arXiv:2301.01961v1 [math.AG] 5 Jan 2023

更多具有乘法的¨Chow–Kunneth 分解的 Fano 三维簇

ROBERT LATERVEER

摘要。我们展示了若干类具有乘法 Chow–K¨unneth 分解的 Fano 三维簇，这里采用 Shen–Vial 的定义。因此，这些三维簇的幂的 Chow 环中的某个 tautological 子环可嵌入上同调。作为论证的一个副产品，我们观察到，射影空间的双覆盖具有乘法 Chow–K¨unneth 分解。

1. 引言

给定一个在 $\mathbb{C}$上的光滑射影代数簇 Y，令 $A^i(Y) := CH^i(Y)_{\mathbb{Q}}$ 表示 Y的 Chow 群（即 Y上余维为 i 的代数循环组成的群，系数取 $\mathbb{Q}$，模掉有理等价）。交乘积在 $A^*(Y) = \bigoplus_i A^i(Y)$上定义了环结构，即 Y [14]的 Chow 环。

在 K3 曲面的特殊情形下，这种环结构具有显著的性质：

定理 1.1（Beauville–Voisin [3]）。设 S 为一条射影 K3 曲面。$\mathbb{Q}$子代数

$$\big\langle A^1(S), c_j(S)\big\rangle \ \subset\ A^*(S)$$

在循环类映射下嵌入上同调。

定理1.2（Voisin [54], Yin [57]）。设 S 为一条射影 K3 曲面，且 $m \in \mathbb{N}$。$\mathbb{Q}$子代数

$$R^*(S^m) := \big\langle A^1(S), \Delta_S\big\rangle \ \subset\ A^*(S^m)$$

（由除子的拉回和对角线 $\Delta_S \subset S \times S$ 的拉回生成）在循环类映射下嵌入上同调，对所有 $m \le 2\dim H^2_{tr}(S,\mathbb{Q})+1$ 均成立（其中 $H^2_{tr}(S,\mathbb{Q})$ 表示上同调的超越部分）。此外，$R^*(S^m)$ 对所有 $m \in \mathbb{N}$ 均嵌入上同调，当且仅当 S 是 Kimura 有限维的。

阿贝尔簇的 Chow 环也具有一个有趣的性质：存在一种由傅里叶变换定义的乘法分解 [1]。

受 K3 曲面和阿贝尔簇的特殊性质启发，Beauville [2] 猜想，对于某些特殊簇，Chow 环应当存在乘法的分裂。在 Beauville 的“分裂性质猜想”之后，Shen–Vial [47] 引入了乘法的 Chow–K¨unneth 分解这一概念（我们将其简称为“MCK

关键词与短语。代数循环、Chow 群、动机、Beauville 的“分解性质”猜想、乘法的 Chow–K¨unneth 分解、Fano 三维簇、典范环。2020 年数学主题分类：14C15、14C25、14C30。受 ANR 项目 ANR-20-CE40-0023 资助。

分解”）。借助 MCK 分解这一概念，Beauville 这一难以捉摸的“分裂性质猜想”便有了具体的含义。

很难准确判断哪些簇具有 MCK 分解。以下举例说明目前已知的情况：超椭圆曲线具有 MCK 分解 [47, 例 8.16],，但非常一般的亏格为 ≥ 3 的曲线不具有 MCK 分解 [12, 例 2.3]；K3 曲面具有 MCK 分解，但 $\mathbb{P}^3$ 中的某些高次数曲面不具有 MCK 分解（参见 [43], 中给出的例子；另见下文第 2 节）。

本文将重点讨论 Fano 三维簇，并提出以下问题：

问题 1.3. 设 X 是一个 Picard 数为 1 的 Fano 三维簇。X 是否具有 MCK 分解?

对 Picard 数的限制是必要的，以排除 Beauville 的反例[2, 例 9.1.5]。问题 1.3 对三次三维簇 [8], [12], 、两个二次曲面的交 [32], 、一个二次超曲面与一个三次曲面的交 [34], ， 以及亏格为 8 [37] 和亏格为 10 [38]的素 Fano 三维簇，答案均为肯定。

本文的主要结果针对另外几个族的 Fano 三维簇回答了问题1.3：

定理（=定理4.1）。以下光滑Fano三维簇具有乘法的 Chow– K¨unneth 分解：

- 加权射影空间 $\mathbb{P}(1_3, 2, 3)$ 中加权次数为 6 的超曲面；
- 四次双重实体；
- 六次双重实体；
- 二次超曲面的双覆盖，分歧沿其与一个四次超曲面的交；
- 特殊Gushel–Mukai三维簇。

表 1（位于本文末尾）列出了所有皮卡数 1 的 Fano 三维簇，以及关于它们的 MCK 已知结果。

为证明定理4.1，我们给出一个一般判据（命题 3.3），它在其他情形下也可能有用。例如，利用这一判据，我们还证明了以下结果：

命题（=命题 3.6）。设 X 是一个光滑射影簇，且 $X \to \mathbb{P}^n$ 是沿着一个次数为 $d > n$ 的光滑除子 $D \subset \mathbb{P}^n$ 分歧的双覆盖。那么 X 具有 MCK 分解。

