n^2/n\varepsilon - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{k} s_{ij}\Big)$$
$$\mathbf{1}\left(s_{1j} > n^{2-2\alpha}\alpha_{1j} + \mu_{n1j}, 1 \leq j \leq k\right)$$
$$\mathbf{1}\Big(s_{ij} > n^{1-\alpha+\beta/2}\alpha_{ij} + \mu_{nij}\,, i = 2,3\,, j = 1,\ldots,k\Big)$$
$$P(S_n \in dx)\prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{k} P\big(\xi_n^i(t_{ij}) - \xi_n^i(t_{i\,j-1}) \in ds_{ij}\big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{3k+1}} \mathbf{1}\Big(x > n\varepsilon + t\sigma_n^2/n\varepsilon - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{k} s_{ij}\Big)$$
$$\mathbf{1}\left(s_{1j} > n^{2-2\alpha}\alpha_{1j} + \mu_{n1j}\,, 1 \leq j \leq k\right)$$
$$\mathbf{1}\Big(s_{ij} > n^{1-\alpha+\beta/2}\alpha_{ij} + \mu_{nij}\,, i = 2,3\,, 1 \leq j \leq k\Big)$$
$$\exp\Big(-\theta_n x - \theta_n \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{k} s_{ij}\Big) P\left(\tilde{S}_n \in dx\right)$$
$$E\left(e^{\theta_n S_n}\right)\prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{k} P(U_{nij} \in ds_{ij})$$

$$= c_n \int_{\mathbb{R}^{3k}} \mathbf{1}\big(\min_{i,j}(u_{ij} - \alpha_{ij}) > 0\big)\prod_{j=1}^{k} P\left(n^{2\alpha-2}\big(U_{n1j} - \mu_{n1j}\big) \in du_{1j}\right)$$
$$\prod_{i=2}^{3}\prod_{j=1}^{k} P\left(n^{\alpha-\beta/2-1}\big(U_{nij} - \mu_{nij}\big) \in du_{ij}\right)$$
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-z}\mathbf{1}\big(z > t\theta_n\sigma_n^2/n\varepsilon\big) P\Big(\theta_n\big(\tilde{S}_n - \mu_n + \gamma_n(u_{11},\ldots,u_{3k})\big) \in dz\Big)\,,$$

with

$$c_n = e^{-\theta_n n\varepsilon} E\left(e^{\theta_n S_n}\right) \tag{2.59}$$

and

$$\gamma_n(u_{11},\dots,u_{3k}) = n^{2-2\alpha}\sum_{j=1}^{k} u_{1j} + n^{1-\alpha+\beta/2}\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=1}^{k} u_{ij}\,.$$

设 $\theta_n$ 如上，并且 $\eta_n = \sigma_n\theta_n$。对于 $n \geq 1$，我们引入记号

$$\begin{aligned} &f_n(u_{11},\dots,u_{3k}) \\ =&\eta_n\int_0^\infty e^{-z}\mathbf{1}\big(z > t\theta_n\sigma_n^2/n\varepsilon\big)P\Big(\theta_n\big(\tilde{S}_n - \mu_n + \gamma_n(u_{11},\dots,u_{3k})\big)\in dz\Big)\,. \end{aligned}$$

固定（$u_{ij}$），并令 $u_{ij}^{(n)} \to u_{ij}$ 当 $n \to \infty$ 对所有 $i$时，$j$。记 $\gamma_n = \gamma_n\big(u_{11}^{(n)}$，…，$u_{3k}^{(n)}\big)$。由于 $\theta_n$ 和 $\eta_n$ 已定义，我们将引理2.2 应用于此$\gamma_n$。容易验证，引理的假设均得到满足。由于 $t\theta_n\sigma_n^2/n\varepsilon \to t$，由（2.38）可得，对所有固定的 $T > t$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} e^{-z}\mathbf{1}\big(t\theta_n\sigma_n^2/n\varepsilon < z \leq T\big)P\Big(\theta_n\big(\tilde{S}_n - \mu_n + \gamma_n\big)\in dz\Big) \\ &\sim \eta_n^{-1}(2\pi)^{-1/2}\int_t^T e^{-z}\,dz, \end{aligned}$$

并且由（2.39）可得

$$\lim_{T\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\eta_n\int_{\mathbb{R}} e^{-z}\mathbf{1}\big(z > T\big)P\Big(\theta_n\big(\tilde{S}_n - \mu_n + \gamma_n\big)\in dz\Big) = 0\,,$$

这表明

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(u_{11}^{(n)},\dots,u_{3k}^{(n)}\right) = (2\pi)^{-1/2}e^{-t}\,.$$

再次应用（2.39）可得

$$\sup_{\{u_{ij}\}\subset\mathbb{R}} f_n(u_{11},\dots,u_{3k}) < \infty\,.$$

由引理2.3 和有界收敛定理立即可得

$$\begin{aligned} &E\Big[f\big(n^{2\alpha-2}(U_{n11}-\mu_{n11}),\dots,n^{\alpha-\beta/2-1}(U_{n3k}-\mu_{n3k})\big) \\ &\mathbf{1}\Big(n^{2\alpha-2}(U_{n1j}-\mu_{n1j}) > \alpha_{1j},\ n^{\alpha-\beta/2-1}(U_{nij}-\mu_{nij}) > \alpha_{ij},\ i=2,3, \\ &\qquad\qquad j=1,\dots,k,\Big)\Big] \\ \to&(2\pi)^{-1/2}P\left(T_0 > t\,, G_{ij} > \alpha_{ij} \text{ for all } i,j\right)\,, \end{aligned} \tag{2.60}$$

其中 $T_0$ 标准指数分布，且（$G_{ij}$：$i$ = 1、2、3、$j$ = 1、……、$k$）为相互独立的零均值高斯随机变量，并且与 $T_0$ 相互独立，其中

$$\mathrm{Var}(G_{1j}) = K_1\sigma_Z^2\left(t_{1j}^{3-2\alpha} - t_{1\,j-1}^{3-2\alpha}\right),\ 1 \leq j \leq k\,,$$

并且对于 $i = 2$、3,

$$\mathrm{Var}(G_{ij}) = (1-\alpha)^{-2}\sigma_Z^2(t_{ij} - t_{i,j-1}),\ 1 \le j \le k\,.$$

验证上述收敛的一种简单方法是采用斯科罗霍德表示，并将引理 2.3 中的弱收敛替换为几乎处处收敛。

注意，对所有 2.60）使用 $t = 0$ 和 $\alpha_{ij} = -\infty$， $i$时， $j$ 可知

$$P(E_0) \sim (2\pi)^{-1/2}c_n/\eta_n = (2\pi)^{-1/2}e^{-\theta_n n\varepsilon}E\left(e^{\theta_n S_n}\right)/(\sigma_n\theta_n). \tag{2.61}$$

将（2.60）除以（2.61），即可得到引理的陈述，但中心化项可能有所不同。为完成证明，只需证明当 $n \to \infty$时，对于 $j = 1$, ....., $k$,

$$\mu_{n1j} = \sum_{i=[n^\beta t_{1j-1}]+1}^{[n^\beta t_{1j}]} A_i \int_{-\infty}^{\infty} z\, G_{\zeta_n A_i}(dz) + o\left(n^{2-2\alpha}\right)\,, \tag{2.62}$$

$$\mu_{n2j} = \sum_{i=n-[n^\beta t_{nj-1}]}^{n-[n^\beta t_{nj}]} A_i \int_{-\infty}^{\infty} z\, G_{\zeta_n A_i}(dz) + o\left(n^{1+\beta/2-\alpha}\right)\,, \tag{2.63}$$

$$\mu_{n3j} = \sum_{i=n+[n^\beta t_{nj-1}]}^{n+[n^\beta t_{nj}]} (A_i - A_{i-n}) \int_{-\infty}^{\infty} z\, G_{\zeta_n(A_i - A_{i-n})}(dz) + o\left(n^{1+\beta/2-\alpha}\right)\,. \tag{2.64}$$

为简化记号，我们对 $j = 1$的情形证明这些结论。对于 $\theta_n$ 如˜（2.55）中所示，设（$Z_{ni}$, $n \ge 1$, $i \ge 0$）为一组独立随机变量˜，使得 $Z_{ni}$ 的分布为 $G_{(A_i - A_{i-n})\ \theta_n}$。由于 $\theta_n A_i$ 和 $\zeta_n A_i$ 在 $i \le n^\beta t_{11}$上一致收敛于零，我们可以利用（2.19）写成

$$\begin{aligned}\mu_{n11} &= \sum_{i=1}^{[n^\beta t_{11}]} A_i E\left(\tilde{Z}_{ni}\right) = \sum_{i=1}^{[n^\beta t_{11}]} A_i \int_{-\infty}^{\infty} z\, G_{\theta_n A_i}(dz) \\ &= \sum_{i=1}^{[n^\beta t_{11}]} A_i \int_{-\infty}^{\infty} z\, G_{\zeta_n A_i}(dz) + o\left(\zeta_n \sum_{i=1}^{[n^\beta t_{11}]} A_i^2\right)\,.\end{aligned}$$

由（2.21）和（2.22）可知

$$\zeta_n \sum_{i=1}^{[n^\beta t_{11}]} A_i^2 = o\left(n^{2-2\alpha}\right)\,,$$

并且我们得到（2.62）（当 $j = 1$时）。

对于（2.63），当 $j = 1$ 时，由（2.17）可知,

$$E\left(\tilde{Z}_{ni}\right) = \theta_n(A_i - A_{i-n})\sigma_Z^2 + O\left(\theta_n^2(A_i - A_{i-n})^2\right)\,, \tag{2.65}$$

关于 $i \geq 0$ 一致地，当 $n \to \infty$ 时。因此，

$$\mu_{n21} = \sigma_Z^2 \sigma_n^{-2} n\tau_n \sum_{i=n-[n^\beta t_{21}]}^{n-1} A_i^2 + O\left(\theta_n^2 \sum_{i=n-[n^\beta t_{21}]}^{n-1} A_i^3\right).$$

由引理 2.1 可知

$$\theta_n^2 \sum_{i=n-[n^\beta t_{21}]}^{n-1} A_i^3 = O\left(n^{\alpha+\beta-1}\right) = o\left(n^{1-\alpha+\beta/2}\right).$$

因此，

$$\mu_{n21} = \sigma_Z^2 \sigma_n^{-2} n\tau_n \sum_{i=n-[n^\beta t_{21}]}^{n-1} A_i^2 + o\left(n^{1-\alpha+\beta/2}\right) \tag{2.66}$$

