arXiv:2301.01958v1 [math.CO] 5 Jan 2023

同构自动机网络的交互图 I：完全有向图与最小入度

F]orian Bridoux*、K´evin Perrot†、Aymeric Picard Marchetto‡、Adrien Richard§ ,

2023年1月6日

摘要

一个在大小为 q 的有限字母表 Q 上、含有 n 个分量的自动机网络，是一个离散动力系统，其由函数 $f: Q^n \to Q^n$的连续迭代所描述。在大多数应用中，主要参数是 f的交互图：其顶点集$[n]$ 为 j 的有向图；若 f_i 依赖于输入 j，则该图包含一条从 j 到 i 的弧。与 f同构的自动机网络的交互图集合$\mathbb{G}(f)$具有什么性质？看来这个简单的问题此前从未被研究过。本文给出一些基本结论。首先，我们证明，若 $n \geq 5$ 或 $q \geq 3$，且 f 既不是恒等函数也不是常函数，则 $\mathbb{G}(f)$总包含具有 n^2 条弧的完全有向图 K_n。随后，我们证明，$\mathbb{G}(f)$总包含一个有向图，其最小入度有一个以 q为自变量的上界。因此，若 n 相对于q足够大，则 $\mathbb{G}(f)$不可能只包含 K_n。然而，我们证明 $\mathbb{G}(f)$可以只包含稠密有向图，且至少有 $\lfloor n^2/4 \rfloor$ 条弧。

1 引言

一个自动机网络具有 n 个分量，定义在有限字母表 Q 上，是一个函数

$$f : Q^n \to Q^n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

这些分量 $f_i: Q^n \to Q$通常称为网络的局部转移函数，而 f 则称为全局转移函数（但这里我们将该函数视为网络）。自动机网络也称为有限动力系统；在二元情形下，当 $Q = \{0, 1\}$时，称为布尔网络。

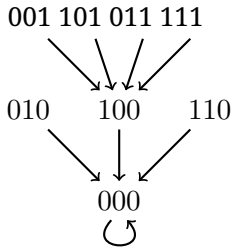
f 所描述的动力学由有向图 $\Gamma(f)$ 显式表示，其顶点集为Q^n，且对于每个 $x \in Q^n$，都有一条从 x到 $f(x)$ 的弧。两个自动机网络 $f, h: Q^n \to Q^n$ 称为同构， $f \sim h$ 记作，如果 $\Gamma(f)$ 和 $\Gamma(h)$ 在通常意义下同构；等价地，存在 Q^n 上的置换 π，使得 $\pi \circ f = h \circ \pi$。于是， $\sim$的一个等价类对应于一个无标号有向图，该图有 $|Q|^n$ 个顶点，且每个顶点的出度恰为一。

自动机网络有许多应用。特别是，它们广泛用于神经网络和基因网络的建模（综述参见 [5] ）。“网络”这一术语源于这样一个事实：相互作用图 f 通常被视为主要参数：它是有向图$G(f)$，其顶点集为 $[n] = \{1, \ldots, n\}$，并且对于所有 i， $j \in [n]$，存在一条弧

*蔚蓝海岸大学，法国国家科学研究中心，I3S，索菲亚科技园，法国。(bridoux@i3s.unice.fr)
†艾克斯-马赛大学，土伦大学，法国国家科学研究中心，LIS，马赛，法国。(kevin.perrot@lis-lab.fr)
‡蔚蓝海岸大学，法国国家科学研究中心，I3S，索菲亚科技园，法国。(picard@i3s.unice.fr)§蔚蓝海岸大学，法国国家科学研究中心，I3S，索菲亚科技园，法国。(adrien.richard@cnrs.fr)

x	$f(x)$
000	000
001	100
010	000
011	100
100	000
101	100
110	000
111	100

$\Gamma(f)$

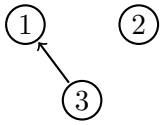


$f_1(x) = x_3$

$f_2(x) = 0$

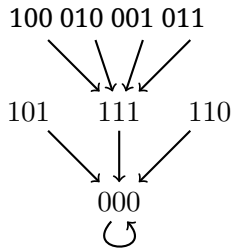
$f_3(x) = 0$

$G(f)$



x	$h(x)$
000	000
001	111
010	111
011	111
100	111
101	000
110	000
111	000

$\Gamma(h)$



$h_1(x) = x_1 + (x_2 \vee x_3)$

$h_2(x) = x_1 + (x_2 \vee x_3)$

$h_3(x) = x_1 + (x_2 \vee x_3)$

$G(h)$

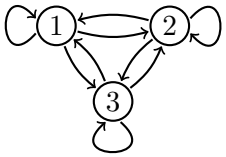


图 1: 具有不同相互作用图的两个同构自动机网络，位于 $\{0,1\}^3$ s.

从 j 到 i，当且仅当 f_i 依赖于输入 j 时，即存在仅在 $x_j \neq y_j$ 上不同的 x、$y \in Q^n$，使得 $f_i(x) \neq f_i(y)$。

在许多应用中，例如基因网络建模，相互作用图通常可以得到较好的近似，而实际动力学却无法 [7, 5]。因此，我们面临以下问题：仅从 f 和 $G(f)$ 可以对其所描述的动力学作何判断? 关于这个问题已有许多研究成果；综述见 [4] 。在大多数情况下，所研究的动力学性质在同构下保持不变：不动点的数量、像的数量、周期构型的数量、极限环的数量及其大小、暂态长度，等等。然而，相互作用图并不在同构下保持不变：即使 f 和 h 同构，它们的相互作用图也可能截然不同，如图 1所示。这种变化可能会对上述核心问题形成一些 限制，我们认为值得对此进行研究。

因此，我们提出对这种变化进行系统研究，考察与 $\mathbb{G}(f)$ 同构的自动机网络的相互作用图集合 f:

$$\mathbb{G}(f) = \{G(h) \mid h : Q^n \to Q^n,\ h \sim f\}.$$

如果 $G \in \mathbb{G}(f)$ 我们称 f 可由 G产生。例如，如果 f 是常函数，我们将其记作$f = \mathsf{cst}$，那么 $\mathbb{G}(f)$ 只包含一个有向图，即以 $[n]$ 为顶点且没有弧的有向图；如果 f 是恒等函数，我们将其记作 $f = \mathsf{id}$，那么 $\mathbb{G}(f)$ 同样只包含一个有向图，即以 $[n]$ 为顶点、带有 n自环（长度为一的环）且没有其他弧的有向图。因此，恒等自动机网络和常值自动机网络都可以由单个有向图产生。

即使系统地研究 $\mathbb{G}(f$对我们而言似乎是一种新的视角，但一些经典结果也可以在这一框架下表述。例如，如果一个有向图可以由一条含有 n 个顶点的有向路径添加 0 到 n 条弧得到，且这些弧都指向路径的第一个顶点，那么我们称它为伴随有向图。如果 f 是一个具有 n 个分量、定义在域 $Q = \mathbb{F}_p$上的线性网络，其中 p是某个素数；也就是说，若 $f(x) = Mx$对于某些 $n \times n$矩阵 M成立，且这些矩阵属于 $\mathbb{F}_p$，那么

考虑 M的 Frobenius标准形，可得 f 与一个线性网络同构h ，其相互作用图 G 是若干伴随有向图的不交并[2]。因此，任意线性网络 f 都可以由一个有向图 $G \in \mathbb{G}(f$生成，该图是若干伴随有向图的不交并，因此非常稀疏： G 至多有 $2n-1$ 条弧。

本文给出的关于 $\mathbb{G}(f)$ 的结果与以往不同，因为它们不依赖于对 f 作出的任何假设：我们研究的是整个集合 $F(n,q)$，即由 n 个分量、字母表大小为 q 的自动机网络构成的集合。我们的首个结果表明，除少数例外， f 总能由 完全有向图 在 $[n]$ 上生成，也就是顶点集为 $[n]$ 、含有 n^2 条弧的有向图，记作 K_n。

定理1。 设 $n,q \geq 2$ 满足 $n \geq 5$ 或 $q \geq 3$。若 $f \in F(n,q)$ 且 $f \neq \mathsf{cst}, \mathsf{id}$，则 $K_n \in \mathbb{G}(f$).

这确实说明了根据 $G(f)$ 能够对 f 推断出什么存在一些限制：如果 $G(f)$，那么除了 f 至少有两个像且至多有 q^n-1 个不动点之外，无法对 f 的动力学作出任何关于同构的判断。如上所述，若 $f = \mathsf{cst}$ 或 $f = \mathsf{id}$，则 f 只能由一种有向图生成：分别是空有向图和含有 n 个自环的有向图。前一定理指出，若 $f \neq \mathsf{cst}, \mathsf{id}$ 只能由一种有向图生成，那么该有向图必然是 K_n。但是，是否至少存在一个这样的自动机网络 f，其动力学完全是完全有向图所特有的？对于 $n=2$ 和 $q \geq 3$，我们给出了这样的 f，并证明当 n 相对于 q 足够大时，这种网络不存在。

我们通过研究 $\mathbb{G}(f)$ 中有向图的最小入度来获得这些结果。首先，我们利用加法数论中的一个困难结果证明， $\mathbb{G}(f)$ 始终包含一个有向图，其最小入度受一个仅依赖于 q 的常数 c_q 所界定；当 $q=2$ 时，该常数为 5。因此，任意自动机网络 f 都同构于一个自动机网络 h ，后者包含一个“简单”的局部转移函数 h_i，因为 h_i 仅依赖于至多 c_q 个分量。反之，我们证明，对于某些 $f \in F(n,q)$， $\mathbb{G}(f)$ 中的每个有向图的最小入度都至少为 2。为简洁地表述这些结果，对于 $n,q \geq 2$ ，我们将 $\delta^-(n,q)$ 记作满足以下条件的最小数 d：对于任意 $f \in F(n,q)$， $\mathbb{G}(f)$ 中存在某个有向图，其最小入度至多为 d。

定理 2. 对于所有满足 $n \geq 3$ 或 $q \geq 3$ 的 $n,q \geq 2$，我们有

$$2 \leq \delta^-(n,2) \leq 5 \qquad and \qquad 2 \leq \delta^-(n,q) \leq (2+o(1))q$$

其中， $o(1)$ 在 q 趋于无穷时趋于 0，且不依赖于 n。

因此，对于任意 $q \geq 3$，由于 $\delta^-(2,q) \geq 2$，存在 $f \in F(2,q)$，使得每个有向图 $\mathbb{G}(f)$ 的最小入度至少为 2，因此 $\mathbb{G}(f) = \{K_2\}$。所以，确实存在一些 $F(2,q)$ 中的自动机网络，它们只能由 K_2 生成。另一方面，对于相对于 q 足够大的 n，我们有 $\delta^-(n,q) < n$，因此，对于任意 $f \in F(n,q)$，都存在一个有向图 $G \in \mathbb{G}(f)$，其最小入度至多为 $n-1$，因而与 K_n 不同： $F(n,q)$ 中没有自动机网络只能由 K_n 生成。当 q 相对于 n 足够大时， $F(n,q)$ 中的一些自动机网络只能由 K_n 生成，这一问题尚未解决。

即使对于相对于 q 足够大的 n ，不存在仅由 K_n 生成的自动机网络，我们仍可以问：是否存在只能由稠密有向图生成的自动机网络？我们的答案是肯定的（因此，上文提到的线性网络总能由稀疏有向图生成这一事实，是线性情形所特有的）。