As a 作为定理4.1的推论，我们得到一个类似于定理1.2的单射性结果 ：

推论（参见定理 5.1）。设 Y 是一个如定理4.1所述的 Fano 三维簇，且 $m \in \mathbb{N}$。令

$$R^*(Y^m) := \big\langle h, \Delta_Y \big\rangle \ \subset \ \ A^*(Y^m)$$

是由极化 $h \in A^1(Y)$ 的拉回以及对角线 $\Delta_Y \in A^3(Y \times Y)$ 的拉回生成的 $\mathbb{Q}$-子代数。循环类映射诱导出单射

$$R^*(Y^m) \ \hookrightarrow \ H^*(Y^m, \mathbb{Q}) \ \ \textit{for all } m \in \mathbb{N}\,.$$

约定。本文中，“代数簇”一词指 $\mathbb{C}$ 上的有限型既约不可约概形。子簇是（可能可约的）等维既约子概形。

所有 Chow 群均取有理系数：我们将用 $A_j(Y)$ 表示 j 上带有 $\mathbb{Q}$ 系数的 Y 维循环的 Chow 群；对于维数为 n 的 Y 光滑簇，记号 $A_j(Y)$ 和 $A^{n-j}(Y)$ 可互换使用。记号 $A^j_{hom}(Y)$ 将用于表示同调平凡循环构成的子群。对于态射 $f\colon X \to Y$，我们将用 $\Gamma_f \in A_*(X \times Y)$ 表示 f 的图。

Chow 动机的反变范畴（即关于有理等价的纯动机，如 [46], [41] 中所述）记为 $\mathcal{M}_{\rm rat}$。

2. MCK 分解

定义 2.1（Murre [40]）。设 X 是一个维数为 n 的光滑射影簇。我们称 X 具有 CK 分解，如果对角线存在一个分解

$$\Delta_X = \pi^0_X + \pi^1_X + \cdots + \pi^{2n}_X \quad \textit{in } A^n(X \times X)\,,$$

使得 π^i_X 彼此互正交幂等元并且 $(\pi^i_X)_* H^*(X,\mathbb{Q}) = H^i(X,\mathbb{Q})$。

（注：“CK 分解”是“Chow–Künneth 分解”的简称。）

注记 2.2。Murre 猜想，任意光滑射影簇都应具有 CK分解 [40], [20]。

定义 2.3（Shen–Vial [47]）。设 X 是一个维数为 n的光滑射影簇，并令$\Delta^{sm}_X \in A^{2n}(X \times X \times X)$表示小对角线的类

$$\Delta^{sm}_X := \big\{(x,x,x) \mid x \in X\big\} \subset X \times X \times X\,.$$

MCK 分解定义为一种 CK分解 $\{\pi^i_X\}$，它具有乘法性，即满足

$$\pi^k_X \circ \Delta^{sm}_X \circ (\pi^i_X \times \pi^j_X) = 0 \quad \textit{in } A^{2n}(X \times X \times X) \quad \textit{for all } i+j \neq k\,.$$

（注：“MCK 分解”是“乘法的 Chow–Künneth 分解”的简称）.)

注记 2.4. 小对角线（当其被视为从 $X \times X$ 到 X 的对应时）诱导出乘法态射

$$\Delta^{sm}_X\colon\ h(X) \otimes h(X) \to h(X) \quad \textit{in } \mathcal{M}_{\rm rat}\,.$$

假设 X 具有 CK分解

$$h(X) = \bigoplus_{i=0}^{2n} h^i(X) \quad \textit{in } \mathcal{M}_{\rm rat}\,.$$

根据定义，对于任意 i、j，若复合

$$h^i(X) \otimes h^j(X) \to h(X) \otimes h(X) \xrightarrow{\Delta^{sm}_X} h(X) \quad \textit{in } \mathcal{M}_{\rm rat}$$

经由 $h^{i+j}(X)$分解。

如果 X 具有 MCK 分解，则令

$$A^i_{(j)}(X) := (\pi_X^{2i-j})_* A^i(X)\ ,$$

由此可在 Chow 环上得到双分次环结构：也就是说，交乘积将$A^i_{(j)}(X) \otimes A^{i'}{}_{(j')}(X)$映射到 $A^{i+i'}{}_{(j+j')}(X)$。

人们猜想，对于任意具有 MCK 分解的 X，都有

$$A^i_{(j)}(X) \overset{??}{=} 0 \ \ \textit{for}\ j<0\ , \quad A^i_{(0)}(X)\cap A^i_{hom}(X) \overset{??}{=} 0\ ;$$

这与 Murre 的猜想 B 和 D 有关，这些猜想是针对任意 CK 分解 [40]提出的。

关于 MCK 概念的更多背景，以及具有 MCK 分解的簇的例子，请参见 [47, 第 8], 节, 以及 [53], [48], [13], [28], [39], [29], [30], [31],[12], [33], [34], [36], [42]。