并且，类似地，

$$\sum_{i=n-[n^\beta t_{21}]}^{n-1} A_i \int_{-\infty}^{\infty} z\, G_{\zeta_n A_i}(dz) = \sigma_Z^2 \zeta_n \sum_{i=n-[n^\beta t_{21}]}^{n-1} A_i^2 + o\left(n^{1-\alpha+\beta/2}\right).$$

再次应用引理 2.1 可知，对于（2.63），我们只需证明

$$\tau_n = \varepsilon + o\left(n^{1-\alpha-\beta/2}\right), n \to \infty. \tag{2.67}$$

然而，由（2.19），

$$\psi_n'(s) = s + O\left(n\sigma_n^{-4} \sum_{j=0}^{\infty} (A_j - A_{j-n})^3\right),$$

对于 $s$，在紧集上一致成立。利用这一点以及（2.44），我们得到

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \psi_n'(\tau_n) \\
&= \tau_n + O\left(n\sigma_n^{-4} \sum_{j=0}^{\infty} (A_j - A_{j-n})^3\right) \\
&= \tau_n + O(n^{\alpha-1}) = \tau_n + o\left(n^{1-\alpha-\beta/2}\right).
\end{aligned}$$

由此得到（2.67），进而得到（2.63），其中 $j = 1$。证明（2.64）的方法类似。 □

到目前为止证明的所有结论都不需要本节开头所述的附加假设。这些假设现在开始发挥作用。

接下来的几个引理需要引入额外的记号，以便突出各个噪声变量对 $S_n$ 的贡献。对于 $n \geq 1$ 和 $i$、$j \geq 0$、$i \neq j$，我们令

$$S'_n(i) = S_n - (A_i - A_{i-n})Z_{n-i-1}\,,$$
$$S'_n(i,j) = S_n - (A_i - A_{i-n})Z_{n-i-1} - (A_j - A_{j-n})Z_{n-j-1}\,,$$

并且，令 $\zeta_n$ 由（2.50）给出，我们令 $\hat{}S_n$、$\hat{}S_{ni}$、$\hat{}S_n(i,\ j)$为具有如下分布的随机变量

$$P(\hat{S}_n \in ds) \propto e^{\zeta_n s} P(S_n \in ds)\,,$$
$$P(\hat{S}_n(i) \in ds) \propto e^{\zeta_n s} P(S'_n(i) \in ds)\,,$$
$$P(\hat{S}_n(i,j) \in ds) \propto e^{\zeta_n s} P(S'_n(i,j) \in ds)\,.$$

分别用 $\phi_n$、$\phi_{ni}$ 和 $\phi_{nij}$ 表示 $\sigma_n^{-1}(\hat{}S_n - n\varepsilon)$、$\sigma_n^{-1}(\hat{}S_n(i) - n\varepsilon)$ 和 $\sigma_n^{-1}(\hat{}S_n(i,j) - n\varepsilon)$ 的特征函数。对于 $\mu \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma \geq 0$，我们用 $\phi_G(\mu;\ \sigma^2;\ \cdot)$ 表示 $N(\mu, \sigma^2)$ 的特征函数。

引理 2.5。设 $\kappa$ 由 (2.4) 给出，并假设 (2.5) 成立。则下列结论关于 $t \in \mathbb{R}$一致成立：

$$|\phi_n(t) - \phi_G(0;1;t)| = O\left(n^{1/2-\kappa(1-\alpha)}(1+|t|)^{\kappa+1}\right)\,, \tag{2.68}$$

$$\sup_{i\geq 0}\left|\phi_{ni}(t) - \phi_G\left(\sigma_n^{-1}n\varepsilon(\lambda_{ni}-1);\lambda_{ni};t\right)\right| = O\left(n^{1/2-\kappa(1-\alpha)}(1+|t|)^{\kappa+1}\right)\,, \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{\substack{i,j\geq 0\\ i\neq j}}\left|\phi_{nij}(t) - \phi_G\left(\sigma_n^{-1}n\varepsilon(\lambda_{nij}-1);\lambda_{nij};t\right)\right| \\ &= O\left(n^{1/2-\kappa(1-\alpha)}(1+|t|)^{\kappa+1}\right)\,,\end{aligned} \tag{2.70}$$

其中，对于 $n \geq 1$ 和 $i$、$j \geq 0$、$i \neq j$，我们定义

$$\lambda_{ni} = 1 - \frac{\sigma_Z^2}{\sigma_n^2}(A_i - A_{i-n})^2,\quad \lambda_{nij} = 1 - \frac{\sigma_Z^2}{\sigma_n^2}\left[(A_i - A_{i-n})^2 + (A_j - A_{j-n})^2\right]\,.$$

证明。由（2.5）可直接得出，对于每个 $1 \leq i \leq \kappa$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\delta z}\,F_z(dz)\right)^{-1}\int_{\mathbb{R}} z^i e^{\delta z}\,F_z(dz) = \sigma_Z^i E\left[(G+\delta\sigma_Z)^i\right] + O\left(|\delta|^{\kappa-i+1}\right) \tag{2.71}$$

其中 $\delta \to 0$，$G$ 是一个标准高斯随机变量。

设 $\hat{Z}_{ni}$：$n \geq 1, i \geq 0$) 是一族独立随机变量，且每个 $Z_{ni} \sim G_{(A_i - A_{i-n})\zeta_n}$，因此对于 $n \geq 1$和 $i, j \geq 0, i \neq j$，有

$$\hat{S}_n \stackrel{d}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(A_k - A_{k-n})\,\hat{Z}_{nk}\,,$$

$$\hat{S}_n(i) \stackrel{d}{=} \sum_{k\in\{0,1,2,\ldots\}\setminus\{i\}} (A_k - A_{k-n})\,\hat{Z}_{nk}\,,$$

$$\hat{S}_n(i,j) \stackrel{d}{=} \sum_{k\in\{0,1,2,\ldots\}\setminus\{i,j\}} (A_k - A_{k-n})\,\hat{Z}_{nk}\,.$$

现在设 $(G_{ni}:\ n\geq 1, i\geq 0)$ 是一组独立随机变量，且也独立于 $(Z_{ni}:\ n\geq 1,\ i\geq 0)$，其中

$$G_{ni} \sim N\left((A_i - A_{i-n})\zeta_n\sigma_Z^2\,,\sigma_Z^2\right)\,,\ \text{for all } n\geq 1,\, i\geq 0\,.$$

由引理 2.1 和（2.42），可将（2.71）重新表述为

$$E\left(\hat{Z}^i_{nj}\right) - E\left(G^i_{nj}\right) = O\left(|A_j - A_{j-n}|^{\kappa-i+1} n^{-2(1-\alpha)(\kappa-i+1)}\right) \tag{2.72}$$

关于 $j\geq 0$ 和 $1\leq i\leq\kappa$ 一致成立。对于固定的 $t\in\mathbb{R}$，我们使用望远镜求和，写成

$$\begin{aligned}
&\left|E\exp\left\{i\left(t\sigma_n^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(A_j - A_{j-n})G_{nj}\right)\right\} - E\exp\left\{i\left(t\sigma_n^{-1}\hat{S}_n\right)\right\}\right| \qquad (2.73)\\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|E\exp\left\{i\left(t\sigma_n^{-1}\left(\sum_{k=0}^{j-1}(A_j - A_{j-n})\hat{Z}_{nj} + \sum_{k=j}^{\infty}(A_j - A_{j-n})G_{nj}\right)\right)\right\}\right.\\
&\left.-E\exp\left\{i\left(t\sigma_n^{-1}\left(\sum_{k=0}^{j}(A_j - A_{j-n})\hat{Z}_{nj} + \sum_{k=j+1}^{\infty}(A_j - A_{j-n})G_{nj}\right)\right)\right\}\right|\,.
\end{aligned}$$

固定 $j\geq 0$ 并记

$$\begin{aligned}
U &= t\sigma_n^{-1}\left(\sum_{k=0}^{j-1}(A_j - A_{j-n})\hat{Z}_{nj} + \sum_{k=j+1}^{\infty}(A_j - A_{j-n})G_{nj}\right)\,,\\
V &= t\sigma_n^{-1}(A_j - A_{j-n})G_{nj}\,,
\end{aligned}$$

因此，在 $U$ 附近展开泰勒级数可得，

$$\begin{aligned}
&E\exp\left\{i\left(t\sigma_n^{-1}\left(\sum_{k=0}^{j-1}(A_j - A_{j-n})\hat{Z}_{nj} + \sum_{k=j}^{\infty}(A_j - A_{j-n})G_{nj}\right)\right)\right\}\\
&= Ee^{i(U+V)} = \sum_{m=0}^{\kappa}\frac{i^m}{m!}E\left(V^m\right)Ee^{iU} + R_1\,,
\end{aligned}$$

其中 $|R_1|\leq E(|V|^{\kappa+1})/(\kappa+1)!$。类似地，

$$\begin{aligned}
&E\exp\left\{i\left(t\sigma_n^{-1}\left(\sum_{k=0}^{j}(A_j - A_{j-n})\hat{Z}_{nj} + \sum_{k=j+1}^{\infty}(A_j - A_{j-n})G_{nj}\right)\right)\right\}\\
&= \sum_{m=0}^{\kappa}\frac{i^m}{m!}E\left(W^m\right)Ee^{iU} + R_2\,,
\end{aligned}$$

其中 $|R_2| \le E(|W|^{\kappa+1})/(\kappa+1)!$，其中

$$W = (A_j - A_{j-n})\hat{Z}_{nj}\,.$$

我们得出

$$\begin{aligned}
&\left| E\exp\left\{ i\left( t\sigma_n^{-1}\left( \sum_{k=0}^{j-1}(A_j - A_{j-n})\hat{Z}_{nj} + \sum_{k=j}^{\infty}(A_j - A_{j-n})G_{nj} \right)\right)\right\} \right. \\
&\quad \left. - E\exp\left\{ i\left( t\sigma_n^{-1}\left( \sum_{k=0}^{j}(A_j - A_{j-n})\hat{Z}_{nj} + \sum_{k=j+1}^{\infty}(A_j - A_{j-n})G_{nj} \right)\right)\right\} \right| \\
&\le \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{|t|^i}{i!} \left| (A_j - A_{j-n})^i \sigma_n^{-i} E\left( \hat{Z}_{nj}^i - G_{nj}^i \right) \right| \\
&\quad + \frac{|t|^{\kappa+1}}{(\kappa+1)!} |A_j - A_{j-n}|^{\kappa+1} \sigma_n^{-(\kappa+1)} E\left( |G_{nj}|^{\kappa+1} + |\hat{Z}_{nj}|^{\kappa+1} \right)\,. \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