定理 3. 对所有 n、 $q \geq 2$，都存在 $f \in F(n,q)$，使得 $\mathbb{G}(f)$ 中的每个有向图都至少有 $\lfloor n^2/4 \rfloor$ 条弧。

前述结果阐明了情形 $|\mathbb{G}(f)| = 1$。我们可以反过来考虑，关注 f 使得 $|\mathbb{G}(f)|$ 较大的自动机网络。当然， $|\mathbb{G}(f)| \leq 2^{n^2}$ ，而且

不等式是严格的，否则 $\mathbb{G}(f)$ 就包含空有向图，因此 $f = \mathsf{cst}$，从而 $|\mathbb{G}(f)| = 1$。所以 $|\mathbb{G}(f)| \leq 2^{n^2} - 1$。在后续论文中，我们将特别证明这个界可以达到。因此，尽管 K_n 在某种意义上是通用的，因为任何具有 n 个分量的自动机网络 $f \neq \mathsf{cst},\mathsf{id}$ 都可以由 K_n 产生，但也存在具有 n 个分量的通用自动机网络 f，因为所有除空有向图之外、定义在 $[n]$ 上的有向图都可以产生 f。

本文安排如下。定理1、2 和3 分别在第2、3 和4节中证明。总结见第5节。

记号与术语 n 和 q 始终为大于 1 的整数。令 $[\mathsf{n}] = \{1, \ldots, n\}$ 且 $[\![\mathsf{q}]\!] = \{0, 1, \ldots, q-1\}$。$[\![q]\!]^n$ 中的元素称为配置，而 $[n]$ 中的元素称为分量。我们用 $F(n, q)$ 表示函数 $f\colon [\![q]\!]^n \to [\![q]\!]^n$ 的集合；因此我们总是假设，不失一般性地，$Q = [\![q]\!]$。下文中，$F(n, q)$ 的成员称为函数，而非自动机网络。我们用 $\mathbf{0}$（分别用 $\mathbf{1}$）表示满足以下条件的配置 x：对所有 $i \in [n]$，$x_i = 0$（分别为 1）。对于 $k \in [\![q]\!]$，我们用 ke_i 表示满足 $x_i = k$ 且对所有 $j \neq i$ 均有 $x_j = 0$ 的配置 x。我们用 e_i 代替 $1e_i$。$x \in [\![q]\!]^n$ 的（汉明）重量是满足 $x_i \neq 0$ 的 $i \in [n]$ 的数量。对于 $x, y \in [\![q]\!]^n$，和 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ 按分量逐一模 q 计算。因此，x 和 $x + e_i$ 仅在分量 i 上不同。于是，$f \in F(n, q)$ 的相互作用图 $G(f)$ 中存在一条从 j 指向 i 的弧，当且仅当存在 $x \in [\![q]\!]^n$ 使得 $f_i(x) \neq f_i(x + e_j)$。不动点是满足 $f(x) = x$ 的配置 x。f 的极限环是 $\Gamma(f)$ 的一个环。因此，不动点对应于长度为一的极限环。f 的独立集是 $\Gamma(f)$ 的独立集；等价地，它是满足 $f(A) \cap A = \emptyset$ 的集合 $A \subseteq [\![q]\!]^n$。

2 完全有向图

本节将证明定理 1 该定理指出，对于每个 $K_n \in \mathbb{G}(f)$，只要 $f \in F(n, q)$ 满足 $f \neq \mathsf{cst}, \mathsf{id}$ 和 $n \geq 5$ 或 $q \geq 3$，结论便成立。为此，我们给出 $K_n \in \mathbb{G}(f)$ 的若干充分条件，然后证明这些充分条件中至少有一个必定成立。由于 $q \geq 3$ 的证明要简单得多，我们将从它开始。随后，我们将独立处理 $n \geq 5$ 这一情形。

2.1 情形 $q \geq 3$

我们称 $f \in F(n, q)$ 含有一个完全模式，如果存在 $x \in [\![q]\!]^n$，以及一个大小为 n 的子集 $A \subseteq [\![q]\!]^n$，使得 $x, f(x) \notin A \cup f(A)$，且 $x \neq f(x)$ 或 $A \cap f(A) = \emptyset$；在这种情况下，我们称该完全模式以 (x, A) 为根。

我们将在下面的引理1 中证明，对于 $q \geq 3$ 和 $n \geq 2$，有 $K_n \in \mathbb{G}(f)$，只要 f 具有完全模式。接着，我们将在引理2中证明，如果 $f \neq \mathsf{cst}, \mathsf{id}$，那么 f 必定包含一个完全模式。综合以上结果，即可证明 1 对于 $q \geq 3$ 成立。

引理1. 令 $f \in F(n, q)$，其中 $q \geq 3$ 和 $n \geq 2$。若 f 具有完全模式，则 $K_n \in \mathbb{G}(f)$.

证明。假设 f 具有一个以 (x, A) 为根的完全模式。分三种情形：

- 情况1：$x \neq f(x)$ 和 $f(A) \cap A \neq \emptyset$。令 π 为 $[\![q]\!]^n$ 的任意置换，使得：
  - $\pi(x) = \mathbf{0}$,
  - $\pi(f(x)) = \mathbf{1}$,
  - $\pi(A) = \{2e_1, \ldots, 2e_n\}$,
  - $\pi(f(A) \setminus A) \subseteq \{0, 2\}^n \setminus \{\mathbf{0}, 2e_1, \ldots, 2e_n\}$.

示意见图2。注意，由于 $f(A) \cap A \neq \emptyset$， $f(A) \setminus A$ 的大小至多为 $n-1$；又由于 $n-1 \leq 2^n-(n+1)$， $f(A) \setminus A$ 中的配置确实可以通过 π 在 $\{0,2\}^n \setminus \{\mathbf{0}, 2e_1, \ldots, 2e_n\}$内具有不同的像。令 $h = \pi \circ f \circ \pi^{-1}$，并证明 $G(h) = K_n$。对于所有 $i \in [n]$，配置 $2e_i$ 与 $\mathbf{0}$ 仅在分量 i上不同，而 $h(2e_i) \in \{0,2\}^n$ 与 $h(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ 在每个分量上都不同。因此， $G(h)$有一条从 i 到每个分量的弧。于是， $G(h) = K_n$，并且由于 $h \sim f$，我们有 $K_n \in \mathbb{G}(f)$。

- 情形 2： $x \neq f(x)$ 和 $f(A) \cap A = \emptyset$。令 π 为 $[\![q]\!]^n$ 的任意置换，使得：
  - $\pi(x) = \mathbf{0}$,
  - $\pi(f(x)) = \mathbf{1}$,
  - $\pi(A) = \{e_1, \ldots, e_n\}$,
  - $\pi(f(A)) \subseteq \{2e_1, \ldots, 2e_n\}$.

  参见图3的示意图。令 $h = \pi \circ f \circ \pi^{-1}$，我们来证明 $G(h) = K_n$。对于所有 $i \in [n]$，配置 e_i 和 $\mathbf{0}$ 仅在分量 i上不同，而 $h(e_i) \in \{0,2\}^n$ 和$h(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ 在每个分量上都不同。因此， $G(h)$ 有一条从 i 指向每个分量的弧。于是， $G(h) = K_n$，并且由于 $h \sim f$，我们有 $K_n \in \mathbb{G}(f)$。

- 情形 3： $x = f(x)$ 和 $f(A) \cap A = \emptyset$。令 π 为 $[\![q]\!]^n$ 的任意置换，使得：
  - $\pi(x) = \mathbf{0}$,
  - $\pi(A) = \{e_1, \ldots, e_n\}$,
  - $\pi(f(A)) \subseteq \{\mathbf{1}+e_1, \ldots, \mathbf{1}+e_n\}$.

  参见图4的示意图。令 $h = \pi \circ f \circ \pi^{-1}$，我们来证明 $G(h) = K_n$。对于所有 $i \in [n]$，配置 e_i 和 $\mathbf{0}$ 仅在分量 i上不同，而 $h(e_i) \in \{1,2\}^n$ 和$h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 在每个分量上都不同。因此， $G(h)$ 有一条从 i 指向每个分量的弧。于是， $G(h) = K_n$，并且由于 $h \sim f$，我们有 $K_n \in \mathbb{G}(f)$。

□

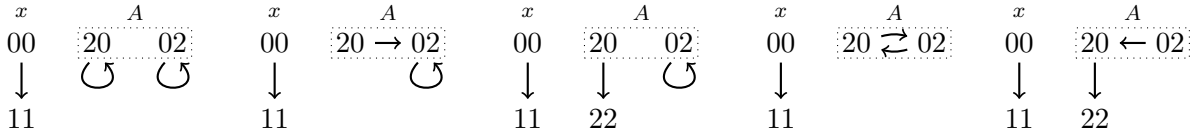


Figure 2: 由 π 标记引理 1 第一种情形下的完全模式 $n =$ 2.

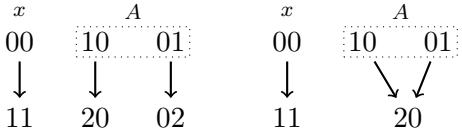


图3 : 由 π 标记引理 1 第二种情形下的完全模式 $n = 2$.

引理2. 令 $f \in F(n,q)$，其中 $q \geq 3$ and $n \geq 2$。若 $f \neq$ cst, id，则 f具有完全模式。

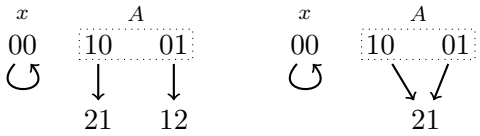


图4：由 π 在引理 1 的第三种情形中对完全模式进行标记，适用于 $n=2$。

证明。假设存在一个配置 a，它通过 f至少有 $n+1$ 个原像。则存在一个大小为 n 的集合 A，包含于 $f^{-1}(a)\setminus\{a\}$ 中。由于 $f\neq \mathsf{cst}$， f 有一个像 $y\neq a$。令$x\in f^{-1}(y)$。则 x和 $f(x)=y$ 不在 A 与 $f(A)=\{a\}$ 的并集中；又由于 $a\notin A$， f 具有一个以 (x,A) 为根的完全模式。

现在假设每个配置在 f 下至多有 n 个原像。由于 $f\neq \mathsf{id}$，存在 $x\in[\![q]\!]^n$，使得 $f(x)\neq x$。令 B 为 f 的像，且不同于 x 和 $f(x)$。那么$|f^{-1}(B)|+|f^{-1}(x)|+|f^{-1}(f(x))|=q^n$，由此可得 $|f^{-1}(B)|\geq q^n-2n$，其至少为$n+1$，因为 $q\geq 3$。因此存在一个大小为 n 的子集 $A\subseteq f^{-1}(B)\setminus\{f(x)\}$；又由于 x， $f(x)\notin A\cup f(A)$，我们可得 f 在 (x,A) 中有一个完全模式作为根。 □

2.2 情形 $n\geq 5$

我们接下来证明：对于满足 $n\geq 5$, $q\geq 2$且 $f\neq$cst、id 的 $f\in F(n,q)$，只要以下三个条件中至少有一个成立，就有$K_n\in\mathbb{G}(f)$：

- f 至少有 $2n$ 个不动点，
- f 至少有 n 个长度为 ≥ 3 的极限环，
- f 有一个大小为 $\geq 2n$ 的独立集。

接下来我们证明，若 $f\neq$ cst，id，则这三个条件中至少有一个必然成立。综上可证，对于 1 ，定理 $n\geq 5$成立。我们首先证明，涉及不动点和极限环的前两个条件足以推出 $K_n\in\mathbb{G}(f)$。