3. 一般判据

我们提出了一个判定具有 MCK 的一般判据。该判据依赖于簇族的 Franchetta 性质，定义如下：

定义 3.1. 设 $\mathcal{X}\to B$ 是一个光滑射影态射，其中 $\mathcal{X}$、B 是光滑拟射影簇，并记 X_b 为 $b\in B$上的纤维。我们称 $\mathcal{X}\to B$ 具有余维 j 的 Franchetta 性质，如果满足以下条件：对于每个 $\Gamma\in A^j(\mathcal{X})$，若限制 $\Gamma|_{X_b}$ 对非常一般的 $b\in B$而言是同调平凡的，则对所有 $b\in B$，限制 $\Gamma|_b$ 在$A^j(X_b)$中为零。

如果 $\mathcal{X}\to B$ 对所有 j都具有余维 j 的 Franchetta 性质，我们就称 $\mathcal{X}\to B$ 具有 Franchetta 性质。

文献 [45], [5], [10], [11]研究了这一性质。

定义 3.2. 给定一个如定义 3.1 中所述的族 $\mathcal{X}\to B$，我们使用简称 d

$$GDA^j_B(X_b) := \mathrm{Im}\big(A^j(\mathcal{X})\to A^j(X_b)\big) \ \ \subset\ A^j(X_b)$$

（GDA^*() 表示“一般定义的循环”。）

$\mathcal{X}\to B$ 的 Franchetta 性质意味着，一般定义的循环注入到上同调中。

命题 3.3. 设 $\mathcal{X}\to B$ 是一个相对维数为 n、纤维为 X_b 的光滑射影簇族。假设如下：

（i）族 $\mathcal{X}\times_B\mathcal{X}\to B$ 具有 Franchetta 性质；

（ii）存在一个具有平凡的 Chow 群的射影商簇 P（即 $P=P'/G$，其中 P' 是光滑射影簇，且 $G\subset$ Aut(P') 是有限循环群）（即 $A^*_{hom}(P)=0$），使得对于所有 $b\in B$，$X_b\to P$ 是一个分歧轨迹为光滑充足除子的双覆盖。

那么，对于所有 $b\in B$，X_b 都具有 MCK 分解。

证明。我们在上同调中有以下 Lefschetz型结果：

引理3.4。设 $X_b \to P$ 如命题所述。那么拉回

$$H^i(P,\mathbb{Q}) \ \to \ H^i(X_b,\mathbb{Q})$$

对于 $i<n$ 是同构，对于 $i=n$ 是单射。

证明。在 P 光滑的情形下，这是 Cornalba [6] 的结果。一般情形可由此立即推出：设 $P=P'/G$，其中 P' 是光滑射影，且 $G\subset \mathrm{Aut}(P')$ 是有限循环群，并考虑纤维积方块

$$\begin{array}{ccc} X_b' & \to & X_b \\ \downarrow & & \downarrow \\ P' & \to & P\,. \end{array}$$

Cornal ba 对左侧竖直箭头的双覆盖应用其结果，因此拉回 k

$$H^i(P',\mathbb{Q}) \ \to \ H^i(X_b',\mathbb{Q})$$

对于 $i<n$ 是同构，对于 $i=n$ 是单射。G 在 P' 上的作用提升到 X_b'，取 G-不变量后，我们得到

$$H^i(P,\mathbb{Q}) = H^i(P',\mathbb{Q})^G \ \to \ H^i(X_b',\mathbb{Q})^G = H^i(X_b,\mathbb{Q})$$

对于 $i<n$ 是同构，对于 $i=n$ 是单射。 □

由于 $H^*(P,\mathbb{Q})$ 是代数的（这是任何具有平凡的肖群的代数簇都满足的一般事实，参见 [23]），这也意味着对于所有 $i\neq n$，$H^i(X_b,\mathbb{Q})$ 也是代数的。更具体地说，当 $i\neq n$ 为奇数时，有 $H^i(X_b,\mathbb{Q})=0$；而当 $i<n$ 为偶数时，有同构

$$A^{i/2}(P) \ \cong \ H^i(X_b,\mathbb{Q})\,,$$

由拉回诱导。这意味着对于 $i<n$，K¨unneth 分量 $\pi^i_{X_b}$ 是代数的且一般定义的。为显式定义 K¨unneth 分量 $\pi^i_{X_b}$，令 $p\colon X_b\to P$ 表示投影态射，并令 π^i_P 表示 P 的（唯一）CK分解。于是可以定义

$$\begin{aligned} \pi^i_{X_b} &:= 1/2\,{}^t\Gamma_p\circ\pi^i_P\circ\Gamma_p \quad \text{if } i<n\,,\\ \pi^i_{X_b} &:= \pi^{2n-i}_{X_b} \qquad \text{if } i>n\,,\\ \pi^{n,fix}_{X_b} &:= 1/2\,{}^t\Gamma_p\circ\pi^n_P\circ\Gamma_p\,,\\ \pi^{n,var}_{X_b} &:= \Delta_{X_b}-\sum_{j\neq n}\pi^j_{X_b}-\pi^{n,fix}_{X_b}\,,\\ \pi^n_{X_b} &:= \pi^{n,fix}_{X_b}+\pi^{n,var}_{X_b} \quad \in\ A^n(X_b\times X_b)\,. \end{aligned}$$

（注意，当 n 为奇数时，$\pi^n_{X_b}=0$。）此记号旨在提醒读者，$\pi^{n,fix}_{X_b}$ 和 $\pi^{n,var}_{X_b}$ 分别是次数为 n 的上同调中不变部分和可变部分上的投影算子。