注意，由（2.44）和引理 2.1，

$$\begin{aligned}
&\sigma_n^{-(\kappa+1)} \sum_{j=0}^{\infty} |A_j - A_{j-n}|^{\kappa+1} E\left( |G_{nj}|^{\kappa+1} + |\tilde{Z}_{nj}|^{\kappa+1} \right) \\
&= O\left( n^{-(\kappa-1)/2} \right) = o\left( n^{1/2-\kappa(1-\alpha)} \right)\,.
\end{aligned}$$

对于 $1 \le i \le \kappa$，我们还利用（2.72）来写出

$$\begin{aligned}
&\sigma_n^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} \left| (A_j - A_{j-n})^i E\left( \tilde{Z}_{nj}^i - G_{nj}^i \right) \right| \\
&= O\left( n^{-\kappa(1-\alpha)+\alpha-i(\alpha-1/2)} \right) = O\left( n^{1/2-\kappa(1-\alpha)} \right)\,.
\end{aligned}$$

将这些界代入（2.74）可得

$$E\left( e^{\iota t\sigma_n^{-1}\tilde{S}_n} \right) = \phi_G\left( \sigma_n^{-1} n\varepsilon; 1; t \right) + O\left( n^{1/2-\kappa(1-\alpha)} \left( 1 + |t|^{\kappa+1} \right) \right)$$

对 $t \in \mathbb{R}$一致成立，这等价于（2.68）。证明（2.69）和（2.70）的论证相同。□

根据假设（2.2），当 $n$ 足够大时，随机变量 $\sigma_n^{-1}(\hat{}S_n - n\varepsilon)$、$\sigma_n^{-1}(\hat{}S_n(i) - n\varepsilon)$ 和 $\sigma_n^{-1}(\hat{}S_n(i,\ j) - n\varepsilon)$ 都有密度，分别记为 $f_n$，$f_{ni}$ 和 $f_{nij}$。

引理 2.6。假设 (2.5) 和(2.2) 成立。当 $n$足够大时，密度$f_{ni}$ 和 $f_{nij}$ 均二阶可微。此外，当 $n \to \infty$时，

$$f_{ni}(0) = (2\pi)^{-1/2} + o\left( n^{1-2\alpha} \right)\,, \qquad (2.75)$$

$$f'_{ni}(0) = o\left( n^{1/2-\alpha} \right) \qquad (2.76)$$

关于 $i$ 一致，且对某个 $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\sup\{|f''_{ni}(x)| : n \geq n_0,\, i \geq 0,\, x \in \mathbb{R}\} < \infty\,. \tag{2.77}$$

若以 $f_{nij}$、$i < j$ 替换 $f_{ni}$，这三个结论也都成立。最后，当 $n \to \infty$ 时，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) - (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} \right| = o\left(n^{1-2\alpha}\right)\,. \tag{2.78}$$

证明。我们先证明（2.78），由密度反演公式可知，只需证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t) - \phi_G(0;1;t)|\, dt = o\left(n^{1-2\alpha}\right)\,.$$

由引理 2.5 和（2.4），

$$\int_{-\log n}^{\log n} |\phi_n(t) - \phi_G(0;1;t)|\, dt = O\left(n^{1/2-\kappa(1-\alpha)}(\log n)^{\kappa+2}\right) = o\left(n^{1-2\alpha}\right)\,.$$

此外，

$$\int_{[-\log n, \log n]^c} \phi_G(0;1;t)\, dt = O\left(e^{-(\log n)^2/2}\right) = o\left(n^{1-2\alpha}\right)\,,$$

因此，只需证明（2.78）即可

$$\int_{[-\log n, \log n]^c} |\phi_n(t)|\, dt = o\left(n^{1-2\alpha}\right)\,. \tag{2.79}$$

取上述的（$\hat{}Z_{ni}$：$n \geq 1, i \geq 0$），令

$$U_{ni} = \sigma_n^{-1}(A_i - A_{i-n})\left[\hat{Z}_{ni} - E(\hat{Z}_{ni})\right],\, n \geq 1,\, i \geq 0\,,$$

从而

$$|\phi_n(t)| = \prod_{i=0}^{\infty} \left|E\left(e^{\iota t U_{ni}}\right)\right|\,, n \geq 1, t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.80}$$

Set

$$H(x,t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{xz} f_Z(z)\, dz\right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+\iota t)z} f_Z(z)\, dz,\, (x,t) \in \mathbb{R}^2\,,$$

对于任意固定的 $x$，它都是一个特征函数。因此，对于任意 $x \in \mathbb{R}$，有$\partial|H(x,t)|/\partial t|_{t=0} \leq 0$。此外，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}|H(0,t)|\Big|_{t=0} = -\sigma_Z^2 < 0$$

由二阶偏导数的连续性可知，存在$\delta_0 > 0$ 使得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}|H(x,t)|\Big| < 0 \text{ whenever } 0 \le |t|, |x| \le \delta_0.$$

这意味着我们还有

$$\frac{\partial}{\partial t}|H(x,t)|\Big| \le 0 \text{ whenever } 0 \le |t|, |x| \le \delta_0. \tag{2.81}$$

我们可以并且将选取 $\delta_0 \in (0, \theta_0]$，满足 $\theta_0$ 如式 (2.2) 所示。由式 (2.2)，我们可以利用 (3.3) 得出

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|x|\le\delta_0} |H(x,t)| = 0\,.$$

因此，存在足够大的 $M > 0$，使得

$$\sup_{t>M, |x|\le\delta_0} |H(x,t)| < 1.$$

由于 $H$ 的连续性和紧致性，我们有

$$\sup_{\delta_0\le t\le M, |x|\le\delta_0} |H(x,t)| < 1,$$

由此可得

$$\eta = \sup_{t\ge\delta_0, |x|\le\delta_0} |H(x,t)| < 1\,.$$

连续性论证还表明，存在 $\delta_1 \in (0, \delta_0]$，使得

$$\min_{|x|\le\delta_0} |H(x,\delta_1)| \ge \eta\,.$$

因此，对于 $|x| \le \delta_0$ 和 $0 \le t \le \delta_1$，(2.81) 表明

$$|H(x,t)| \ge |H(x,\delta_1)| \ge \eta \ge \sup_{s\ge\delta_0} |H(x,s)|\,.$$

由于根据 (2.81) 还有

$$|H(x,t)| = \sup_{s\in[t,\delta_0]} |H(x,s)|\,,$$

我们得出

$$|H(x,t)| = \sup_{s\ge t} |H(x,s)|,\ |x| \le \delta_0,\ 0 \le t \le \delta_1\,. \tag{2.82}$$

由（2.80）

$$\begin{aligned} |\phi_n(t)| &\le \left|E(e^{\imath t U_{nn}})\right| \prod_{i=[n/2]}^{n-1} \left|E(e^{\imath t U_{ni}})\right| \\ &= \left|E(e^{\imath t U_{nn}})\right| \prod_{i=[n/2]}^{n-1} \left|H\left(\zeta_n A_i, \sigma_n^{-1} A_i t\right)\right|\,. \end{aligned} \tag{2.83}$$

由引理 2.1 可知，存在 $s_0 > 0$ 使得对所有 $n$ 足够大的情形，

$$A_i \geq s_0 \sigma_n n^{-1/2},\ [n/2] \leq i \leq n-1\,.$$

因此，当 $n$ 足够大且 $t \geq \log n$ 时，(2.82) 表明

$$\prod_{i=[n/2]}^{n-1} \left|H\left(\zeta_n A_i, \sigma_n^{-1} A_i t\right)\right| \leq \prod_{i=[n/2]}^{n-1} \left|H\left(\zeta_n A_i, s_0 n^{-1/2} \log n\right)\right|\,.$$

由于 $H$ 的任意偏导数在紧集上都有界，我们可以利用界 (3.4) 得出存在 $s_1 > 0$ 使得

$$\sup_{|x| \leq \delta_0} |H(x,t)| \leq (1 - s_1 t^2)^{1/2},\ 0 \leq t \leq 1\,.$$

因此，存在 $s_2 > 0$，使得对所有充分大的 $n$ 以及所有满足 $t \geq \log n$ 的情形，我们都有

$$\prod_{i=[n/2]}^{n-1} \left|H\left(\zeta_n A_i, \sigma_n^{-1} A_i t\right)\right| \leq \left(1 - s_0^2 s_1 n^{-1} (\log n)^2\right)^{n/4} = O\left(e^{-s_2 (\log n)^2}\right)\,.$$

将此界代入 (2.83)，并利用 (2.2)，得到

$$\begin{aligned}\int_{\log n}^{\infty} |\phi_n(t)|\, dt &= O\left(e^{-s_2 (\log n)^2}\right) \int_{\log n}^{\infty} \left|E\left(e^{itU_{nn}}\right)\right| dt \\ &= O\left(n^{1/2} e^{-s_2 (\log n)^2}\right) = o\left(n^{1-2\alpha}\right)\,.\end{aligned}$$

由于我们可以从 $t$ 切换到 $-t$，因此得到 (2.79)，从而证明了 (2.78)。

借助 (2.69) 进行类似计算可得

$$f_{ni}(0) = (2\pi\lambda_{ni})^{-1/2} \exp\left(-\sigma_n^{-2} n^2 \varepsilon^2 (\lambda_{ni} - 1)^2 / 2\lambda_{ni}\right) + o\left(n^{1-2\alpha}\right)\,,$$

关于 $i \geq 0$ 一致地。由于 $\lambda_{ni} - 1 = O(1/n)$ 关于 $i \geq 0$ 一致地，因此可得

$$\begin{aligned}\lambda_{ni}^{-1/2} \exp\left(-\sigma_n^{-2} n^2 \varepsilon^2 (\lambda_{ni} - 1)^2 / 2\lambda_{ni}\right) &= 1 + O\left(n^{-1} + \sigma_n^{-2}\right) \\ &= 1 + o\left(n^{1-2\alpha}\right)\,,\end{aligned}$$

对 $i \geq 0$一致地，这就证明了 (2.75)。对于 (2.77)，我们写作

$$f''_{nk}(x) = -(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} t^2 \phi_{nk}(t)\, dt$$

并重复上述在证明 (2.78) 中使用的论证，应用 (2.69) 以及假设 (2.2) 的全部效力。

最后，对于（2.76），我们使用恒等式

$$f'_{nk}(0) = -i(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} t \phi_{nk}(t)\, dt.$$

由于

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} t\,\phi_G\left(\sigma_n^{-1}n\varepsilon(\lambda_{nk}-1);\lambda_{nk};t\right)dt\right| = O\left(\sigma_n^{-1}\right) = o\left(n^{1/2-\alpha}\right),$$