引理 3。 设 $f\in F(n,q)$，其中 $f\neq$ 为恒等映射。若 f 至少有 $2n$ 个不动点，则 $K_n\in\mathbb{G}(f)$。

证明。由于 $f\neq$ 为恒等映射，我们有 $f(c)\neq c$，其中某个配置为 c；又由于 f 至少有 $2n$ 个不动点，因此它有 $2n-1$ 个不动点不同于 $f(c)$，记为 $a^0,a^1,\ldots,a^n,b^3,\ldots,b^n$（这些也都不同于 c，因为 c 不是不动点）。令 π 为 $[\![q]\!]^n$ 的任意置换，使得：

- $\pi(a^0)=\mathbf{0}$,

  对于 $1\leq i\leq n$，有• $\pi(a^i)=e_i$，

  对于 $3\leq i\leq n$，有• $\pi(b^i)=e_1+e_2+e_i$，

- $\pi(c)=e_1+e_2$,

- $\pi(f(c))=e_1+e_2+\mathbf{1}$。

示意见图 5。令 $h=\pi\circ f\circ\pi^{-1}$，并证明 $G(h)=K_n$。对于$i\in[n]$，配置 $\mathbf{0}$ 和 e_i 仅在分量 i 上不同；由于 $h(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 且 $h(e_i)=e_i$，我们可推得 $G(h)$ 在 i上有一个自环。还需证明，对于不同的 i、 $j\in[n]$， $G(h)$ 有一条从 i 到 j 的弧。配置 e_2和 e_1+e_2仅在分量 $\mathbf{1}$ 上不同，而 $h(e_2)=e_2$和 $h(e_1+e_2)=e_1+e_2+\mathbf{1}$ 在每个分量 $j\neq 1$上都不同。因此， $G(h)$ 有一条从 $\mathbf{1}$ 指向每个分量 $j\neq 1$的弧。类似地，配置 e_1 和 e_1+e_2 仅在分量 2 上不同，而

$h(e_1) = e_1$和 $h(e_1+e_2) = e_1+e_2+\mathbf{1}$在每个分量 $j \neq 2$上都不同。因此， $G(h)$有一条从 2 指向每个分量 $j \neq 2$的弧。最后，对于 $3 \leq i \leq n$，配置 e_1+e_2和 $e_1+e_2+e_i$仅在分量 i上不同，而 $h(e_1+e_2+e_i) = e_1+e_2+e_i$和 $h(e_1+e_2) = e_1+e_2+\mathbf{1}$在每个分量 $j \neq i$上都不同。因此， $G(h)$有一条从 i 指向每个 $j \neq i$的弧。因此， $G(h) = K_n$，并且由于 $h \sim f$，我们有 $K_n \in \mathbb{G}(f)$。 □

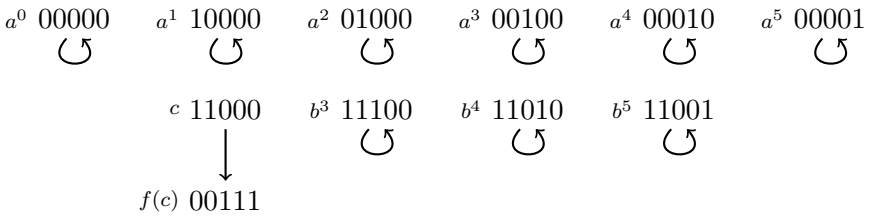


图 5：由 π 在引理 3 中进行标记，对象为 $n = 5$。

引理 4。 设 $f \in F(n,q)$。若 f至少有 n个长度为 ≥ 3的极限环，则 $K_n \in \mathbb{G}(f)$.

证明。假设 f 有 n 个长度为 ≥ 3的极限环；这意味着 $n \geq 4$。那么存在 n个配置 $a^1, \ldots, a^n$，它们分别属于 f的不同长度为 ≥ 3的极限环。对于 $i \in [n]$，令$b^i = f(a^i)$且 $c^i = f(b^i)$。那么 $a^1, \ldots, a^n, b^1, \ldots, b^n, c^1, \ldots, c^n$互不相同。令 π为 $[\![q]\!]^n$ 的任意置换，使得

- $\pi(a^i) = e_{i-1} + e_i$,
- $\pi(b^i) = e_{i-1}$,
- $\pi\left(c^i\right) = e_{i-1} + \mathbf{1}$,

其中 e_0 表示 e_n。图 6 给出了一个示例。注意，映射 π 在所选的 $3n$ 配置上确实是单射： $\pi(a^i)$、$\pi(b^i)$ 和 $\pi(c^i)$ 的权重分别为 2、1 和 $n-1 \geq 4-1$。令 $h = \pi \circ f \circ \pi^{-1}$，下面证明 $G(h) = K_n$。对于 $i \in [n]$，配置e_{i-1}和 $e_{i-1}+e_i$ 仅在分量 i上不同，而 $h(e_{i-1}) = e_{i-1}+\mathbf{1}$ 和 $h(e_{i-1}+e_i) = e_{i-1}$在每个分量上都不同。因此， $G(h)$ 中存在一条从 i 到每个 $j \in [n]$的弧。于是， $G(h) = K_n$，并且由于 $h \sim f$，我们有 $K_n \in \mathbb{G}(f)$。 □

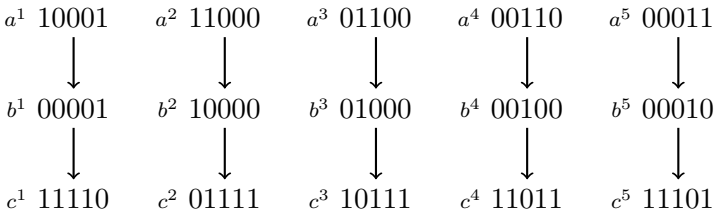


图 6：由 π 在引理 4 中对 $n = 5$进行标记。

现在我们证明，本小节开头给出的涉及独立集的第三个条件对于 $K_n \in \mathbb{G}(f)$ 是充分的。准确表述如下。

引理 5. 设 $f \in F(n,q)$，其中 $n \geq 5$且 $f \neq \mathsf{cst}$。若 f有一个大小至少为$2n$的独立集，则 $K_n \in \mathbb{G}(f)$。

证明比不动点和极限环的情形更复杂，因此我们将证明分开进行。首先证明，若 $n \geq 5$ 且 $f \neq \mathrm{cst}$，那么只要满足以下条件之一，就有 $K_n \in \mathbb{G}(f)$:

- f有 是一个独立集 A，其中包含 $|A| \geq n+k$ 和 $|f(A)| = 2k$，对于某个 $1 \leq k \leq n$.
- f 有一个独立集 A，其中包含 $|A| > n$ 和 $|f(A)| = 1$。

接下来我们证明，若 f 有一个大小至少为 $2n$的独立集，则以下两个条件中至少有一个成立，由此证明引理5。

引理 6. 设 $f \in F(n,q)$，其中 $n \geq 5$。若 f有一个独立集 A，使得 $|A| \geq n+k$且 $|f(A)| = 2k$，对于某个 $1 \leq k \leq n$，则 $K_n \in \mathbb{G}(f)$。

证明。假设 f有一个由 A构成的独立集 f，使得 $|A| \geq n+k$且 $|f(A)| = 2k$，对于某个 $1 \leq k \leq n$，并假设 $|A|$ 在满足这些性质的集合中是极小的。

(1) $|A| = n+k$。
事实上，如果 $|A| > n+k$，那么 $|A| > 2k$，因此存在互异的 a、$a' \in A$，使得 $f(a) = f(a')$。因此，$A' = A \setminus \{a\}$ 是 f 的一个独立集，使得 $|A'| = |A| - 1 \geq n+k$ 且$|f(A')| = 2k$，这与 $|A|$的极小性矛盾。这就证明了 (1)。

记 $f(A) = \{a^1, \ldots, a^{2k}\}$，并对 $p \in [2k]$记 $A_p = f^{-1}(a^p) \cap A$。因此，$\{A_1, \ldots, A_{2k}\}$ 是 A 的一个划分。现在进入证明的技术部分。

(2) 存在 $\{0,1\}^n$ 的互不相交子集 X_1、.....、X_{2k}，其大小分别为 $|A_1|$、.....、$|A_{2k}|$，使得对所有 $i \in [n]$，存在 $p \in [k]$ 和 $x \in X_{2p-1}$，满足 $x + e_i \in X_{2p}$。
令 $I_1, \ldots, I_{2k}$ 为 $[n]$ 的一个划分（其中某些成员可能为空），使得对于$1 \leq \ell \leq 2k$，I_ℓ 的大小在 ℓ 为奇数时为 $|A_\ell| - 1$，否则为 $|A_\ell|$；由 (1) 可知 $|A_1| + \cdots + |A_{2k}| = n+k$，因此这样的划分存在。
对于 $p \in [k]$，选取一个配置 $x^{2p-1} \in \{0,1\}^n$、一个分量 $j_{2p} \in I_{2p}$，并令 t

$$\begin{aligned} X_{2p-1} &= \{x^{2p-1}\} \cup \{x^{2p-1} + e_{j_{2p}} + e_i \mid i \in I_{2p-1}\}, \\ X_{2p} &= \{x^{2p-1} + e_i \mid i \in I_{2p}\}. \end{aligned}$$

显然，$|X_{2p-1}| = |I_{2p-1}| + 1 = |A_{2p-1}|$ 和 $|X_{2p}| = |I_{2p}| = |A_{2p}|$。
令 $i \in [n]$，并证明存在 $p \in [k]$ 和 $x \in X_{2p-1}$，使得 $x + e_i \in X_{2p}$。对于某个 $1 \leq \ell \leq 2k$，我们有 $i \in I_\ell$。若 $\ell = 2p-1$，则令 $x = x^{2p-1} + e_{j_{2p}} + e_i$，可得 $x \in X_{2p-1}$ 和 $x + e_i = x^{2p-1} + e_{j_{2p}} \in X_{2p}$。若 $\ell = 2p$，则令 $x = x^{2p-1}$，可得 $x \in X_{2p-1}$ 和 $x + e_i \in X_{2p}$。因此，任意固定分量 j_{2p} 后，我们只需证明可以选择配置 x^{2p-1}，使集合 $X_1, \ldots, X_{2k}$ 两两不相交。

当 $k = 1$时，这显然成立，因为无论如何选择 x^1，X_1 和 X_2 都不相交。若 $k = 2$，则由于 $n \geq 5$，取 $x^1 = \mathbf{0}$ 和 $x^3 = \mathbf{1}$后，集合 X_1、X_2、X_3、X_4 两两不相交：X_1 中的配置重量为 0 或 2；X_2 中的配置重量为 1；X_3 中的配置重量为 n 或 $n-2$；而 X_4 中的配置重量为 $n-1$。

现在假设 $k \geq 3$，并为所有 $p \in [k]$选择 $x^{2p-1} = e_{j_{2p-2}}$，其中 j_0 表示 j_{2k}。那么每个 X_{2p-1} 只包含重量为 1 或 3 的配置，而每个 X_{2p} 只包含重量为 2 的配置。因此，给定 $1 \leq p < q \leq k$，我们必须证明 $X_{2p-1} \cap X_{2q-1} = \emptyset$ 和 $X_{2p} \cap X_{2q} = \emptyset$。