这些投影算子为每个 X_b 定义了一种一般定义的 CK分解，即所有投影算子都属于 $GDA^n_B(X_b \times X_b)$。这种 CK分解具有如下性质：

$$\begin{aligned} h^j(X_b) &:= (X_b, \pi^j_{X_b}, 0) = \oplus \mathbb{1}(*) \quad \forall j \neq n \ , \\ h^{n,fix}(X_b) &:= (X_b, \pi^{n,fix}_{X_b}, 0) = \oplus \mathbb{1}(*) \ \text{in} \ \mathcal{M}_{\rm rat} \ . \end{aligned} \tag{1}$$

现在我们继续验证该 CK 分解是 MCK。我们需要检验以下消失性

$$\pi^k_{X_b} \circ \Delta^{sm}_{X_b} \circ (\pi^i_{X_b} \times \pi^j_{X_b}) = 0 \quad \text{in } A^{2n}(X_b \times X_b \times X_b) \quad \text{for all } i+j \neq k \ .$$

首先，假设这 3 个整数 (i,j,k) 中至少有一个既不等于 n，也不等于 $i+j \neq k$。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned} \pi^k_{X_b} \circ \Delta^{sm}_{X_b} \circ (\pi^i_{X_b} \times \pi^j_{X_b}) &= ({}^t\pi^i_{X_b} \times {}^t\pi^j_{X_b} \times \pi^k_{X_b})_* \Delta^{sm}_{X_b} \\ &= (\pi^{2n-i}_{X_b} \times \pi^{2n-j}_{X_b} \times \pi^k_{X_b})_* \Delta^{sm}_{X_b} \\ &\hookrightarrow \bigoplus A^*(X_b \times X_b) \ . \end{aligned}$$

这里，第一个等式是 Lieberman引理 [41, 引理 2.1.3], 的应用，而包含关系由性质 (1) 得出。由此得到的循环属于 $\bigoplus A^*(X_b \times X_b)$，是一般定义的（因为 $\pi^*_{X_b}$ 和 $\Delta^{sm}_{X_b}$ 均是），且是同调平凡的（因为 $i+j \neq k$）。根据假设 (i)， $\bigoplus A^*(X_b \times X_b)$ 中由此得到的循环在有理等价意义下为零，因此

$$\pi^k_{X_b} \circ \Delta^{sm}_{X_b} \circ (\pi^i_{X_b} \times \pi^j_{X_b}) = 0 \quad \text{in } A^{2n}(X_b \times X_b \times X_b) \ ,$$

正如所需。

还需处理 $i=j=k=n$ 的情况。分解 $\pi^n_{X_b} := \pi^{n,\ fix}_{X_b} + \pi^{n,\ var}_{X_b}$ 诱导出一个分解

$$\begin{aligned} \pi^n_{X_b} \circ \Delta^{sm}_{X_b} \circ (\pi^n_{X_b} \times \pi^n_{X_b}) =& \pi^{n,fix}_{X_b} \circ \Delta^{sm}_{X_b} \circ (\pi^{n,fix}_{X_b} \times \pi^{n,fix}_{X_b}) \\ &+ \pi^{n,fix}_{X_b} \circ \Delta^{sm}_{X_b} \circ (\pi^{n,fix}_{X_b} \times \pi^{n,var}_{X_b}) \\ &+ \cdots \cdots \\ &+ \pi^{n,var}_{X_b} \circ \Delta^{sm}_{X_b} \circ (\pi^{n,var}_{X_b} \times \pi^{n,var}_{X_b}) \quad \text{in } A^{2n}(X_b \times X_b \times X_b) \ . \end{aligned}$$

利用性质 (1) 以及 $X_b \times X_b$ 的 Franchetta 性质，所有包含 $\pi^{n,\ fix}_{X_b}$ 的项都消失了。于是只剩下最后一项。为了处理最后一项，我们注意到，双覆盖 p: $X_b \to P^{X_b}$ 的覆盖对合 $\iota \in \mathrm{Aut}(X_b)$ 诱导出动机的一个分解

$$\begin{aligned} h(X_b) =& h(X_b)^+ \oplus h(X_b)^- \\ :=& (X_b, 1/2\,(\Delta_{X_b} + \Gamma_\iota), 0) \oplus (X_b, 1/2\,(\Delta_{X_b} - \Gamma_\iota), 0) \quad \text{in } \mathcal{M}_{\rm rat} \ , \end{aligned}$$

其中 Γ_ι 表示对合 ι 的图。此外，有如下等式

$$h^{n,var}(X_b) = h(X_b)^- \quad \text{in } \mathcal{M}_{\rm rat} \ .$$

但是交积映射

$$h(X_b)^- \otimes h(X_b)^- \quad \xrightarrow{\Delta^{sm}_{X_b}} \quad h(X_b)$$

因子 over $h(X_b)^+$，这一点很容易看出（参见下文引理 3.5），这恰好说明了 t

$$\pi^{n,var}_{X_b} \circ \Delta^{sm}_{X_b} \circ (\pi^{n,var}_{X_b} \times \pi^{n,var}_{X_b}) = 0 \quad \text{in } A^{2n}(X_b \times X_b \times X_b) .$$