关于 $k \geq 0$, (2.76) 一致成立。

将 $f_{ni}$ 替换为 $f_{nij}$ 的论证类似。证明至此完成。 □

下一个引理讨论关于 $E_0$ 的某些条件期望；其陈述应与 (2.61) 进行比较。

引理 2.7。 假设 (2.5) 和(2.2) 成立。那么

$$E\left(Z_{n-i-1}\mathbf{1}(E_0)\right) = K_n\left[\int_{-\infty}^{\infty} z\,G_{\zeta_n(A_i-A_{i-n})}(dz) + o\left(\zeta_n^{-1}\sigma_n^{-2}|A_i-A_{i-n}|\right)\right] \tag{2.84}$$

*and*

$$\begin{aligned} &E\left(Z_{n-i-1}Z_{n-j-1}\mathbf{1}(E_0)\right) \\ &= K_n\left(\int_{-\infty}^{\infty} z_1\,G_{\zeta_n(A_i-A_{i-n})}(dz_1)\int_{-\infty}^{\infty} z_2\,G_{\zeta_n(A_i-A_{i-n})}(dz_2)\right. \\ &\left. + o\left(\sigma_n^{-2}|(A_i-A_{i-n})(A_j-A_{j-n})|\right)\right),\ n\to\infty, \end{aligned} \tag{2.85}$$

对于 $i$、$j \geq 0$，在 $i \neq j$ 的条件下一致成立，其中

$$K_n = (2\pi)^{-1/2}\zeta_n^{-1}\sigma_n^{-1}e^{-n\varepsilon\zeta_n}E\left(e^{\zeta_n S_n}\right),\ n \geq 1\,. \tag{2.86}$$

证明。 我们只证明 (2.85)；(2.84) 的证明类似且更简单。记

$$\begin{aligned} &E\left(Z_{n-i-1}Z_{n-j-1}\mathbf{1}(E_0)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z_1\,F_Z(dz_1)\int_{-\infty}^{\infty} z_2\,F_Z(dz_2) \\ &\qquad P\left(S'_n(i,j) \geq n\varepsilon-(A_i-A_{i-n})z_1-(A_j-A_{j-n})z_2\right) \\ &= \sigma_n^{-1}E\left(e^{\zeta_n S'_n(i,j)}\right)\int_{-\infty}^{\infty} z_1\,F_Z(dz_1)\int_{-\infty}^{\infty} z_2\,F_Z(dz_2) \\ &\qquad \int_{n\varepsilon-(A_i-A_{i-n})z_1-(A_j-A_{j-n})z_2}^{\infty} f_{nij}\big(s-n\varepsilon)/\sigma_n\big)e^{-\zeta_n s}\,ds. \end{aligned}$$

我们采用约定 $\int_a^b \equiv -\int_b^a$，并记

$$\begin{aligned} c_{nij} &= \zeta_n^{-1}\sigma_n^{-1}e^{-n\varepsilon\zeta_n}E\left(e^{\zeta_n S'_n(i,j)}\right) \\ &= K_n(2\pi)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\zeta_n(A_i-A_{i-n})z}F_Z(dz)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\zeta_n(A_j-A_{j-n})z}F_Z(dz)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

通过变量替换并利用 $EZ = 0$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}
&E\left(Z_{n-i-1}Z_{n-j-1}\mathbf{1}(E_0)\right)\\
&= c_{nij}\int_{-\infty}^{\infty} z_1\, F_Z(dz_1)\int_{-\infty}^{\infty} z_2\, F_Z(dz_2)\\
&\qquad\int_0^{\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1+\zeta_n(A_j-A_{j-n})z_2} e^x f_{nij}\big(-x/(\sigma_n\zeta_n)\big)\,dx\\
&= c_{nij}\int_{-\infty}^{\infty} z_1\, F_Z(dz_1)\int_{-\infty}^{\infty} z_2\, F_Z(dz_2) \qquad (2.87)\\
&\qquad\left[\int_0^{\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1+\zeta_n(A_j-A_{j-n})z_2} e^x f_{nij}\big(-x/(\sigma_n\zeta_n)\big)\,dx\right.\\
&\qquad-\int_0^{\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1} e^x f_{nij}\big(-x/(\sigma_n\zeta_n)\big)\,dx\\
&\qquad\left.-\int_0^{\zeta_n(A_j-A_{j-n})z_2} e^x f_{nij}\big(-x/(\sigma_n\zeta_n)\big)\,dx\right].
\end{aligned}$$

对于固定的 $z_1$、$z_2 \in \mathbb{R}$，方括号内的表达式可以改写为

$$\begin{aligned}
&\left(e^{\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1}-1\right)\int_0^{\zeta_n(A_j-A_{j-n})z_2} e^x\\
&\qquad f_{nij}\big(-(x+\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1)/(\sigma_n\zeta_n)\big)\,dx\\
&+\int_0^{\zeta_n(A_j-A_{j-n})z_2} e^x\\
&\qquad\left[f_{nij}\big(-(x+\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1)/(\sigma_n\zeta_n)\big)-f_{nij}\big(-x/(\sigma_n\zeta_n)\big)\right]dx.
\end{aligned}$$

根据泰勒定理，

$$\begin{aligned}
f_{nij}\left(-\frac{x+\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1}{\sigma_n\zeta_n}\right) &= f_{nij}(0)-\frac{x+\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1}{\sigma_n\zeta_n}f'_{nij}(0)\\
&\quad+O\left(\frac{(x+\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1)^2}{\sigma_n^2\zeta_n^2}\|f''_{nij}\|_\infty\right).
\end{aligned}$$

利用这一点和（2.42），经过简单的代数运算可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\zeta_n(A_j-A_{j-n})z_2} e^x f_{nij}\big(-(x+\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1)/(\sigma_n\zeta_n)\big)\,dx\\
&= f_{nij}(0)\left(e^{\zeta_n(A_j-A_{j-n})z_2}-1\right)\\
&+ O\Bigg(e^{\zeta_n|A_j-A_{j-n}||z_2|}\Big(|f'_{nij}(0)|\sigma_n^{-1}\zeta_n n^{1-\alpha}|A_j-A_{j-n}||z_2|\big(|z_1|+|z_2|\big)\\
&\qquad + \|f''_{nij}\|_\infty\sigma_n^{-2}\zeta_n n^{2-2\alpha}|A_j-A_{j-n}||z_2|\big(|z_1|+|z_2|\big)^2\Big)\Bigg).
\end{aligned}$$

显然的不等式 $|e^x-1|\le|x|e^{|x|}$ 对于 $x\in\mathbb{R}$ 结合引理2.6 现在表明

$$\begin{aligned}
&\left(e^{\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1}-1\right)\int_0^{\zeta_n(A_j-A_{j-n})z_2} e^x\\
&\qquad f_{nij}\big(-(x+\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1)/(\sigma_n\zeta_n)\big)\,dx\\
&= f_{nij}(0)\left(e^{\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1}-1\right)\left(e^{\zeta_n(A_j-A_{j-n})z_2}-1\right)\\
&+ o\Big(\sigma_n^{-2}\,|(A_i-A_{i-n})(A_j-A_{j-n})z_1z_2|\,(|z_1|+|z_2|)^2\\
&\qquad e^{\zeta_n(|A_i-A_{i-n}||z_1|+|A_j-A_{j-n}||z_2|)}\Big),
\end{aligned}$$

对 $i,j\ge0$一致成立，其中 $i\ne j$且 $z_1,z_2\in\mathbb{R}$。

以类似的方式处理第二项，我们得出，右侧方括号内的表达式 (2.87) 等于

$$\begin{aligned}
&f_{nij}(0)\left(e^{\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1}-1\right)\left(e^{\zeta_n(A_j-Aj-n)z_2}-1\right)\\
&+ o\Big(\sigma_n^{-2}\,|(A_i-A_{i-n})(A_j-A_{j-n})|\,(1+|z_1|^3)(1+|z_2|^3)\\
&\qquad e^{\zeta_n|(A_i-A_{i-n})z_1|+\zeta_n|(A_j-A_{j-n})z_2|}\Big),
\end{aligned}$$

一致地，对于 $i$，$j\ge0$其中 $i\ne j$且 $z_1$，$z_2\in\mathbb{R}$，代入（2.87）可得

$$\begin{aligned}
&E\left(Z_{n-i-1}Z_{n-j-1}\mathbf{1}(E_0)\right)\\
&= c_{nij}\Bigg[f_{nij}(0)\int_{-\infty}^{\infty} z_1e^{\zeta_n(A_i-A_{i-n})z_1}F_Z(dz_1)\int_{-\infty}^{\infty} z_2e^{\zeta_n(A_j-A_{j-n})z_2}F_Z(dz_2)\\
&\qquad + o\Big(\sigma_n^{-2}\,|(A_i-A_{i-n})(A_j-A_{j-n})|\Big)\Bigg]
\end{aligned}$$

$$= K_n(2\pi)^{1/2} f_{nij}(0) \int_{-\infty}^{\infty} z_1 \, G_{\zeta_n(A_i - A_{i-n})}(dz_1) \int_{-\infty}^{\infty} z_2 \, G_{\zeta_n(A_j - A_{j-n})}(dz_2) \tag{2.88}$$

$$+ c_{nij} o\Big(\sigma_n^{-2} \left|(A_i - A_{i-n})(A_j - A_{j-n})\right|\Big) ,$$

当 $n \to \infty$ 时，对于 $i$ 一致地，$j \geq 0$ 其中 $i \neq j$。回忆起 $EZ = 0$，可知

$$\int_{-\infty}^{\infty} z_1 \, G_{\zeta_n(A_i - A_{i-n})}(dz_1) = O\left(\zeta_n(A_i - A_{i-n})\right) ,$$

第二个积分同样适用于（2.88）。由于 $K_n = O$（$c_{nij}$），结论（2.85）由引理2.6得出。 □

下一个引理是证明主要结果的重要一步；先前的引理 2.5、2.6 和2.7 是该引理所必需的。记

$$Y_{ni} = Z_{n-i-1} - \left(1 + \zeta_n^{-2}\sigma_n^{-2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} z \, G_{\zeta_n(A_i - A_{i-n})}(dz), \; i \in \mathbb{Z}, \; n \geq 1 . \tag{2.89}$$

引理 2.8。 假设（2.5）和（2.2）成立。那么

$$\sup_{n \geq 1, i \geq 0} E\left(Y_{ni}^2 \middle| E_0\right) < \infty , \tag{2.90}$$

*and*

$$E\left(Y_{ni} Y_{nj} \middle| E_0\right) = -\sigma_n^{-2} \sigma_Z^4 \left(A_i - A_{i-n}\right)\left(A_j - A_{j-n}\right)\left(1 + o(1)\right) \tag{2.91}$$