假设 $x \in X_{2p-1} \cap X_{2q-1}$。如果 x 的重量为 1，那么我们可以推得 $x = e_{j_{2p-2}} = e_{j_{2q-2}}$，但这不成立，因为 $p \neq q$。如果 x 的重量为 3，那么对某个 $i \in I_{2p-1}$ 有 $x_i = 1$，而对所有 $y \in X_{2q-1}$ 都有 $y_i = 0$，这就产生了矛盾。因此，$X_{2p-1} \cap X_{2q-1} = \emptyset$。

现在假设 $x \in X_{2p} \cap X_{2q}$。那么，对于某个 $i_{2p} \in I_{2p}$ 和 $i_{2q} \in I_{2q}$，有 $x = e_{j_{2p-2}} + e_{i_{2p}} = e_{j_{2q-2}} + e_{i_{2q}}$。因此，$i_{2p} = j_{2q-2}$ 且 $i_{2q} = j_{2p-2}$。于是，$j_{2q-2} \in I_{2p}$，并且由于 $p < q$，这意味着 $q = p + 1$。此外，$j_{2p-2} \in I_{2q}$，并且由于 $p < q$，这意味着 $p = 1$ 和 $q = k$；但由于 $k \geq 3$，于是 $q \neq p + 1$。因此，$X_{2p} \cap X_{2q} = \emptyset$。于是，集合 X_1、.....、X_{2k} 确实两两不相交。这就证明了 (2)。

设 X_1、.....、X_{2k} 如 (2) 中所述。令 $X = X_1 \cup \cdots \cup X_{2k}$，其大小为 $n + k$。

(3) 存在 $Y \subseteq \{0,1\}^n$，其中 $|Y| \geq n$ 满足 Y、$Y + \mathbf{1}$ 和 X 两两不相交。

令 Z 为 $\{0,1\}^n$ 的任意一个大小为 2^{n-1} 的子集，满足 Z 和 $Z + \mathbf{1}$ 不相交。令 Y 为所有满足 y、$y + \mathbf{1} \notin X$ 的 $y \in Z$ 组成的集合。显然，Y、$Y + \mathbf{1}$、X 两两不相交，因此只需证明 $|Y| \geq n$。

令 $X^0 = X \cap Z$ 和 $X^1 = X \cap (Z + \mathbf{1})$，我们有 $Y = Z \setminus (X^0 \cup (X^1 + \mathbf{1}))$，因此 $|Y| \geq |Z| - |X^0| - |X^1|$。由于 Z 和 $Z + \mathbf{1}$ 不相交，X^0 和 X^1 是 X 的互不相交子集，因此

$$|Y| \geq |Z| - |X| = 2^{n-1} - (n + k) \geq 2^{n-1} - 2n \geq n.$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $n \geq 5$。

设 $Y = \{y^1, \ldots, y^k\}$ 是 $\{0,1\}^n$ 的一个大小为 k 的子集，使得 Y、$Y + \mathbf{1}$ 和 X 两两不相交；根据 (3)，这样的子集存在。因此，存在一个 $\{0,1\}^n$ 上的置换 π，使得对所有 $p \in [k]$:

- $\pi(a^{2p-1}) = y^p$,
- $\pi(a^{2p}) = y^p + \mathbf{1}$,
- $\pi(A_{2p-1}) = X_{2p-1}$,
- $\pi(A_{2p}) = X_{2p}$。

参见图7的示意图。设 $h = \pi \circ f \circ \pi^{-1}$，并证明 $G(h) = K_n$。由于集合 X_1、$\ldots$、X_{2k} 如式 (2) 所示，对于每个 $i \in [n]$，都存在 $p \in [k]$ 和 $x \in X_{2p-1}$，使得 $x + e_i \in X_{2p}$。由于 $\pi^{-1}(x) \in A_{2p-1}$ 且 $\pi^{-1}(x + e_i) \in A_{2p}$，我们有 $h(x) = \pi(a^{2p-1}) = y^p$ 且 $h(x + e_i) = \pi(a^{2p}) = y^p + \mathbf{1}$。因此，$h(x)$ 和 $h(x + e_i)$ 在每个分量中都不同，所以 $G(h)$ 有一条从 i 指向每个 $j \in [n]$ 的弧。因此，$G(h) = K_n$，并且由于 $h \sim f$，我们有 $K_n \in \mathbb{G}(f)$。 □

引理 7。设 $f \in F(n,q)$，其中 $n \geq 5$ 且 $f \neq$ 为常数。若 f 有一个独立集 A，满足 $|A| > n$ 且 $|f(A)| = 1$，则 $K_n \in \mathbb{G}(f)$。

证明。设 A 是 f 的独立集，其中 $|A| > n$ 和 $|f(A)| = 1$。那么，对于某个配置 $a \in [\![q]\!]^n$，$f(A) = \{a\}$。由于 $f \neq \mathsf{cst}$，存在 $b \in [\![q]\!]^n$，使得 $f(b) \neq a$，因此 $b \notin A$。我们考虑三种情形。

- 情况1：$f(a) \neq a$。由于 $|A| > n$，在 A 中存在 n 个配置 $a^1, \ldots, a^n$，它们与 $f(a)$ 不同。于是 $a^1, \ldots, a^n, a, f(a)$ 都互不相同，因此存在一个 $[\![q]\!]^n$ 的置换 π，使得:
  - $\pi(a) = \mathbf{0}$,
  - $\pi(f(a)) = \mathbf{1}$,
  - $\pi(a^i) = e_i$ for $1 \leq i \leq n$.

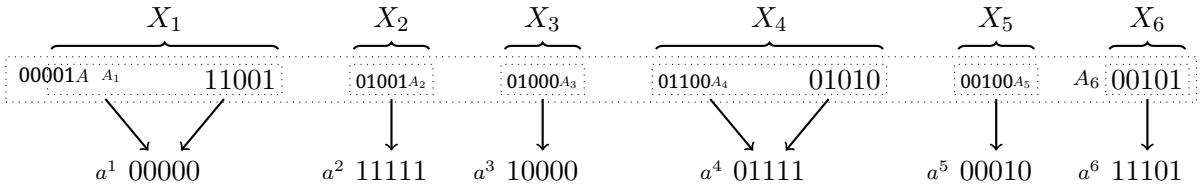


图7：引理 6 中由 π 给 $n = 5$ 和 $k = 3$ 进行的标记。独立集 A 的大小为 $|A| = n+k = 8$，其像 $f(A) = \{a^1, \ldots, a^6\}$ 的大小为 $2k = 6$。由于集合 A_1、……、A_6 的连续大小为 (2, 1, 1, 2, 1, 1)，我们必须将 $[n]$ 划分为 6 个部分 I_1、……、I_6，使其连续大小为 (1, 1, 0, 2, 0, 1)。我们取 $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = (\{1\}, \{2\}, \emptyset, \{3, 4\}, \emptyset, \{5\})$。我们必须分别在 X_2、X_4、X_6 中各选一个元素 j_2、j_4、j_6。我们选择 $j_2 = 2$、$j_4 = 3$ 和 $j_6 = 5$。根据这些选择，我们得到图中所示的集合 X_1、……、X_6，它们用于标记 A_1、……、A_6 中的配置。最后，我们必须选取由 $k = 3$ 个配置组成的集合 Y，使得 Y、$Y + \mathbf{1}$ 和 $X = X_1 \cup \cdots \cup X_6$ 两两不相交。我们选择 $Y = \{00000, 10000, 00010\}$，用它来标记 a_1、a_3、a_5；随后用 $Y + \mathbf{1}$ 相应地标记 a_2、a_4、a_6。注意：$11001 \in X_1$ 和 $01001 \in X_2$ 仅在分量 1 上不同；$01000 \in X_1$ 和 $01001 \in X_2$ 仅在分量 2 上不同；$01000 \in X_3$ 和 $01100 \in X_4$ 仅在分量 3 上不同；$01000 \in X_3$ 和 $01010 \in X_4$ 仅在分量 4 上不同；$00100 \in X_5$ 和 $00101 \in X_6$ 仅在分量 5 上不同。

图 8 展示了一个示例。令 $h = \pi \circ f \circ \pi^{-1}$，并证明 $G(h) = K_n$。对于$i \in [n]$，$h(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$，且 $h(e_i) = \mathbf{0}$ 在每个分量上都不同，因此 $G(h)$中存在一条从i 指向每个 $j \in [n]$的弧。因此，$G(h) = K_n$，并且由于 $h \sim f$，我们有 $K_n \in \mathbb{G}(f)$。

- 情形 2：$f(a) = a$和 $f(b) = b$。设 $a^1, \ldots, a^n \in A$ 两两不同。由于 $b = f(b) \neq a$，因此 $a^1, \ldots, a^n, a, b$ 也两两不同。所以存在一个从 $[\![q]\!]^n$ 到 $[\![q]\!]^n$ 的置换 π，使得：

  – $\pi(a) = \mathbf{1}$，– $\pi(b) = \mathbf{0}$，– $\pi(a^i) = e_i$，适用于 $1 \leq i \leq n$。

  图 9 给出了示意图。设 $h = \pi \circ f \circ \pi^{-1}$，并证明 $G(h) = K_n$。对于$i \in [n]$，$h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，且 $h(e_i) = \mathbf{1}$ 在每个分量上都不同，因此 $G(h)$ 中有一条弧从 i 指向每个 $j \in [n]$。所以，$G(h) = K_n$，并且由于 $h \sim f$，我们有 $K_n \in \mathbb{G}(f)$。

- 情形 3：$f(a) = a$和 $f(b) \neq b$。由于 $|A| > n$，存在大小为 n 的 $A' \subseteq A \setminus \{f(b)\}$。那么 $A' \cup \{b\}$是一个大小为 $n + 1$ 的独立集，并且 $|f(A' \cup \{b\})| = |\{a, f(b)\}| = 2$，因此根据引理 6，$K_n \in \mathbb{G}(f)$。

□

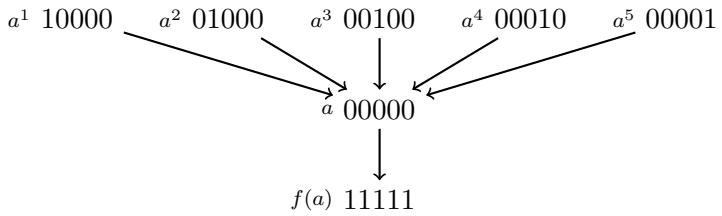


图 8：标记方式 π 在引理 7 的第一种情形中，适用于 $n = 5$。

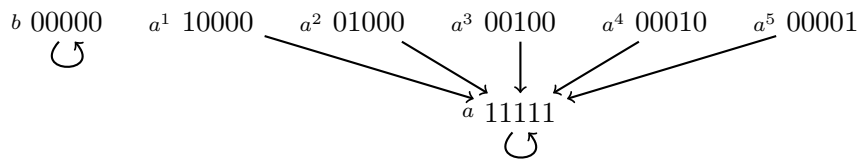


图 9：通过 π 在引理 7 的第二种情形中为 $n = 5$标记。

引理 5 的证明。设 f 有一个大小为 $|A| \geq 2n$ 的独立集 A。那么我们可以选择 A，使得 $|A| = 2n$，进而 $|f(A)| \leq 2n$。因此，若 $|f(A)|$ 是偶数，则对于某个 $k \in [n]$，有 $|f(A)| = 2k$，从而根据引理 6，$K_n \in \mathbb{G}(f)$。所以假设 $|f(A)|$ 是奇数。若 $|f(A)| = 1$，则根据引理 7，$K_n \in \mathbb{G}(f)$。所以假设对于某个 $1 \leq k < n$，有 $|f(A)| = 2k+1$。记 $f(A) = \{a^1, \ldots, a^{2k+1}\}$，并令对 $1 \leq p \leq 2k+1$，$A_p = f^{-1}(a^p) \cap A$。不妨设 $|A_1| \leq |A_2| \leq \cdots \leq |A_{2k+1}|$。那么 $A' = A \setminus A_1$ 是一个独立集，且$|f(A')| = 2k$。若 $|A'| \geq n+k$，则根据引理 6，$K_n \in \mathbb{G}(f)$。所以假设 $|A'| < n+k$。由于$|A'| = 2n - |A_1|$，我们有 $|A_1| > n-k$。若 $|A_2| \geq k$，则 $A'' = A_1 \cup A_2$ 是一个独立集，且$|A''| \geq n+1$并且 $|f(A'')| = 2$，因此根据引理 6，$K_n \in \mathbb{G}(f)$。所以假设 $|A_2| < k$。那么$n - k < |A_1| \leq |A_2| < k$，因此 $2k > n$。我们推得

$$2n = |A| = |A_1| + \cdots + |A_{2k+1}| \geq (2k+1)|A_1| > n|A_1|.$$

因此 $|A_1| = 1$，但此时 $|A'| = 2n-1 \geq n+k$，矛盾。因此，在所有情形下，$K_n \in \mathbb{G}(f)$。 □