至此证明完成，除了以下引理尚待证明（该引理可能是众所周知的，但为完整起见，我们仍给出证明）：

引理 3.5. 设 $X \to P$ 是一个双覆盖，其中 X 和 P 是商簇，且 $\iota \in \mathrm{Aut}(X)$ 是覆盖对合。设

$$h(X)^+ := (X, 1/2\,(\Delta_X + \Gamma_\iota, 0)\,, \quad h(X)^- := (X, 1/2\,(\Delta_X - \Gamma_\iota), 0) \quad \textit{in } \mathcal{M}_{\mathrm{rat}} .$$

动机之间的映射

$$h(X)^- \otimes h(X)^- \xrightarrow{\Delta^{sm}_X} h(X)$$

经由 $h(X)^+$ 分解。

为证明该引理，令 $\iota \in \mathrm{Aut}(X)$ 表示覆盖对合。动机 $h(X)^-$ 由以下投影算子定义

$$\Delta^-_X := 1/2\,(\Delta_X - \Gamma_\iota) \quad \in A^n(X \times X) .$$

代入并展开后，可得

$$\begin{aligned}
\Delta^-_X \circ \Delta^{sm}_X \circ (\Delta^-_X \times \Delta^-_X) &= 1/8\,(\Delta_X - \Gamma_\iota) \circ \Delta^{sm}_X \circ (\Delta_{X\times X} - \Delta_X \times \Gamma_\iota - \Gamma_\iota \times \Delta_X + \Gamma_\iota \times \Gamma_\iota) \\
&= 1/8\,\Big(\Delta_X \circ \Delta^{sm}_X \circ (\Delta_X \times \Delta_X) + \cdots - \Gamma_\iota \circ \Delta^{sm}_X \circ (\Gamma_\iota \times \Gamma_\iota)\Big) \\
&= 1/8\,\Big(\Delta^{sm}_X \\
&\quad - (\mathrm{id} \times \mathrm{id} \times \iota)_*(\Delta^{sm}_X) - (\mathrm{id} \times \iota \times \mathrm{id})_*(\Delta^{sm}_X) - (\iota \times \mathrm{id} \times \mathrm{id})_*(\Delta^{sm}_X) \\
&\quad + (\mathrm{id} \times \iota \times \iota)_*(\Delta^{sm}_X) + (\iota \times \mathrm{id} \times \iota)_*(\Delta^{sm}_X) + (\iota \times \iota \times \mathrm{id})_*(\Delta^{sm}_X) \\
&\quad - (\iota \times \iota \times \iota)_*(\Delta^{sm}_X)\Big) \quad \text{in } A^{2n}(X \times X \times X) .
\end{aligned}$$

这里最后一个等式得自 Lieberman引理 [41, 引理 2.1。3]然而，我们有等式

$$\Delta^{sm}_X = \{(x,x,x) \mid x \in X\} = (\iota \times \iota \times \iota)_*(\Delta^{sm}_X) \quad \text{in } A^{2n}(X \times X \times X) ,$$

因此，第一项与最后一项之和为零。同样地，我们有等式

$$(\mathrm{id} \times \iota \times \iota)_*(\Delta^{sm}_X) = (\mathrm{id} \times \iota \times \iota)_*(\iota \times \iota \times \iota)_*(\Delta^{sm}_X) = (\iota \times \mathrm{id} \times \mathrm{id})_*(\Delta^{sm}_X) \quad \text{in } A^{2n}(X \times X \times X) ,$$

因此，其余各项两两抵消。这就证明了该引理。 □

作为我们的一般判据的第一个应用，现证明如下命题 :

命题 3.6. 设 X 是一个光滑射影簇，且 $X \to \mathbb{P}^n$ 是沿光滑除子 $D \subset \mathbb{P}^n$ 分歧的双覆盖，并假设 $\dim H^n(X, \mathbb{Q}) > 1$，或者 D 的次数为 $d > n$。那么 X 存在 MCK 分解。

证明. 命题中所述的双覆盖 X，恰好是加权射影空间 $\mathbb{P}:=\mathbb{P}(1^{n+1},d)$ 中次数为 $2d$ 的光滑超曲面，其中 $2d:=\deg\ D$。令

$$B\subset \bar{B}:=\mathbb{P}H^0(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2d))$$

表示参数化光滑超曲面的扎里斯基开集，并令

$$B\times\mathbb{P}\ \supset\ \mathcal{X}\ \to\ B$$

表示万有族。鉴于命题 3.3，只需验证族$\mathcal{X}\times_B\mathcal{X}\to B$ 具有 Franchetta 性质。

为此，我们注意到线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2d)$是非常丰沛的（参见下文引理 3.7），这意味着该设定满足 [12, 定义 2.5]中的条件（$*_2$）。应用分层射影丛论证 [12, 命题 2.6]，即可推出

$$GDA^*_B(X_b\times X_b)=\left\langle (p_i)^*(h),\Delta_{X_b}\right\rangle , \tag{2}$$