对于满足 $i \neq j$ 的 $i$、$j \geq 0$，一致地有 $n \to \infty$。

证明。 我们证明（2.91）；（2.90）的证明类似（且容易得多）。记

$$P(E_0) = K_n(2\pi)^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-x} f_n\big(x/(\zeta_n \sigma_n)\big) \, dx,$$

其中 $K_n$ 如（2.86）所示。根据（2.78）并进行简单积分，

$$P(E_0) = K_n(2\pi)^{1/2} \left[ o\left(\zeta_n^{-2}\sigma_n^{-2}\right) + (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} \exp\big(-x - x^2/(2\zeta_n^2\sigma_n^2)\big) \, dx \right] \tag{2.92}$$

$$= K_n \left[1 - \zeta_n^{-2}\sigma_n^{-2}\left(1 + o(1)\right)\right] , \; n \to \infty .$$

结合式（2.85），这意味着

$$E\left(Z_{n-i-1} Z_{n-j-1} \mathbf{1}(E_0)\right) P(E_0)$$

$$= K_n^2 \Bigg( \left(1 - \zeta_n^{-2}\sigma_n^{-2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} z_1 \, G_{\zeta_n(A_i - A_{i-n})}(dz_1) \int_{-\infty}^{\infty} z_2 \, G_{\zeta_n(A_j - A_{j-n})}(dz_2)$$

$$+ o\left(\sigma_n^{-2} \left|(A_i - A_{i-n})(A_j - A_{j-n})\right|\right) \Bigg), \; n \to \infty,$$

关于 $i$, $j \geq 0$ 其中 $i \neq j$。由于根据式（2.84），

$$\begin{aligned} & E\left(Z_{n-i-1}\mathbf{1}(E_0)\right) E\left(Z_{n-j-1}\mathbf{1}(E_0)\right) \\ &= K_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} z_1\, G_{\zeta_n(A_i - A_{i-n})}(dz_1) \int_{-\infty}^{\infty} z_2\, G_{\zeta_n(A_j - A_{j-n})}(dz_2) \\ &\qquad + o\left(K_n^2 \sigma_n^{-2} |A_i - A_{i-n}||A_j - A_{j-n}|\right), \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} & E\left(Z_{n-i-1}Z_{n-j-1}\mathbf{1}(E_0)\right) P(E_0) - E\left(Z_{n-i-1}\mathbf{1}(E_0)\right) E\left(Z_{n-j-1}\mathbf{1}(E_0)\right) \\ &= -K_n^2 \zeta_n^{-2} \sigma_n^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} z_1\, G_{\zeta_n(A_i - A_{i-n})}(dz_1) \int_{-\infty}^{\infty} z_2\, G_{\zeta_n(A_j - A_{j-n})}(dz_2) \\ &\qquad + o\left(K_n^2 \sigma_n^{-2} |A_i - A_{i-n}||A_j - A_{j-n}|\right) \\ &= -K_n^2 \sigma_n^{-2} \sigma_Z^4 (A_i - A_{i-n})(A_j - A_{j-n})\left(1 + o(1)\right) \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时，对 $i$ 一致成立， $j \geq 0$ 其中 $i \neq j$。将两边除以 $P(E_0)^2$ 并使用 (2.92)，可得

$$\begin{aligned} & E\left[\left(Z_{n-i-1} - E(Z_{n-i-1}|E_0)\right)\left(Z_{n-j-1} - E(Z_{n-j-1}|E_0)\right)\Big| E_0\right] \\ &= -\sigma_n^{-2} \sigma_Z^4 (A_i - A_{i-n})(A_j - A_{j-n})\left(1 + o(1)\right), \end{aligned} \tag{2.93}$$

当 $n \to \infty$ 时，对 $i$ 再次一致成立， $j \geq 0$ 其中 $i \neq j$。由 (2.92) 和 (2.84) 可知

$$\begin{aligned} E\left(Z_{n-i-1}|E_0\right) = \left(1 + \zeta_n^{-2}\sigma_n^{-2}\right) & \int_{-\infty}^{\infty} z\, G_{\zeta_n(A_i - A_{i-n})}(dz) \\ & + o\left(\zeta_n^{-1}\sigma_n^{-2}|A_i - A_{i-n}|\right), \end{aligned}$$

类似地，对 $Z_{n-j-1}$ 有相应结论，(2.93) 推出 (2.91)。 □

我们接下来建立某些截断和的条件分布极限。

引理 2.9. 假设 (2.5) 和(2.2) 成立。对于 $0 < \delta < L$ 记

$$\begin{aligned} S_n(j, \delta, L) = & \sum_{i=[n^\beta \delta]}^{[n^\beta L]-1} (A_{i+j} - A_i) Y_{ni} + \sum_{i=n-j}^{n-1} (A_{i+j} - A_{i+j-n} - A_i) Y_{ni} \\ & + \sum_{i=n}^{n+[n^\beta L]} (A_{i+j} - A_{i+j-n} - A_i + A_{i-n}) Y_{ni}, \ n \geq 1, \ j \geq 0. \end{aligned} \tag{2.94}$$

对于超越量 $T_n^*$ 如 (2.49)所示，在给定 $E_0$的条件下，

$$\begin{aligned} & \left(\zeta_n T_n^*, \left(n^{2\alpha-2} S_n([n^\beta t], \delta, L),\, t \geq 0\right)\right) \\ & \Rightarrow \left(T_0, \left((1-\alpha)^{-1}\sigma_Z \left(\int_\delta^L \left[(s+t)^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}\right] dB_1(s)\right.\right.\right. \\ & \qquad \left.\left.\left. + \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} dB_2(s) + \int_0^L \left[s^{1-\alpha} - (s+t)^{1-\alpha}\right] dB_3(s)\right),\, t \geq 0\right)\right) \end{aligned} \tag{2.95}$$

当 $n \to \infty$ 时，在有限维分布意义下，其中 $T_0$ 是一个与相互独立的标准布朗运动$B_1, B_2, B_3$相独立的标准指数随机变量，

证明。对于 $n \geq 1$ 和 $t \geq 0$，我们写作

$$\xi_n^{1\circ}(t) = \sum_{i=1}^{[n^\beta t]} A_i Y_{ni}, \quad \xi_n^{2\circ}(t) = \sum_{i=n-[n^\beta t]}^{n-1} A_i Y_{ni},$$

$$\xi_n^{3\circ}(t) = \sum_{i=n+1}^{n+[n^\beta t]} (A_i - A_{i-n}) Y_{ni}.$$

由引理 2.4 可知，在给定 $E_0$ 的条件下，

$$\left(\zeta_n T_n^*, \left(n^{2\alpha-2}\xi_n^{1\circ}(t) : t \geq 0\right), \left(n^{\alpha-\beta/2-1}\xi_n^{2\circ}(t) : t \geq 0\right), \right. \tag{2.96}$$
$$\left. \left(n^{\alpha-\beta/2-1}\xi_n^{3\circ}(t) : t \geq 0\right)\right)$$

$$\Rightarrow \Big(T_0, \big(K_1^{1/2}\sigma_Z B_1(t^{3-2\alpha}) : t \geq 0\big), \big((1-\alpha)^{-1}\sigma_Z B_2(t) : t \geq 0\big), \big((1-\alpha)^{-1}\sigma_Z B_3(t) : t \geq 0\big)\Big)$$

因为两个过程之差在极限下趋于零。例如，

$$n^{2\alpha-2}\zeta_n^{-2}\sigma_n^{-2}\sum_{i=1}^{[n^\beta t]} A_i \int_{-\infty}^{\infty} z\, G_{\zeta_n A_i}(dz) = O\left(n^{1-2\alpha}\right) = o(1),$$

另外两个分量也同理。此外，当 $n$较大时，

$$\begin{aligned} &S_n([n^\beta t], \delta, L) \\ &= \sum_{i=[n^\beta \delta]}^{[n^\beta L]-1} (A_{i+[n^\beta t]} - A_i) Y_{ni} + \sum_{i=n-[n^\beta t]}^{n-1} (A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i) Y_{ni} \\ &+ \sum_{i=n}^{n+[n^\beta L]} (A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i + A_{i-n}) Y_{ni} =: V_n^1(t) + V_n^2(t) + V_n^3(t). \end{aligned}$$

从 $V_n^3$ 开始，我们写作

$$V_n^3(t) = n^{-(1-\alpha)(1-\beta)} \sum_{i=1}^{[n^\beta L]} f_n\left(n^{-\beta} i, t\right)\left(A_{n+i} - A_i\right) Y_{n,n+i}, \tag{2.97}$$

其中，对于 $0 \le s \le L$,

$$f_n(s,t) = n^{(1-\alpha)(1-\beta)} \frac{A_{n+[n^\beta s]+[n^\beta t]} - A_{[n^\beta s]+[n^\beta t]} - A_{n+[n^\beta s]} + A_{[n^\beta s]}}{A_{n+[n^\beta s]} - A_{[n^\beta s]}}.$$

显然，对于固定的 $s$、$t$，当 $n \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned} A_{n+[n^\beta s]+[n^\beta t]} - A_{n+[n^\beta s]} &\ll A_{[n^\beta s]+[n^\beta t]} - A_{[n^\beta s]} \\ &\sim (1-\alpha)^{-1} n^{\beta(1-\alpha)} \left[(s+t)^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}\right], \end{aligned}$$

而 $A_{n+[n^\beta s]} - A_{[n^\beta s]} \sim (1-\alpha)^{-1} n^{1-\alpha}$。因此，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(s,t) = s^{1-\alpha} - (s+t)^{1-\alpha} =: f(s,t), \tag{2.98}$$

并且容易看出，该极限关于紧区间内的 $0 \le s \le L$ 和 $t$ 一致。我们将证明，在给定 $E_0$ 的条件下，

$$\begin{aligned} &\left(n^{2\alpha-2} V_n^3(t),\, t \ge 0\right) \\ &\Rightarrow \left(\sigma_Z (1-\alpha)^{-1} \int_0^L \left[s^{1-\alpha} - (s+t)^{1-\alpha}\right] dB_3(s),\, t \ge 0\right) \end{aligned} \tag{2.99}$$

当 $n \to \infty$ 时，在有限维分布意义下。为此，令

$$c_{nj}(k,t) = \inf_{(j-1)L/k \le s \le jL/k} f_n(s,t),\ k \ge 1,\ 1 \le j \le k,$$

and

$$e_{ni}(k,t) = f_n\left(n^{-\beta} i, t\right) - c_{n,\lceil L^{-1} n^{-\beta} k i\rceil}(k,t) \ge 0,\ k \ge 1,\ 1 \le i \le [n^\beta L].$$