根据引理 3、4 和5，要证明定理1 对于 $n \geq 5$，只需证明以下结论。

引理 8。设 $f \in F(n,q)$，其中 $f \neq$ cst、id 且 $n \geq 5$。那么以下至少有一项成立：

- f 至少有 $2n$ 个不动点，
- f 至少有 n 个长度为 ≥ 3 的极限环，
- f 至少有一个大小为 $2n$ 的独立集。

证明。令 F 为 f 的不动点集合，并令 L 为 $[\![q]\!]^n$ 的一个极小子集，它与 f 的每个长度为 ≥ 3 的极限环都相交。由 $\Gamma(f)$ 删除 $F \cup L$ 中的顶点后得到 Γ'；于是 Γ' 只有长度为二的环，因此它是二部图。假设前两个条件均不成立，即 $|F| < 2n$ 且 $|L| < n$。那么 Γ' 至少有 $N = q^n - 3n + 2$ 个顶点。由于 Γ' 是二部图，它有一个大小至少为 $N/2$ 的独立集 A。由于 Γ' 是 $\Gamma(f)$ 的诱导子图，A 是 f 的独立集，并且由于 $n \geq 5$，我们有

$$|A| \geq \lceil N/2 \rceil \geq \lceil (2^n - 3n + 2)/2 \rceil \geq 2n$$

因此第三个条件成立。 □

3 最小入度

在本节中，我们将证明定理 2，并重述如下。给定 $f \in F(n,q)$，我们用 $\delta^-(f)$ 表示满足以下条件的最小整数 d：集合 $\mathbb{G}(f)$ 中存在某个有向图，其最小入度至多为 d。于是，引言中定义的量 $\delta^-(n,q)$ 就是 $\delta^-(f)$ 在 $f \in F(n,q)$ 上的最大值；定理 2 表明，对于任意满足 $n \geq 3$ 或 $q \geq 3$ 的 $n, q \geq 2$，我们有

$$2 \leq \delta^-(n,2) \leq 5 \qquad \text{and} \qquad 2 \leq \delta^-(n,q) \leq (2 + o(1))q.$$

与其考虑入度，不如考虑严格入度，这样更方便。定义如下：给定一个顶点集为 $[n]$ 的有向图 G，$i \in [n]$ 在 G 中的严格入度，是 i 在 G 中除 i 之外的入邻点数量。因此，G 的最小严格入度就是 G 中某个顶点的最小严格入度。给定 $f \in F(n,q)$，我们用 $\delta_s^-(f)$ 表示满足以下条件的最小整数 d：集合 $\mathbb{G}(f)$ 中存在某个有向图，其最小严格入度至多为 d；我们有 $\delta^-(f) - 1 \leq \delta_s^-(f) \leq \delta^-(f)$。

我们的首要目标是针对任意 $0 \leq k < n$，给出 $\delta_s^-(f) \leq n-k-1$ 的充要条件，且该条件在同构下保持不变。这样，我们就得到了 $\delta_s^-(f)$ 的一种描述，它仅取决于 f 的同构类。该描述基于以下定义。

定义 1 (k-良好划分)。设 $f \in F(n,q)$ 和 $k \in [n]$。一个 k-良好划分 的 f 是一个划分 $A = \{A_1, \ldots, A_q\}$，其 $[\![q]\!]^n$ 中的某些部分可以为空，并且满足 $|A_p|$ 和 $|A_\ell \cap f^{-1}(A_p)|$ 都是 q^k 的倍数，对所有 p，$\ell \in [q]$。

当一个划分的各部分大小都相同时，该划分称为 平衡的。其刻画如下。

引理 9. 对任意 $f \in F(n,q)$ 和 $0 \leq k < n$，有 $\delta_s^-(f) \leq n-k-1$ 当且仅当 f 具有一个平衡的 k-良好划分。

事实上，定理 2 的证明只用到了一个方向，即如果 f 有一个平衡的 k-nice 划分，那么 $\delta_s^-(f) \leq n-k-1$。不过，另一个方向所需的主要性质将在后文用到，因此我们将其单独列出（见下文的引理 10），然后再将各部分结合起来得到这一刻画。为此，我们使用以下定义。给定 $x, y \in [\![q]\!]^n$，我们用 $\Delta(x,y)$ 表示满足 $x_i \neq y_i$ 的 $i \in [n]$ 的集合。给定 $I \subseteq [n]$，如果对于任意满足 $\Delta(x,y) \subseteq I$ 的 $x, y \in [\![q]\!]^n$，都有 $x \in X$ 当且仅当 $y \in X$，则称集合 $X \subseteq [\![q]\!]^n$ 是 I-闭的。容易看出，若 X 是 I-闭的，则 $|X|$ 是 $q^{|I|}$ 的倍数；若 X 和 Y 都是 I-闭的，则 $X \cap Y$ 也是如此。

引理 10. 令 $f \in F(n,q)$，并假设 $G(f)$ 有一个严格入度至多为$n-k-1$的顶点 i。对于 $1 \leq p \leq q$，令 A_p 为满足 $x_i = p-1$的 $x \in [\![q]\!]^n$ 的集合。那么 $A = \{A_1, \ldots, A_q\}$是 f的一个均衡的 k-良好划分。

证明. 对于 $k = 0$，结论显然，因此假设 $k \geq 1$。由于 A 显然是均衡的，我们只需证明 A 是 k-良好的。由于 i的严格入度至多为 $n-k-1$，存在一个大小为 k 的集合$I \subseteq [n]$，使得 $G(f)$ 中没有从 I 到 i 和 $i \notin I$的弧。由于 $i \notin I$，每个 A_p 都是 I-闭的。令 x 为 $f^{-1}(A_p)$ 中任意一个配置，即 $f_i(x) = p-1$。由于不存在从 I 到i的弧，对于每个满足 $\Delta(x,y) \subseteq I$的 $y \in [\![q]\!]^n$，我们有 $f_i(y) = f_i(x) = p-1$，因此 $y \in f^{-1}(A_p)$。由此，$f^{-1}(A_p)$ 是 I-闭的。由于对于任意 $p, \ell \in [k]$，A_ℓ和 $f^{-1}(A_p)$ 都是 I-闭的，它们的交集$A_\ell \cap f^{-1}(A_p)$也同样是 I-闭的，因此 $|A_\ell \cap f^{-1}(A_p)|$是 q^k的倍数，证毕。 □

引理的证明 9. 对于 $k = 0$ 结论显然成立，因此假设 $k \geq 1$。

首先，令 $f \in F(n,q)$，并假设 $G(h)$ 的最小严格入度至多为$n-k-1$，其中 $h \sim f$。由引理 10，h 具有一个平衡的 k-良好划分，这显然意味着 f 具有一个平衡的 k-良好划分。这证明了第一个方向。

对于另一个方向，设 $f \in F(n,q)$，并假设 f 有一个平衡的 k-良好划分$A = \{A_1, \ldots, A_q\}$。对于所有 $p, \ell \in [q]$，令 $A_p^- = f^{-1}(A_p)$ 和 $a_{p,\ell} = |A_p \cap A_\ell^-|/q^k$；由于$|A_p \cap A_\ell^-|$ 是 q^k 的倍数，因此它是一个整数。注意，对于所有 $p \in [q]$，我们有

$$\sum_{\ell \in [q]} a_{p,\ell} = q^{-k} \sum_{\ell \in [q]} |A_p \cap A_\ell^-| = q^{-k}|A_p| = q^{n-k-1}.$$

因此，存在 $X_p = \{X_{p,1}, \ldots, X_{p,q}\}$ 对 $[\![q]\!]^{n-k-1}$ 的一个划分（其中某些部分可能为空），使得 $|X_{p,\ell}| = a_{p,\ell}$ 对所有 $\ell \in [q]$ 均成立。对于所有 $p, \ell \in [q]$，令

$$Y_{p,\ell} = \{x \in [\![q]\!]^n \mid x_n = p-1,\ (x_1, \ldots, x_{n-k-1}) \in X_{p,\ell}\}.$$

由于 $X_{p,\ell}$ 中的每个配置在 $Y_{p,\ell}$中恰好扩展为 q^k 个配置，因此我们有$|Y_{p,\ell}| = a_{p,\ell}q^k = |A_p \cap A_\ell^-|$。此外，显然对于所有满足 $(p,\ell) \neq (p',\ell')$ 的 $p, \ell, p', \ell' \in [q]$，都有 $Y_{p,\ell} \cap Y_{p',\ell'} = \emptyset$，因此 $\{Y_{p,\ell} \mid p, \ell \in [q]\}$ 是 $[\![q]\!]^n$ 的一个划分。于是，存在一个 $[\![q]\!]^n$ 上的置换 π，使得对于所有 $p, \ell \in [q]$，都有 $\pi(A_p \cap A_\ell^-) = Y_{p,\ell}$。

设 $h = \pi \circ f \circ \pi^{-1}$，下面证明 $G(h)$ 没有从 $I = [n-k, n-1]$ 到 n的弧。因此，任取满足 $\Delta(x,y) \subseteq I$ 的 $x, y \in [\![q]\!]^n$，我们来证明 $h_n(x) = h_n(y)$。设 $p, \ell \in [q]$满足 $x \in Y_{p,\ell}$。由于 $Y_{p,\ell}$ 是 I-闭的，我们也有 $y \in Y_{p,\ell}$。于是，令 $x' = \pi^{-1}(x)$ 和 $y' = \pi^{-1}(y)$，可得 $x', y' \in A_p \cap A_\ell^-$，从而 $f(x')\ f(y') \in A_\ell$。因此，存在 $r, s \in [q]$使得 $f(x') \in A_\ell \cap A_r^-$且 $f(y') \in A_\ell \cap A_s^-$，由此可推得 $h(x) = \pi(f(x')) \in Y_{\ell,r}$，并且$h(y) = \pi(f(x')) \in Y_{\ell,s}$。因此，$h_n(x) = h_n(y) = \ell - 1$，如所需。故 $G(h)$ 没有从 I 到 n的弧，因此 n 在 $G(h)$ 中的严格入度至多为 $n-k-1$。 □