其中，我们用 $h\in A^1(X_b)$ 表示超平面类。超额交公式 [14,定理 6.3] 给出等式

$$\Delta_{X_b}\cdot(p_i)^*(h)=2d\sum_j (p_1)^*(h^j)\cdot(p_2)^*(h^{n+1-j})\ \ \text{in } A^{n+1}(X_b\times X_b)\ ,$$

因此，等式（2）可归结为等式

$$GDA^*_B(X_b\times X_b)=\left\langle (p_1)^*(h),(p_2)^*(h)\right\rangle\oplus\mathbb{Q}[\Delta_{X_b}]\ .$$

“可分解部分” $\langle (p_1)^*(h),(p_2)^*(h)\rangle$ 可嵌入上同调，这是由 $H^*(X_b\times X_b,\mathbb{Q})$ 的 Künneth 公式所致。上同调中的对角线类与可分解部分线性无关：事实上，如果对角线是可分解的，它在本原上同调上的作用就会为零

$$H^n_{\rm prim}(X_b,\mathbb{Q}):=\text{Coker}\big(H^n(\mathbb{P}^n,\mathbb{Q})\to H^n(X_b,\mathbb{Q})\big)\ .$$

但假设 $\dim\ H^n(X_b,\mathbb{Q})>1$，等价于满足 $H^n_{\rm prim}(X_b,\mathbb{Q})\neq 0$。这证明了 $\mathcal{X}\times_B\mathcal{X}\to B$ 的 Franchetta 性质，并完成了证明。

$d>n$ 这一情形是 $H^n_{\rm prim}(X_b,\mathbb{Q})\ \neq\ 0$ 的一个特例，因为已知 X_b 的几何亏格为

$$p_g(X_b)=\binom{d-1}{n}$$

[9,第 3.5 节。4]。

接下来要证明以下结论，这是我们上文已用到的：

引理 3.7. 设 $\mathbb{P}:=\mathbb{P}(1^{n+1},d)$。层 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)$ 局部自由且非常丰沛。

关于层局部自由的断言成立，只是因为 d 是 $\mathbb{P}$ 的权的倍数（参见 [7, 注记 1.8]）。至于非常丰沛性，我们应用 Delorme 判据 [7,命题 2.3(iii)]（另参见 [4, 定理 4.B.7]）。要证明 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)$ 非常丰沛，我们需要证明按 [7] 和 [4] 中定义的整数 E 等于 0。

设 $x_0,\dots,x_n,y$ 为 $\mathbb{P}$的加权齐次系数，其中 x_j和 y的权分别为 1 和 d。容易看出，x_j,y 中每个（加权）次数为

$m + dk$ （其中 m 是 d的正整数倍，而 k 是任意正整数）都能被一个（加权）次数为 dk的单项式整除。这意味着文中定义的整数 E 为 0，因此 [7, 命题 2.3(iii)] 蕴含了 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)$的非常丰沛性。

这就证明了引理，并结束了命题的证明。 □

下面是我们的一般判据的另一个示例应用：

命题 3.8. 设 $X \subset \mathbb{P}(1^n, 2, 3)$ 是一个（加权）次数为 6 的光滑超曲面。假设 $\dim H^n(X, \mathbb{Q}) > 1$。那么 X 具有 MCK 分解。

证明. 命题中的 X 恰好是 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(1^n, 2)$ 的光滑双覆盖，其分歧沿一个（加权）次数为 6 的除子（参见 [26, 注 2.3] ，关于 $n = 3$另见 [17, 定理 4.2]）。记 $\mathcal{X} \to B$ 为这类双覆盖的族。我们将验证族 $\mathcal{X} \times_B \mathcal{X} \to B$ 具有 Franchetta 性质。于是，命题 3.8 是我们的一般判据命题 3.3 的一个特例。

Let $\bar{\mathcal{B}} \cong \mathbb{P}^r$ 表示 $\mathbb{P}$中所有加权次数为 6 的（可能奇异的）超曲面的万有族。线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(6)$非常丰沛（参见下文引理 3.9），因此投影

$$\bar{\mathcal{X}} \times_{\bar{B}} \bar{\mathcal{X}} \to \mathbb{P} \times \mathbb{P}$$

具有分层射影丛的结构（其分层为对角线 $\Delta_{\mathbb{P}}$ 及其补集）。因此，可以利用命题 2.6] 中的分层射影丛论证 [12, ，推出恒等式

$$\begin{aligned} GDA_B^*(X \times X) &= \left\langle (p_i)^* GDA_B^*(X), \Delta_X \right\rangle \\ &= \left\langle (p_i)^*(h), \Delta_X \right\rangle \end{aligned}$$

（这里， $h \in A^1(X)$表示丰沛生成元在 X 上的限制，其中该生成元来自 $A^1(\mathbb{P}) \cong \mathbb{Q}$。）

由于 $X \subset \mathbb{P}$ 是一个超曲面，超额交公式给出

$$\Delta_X \cdot (p_i)^*(h) = \Delta_{\mathbb{P}}|_X \in \left\langle (p_i)^*(h) \right\rangle .$$

因此，上述识别可简化为

$$GDA_B^*(X \times X) = \left\langle (p_i)^*(h) \right\rangle \oplus \mathbb{Q}[\Delta_X] .$$