由（2.98）及单调性可得，

$$\lim_{n\to\infty} c_{nj}(k,t) = f\left((j-1)k^{-1}L, t\right),\ 1 \le j \le k. \tag{2.100}$$

利用标准的连续性论证可得

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \sup_{t\in A} \max_{1 \le i \le [n^\beta L]} e_{ni}(k,t) = 0 \tag{2.101}$$

对于任意紧集 $A$。我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{[n^\beta L]} c_{n,\lceil L^{-1} n^{-\beta} k i\rceil}(k,t)(A_{n+i} - A_i) Y_{n,n+i} \\ &= \sum_{j=1}^{k'} c_{nj}(k,t) \sum_{i \in \left(k^{-1} L n^\beta (j-1),\, k^{-1} L n^\beta j\right] \cap \mathbb{Z}} (A_{n+i} - A_i) Y_{n,n+i} \\ &= \sum_{j=1}^{k'} c_{nj}(k,t) \left(\xi_n^{3\circ}\left(k^{-1} L j\right) - \xi_n^{3\circ}\left(k^{-1} L (j-1)\right)\right) =: W_{nk}(t), \end{aligned}$$

其中 $k' = \lceil L^{-1}n^{-\beta}k[n^\beta L]\rceil$。这与（2.96）和（2.100）一起表明，对于固定的 $k$，当 $n \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned}&\left(n^{\alpha-\beta/2-1}W_{nk}(t),\, t \geq 0\right) \qquad (2.102)\\ \Rightarrow&\left((1-\alpha)^{-1}\sigma_Z \sum_{j=1}^{k} f\left((j-1)k^{-1}L, t\right)\left(B_3(k^{-1}jL) - B_3(k^{-1}(j-1)L)\right),\right.\\ &\qquad\qquad\left. t \geq 0\right)\end{aligned}$$

在有限维分布意义下。我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{[n^\beta L]} f_n\left(n^{-\beta}i, t\right)\left(A_{n+i} - A_i\right) Y_{n,n+i} - W_{nk}(t)\\ &= \sum_{i=1}^{[n^\beta L]} e_{ni}(k,t)\left(A_{n+i} - A_i\right) Y_{n,n+i}\,.\end{aligned}$$

由（2.91）可知，当 $n$足够大时，

$$\sup_{i,j\geq 0: i\neq j}\left(A_i - A_{i-n}\right)\left(A_j - A_{j-n}\right) E\left(Y_{ni}Y_{nj}|E_0\right) \leq 0\,.$$

结合（2.90以及每个 $e_{ni}$的非负性可知，当$n$足够大时，

$$\begin{aligned}&E\left(\left[\sum_{i=1}^{[n^\beta L]} e_{ni}(k,t)\left(A_{n+i} - A_i\right) Y_{n,n+i}\right]^2 \middle| E_0\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^{[n^\beta L]}\left[e_{ni}(k,t)\left(A_{n+i} - A_i\right)\right]^2 E(Y_{n,n+i}^2|E_0)\\ &= O\left(\max_{1\leq j\leq [n^\beta L]} e_{nj}(k,t)^2 \sum_{i=1}^{[n^\beta L]}\left(A_{n+i} - A_i\right)^2\right)\\ &= O\left(n^{2-2\alpha+\beta}\max_{1\leq j\leq [n^\beta L]} e_{nj}(k,t)^2\right)\,.\end{aligned}$$

利用（2.101），我们得出，对于任意紧集 $A$，

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty} n^{2\alpha-\beta-2}\sup_{t\in A} E\left[\left(W_{nk}(t)\right.\right. \qquad (2.103)\\ &\qquad\left.\left. - \sum_{i=1}^{[n^\beta L]} f_n\left(n^{-\beta}i, t\right)\left(A_{n+i} - A_i\right) Y_{n,n+i}\right)^2 \middle| E_0\right] = 0\,.\end{aligned}$$

当 $k \to \infty$ 时，（2.102）右端的过程在有限维分布意义下收敛到（2.99）右端的过程。由于（$2\alpha-2$）$-$（$1-\alpha$）（$1-\beta$）$=\alpha-\beta/2-1$，由“共同收敛”论证，结合（2.99）、（2.97）和（2.103），即可得到结论（Billingsley（1999）中的定理 3.2）。

几乎相同的论证表明，在给定 $E_0$ 的条件下，

$$\begin{aligned}\left(n^{2\alpha-2}V_n^2(t),\, t\geq 0\right) &\Rightarrow \left(-\sigma_Z(1-\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}dB_2(s),\, t\geq 0\right) \\ &\stackrel{d}{=} \left(\sigma_Z(1-\alpha)^{-1}\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}dB_2(s),\, t\geq 0\right)\end{aligned} \tag{2.104}$$

在有限维分布意义下。

关于项 $V_n^1$ 的情形再次类似，但有一点小小的变化。由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{[n^\beta s]+[n^\beta t]}-A_{[n^\beta s]}}{A_{[n^\beta s]}}=\frac{(s+t)^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{s^{1-\alpha}}$$

对 $\delta\leq s\leq L$ 和 $t$ 一致成立，因此我们的论证现在表明，在给定$E_0$的条件下，

$$\left(n^{-(2-2\alpha)}V_n^1,\, t\geq 0\right) \Rightarrow \left(\sigma_Z K_1^{1/2}\int_\delta^L \frac{(s+t)^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{s^{1-\alpha}}M(ds),\, t\geq 0\right)$$

在有限维分布意义下，其中 $M$ 是一个中心高斯随机测度，其方差测度的密度为 $(3-2\alpha)s^{2-2\alpha}$，$s>0$。由于中心高斯随机测度 $(1-\alpha)^{-1}B_3(ds)$ 和 $K_1^{1/2}M(ds)/s^{1-\alpha}$ 具有相同的方差测度，这意味着，在给定 $E_0$ 的条件下，

$$\begin{aligned}&\left(n^{2\alpha-2}V_n^2(t),\, t\geq 0\right) \\ &\Rightarrow \left(\sigma_Z(1-\alpha)^{-1}\int_\delta^L \left((s+t)^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}\right)dB_3(s),\, t\geq 0\right)\end{aligned} \tag{2.105}$$

在有限维分布意义下。

由于（2.99）、（2.104）和（2.105）均是（2.96）的推论，因此其中包含的收敛性结论同时成立，并且也与 $\zeta_n T_n^* \Rightarrow T_0$同时成立。断言（2.95）得证。□

下一个引理讨论因对 $E_0$ 进行条件化而出现的移位序列。

引理 2.10。定义

$$\begin{aligned}&\mu_n(t)\\ &=n^{2\alpha-2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(A_{i+[n^\beta t]}-A_{i+[n^\beta t]-n}-A_i+A_{i-n}\right)\int_{-\infty}^{\infty} z\,G_{\zeta_n(A_i-A_{i-n})}(dz),\end{aligned}$$

对于 $t\geq 0$ 和 $n\geq 1$。那么，当 $n\to\infty$ 时，$\mu_n\to\mu_\infty$ 在赋予 Skorohod $J_1$ 拓扑的 $D([0,\infty))$ 中成立，其中 $\mu_\infty(t)=-\varepsilon t^{3-2\alpha}$，$t\geq 0$。

证明。记

$$\begin{aligned}\mu_n(t) =& n^{2\alpha-2}\zeta_n \sum_{i=0}^{\infty} \left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i + A_{i-n}\right)\left(A_i - A_{i-n}\right)\\ &+n^{2\alpha-2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i + A_{i-n}\right)\\ &\left[\int_{-\infty}^{\infty} z\, G_{\zeta_n(A_i - A_{i-n})}(dz) - \zeta_n\left(A_i - A_{i-n}\right)\right]\\ =:& \mu_n^{(1)}(t) + \mu_n^{(2)}(t),\ t \geq 0,\end{aligned}$$

只要证明以下结论，引理的断言便得证：

$$\mu_n^{(1)} \to \mu_\infty \quad \text{in} \quad D([0,\infty)) \tag{2.106}$$

and

$$\mu_n^{(2)}(t) \to 0 \quad \text{uniformly on compact intervals.} \tag{2.107}$$

我们先证明（2.107）。固定 $L > 0$ 使得 $0 \leq t \leq L$。首先假设$1/2 < \alpha < 5/6$。由（2.19）

$$\begin{aligned}&\left|\mu_n^{(2)}(t)\right|\\ =&O\left(n^{2\alpha-2}\zeta_n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left|A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i + A_{i-n}\right|\left(A_i - A_{i-n}\right)^2\right)\\ =&O\left(n^{2\alpha-2}\zeta_n^2 n^\beta \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\alpha}\left(A_i - A_{i-n}\right)^2\right) = O\left(n^{2\alpha-2}\zeta_n^2 n^\beta n^{3-3\alpha}\right) \to 0\end{aligned}$$

关于 $0 \leq t \leq L$一致成立，从而证明（2.107）。另一方面，若 $\alpha \geq 5/6$，则$\kappa \geq 3$ 在（2.5）中，因此由（2.19）

$$\begin{aligned}&\left|\mu_n^{(2)}(t)\right|\\ =&O\left(n^{2\alpha-2}\zeta_n^3 \sum_{i=0}^{\infty} \left|A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i + A_{i-n}\right|\left(A_i - A_{i-n}\right)^3\right)\\ =&O\left(n^{2\alpha-2}\zeta_n^3 n^\beta \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\alpha}\left(A_i - A_{i-n}\right)^3\right) = O\left(n^{2\alpha-2}\zeta_n^3 n^\beta n^{4-4\alpha}\right) \to 0\end{aligned}$$

关于 $0 \leq t \leq L$一致成立，再次证明（2.107）。

现在证明（2.106）。逐点收敛显然：对于固定的 $t$,

$$\begin{aligned}\mu_n^{(1)}(t) &= \sigma_Z^2 \sigma_n^{-2} n^{2\alpha-1}\varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n}\right)\left(A_i - A_{i-n}\right) - n^{2\alpha-1}\varepsilon\\ &\to -\varepsilon t^{3-2\alpha}\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时，其中我们用到了（2.25）。接下来，如同在（2.28）中那样，对于 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mu_n^{(1)}(t) =& \frac{n^{2\alpha-2}\zeta_n}{2}\Bigg[\sum_{i=0}^{n-1}\left(A_i - A_{i-[n^\beta t]}\right)^2 \\ &+ \sum_{i=n-[n^\beta t]}^{\infty}\left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i + A_{i-n}\right)^2\Bigg] \\ =:& \mu_n^{(11)}(t) + \mu_n^{(12)}(t).\end{aligned}$$