3.1 上界

根据前面的刻画，要证明$\delta_s^-(f)$很小，我们需要证明 f 存在一个平衡的 k-良好划分，其中某个 k足够大。我们将借助两个工具来证明这一点。第一个是下面这个简单的引理。给定 $f \in F(n,q)$，若 $X \subseteq [\![q]\!]^n$ 是的弱独立集，f 则 $f(x) \notin X \setminus \{x\}$ 对所有 $x \in X$ 均成立（因此 X 是一个可以包含自环的独立集）。

引理 11. 设 $f \in F(n,q)$ 且 $Y \subseteq [\![q]\!]^n$。则 f有一个弱独立集 $X \subseteq Y$，满足$|X| \geq |Y|/3$。

证明. 对于 $X \subseteq [\![q]\!]^n$，记 $\Gamma[X]$ 为 $\Gamma(f)$ 中由 X诱导的子图。取 Z 为 Y的一个极小子集，它与 $\Gamma[Y]$ 中所有长度至少为 3 的环相交。令 $Y' = Y \setminus Z$。由于$|Z| \leq |Y|/3$，我们有 $|Y'| = |Y| - |Z| \geq 2|Y|/3$。从 $\Gamma[Y']$ 中删去自环，得到 Γ'。于是 Γ' 是二部图，因为每个环的长度都是 2。因此 Γ' 有一个独立集 $X \subseteq Y'$，满足 $|X| \geq |Y'|/2 \geq |Y|/3$。由于 X 是 Γ' 的一个独立集，不存在互不相同的 x、$y \in X$使得 $f(x) = y$，由此可推出 X是 f的弱独立集。 □

第二个工具来自加法数论，并基于以下定义。

定义 2（$s(m,d)$）。对于任意整数 $m, d \geq 1$，令 $s(m,d)$ 为满足以下条件的最小整数 s：对于任意函数 a_1、……、a_d：$[s] \to \mathbb{N}$，存在一个大小为 m 的子集 $X \subseteq [s]$，使得对于每个 $i \in [d]$，$\sum_{x \in X} a_i(x)$ 都是 m 的倍数。

$s(m,d)$ 的存在性及其至多为 $(m-1)\,m^d - 1$，是鸽巢原理的一个直接推论。具体来说，若对于所有 $i \in [d]$，都有 $a_i(x) \equiv a_i(y) \bmod m$，则称 x、$y \in [s]$ 等价。等价类至多有 m^d 个，因此，如果 $s \geq (m-1)m^d + 1$，那么根据鸽巢原理，某个等价类的大小至少为 m；该类中任意大小为 m 的子集 X 都符合定义。但还存在更好的界。Erd¨os、Ginzburg 和 Ziv 著名地证明了 $s(m,1) = 2m-1$ [3]。Reiher 确定了 $s(m,2)$ 的精确值，从而解决了 Kemnitz 提出的一个长期未解猜想。

定理 4（Reiher [6]）。对于每个 $m \geq 1$，

$$s(m,2) = 4m - 3.$$

因此，$s(m,1)$ 和 $s(m,2)$ 关于 m 是线性的。通过深入的论证，Alon 和 Dubiner 证明了，对于每个固定的 d，$s(m,d)$ 实际上关于 m 是线性的。

定理 5 (Alon-Dubiner [1])。 存在一个绝对常数 c 使得，对于所有 m， $d \geq 1$，

$$s(m,d) \leq (cd\log_2 d)^d m.$$

我们现在证明，任意 $f \in F(n,q)$ 对某个足够大的 k 都有一个平衡的 k-优良划分，这可用量 $s(m,d)$ 表示。我们先考虑情形 $q=2$，在此情形下，我们优化 $s(m,d)$ 的用法，以便采用 Reiher 给出的 $d=2$ 的精确值。一般情形无需进行这种优化，证明方法相同，随后给出。

引理 12. 对任意满足以下条件的 k，每个 $f \in F(n,2)$ 都有一个平衡的 k-优良划分

$$3s(2^k,2) \leq 2^{n-1}.$$

证明。设 $f \in F(n,2)$。对于 $X \subseteq \{0,1\}^n$，我们用 X^- 作为 $f^{-1}(X)$ 的简写。令 k 如陈述所示。注意，令 $A_1 = \{0,1\}^n$ 和 $A_2 = \emptyset$，我们便得到一个 k-优良划分$\{A_1, A_2\}$，因为 $|A_1| = |A_1 \cap A_1^-| = 2^n$ 且 $|A_2| = |A_1 \cap A_2^-| = |A_2 \cap A_1^-| = |A_2 \cap A_2^-| = 0$。因此存在一个 k-优良划分 $\{A_1, A_2\}$，满足 $|A_1| \geq 2^{n-1}$，其中 A_1 在满足此性质的划分中取最小值。我们将证明 $|A_1| = 2^{n-1}$，从而该划分是平衡的。反设$|A_1| > 2^{n-1}$。

根据引理11，存在一个子集 $Y \subseteq A_1$，其大小至少为 $|A_1|/3$，且该子集是一个弱独立集。对于 $x \in Y$，令

$$\alpha_1(x) = |A_1 \cap f^{-1}(x)|,$$

$$\alpha_2(x) = |A_2 \cap f^{-1}(x)|,$$

$$\beta_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(x) \in A_1 \setminus \{x\}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

由于 $|A_1| \geq 2^{n-1}$ 我们有 $|Y| \geq |A_1|/3 \geq 2^{n-1}/3 \geq s(2^k,2)$。考虑定义在 Y 上的 2 个函数a_1、a_2，其定义为 $a_1(x) = \alpha_1(x) + \beta_1(x)$ 和 $a_2(x) = \alpha_2(x) - \beta_1(x)$，根据 s 的定义，我们可以推知存在一个子集 $X \subseteq Y$，其大小为 2^k，使得 $\sum_{x\in X} a_1(x)$ 和 $\sum_{x\in X} a_2(x)$ 是 2^k 的倍数。令 $\alpha_i(X) = \sum_{x\in X} \alpha_i(x)$（其中 $i=1$ 取 1、2），并令 $\beta_1(X) = \sum_{x\in X} \beta_1(x)$，我们得到 $\alpha_1(X) + \beta_1(X)$ 和 $\alpha_2(X) - \beta_1(X)$ 是 2^k 的倍数。此外:

$$\alpha_i(X) = |A_i \cap X^-| \text{ for } i = 1,2, \tag{1}$$

$$\beta_1(X) = |X \cap A_1^-| - |X \cap X^-|. \tag{2}$$

（1）显然，因为

$$|A_i \cap X^-| = |A_i \cap (\cup_{x\in X} f^{-1}(x))| = \sum_{x\in X} |A_i \cap f^{-1}(x)| = \alpha_i(X).$$

对于 (2)，注意到 $\beta_1(X)$ 是满足 $f(x) \in A_1 \setminus \{x\}$ 的 $x \in X$ 的数量。由于 X 弱独立， $f(x) \in A_1 \setminus \{x\}$ 等价于 $f(x) \in A_1 \setminus X$，因此 $\beta_1(X)$ 是满足 $f(x) \in A_1 \setminus X$ 的 $x \in X$ 的数量，也就是说， $\beta_1(X) = |X \cap (A_1 \setminus X)^-| = |X \cap A_1^-| - |X \cap X^-|$。

考虑这个划分

$$\{B_1, B_2\} = \{A_1 \setminus X, A_2 \cup X\}.$$

回顾一下， $\{A_1, A_2\}$ 是 k-好的，因此 $|A_1|$ 是 2^k的倍数；又由于我们还知道 $|A_1| > 2^{n-1}$，所以可得 $|B_1| = |A_1| - 2^k \geq 2^{n-1}$。因此，为了得到所需的矛盾，只需证明 $\{B_1, B_2\}$ 是 k-好的。首先，由于 $|X| = 2^k$，显然

$|B_1|$ 和 $|B_2|$ 都是 2^k的倍数。因此，只需证明对任意 $1 \le i$、$j \le 2$，$|B_i \cap B_j^-|$ 都是 2^k的倍数。首先，利用（1）和（2），我们有：

$$\begin{aligned}|B_1 \cap B_1^-| &= |(A_1 \setminus X) \cap (A_1^- \setminus X^-)| \\ &= |A_1 \cap A_1^-| - |A_1 \cap X^-| - |X \cap A_1^-| + |X \cap X^-| \\ &= |A_1 \cap A_1^-| - \alpha_1(X) - \beta_1(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|B_2 \cap B_1^-| &= |(A_2 \cup X) \cap (A_1^- \setminus X^-)| \\ &= |A_2 \cap A_1^-| - |A_2 \cap X^-| + |X \cap A_1^-| - |X \cap X^-| \\ &= |A_2 \cap A_1^-| - \alpha_2(X) + \beta_1(X).\end{aligned}$$

由于 $|A_1 \cap A_1^-|$、$|A_2 \cap A_1^-|$、$\alpha_1(X) + \beta_1(X)$ 和 $\alpha_2(X) - \beta_1(X)$ 都是 2^k 的倍数，我们推得 $|B_1 \cap B_1^-|$ 和 $|B_2 \cap B_1^-|$ 都是 2^k 的倍数。于是有

$$|B_1 \cap B_2^-| = |B_1| - |B_1 \cap B_1^-|$$

$$|B_2 \cap B_2^-| = |B_2| - |B_2 \cap B_1^-|.$$

由于 $|B_1|$、$|B_2|$、$|B_1 \cap B_1^-|$ 和 $|B_2 \cap B_1^-|$ 都是 2^k 的倍数，我们推得 $|B_1 \cap B_2^-|$ 和 $|B_2 \cap B_2^-|$ 都是 2^k 的倍数。因此，$\{B_1, B_2\}$ 是 k-nice，这与假设矛盾。 □

结合该引理、引理 9 以及 Reiher 定理（其表述为 $s(m,2) = 4m - 3$），我们得到定理 2中的第一个上界。

引理 13. 对所有 $n \ge 1$，我们有 $\delta^-(n,2) \le 5$，且 $\delta^-(5, 2) \le 4$。

证明。令 $f \in F(n, 2)$。利用定理 4 可得

$$3s(2^{n-5}, 2) = 12 \cdot 2^{n-5} - 9 \le 16 \cdot 2^{n-5} = 2^{n-1}.$$

因此，由引理 12，f有一个平衡的（$n-5$）-优美划分。于是，根据引理 9，$\delta_s^-(f) \le n-(n-5) - 1 = 4$。这证明了 $\delta^-(n, 2) \le 5$。接着，由于 $3s(2, 2) = 15 \le 2^4$，我们由引理 12 推得，每个 $f \in F(5, 2)$ 都有一个 1-优美划分，因此根据引理 9，$\delta_s^-(f) \le 3$。这证明了 $\delta^-(5, 2) \le 4$。 □

现在，我们将前面的论证推广到更大的字母表。

引理 14. 对任意满足以下条件的 k，每个 $f \in F(n, q)$ 都具有一个平衡的 k-良好划分：

$$3s(q^k, 2q) \le q^{n-1}.$$

证明. 设 $f \in F(n, q)$。对于 $X \subseteq [\![q]\!]^n$，我们使用 X^- 作为 $f^{-1}(X)$ 的简写。令 k 如陈述中所述。给定 $[\![q]\!]^n$ 的一个划分 $A = \{A_1, \ldots, A_q\}$，如果 $|A_1| \ge q^{n-1}$ 且对所有 $2 \le i \le q$ 都有 $|A_i| \le q^{n-1}$，则称 A 为 1-支配的。注意，通过对 $2 \le i \le q$ 设定 $A_1 = [\![q]\!]^n$ 和 $A_i = \emptyset$，我们得到一个 1-支配的 k-良好划分：对于每个 $2 \le i \le q$ 和 $1 \le j \le q$，都有 $|A_1| = |A_1 \cap A_1^-| = q^n$ 和 $|A_i| = |A_1 \cap A_i^-| = |A_i \cap A_j^-| = 0$。因此，不妨设 A 是一个具有最小 $|A_1|$的 1-支配 k-良好划分。