假设 $\dim H^n(X, \mathbb{Q}) > 1$，这意味着对角线 Δ_X 在上同调中与可分解类 $\left\langle (p_i)^*(h) \right\rangle$ 线性无关（事实上，可分解类在 X的本原上同调上作用为零，而对角线则作用为恒等映射）。这表明 $GDA_B^*(X \times X)$嵌入上同调，正如所需。

引理 3.9. 设 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(1^n,2,3)$。层 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(6)$ 是（局部自由且）非常丰沛的 *e.*

层局部自由这一断言成立，只是因为 6 是所有权的倍数（参见 [7, 注记 1.8]）。至于非常丰沛性，我们应用 Delorme 判据 [7, 命题 2.3(iii)] （另见 [4, 定理 4.B.7]）。要证明 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(6)$ 的非常丰沛性，我们需要证明在 [7] 和 [4] 中定义的整数 E 等于 0。

记 x_1、.....、y、z 为 $\mathbb{P}$ 的加权齐次系数，其中 y 和 z 的权分别为 2 和 3。我们需要验证， x_j、y、z 中每个（加权）次数为 $6 + 6k$ 的单项式，都能被一个（加权）次数为 $6k$ 的单项式整除（若成立，则 $E = 0$ 和 [7,

命题 2.3(iii)] 蕴含 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ 的非常丰沛性（6））。若单项式含有 z^2，则它能被 z^2 整除，因此满足条件。现在假设单项式只含有一个 z。若单项式含有 y^3，则它能被 y^3 整除。接下来，若单项式含有 y（或 y^2），则它能被 zyx_j 整除（对某个 j），因此满足条件。由 z 和 x_j 构成的单项式显然满足条件。最后，x_j 中的单项式满足条件。

这就证明了引理，并结束了命题的证明。 □

4. 主要结果

定理4.1. 以下 Fano 三维簇存在 MCK 分解：

(i) 加权射影空间 $\mathbb{P}(1^3,2,3)$ 中加权次数为 6 的超曲面；(ii) 四次双重实体；(iii) 六次双重实体；(iv) $\mathbb{P}^4$ 中沿其与四次超曲面的交分歧的二次超曲面双覆盖；(v) 特殊Gushel–Mukai三维簇。

证明。(ii) 和 (iii) 两种情形可直接由命题 3.6 得出。(i) 是命题 3.8 的特殊情形。

在证明情形 (iv) 之前，我们先陈述一个准备性引理：

引理 4.2. 设 $Z \subset \mathbb{P} := \mathbb{P}(1^5,2)$ 是一个次数为 2 的光滑加权超曲面。那么

$$\Delta_Z = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{4} h^j \times h^{4-j} \quad \textit{in } A^4(Z\times Z)\,.$$

证明。Z 是 $\mathbb{P}^5$ 中的一个非奇异二次超曲面的商，因此 Z 具有平凡的肖群（即$A^*_{hom}(Z) = 0$）。利用 [9, 4.4.2], 可以计算 Z 的 Betti 数，发现它们与射影空间 $\mathbb{P}^4$的 Betti 数相同。这意味着存在对角线的上同调分解

$$\Delta_Z = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{4} h^j \times h^{4-j} \quad \text{in } H^8(Z\times Z,\mathbb{Q})\,.$$

由于 Z（因此 $Z\times Z$也）具有平凡的肖群，同一分解在有理等价意义下仍成立，从而证明了该引理。□

现在，为了证明定理 4.1 的情形 (iv)，我们应用一般判据命题 3.3。设$\mathbb{P} := \mathbb{P}(1^5,2)$，并设 $\mathcal{Y} \to B$ 为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(4)$中维数横截完全交的万有族，其中底空间 B 是一个扎里斯基开集

$$B \subset \bar{B} := \mathbb{P}H^0(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(4))\,.$$

由引理 3.7 可知，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)$ 和 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(4)$ 是 $\mathbb{P}$ 上的非常丰沛线丛，因此 $\mathcal{Y}\times_{\bar{B}}\mathcal{Y}\to\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ 是一个分层射影丛，其分层为 $\Delta_{\mathbb{P}}$ 及其补集。通常的分层射影丛论证 [12, 命题 2.6] 适用，从而得到

$$\begin{aligned} GDA^*_B(Y\times Y) &= \big\langle (p_i)^* GDA^*_B(Y), \Delta_Y \big\rangle \\ &= \big\langle (p_i)^*(h), \Delta_Y \big\rangle \end{aligned}$$

（此处，$h \in A^1(Y)$ 表示丰沛生成元在 Y 上的限制，其中该生成元属于 $A^1(\mathbb{P}) \cong \mathbb{Q}$。）令 $Y = Z \cap Z'$，其中 Z 和 $Z' \subset \mathbb{P}$ 是（加权）次数分别为 2 和 4 的超曲面。将 B 缩小后，不妨假设超曲面 Z 是光滑的。由于 $Y \subset Z$ 是一个除子，超额交公式给出

$$\Delta_Y \cdot (p_i)^*(h) = \Delta_Z|_Y \quad \text{in } A^4(Y \times Y) .$$

利用引理 4.2，可得

$$\Delta_Y \cdot (p_i)^*(h) \ \in \ \big\langle (p_i)^*(h) \big\rangle .$$

因此，上述识别可简化为

$$GDA^*_B(Y \times Y) = \big\langle (p_i)^*(h) \big\rangle \ \oplus \ \mathbb{Q}[\Delta_Y] .$$