结论（2.106）将在我们证明以下两者均在 $\mu_n^{(11)}$和 $\mu_n^{(12)}$于 $D([0,\infty))$ 中收敛到连续极限（均为 $\mu_\infty$的常数倍）后成立。事实是，$\mu_n^{(11)}$逐点收敛到 $\mu_n^{(1)}$的逐点极限的某个常数倍，这是证明（2.25）的一个中间步骤。由于 $\mu_n^{(11)}$是单调函数，它在 $D([0,\infty))$ 中的收敛性随之成立。

我们已经知道，$\mu_n^{(12)}$逐点收敛到一个连续极限。令 $i_0$满足：对于 $i \geq i_0$，$a_i$ 是单调的。记 $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\mu_n^{(12)}(t) =& \frac{n^{2\alpha-2}\zeta_n}{2}\Bigg[\sum_{i=n+i_0}^{\infty}\left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i + A_{i-n}\right)^2 \\ &- \sum_{i=n-[n^\beta t]}^{n+i_0-1}\left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i\right)^2\Bigg] \\ =:& \mu_n^{(121)}(t) - \mu_n^{(122)}(t),\end{aligned}$$

因此，只需证明 $\mu_n^{(121)}$和 $\mu_n^{(122)}$均在 $D([0,\infty))$ 中收敛到连续极限。进一步拆分，记 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mu_n^{(122)}(t) =& \frac{n^{2\alpha-2}\zeta_n}{2}\Bigg[\sum_{i=n-[n^\beta t]}^{n+i_0-1} A_{i+[n^\beta t]-n}^2 \\ &+ \sum_{i=n-[n^\beta t]}^{n+i_0-1}\left(A_i - A_{i+[n^\beta t]}\right)\left(A_i - A_{i+[n^\beta t]} - 2A_{i+[n^\beta t]-n}\right)\Bigg] \\ =:& \mu_n^{(1221)}(t) + \mu_n^{(1222)}(t).\end{aligned}$$

显然，

$$\mu_n^{(1221)}(t) = \frac{n^{2\alpha-2}\zeta_n}{2}\sum_{i=0}^{[n^\beta t]+i_0-1} A_i^2$$

逐点收敛到 $\mu_\infty$的一个常数因子。由于 $\mu_n^{(1221)}$单调，我们得出 $\mu_n^{(1221)}$在 $D([0,\infty))$ 中收敛到一个连续极限。为了

证明 $\mu_n^{(122)}$ 也如此，我们将证明 $\mu_n^{(1222)}(t)$ 在紧区间上一致 $\to 0$。再次考虑 $0 \le t \le L$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\mu_n^{(1222)}(t)\right| \\
&\le \frac{n^{2\alpha-2}\zeta_n}{2} \sum_{i=n-[n^\beta t]}^{n+i_0-1} \left(A_{i+[n^\beta t]} - A_i\right)\left[\left(A_{i+[n^\beta t]} - A_i\right) + 2A_{i+[n^\beta t]-n}\right] \\
&= O\left(n^{2\alpha-2}\zeta_n \sum_{i=n-[n^\beta t]}^{n+i_0-1} n^\beta n^{-\alpha}\left(n^\beta n^{-\alpha} + n^{\beta(1-\alpha)}\right)\right) \\
&= O\left(n^{\alpha-2}\zeta_n n^{3\beta-\beta\alpha}\right) \to 0
\end{aligned}$$

在 $0 \le t \le L$ 上一致地成立，正如所要求的。

最后，我们已经知道，$\mu_n^{(121)}$逐点收敛到一个连续极限。此外，根据 $i_0$ 的选择，$\mu_n^{(121)}$ 是一个单调函数。因此，它在 $D([0,\infty))$ 中收敛，证明完毕。 □

下面是在证明定理 2.1 之前的最后一个引理。

引理 2.11。 假设 (2.5) 和(2.2) 成立。令

$$S_n(j) = \sum_{i=j}^{j+n-1} X_i,\ j \ge 0,\ n \ge 1. \tag{2.108}$$

由于 $n \to \infty$，在给定 $E_0$ 的条件下，

$$\begin{aligned}
&\left(n^{-(2-2\alpha)}\left(S_n([n^\beta t]) - n\varepsilon\right),\ t \ge 0\right) \\
&\Rightarrow \left((2C_\alpha)^{1/2} B_H(t) + \varepsilon^{-1} C_\alpha \sigma_Z^2 T_0 - \varepsilon t^{3-2\alpha},\ t \ge 0\right)
\end{aligned}$$

在有限维分布意义下，其中 $(B_H(t):\ t \ge 0)$ 是标准分数布朗运动 (2.8)，其赫斯特指数 $H$ 见 (2.7)，$C_\alpha$ 是在 (2.10)中定义的常数，且 $T_0$ 是一个与分数布朗运动相互独立的标准指数随机变量。

证明。 由式（(2.91)）以及序列（$A_n$）的最终单调性可知，存在 $i_0 \ge 0$ 使得对所有充分大的 $n$,

$$\sup_{i_0 \le i < j} E\left(Y_{ni} Y_{nj} | E_0\right) \le 0\,. \tag{2.109}$$

固定 $L$, $t>0$ 由此及式（2.90）可得

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\sum_{i=[n^\beta L]}^{n-[n^\beta t]-1}\left(A_{i+[n^\beta t]}-A_i\right)Y_{ni}\right)^2\middle|E_0\right]\\
=&O\left(\sum_{i=[n^\beta L]}^{\infty}\left(A_{i+[n^\beta t]}-A_i\right)^2\right)\\
=&O\left(\sum_{j=[n^\beta L]}^{\infty}\left(\left(j+[n^\beta t]\right)^{1-\alpha}-j^{1-\alpha}\right)^2\right)\\
\le&O\left(n^{4-4\alpha}\int_L^\infty\left[(x+t)^{1-\alpha}-x^{1-\alpha}\right]^2dx\right).
\end{aligned}$$

因此，对于固定的 $t$,

$$\lim_{L\to\infty}\limsup_{n\to\infty}E\left[\left(n^{2\alpha-2}\sum_{i=[n^\beta L]}^{n-[n^\beta t]-1}\left(A_{i+[n^\beta t]}-A_i\right)Y_{ni}\right)^2\middle|E_0\right]=0\,. \tag{2.110}$$

由于序列 $(a_n)$ 最终单调递增，必要时可以增大$i_0$ 以确保 $A_{j+k}-A_j\le A_{i+k}-A_i$ 对所有 $i_0\le i\le j$ 以及 $k\ge 0$均成立。由 (2.109)，对于固定的 $L$, $t>0$, 当 $n$和 $i$ 足够大时， $j\ge n+[n^\beta L]$,

$$\begin{aligned}
&\left(A_{i+[n^\beta t]}-A_{i+[n^\beta t]-n}-A_i+A_{i-n}\right)\\
&\qquad\left(A_{j+[n^\beta t]}-A_{j+[n^\beta t]-n}-A_j+A_{j-n}\right)E\left(Y_{ni}Y_{nj}\middle|E_0\right)\le 0\,,
\end{aligned}$$

并且与上述相同的论证可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{L\to\infty}\limsup_{n\to\infty}E\left[\left(n^{2\alpha-2}\right.\right.\\
&\left.\left.\sum_{i=n+[n^\beta L]+1}^{\infty}\left(A_{i+[n^\beta t]}-A_{i+[n^\beta t]-n}-A_i+A_{i-n}\right)Y_{ni}\right)^2\middle|E_0\right]=0\,.
\end{aligned} \tag{2.111}$$

类似地，对于固定的 $t>0$,

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}E\left[\left(n^{2\alpha-2}\sum_{i=i_0}^{[n^\beta\delta]-1}\left(A_{i+[n^\beta t]}-A_i\right)Y_{ni}\right)^2\middle|E_0\right]=0\,, \tag{2.112}$$

并且显然，对于固定的 $t>0$,

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\left(n^{2\alpha-2}\sum_{i=0}^{i_0-1}\left(A_{i+[n^\beta t]}-A_i\right)Y_{ni}\right)^2\middle|E_0\right]=0\,. \tag{2.113}$$

由（2.110）、（2.111）、（2.112）、（2.113）以及引理 2.9 可知，在给定 $E_0$ 的条件下，

$$\left[\zeta_n T_n^*, \left(n^{-(2-2\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} \left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_i + A_{i-n}\right) Y_{ni},\, t \geq 0\right)\right] \tag{2.114}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Bigg[T_0, \Bigg((1-\alpha)^{-1}\sigma_Z \Bigg(&\int_0^\infty \left[(s+t)^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}\right] dB_1(s) \\
&+ \int_0^t (t-s)^{1-\alpha}\, dB_2(s) + \int_0^\infty \left[(s+t)^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}\right] dB_3(s)\Bigg),\, t \geq 0\Bigg)\Bigg],
\end{aligned}$$

在有限维分布意义下，当 $n \to \infty$ 时。此外，容易验证中心极限定理的林德伯格条件，从而得到

$$\begin{aligned}
&\left(n^{-(2-2\alpha)} \sum_{i=-[n^\beta t]}^{-1} A_{i+[n^\beta t]} Z_{n-1-i},\, t \geq 0\right) \\
&\Rightarrow \left((1-\alpha)^{-1}\sigma_Z \int_0^t (t-s)^{1-\alpha}\, dB_0(s),\, t \geq 0\right)
\end{aligned} \tag{2.115}$$

在有限维分布意义下，当 $n \to \infty$，其中 $B_0$ 是标准布朗运动。注意，(2.115) 左侧的随机变量与 (2.114) 左侧的随机变量相互独立，尤其与 $E_0$。

利用 (2.26)，由 (2.114) 和 (2.115) 可得，按照引理 2.10中的记号，在给定 $E_0$ 的条件下，

$$\begin{aligned}
&\left[\zeta_n T_n^*, \left(n^{-(2-2\alpha)} \left(S_n([n^\beta t]) - S_n\right) - \left(1 + \zeta_n^{-2}\sigma_n^{-2}\right)\mu_n(t),\, t \geq 0\right)\right] \\
&\Rightarrow \Bigg[T_0, \Bigg((1-\alpha)^{-1}\sigma_Z \Bigg(\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}\, dB_0(s) \\
&\quad + \int_0^\infty \left[(s+t)^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}\right] dB_1(s) \\
&\quad + \int_0^t (t-s)^{1-\alpha}\, dB_2(s) + \int_0^\infty \left[(s+t)^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}\right] dB_3(s)\Bigg),\, t \geq 0\Bigg)\Bigg] \\
&\stackrel{d}{=} \left[T_0, \left(2^{1/2}(1-\alpha)^{-1}\sigma_Z \int_{-\infty}^{\infty} \left[(t-s)_+^{1-\alpha} - (-s)_+^{1-\alpha}\right] dW(s),\, t \geq 0\right)\right]
\end{aligned}$$