我们将证明 $|A_1| = q^{n-1}$，它（由于 A 是 1-支配的）迫使 A 达到平衡。反设 $|A_1| > q^{n-1}$。由于 A 是 1-支配的，存在 $2 \le i \le n$ 使得 $|A_i| < q^{n-1}$。不妨设 $|A_2| < q^{n-1}$。

由引理11可知，存在一个子集 $Y \subseteq A_1$，其大小至少为 $|A_1|/3$，且该子集是弱独立集。对于 $x \in Y$和 $1 \le i \le q$，令

$$\alpha_i(x) = |A_i \cap f^{-1}(x)|,$$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(x) \in A_i \setminus \{x\}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\beta_i'(x) = \begin{cases} \beta_i(x) + 1 & \text{if } i = 2 \text{ and } f(x) = x, \\ \beta_i(x) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于 $|A_1| \geq q^{n-1}$，我们有 $|Y| \geq |A_1|/3 \geq q^{n-1}/3 \geq s(q^k, 2q)$。考虑函数 $2q$ functionsα_i, β_i'，根据 s 的定义，我们推得存在一个子集 $X \subseteq Y$，其大小为 q^k，使得对于所有 $1 \leq i \leq q$，$\alpha_i(X) = \sum_{x \in X} \alpha_i(x)$ 和 $\beta_i'(X) = \sum_{x \in X} \beta_i'(x)$ 都是 q^k 的倍数。此外：

$$\alpha_i(X) = |A_i \cap X^-| \text{ for all } 1 \leq i \leq q, \tag{1}$$

$$\beta_i(X) = |X \cap A_i^-| \text{ for all } 2 \leq i \leq q, \tag{2}$$

$$\beta_i'(X) = |X \cap A_i^-| \text{ for all } 3 \leq i \leq q, \tag{3}$$

$$\beta_1'(X) = |X \cap A_1^-| - |X \cap X^-|, \tag{4}$$

$$\beta_2'(X) = |X \cap A_2^-| + |X \cap X^-|. \tag{5}$$

（1）显然，因为

$$|A_i \cap X^-| = |A_i \cap (\cup_{x \in X} f^{-1}(x))| = \sum_{x \in X} |A_i \cap f^{-1}(x)| = \alpha_i(X).$$

对于（2），注意到 $\beta_i(X)$ 是满足 $f(x) \in A_i \setminus \{x\}$ 的 $x \in X$ 的数量；这等价于 $f(x) \in A_i$，因为 $2 \leq i \leq q$ 和 $x \in A_1$。因此，$\beta_i(X)$ 是满足 $f(x) \in A_i$ 的 $x \in X$ 的数量，即 $\beta_i(X) = |X \cap A_i^-|$。

（3）由（2）得出，因为对于 $3 \leq i \leq q$，$\beta_i' = \beta_i$。对于（4），注意到 $\beta_1' = \beta_1$，且 $\beta_1(X)$ 是满足 $f(x) \in A_1 \setminus \{x\}$ 的 $x \in X$ 的数量。由于 X 弱独立，$f(x) \in A_1 \setminus \{x\}$ 等价于 $f(x) \in A_1 \setminus X$，因此 $\beta_1'(X)$ 是满足 $f(x) \in A_1 \setminus X$ 的 $x \in X$ 的数量，即 $\beta_1'(X) = |X \cap (A_1 \setminus X)^-| = |X \cap A_1^-| - |X \cap X^-|$。为证明（5），令 ℓ 为满足 $f(x) = x$ 的 $x \in X$ 的数量。显然，$\beta_2'(X) = \beta_2(X) + \ell$；利用第二点可得 $\beta_2'(X) = |X \cap A_2^-| + \ell$。但由于 X 弱独立，对于 $x \in X$，$f(x) = x$ 当且仅当 $f(x) \in X$，因此 $\ell = |X \cap X^-|$，从而 $\beta_2'(X) = |X \cap A_2^-| + |X \cap X^-|$。

考虑划分

$$B = \{B_1, B_2, B_3, \ldots, B_q\} = \{A_1 \setminus X, A_2 \cup X, A_3, \ldots, A_q\}.$$

回想一下，A 是 k-良好的，因此 $|A_1|$、$|A_2|$ 是 q^k的倍数。又由于我们还有 $|A_1| > q^{n-1}$和 $|A_2| < q^{n-1}$，可知 $|B_1| = |A_1| - q^k \geq q^{n-1}$ 和 $|B_2| = |A_2| + q^k \leq q^{n-1}$，因此$B$ 是1-支配的。由此，为了得到所需的矛盾，只需证明 B 是 k-良好的。首先，由于 $|X| = q^k$，显然对于每个 $1 \leq i \leq q$，$|B_i|$ 都是 q^k 的倍数。因此，剩下只需证明，对于每个 $1 \leq i$、$j \leq q$，$|B_i \cap B_j^-|$ 都是 q^k 的倍数。当 $3 \leq i$、$j \leq q$时，这显然成立，因为 $|B_i \cap B_j^-| = |A_i \cap A_j^-|$。我们通过将其他交集大小表示为若干已知是 q^k倍数的数（正数或负数）之和，来证明这些交集大小都是 q^k 的倍数。为此，我们多次使用性质(1)、(3)、(4)、(5)。先考虑 $1 \leq i$、$j \leq 2$的情形：

$$\begin{aligned} |B_1 \cap B_1^-| &= |(A_1 \setminus X) \cap (A_1^- \setminus X^-)| \\ &= |A_1 \cap A_1^-| - |A_1 \cap X^-| - |X \cap A_1^-| + |X \cap X^-| \\ &= |A_1 \cap A_1^-| - \alpha_1(X) - \beta_1'(X) \end{aligned}$$

$$|B_1 \cap B_2^-| = |(A_1 \setminus X) \cap (A_2^- \cup X^-)|$$

$$
\begin{aligned}
&= |A_1 \cap A_2^-| + |A_1 \cap X^-| - |X \cap A_2^-| - |X \cap X^-| \\
&= |A_1 \cap A_2^-| + \alpha_1(X) - \beta_2'(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|B_2 \cap B_1^-| &= |(A_2 \cup X) \cap (A_1^- \setminus X^-)| \\
&= |A_2 \cap A_1^-| - |A_2 \cap X^-| + |X \cap A_1^-| - |X \cap X^-| \\
&= |A_2 \cap A_1^-| - \alpha_2(X) + \beta_1'(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|B_2 \cap B_2^-| &= |(A_2 \cup X) \cap (A_2^- \cup X^-)| \\
&= |A_2 \cap A_2^-| + |A_2 \cap X^-| + |X \cap A_2^-| + |X \cap X^-| \\
&= |A_2 \cap A_2^-| + \alpha_2(X) + \beta_2'(X).
\end{aligned}
$$

对于 $1 \le i \le 2$ 和 $3 \le j \le q$，我们有：

$$
\begin{aligned}
|B_1 \cap B_j^-| &= |(A_1 \setminus X) \cap A_j^-| \\
&= |A_1 \cap A_j^-| - |X \cap A_j^-| \\
&= |A_1 \cap A_j^-| - \beta_j'(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|B_2 \cap B_j^-| &= |(A_2 \cup X) \cap A_j^-| \\
&= |A_2 \cap A_j^-| + |X \cap A_j^-| \\
&= |A_2 \cap A_j^-| + \beta_j'(X).
\end{aligned}
$$

最后，对于 $3 \le i \le q$ 和 $1 \le j \le 2$，我们有：

$$
\begin{aligned}
|B_i \cap B_1^-| &= |A_i \cap (A_1^- \setminus X^-)| \\
&= |A_i \cap A_1^-| - |A_i \cap X^-| \\
&= |A_i \cap A_1^-| - \alpha_i(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|B_i \cap B_2^-| &= |A_i \cap (A_2^- \cup X^-)| \\
&= |A_i \cap A_2^-| + |A_i \cap X^-| \\
&= |A_i \cap A_2^-| + \alpha_i(X).
\end{aligned}
$$

因此，对于所有 $1 \le i$、$j \le q$，$|B_i \cap B_j^-|$ 确实是 q^k 的倍数，所以 B 是 k-nice，这就产生了矛盾。 □

将此引理与引理 9 以及 Alon-Dubiner 定理结合起来，该定理指出 $s(m,d) \le (cd\log_2 d)^d m$，其中某个常函数为 c，我们得到定理 2中的第二个上界。

引理 15. 对于所有 $n \ge 1$ 和 $q \ge 2$，我们有 $\delta^-(n,q) \le (2+o(1))q$。

证明。令 $f \in F(n,q)$，令 $\alpha(q) = 2c\log_2(2q)$，其中 c 如定理 5中所述，并令 $k = \lfloor \ell \rfloor$ wit h

$$
\ell = n - 2q\log_q(q\alpha(q)) - 1 - \log_q 3.
$$

利用定理5 得到第一个不等式，可得

$$
3s(q^k, 2q) \le 3(q\alpha(q))^{2q} q^k \le 3(q\alpha(q))^{2q} q^\ell = q^{n-1}.
$$

因此，由引理14，f具有一个平衡的 k-优美划分，因此由引理 $\delta_s^-(f) \le n-k-1$9，所以 $\delta^-(f) \le n-k$，并且由于 $k \ge \ell - 1$ 我们有

$$
\delta^-(f) \le 2q\log_q(q\alpha(q)) + 2 + \log_q 3 = \left(2 + 2\log_q(\alpha(q)) + (2+\log_q 3)q^{-1}\right) q.
$$

由于当 q 趋于无穷大时，$2\log_q(\alpha(q)) + (2+\log_q 3)q^{-1}$ 趋于 0，这就证明了引理。 □

3.2 下界

剩下的　　证明定理中下界的一个简单构造2，该构造基于一个简单的构造　　.

引理 16. 对所有 $n, q \geq 2$，若有 $n \geq 3$ 或 $q \geq 3$，则有 $\delta^-(n, q) \geq 2$。

证明. 设 $f \in F(n, q)$，其中有 $n, q \geq 2$ 和 $n \geq 3$ 或 $q \geq 3$。假设 f 有一个长度为 $\ell = q^{n-1} + 1$ 的极限环，其配置依次为 $x^1, \ldots, x^\ell$，并假设 x^1 是所有不在该极限环中的配置的像；因此 f 恰有 ℓ 个像。示意见图 10。我们将证明 $G(f)$ 的最小入度至少为二；又由于 f 在同构意义下已确定，这便证明了 $\delta^-(f) \geq 2$，引理得证。反设 $G(f)$ 有一个入度至多为 1 的顶点 i。

若 i 的入度为 0，则 f_i 是常值函数，它总是返回某个 $a \in [\![q]\!]$。因此，对于 f的所有像 x，都有 $x_i = a$，于是 f 至多有 $q^{n-1} < \ell$ 个像，这就产生了矛盾。

所以 i 的入度为 1。令 j 为它的入邻点（我们可能有 $i = j$）。于是存在一个非常值函数 g: $[\![q]\!] \to [\![q]\!]$，使得对所有 $x \in [\![q]\!]^n$，$f_i(x) = g(x_j)$。令 $Y = \{x^1, \ldots, x^{\ell-1}\}$，并注意到根据构造，$Y = [\![q]\!]^n \setminus f^{-1}(x^1)$。对于 $a \in [\![q]\!]$，我们设 $X_{i,a} = \{x \in [\![q]\!]^n \mid x_i = a\}$ 和 $X_{j,a} = \{x \in [\![q]\!]^n \mid x_j = a\}$。若 $X_{j,a}$ 不包含在 Y中，也就是说，若存在配置 x，满足 $x_j = a$ 且 $f(x) = x^1$，则 $g(a) = f_i(x) = x^1_i$。由此可推得，若对于每个 $a \in [\![q]\!]$，$X_{j,a}$ 都不包含在 Y 中，则 g 是常值函数（它总是返回 x^1_i），这就产生了矛盾。因此，对于某个 a，有 $X_{j,a} \subseteq Y$；又由于 Y的大小为 $\ell - 1 = q^{n-1} = |X_j$，我们推得 $_a|$，进而 $Y = X_{j,a}$。于是，令 $b = g(a)$，我们有 $f(Y) \subseteq X_{i,b}$；并且由于 $f(Y) = \{x^2, \ldots, x^\ell\}$的大小为 $\ell - 1 = q^{n-1} = |X_i$，我们推得 $_b|$，进而 $f(Y) = X_{i,b}$。因此，$X_{j,a}$ 和 $X_{i,b}$ 互不相同。此外，它们并不互不相交，因为 $X_{j,a} \cap X_{i,b} = Y \cap f(Y) = \{x^2, \ldots, x^{\ell-1}\}$ 的大小为 $\ell - 2 = q^{n-1} - 1 > 0$。由此推得 $i \neq j$，于是$|X_{j,a} \cap X_{i,b}| = q^{n-2}$。我们得到$q^{n-2} = q^{n-1} - 1$，这就产生了矛盾，因为 $n \geq 3$ 或 $q \geq 3$。 □

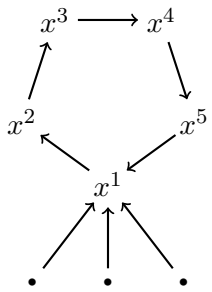


图 10：引理 16 关于 $n = 3$ 和 $q = 2$的函数。

4 稠密有向图

在本节中，我们将证明定理 3：对于 n，$q \geq 2$ 存在 $f \in F(n, q)$，使得 $\mathbb{G}(f)$ 中的每个有向图至少有 $\lfloor n^2/4 \rfloor$ 条弧。我们需要两个引理。在有向图中，源点 是入度为 0 的顶点，而非源点 是入度至少为 1 的顶点。

引理17。设 $f \in F(n, q)$，且 X 是 f 的像。设 $k \in [n]$，并假设对于 X 的所有非空真子集 Y，$|f^{-1}(Y)|$ 不是 q^k 的倍数。那么，$G(f)$ 的每个非源点的严格入度至少为 $n - k$。

证明。反设 $G(f)$ 有一个严格入度至多为$n-k-1$的非源点 i。对于 $1 \le p \le q$，令 A_p 为满足 $x_i = p-1$ 的 $x \in [\![q]\!]^n$ 的集合。根据引理 10，$A = \{A_1, \dots, A_q\}$ 是 f 的一个平衡的 k-优美划分。取 $1 \le p \le q$ 使得 $X \cap A_p \neq \emptyset$，并令 $Y = X \cap A_p$。若 $X \subseteq A_p$，则这意味着 f_i 是一个常值函数（总是返回p），这与 i 的入度至少为 1 矛盾。由此可知，Y 是 X 的非空真子集。此外，我们有 $|f^{-1}(Y)| = |f^{-1}(A_p)| = \sum_{\ell=1}^{q} |A_\ell \cap f^{-1}(A_p)|$。由于 A 是 k-优美的，求和中的每一项都是 q^k 的倍数。因此，$|f^{-1}(Y)|$ 是 q^k 的倍数，矛盾。

□

引理 18. 对所有 n、$q \ge 2$ 和 $k \in [n]$，存在 $f \in F(n,q)$，使得对每个 $G \in \mathbb{G}(f)$，G至少有 k 个非源点，并且 G 的所有非源点的严格入度至少为 $n-k$。

证明。令 X 为 $[\![q]\!]^n$ 的一个大小为 q^k 的子集，并令 $x^* \in X$。令 $f \in F(n,q)$，使得对所有 $x \in [\![q]\!]^n$，若 $x \in X$，则 $f(x) = x$；否则 $f(x) = x^*$。图 11 给出了示意图。因此，f 的像恰好是 X。我们将证明，$G(f)$ 至少有 k 个非源点，且每个非源点的严格入度至少为 $n-k$。由于 f 在同构意义下已确定，这就证明了该引理。

我们首先证明，$G(f)$ 的每个非源点的严格入度至少为 $n-k$。令 Y 为 X 的任意非空真子集，并令 $Y^- = f^{-1}(Y)$。我们有 $0 < |Y| < |X| = q^k$，因此 $|Y|$ 不是 q^k 的倍数。我们将证明 $|Y^-|$ 不是 q^k 的倍数。注意，对所有 $x \in X \setminus \{x^*\}$，$|f^{-1}(x^*)| = q^n - q^k + 1$ 且 $|f^{-1}(x)| = 1$。因此，若 $x^* \notin Y$，则 $|Y^-| = |Y|$ 不是 q^k 的倍数。若 $x^* \in Y$，则 $|Y^-| = |f^{-1}(x^*)| + |Y| - 1 = q^n - q^k + |Y|$；又由于 $|Y|$ 不是 q^k 的倍数，我们可推出 $|Y^-|$ 不是 q^k 的倍数。因此，根据引理17，$G(f)$ 的每个非源点的严格入度至少为 $n-k$。

令 ℓ 为 $G(f)$ 的非源点数。还需证明 $\ell \ge k$。令 I 为 $G(f)$ 的源点集合。对于每个 $i \in I$，f_i 都是一个常值函数，总是返回 $a_i \in [\![q]\!]$中的某个元素。令 Z 为满足对所有 $i \in I$都有 $x_i = a_i$ 的 $x \in [\![q]\!]^n$ 集合。我们有 $X \subseteq Z$，因此$q^k = |X| \le |Z| = q^{n-|I|} = q^\ell$。于是，$\ell \ge k$，正如所需。

□

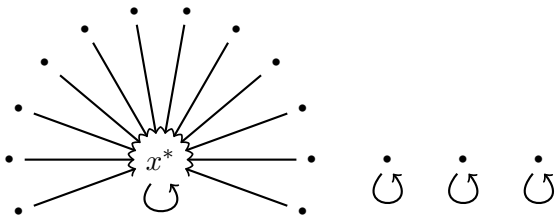


图 11：引理 18 关于 $n=4$ 和 $q=k=2$的函数。

定理 3 的证明现在显而易见：由引理 18 应用于 $k = \lfloor n/2 \rfloor$，存在 $f \in F(n,q)$，使得 $\mathbb{G}(f)$ 中的每个有向图都至少有 $\lfloor n/2 \rfloor$ 个入度至少为$n - \lfloor n/2 \rfloor$的顶点，因此至少有 $\lfloor n/2 \rfloor (n - \lfloor n/2 \rfloor) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ 条弧。

5 总结

- 我们称有向图 G 为（n,q）-通用的，若对于每个满足 $f \neq \mathrm{id}, \mathrm{cst}$ 的 $f \in F$（n,q），G 都同构于 $\mathbb{G}$（f）中的某个有向图。定理1指出，当且仅当 $n \ge 5$或 $q \ge 3$时，K_n 是（n,q）-通用的。事实上，对于 $n,q \ge 2$，任何（n,q）-通用有向图都同构于 K_n。确实，假设 G 是（n,q）-通用的。首先，若 $f \in F$（n,q）是一个双射，那么 $\mathbb{G}$（f）中的每个有向图都没有源点。因此，G 没有源点。接着，将引理 18 应用于 $k=1$，可得存在 $f \in F$（n,q），使得 $\mathbb{G}$（f）中的任意有向图至少有一个非源点，且每个

非源点的严格入度为 $n-1$。因此， G 具有这一性质；又因为它没有源点，我们便可推出每个顶点的严格入度均为 $n-1$。最后，若 $f \in F$（n, q）至少有$q^{n-1}+1$ 个不动点，那么很容易验证， $\mathbb{G}$（f）中的任意有向图都有 n 个自环。因此， G有 n 个自环，由此可推出它同构于 K_n。

- 我们证明了，当 n 相对于 q 足够大时，不存在满足 $\mathbb{G}(f)$ 仅包含 K_n 的 $f \in F(n,q)$，因为我们证明了对于某个仅依赖于 q 的常函数 c_q，有 $\delta^-(n,q) \leq c_q q$，因此 $\delta^-(n,q) < n$（对 $n > c_q q$）。特别地，对于 $n \geq 5$，不存在满足 $\mathbb{G}(f) = \{K_n\}$ 的 $f \in F(n,2)$，因为我们证明了 $\delta^-(5,2) \leq 4$，且 $\delta^-(n,2) \leq 5$。然而，对于每个 $q \geq 3$，都存在满足 $\mathbb{G}(f) = \{K_2\}$ 的 $f \in F(2,q)$，因为我们证明了 $\delta^-(2,q) = 2$。这一现象对每个 n 都成立吗？也就是说，对于每个固定的 n，当 q 相对于 n 足够大时，是否存在满足 $\mathbb{G}(f) = \{K_n\}$ 的 $f \in F(n,q)$？等价地说， $\delta^-(n,q)$ 是否必然随 q 增大？我们还证明了对于每个 $n \geq 3$，都有 $2 \leq \delta^-(n,2) \leq 5$；我们可以进一步问， $\delta^-(n,2)$ 是否为常函数，若是，它取四个可能值中的哪一个。

- 令 $d(n,q)$ 为最大的实数 $d \in [0,1]$，使得存在 $f \in F(n,q)$，满足 $\mathbb{G}(f)$ 中的每个有向图都有 dn^2 条弧，即密度为 d。我们证明， $d(n,q) \geq 1/4 - 1/n^2$，其中 $1/n^2$ 在 n 趋于无穷时趋于 0，也就是说为 $o(1)$。因此，这个下界与字母表大小 q 无关；由此，我们可以像上文那样探讨： $d(n,q)$ 是否必然随 q 增大。

致谢 本研究得到青年研究者项目 ANR-18- CE40-0002-01“FANs”的资助。

参考文献

[1] 诺加·阿隆、摩西·杜比纳。《一个格点问题与加法数论》。Combinatorica，15(3)：301–309，1995年9月。[2] 伯纳德·埃尔斯帕斯。《自主线性序列网络理论》。IRE 电路理论汇刊，6(1)：45–60，1959年。[3] Paul Erd¨os、亚伯拉罕·金兹堡和亚伯拉罕·齐夫。《加法数论中的定理》。以色列研究理事会公报 F，10：41–43，1961年。[4] 马克西米利安·加杜洛。《相互作用图对有限动力系统的影响》。Natural Computing，19(1)：15–28，2020年。[5] Nicolas Le Nov`ere。《分子和基因网络的定量与逻辑建模》。Nature Reviews Genetics，16：146–158，2015年。[6] 克里斯蒂安·赖赫尔。《关于 Kemnitz 的平面格点猜想》。The Ramanujan Journal，13(1)：333–337，2007年。[7] Ren´e Thomas 和马塞尔·考夫曼。《多稳态：细胞分化与记忆的基础。II. 以反馈回路为基础对调控网络进行逻辑分析》。Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science，11(1)：180–195，2001年。