在有限维分布意义下，满足 $n \to \infty$，其中在中间步骤中，四个标准布朗运动 $B_0$、$B_1$、$B_2$ 和 $B_3$ 彼此独立（且独立于 $T_0$），而在最终表达式中（$W(s)$ $s \in \mathbb{R}$是一个双侧标准布朗运动，且独立于 $T_0$。由（2.29）可将其重新表述为：在给定 $E_0$的条件下，

$$\begin{aligned}
&\left[\zeta_n T_n^*, \left(n^{-(2-2\alpha)} \left(S_n([n^\beta t]) - S_n\right) - \mu_n(t),\, t \geq 0\right)\right] \\
&\Rightarrow \left[T_0, \left((2C_\alpha)^{1/2} B_H(t),\, t \geq 0\right)\right],
\end{aligned}$$

并且根据引理 2.10也有

$$\begin{aligned}&\left[\zeta_n T_n^*, \left(n^{-(2-2\alpha)}\left(S_n([n^\beta t]) - S_n\right), t \geq 0\right)\right]\\ &\Rightarrow \left[T_0, \left((2C_\alpha)^{1/2} B_H(t) - \varepsilon t^{3-2\alpha}, t \geq 0\right)\right]\end{aligned}$$

在有限维分布意义下，如 $n \to \infty$。由于

$$n^{-(2-2\alpha)}\left(S_n([n^\beta t]) - n\varepsilon\right) = n^{-(2-2\alpha)}\left(S_n([n^\beta t]) - S_n\right) + \left(n^{2\alpha-2}\zeta_n^{-1}\right)\zeta_n T_n *,$$

引理的结论由2.50的定义 $\zeta_n$ 以及2.22得出。 □

现在我们可以证明定理2.1了。

定理*2.1*的证明。我们将证明

$$\left\{P\left[\left(n^{-(2-2\alpha)}\left(S_n([n^\beta t]) - n\varepsilon\right), 0 \leq t < \infty\right) \in \cdot \,\middle|\, E_0\right], n \geq 1\right\} \tag{2.116}$$

是 $D([0,\infty$上关于 Skorohod $J_1$ 拓扑的紧概率测度族。暂且假设这一点成立，则由引理2.11可知，在给定 $E_0$的条件下，

$$\begin{aligned}&\left(n^{-(2-2\alpha)}\left(S_n([n^\beta t]) - n\varepsilon\right) : t \geq 0\right)\\ &\Rightarrow \left((2C_\alpha)^{1/2} B_H(t) + \varepsilon^{-1} C_\alpha \sigma_Z^2 T_0 - \varepsilon t^{3-2\alpha} : t \geq 0\right)\end{aligned}$$

在 $D([0,\infty))$ 中弱收敛，如 $n \to \infty$。由于泛函 $\mathrm{x} \mapsto \inf\{t \geq 0 : x(t) \leq 0\}$在 $D([0,\infty))$ 上显然关于极限过程在该空间上诱导的分布几乎处处连续，连续映射定理将推出，在给定 $E_0$的条件下，

$$\begin{aligned}n^{-\beta} I_n(\varepsilon) &= \inf\left\{t \geq 0 : n^{-(2-2\alpha)}\left(S_n([n^\beta t]) - n\varepsilon\right) \leq 0\right\}\\ &\Rightarrow \inf\left\{t \geq 0 : (2C_\alpha)^{1/2} B_H(t) + \varepsilon^{-1} C_\alpha \sigma_Z^2 T_0 - \varepsilon t^{3-2\alpha} \leq 0\right\} = \tau_\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $n \to \infty$。所以，证明族（2.116）具有紧性即可完成定理2.1的证明。根据引理 2.10，也只需证明族

$$\left\{P\left[\left(n^{-(2-2\alpha)}\left(S_n([n^\beta t]) - n\varepsilon\right) - \mu_n(t), 0 \leq t < \infty\right) \in \cdot \,\middle|\, E_0\right], n \geq 1\right\} \tag{2.117}$$

是在 $D([0,\infty)$ 上的紧概率测度族。

我们需要证明族（2.117）在区间 $[0, L]$ 上的限制具有 $L > 0$，因此固定 $L$。我们先证明

$$\begin{aligned}&E\left[\left(S_n\left([n^\beta t]\right) - n^{2\alpha-2}\mu_n(t) - S_n\left([n^\beta s]\right) + n^{2\alpha-2}\mu_n(s)\right)^2 \,\middle|\, E_0\right]\\ &= O\left(\left([n^\beta t] - [n^\beta s]\right)^{3-2\alpha}\right),\end{aligned} \tag{2.118}$$

对 $0 \le s \le t \le L$ 一致成立。记

$$\begin{aligned} & S_n\left([n^\beta t]\right) - n^{2\alpha-2}\mu_n(t) - S_n\left([n^\beta s]\right) + n^{2\alpha-2}\mu_n(s) \\ &= \sum_{i=-[n^\beta t]}^{-1} \left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta s]}\right) Z_{n-i-1} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_{i+[n^\beta s]} + A_{i+[n^\beta s]-n}\right) Y_{ni}. \end{aligned}$$

由于 $Z_n$， $Z_{n+1}$，.....与 $E_0$相互独立，根据引理 2.8，

$$\begin{aligned} & E\left[\left(S_n\left([n^\beta t]\right) - n^{2\alpha-2}\mu_n(t) - S_n\left([n^\beta s]\right) + n^{2\alpha-2}\mu_n(s)\right)^2 \middle| E_0\right] \\ =& O\Bigg[\sum_{j=0}^{[n^\beta t]-1} \left(A_j - A_{j+[n^\beta s]-[n^\beta t]}\right)^2 \\ & \qquad + \sum_{i=0}^{\infty} \left(A_{i+[n^\beta t]} - A_{i+[n^\beta t]-n} - A_{i+[n^\beta s]} + A_{i+[n^\beta s]-n}\right)^2\Bigg] \\ =& O\left(\left([n^\beta t] - [n^\beta s]\right)^{3-2\alpha}\right) \end{aligned}$$

对 $0 \le s \le t \le L$ 一致成立，由（2.71）及 $\kappa = 2$可得，而（2.118）随之成立。

现在令 $0 \le r \le s \le t \le L$。若 $t - r \le n^{-\beta}$，则

$$\begin{aligned} & E\Big[\left|S_n([n^\beta s]) - \mu_n(s) - S_n([n^\beta r]) + \mu_n(r)\right| \\ & \qquad \left|S_n([n^\beta t]) - \mu_n(t) - S_n([n^\beta s]) + \mu_n(s)\right| \Big| E_0\Big] \end{aligned}$$

趋于零。另一方面，若 $t - r > n^{-\beta}$，则由（2.118）和柯西－施瓦茨不等式，条件期望可被估计为

$$O\left(\left([n^\beta t] - [n^\beta r]\right)^{3-2\alpha}\right) = O\left(n^{4-4\alpha}(t-r)^{3-2\alpha}\right)$$

对 $0 \le r \le s \le t \le L$一致成立。由于 $3 - 2\alpha > 1$， （2.117）中族的所需紧性得以成立，从而完成定理2.1的证明。 □

## 3. 一些有用的事实

本节汇集了一些已知或易于推导的结果，以便查阅。

下面的积分求值可由 Pickard（2011）中的（2）、（6）和（51）推出。如果 $H \in$ （0，1）， $H \neq 1/2$，则

$$\int_0^\infty \left[x^{H-1/2} - (x-1)_+^{H-1/2}\right]^2 dx = \frac{\cos(\pi H)\Gamma(2-2H)}{\pi H(1-2H)} \Gamma(H+1/2)^2 . \quad (3.1)$$

接下来，我们需要以下适用于独立但不一定同分布的加项的 Berry-Essen 定理（1977）；参见 Batirov 等人（1977）。

设 $X_1$、……、$X_n$ 为相互独立的零均值随机变量，且三阶矩有限。记

$$A = \sum_{i=1}^{n} E|X_i^3|,\ B = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)}.$$

假设 $B > 0$，则有

$$\left| P\left( \sum_{i=1}^{n} X_i \le Bz \right) - \Phi(z) \right| \le C_u A B^{-3},\ z \in \mathbb{R}\,, \tag{3.2}$$

其中 $C_u$ 是一个普适常数，而 $\Phi$ 是标准正态累积分布函数。常数具有普适性这一事实意味着，3.2式对 $n = \infty$ 仍然成立，只要左侧级数收敛且 $A$，$B$ 均有限。

以下对黎曼-勒贝格引理的推广，可以用与原命题相同的方法证明。若 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数，且对某个 $\delta > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} |f(x)| dx < \infty \quad \text{for all } \theta \in [-\delta, \delta]\,,$$

then

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|\theta|\le\delta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\theta+it)x} f(x)\, dx \right| = 0\,. \tag{3.3}$$

我们将使用随机变量 $X$ 的特征函数 $\phi$ 的一个简单界，其中该随机变量的三阶矩有限。设 $X'$ 是 $X$ 的一个独立副本，且 $Y = X - X'$。利用当 $t \in \mathbb{R}$ 时 cos $t \le 1 - t^2/2 + |t|^3/6$ 的界，可得

$$\begin{aligned} Ee^{itY} &\le 1 - t^2 E(Y^2)/2 + |t|^3 E|Y|^3/6 \\ &\le 1 - t^2 \mathrm{Var}(X) + 4|t|^3 E|X|^3/3\,. \end{aligned}$$

这意味着

$$|\phi(t)| \le \left(1 - t^2 \mathrm{Var}(X) + 4|t|^3 E|X|^3/3\right)^{1/2},\ t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.4}$$

致谢

AC 感谢 Rudra Sarkar 提供的有益讨论。

参考文献

K. Batirov, D. Manevich 和 S. Nagaev （1977）：随机数目、分布各异的随机变量之和的埃森不等式。《苏联科学院数学札记》22：569–571。P. Billingsley （1999）：《概率测度的收敛》。Wiley，纽约，第 2 版。A. Chakrabarty 和 G. Samorodnitsky（2022）：移动平均过程中的大偏差聚集：短记忆机制。arXiv 2208.04582。G. Pickard （2011）：分数布朗运动的表示公式。载于 S ´eminaire de Probabilit ´es XLIII，C. Donati-Martin、A. Lejay 和 A. Rounalt 编，第 2006 卷《数学讲义》。Springer，柏林，第 3–70 页。G. Samorodnitsky （2016）：《随机过程与长程依赖》。Springer，Cham，瑞士。