与之前一样，对角线 Δ_Y 在上同调中与可分解对应独立的事实表明

$$GDA^*_B(Y \times Y) \ \to \ H^*(Y \times Y, \mathbb{Q})$$

是单射，因此 Y 满足命题 3.3 的假设。

情形 (v) 的论证与情形 (iv) 类似。首先，鉴于扩张论证[55, 引理 3.2], ，只需为一般特殊古谢尔–穆凯三维簇 Y 建立 MCK 分解。因此，我们可以假设存在 $P \subset \mathrm{Gr}(2, 5)$，它是 Pl¨ucker 超平面的光滑完全交，以及一个双覆盖 $p\colon Y \to P$，其沿光滑古谢尔–穆凯曲面分歧。现在考虑由所有沿光滑古谢尔–穆凯曲面分歧的 P 双覆盖构成的族 $\mathcal{Y} \to B$（因此 $B \subset B$ 是锥 P 上二次截面的射影化空间中的一个扎里斯基开集），并将一般判据命题 3.3 应用于该族。

引理 4.3. 设 $\mathcal{Y} \to B$ 为沿光滑 Gushel–Mukai 曲面分歧的 P 双覆盖族。族 $\mathcal{Y} \to B$ 具有 Franchetta 性质。

证明。考虑族 $\mathcal{Y} \to B$，其投影到 P上的锥体 C。这是一个射影丛，因此对于任意满足 $b \in B$ 的纤维 $Y = Y_b$，我们有

$$GDA^*_B(Y) = \mathrm{Im}\big(A^*(C) \to A^*(Y)\big) .$$

条件 $b \in B$ 恰好意味着 Y 避开锥体 C的顶点，因此（记$C^\circ \subset C$ 为锥体顶点的补集）我们有

$$GDA^*_B(Y) = \mathrm{Im}\big(A^*(C^\circ) \to A^*(Y)\big) . \tag{3}$$

但是 $C^\circ \to P$ 是一个仿射丛，并且

$$A^*(P) = \mathrm{Im}\big(A^*(\mathrm{Gr}(2, 5)) \to A^*(P)\big) = \big\langle h \big\rangle ,$$

其中 h 表示普吕克超平面在 P 上的限制（这可由 [35, 定理 3.17], 得出，或者由 P的导出范畴存在一个长度为 4 [44]的满例外集合这一事实得出）。因此，(3)化为

$$GDA^*_B(Y) = \big\langle h \big\rangle .$$

这证明了 Y 的 Franchetta 性质。 □

引理 4.4. 设 $\mathcal{Y} \to B$ 如引理 4.3 所述。族 $\mathcal{Y} \times_B \mathcal{Y} \to B$ 具有 Franchetta 性质。

证明。考虑带有到 $C \times C$ 的投影的族 $\mathcal{Y} \times_{\bar{B}} \mathcal{Y} \to B$。这是一个分层射影丛，其分层为 Δ_C 及其补集。因此，命题 2.6] 中的分层射影丛论证 [12, 表明

$$GDA^*_B(Y \times Y) = \Big\langle \mathrm{Im}\big(A^*(C^\circ \times C^\circ) \to A^*(Y \times Y)\big), \Delta_Y \Big\rangle .$$

由于 $A^*(C^\circ) = \mathrm{Im}\big(A^*(\mathrm{Gr}(2,5)) \to A^*(C^\circ)$，我们得到

$$GDA^*_B(Y \times Y) = \Big\langle \mathrm{Im}\big(A^*(\mathrm{Gr}(2,5) \times \mathrm{Gr}(2,5)) \to A^*(Y \times Y)\big), \Delta_Y \Big\rangle .$$

但是，由于格拉斯曼流形具有平凡的肖群，故 $A^*(\mathrm{Gr}(2,5) \times \mathrm{Gr}(2,5)) = A^*(\mathrm{Gr}(2,5)) \otimes A^*(\mathrm{Gr}(2,5))$，因此

$$\begin{aligned} GDA^*_B(Y \times Y) &= \big\langle GD_B(Y), \Delta_Y \big\rangle \\ &= \big\langle h, \Delta_Y \big\rangle \end{aligned}$$

（最后一个等式由引理 4.3 得出。）

为完成引理的证明，我们现在断言，对于任意（普通或特殊的）Gushel–Mukai 三维簇 Y，都有

$$\Delta_Y \cdot h \in \big\langle \mathrm{Im}\big(A^*(\mathrm{Gr}(2,5)) \to A^*(Y)\big)\big\rangle . \tag{4}$$

结合引理 4.3，这意味着对于一个特殊的 Gushel–Mukai 三维簇 Y（且 $\mathcal{Y} \to B$ 如上），有等式

$$GDA^*_B(Y \times Y) = \big\langle h \big\rangle \oplus \mathbb{Q}[\Delta_Y] .$$

于是，由于对角线在 $\langle h \rangle$ 的上同调中线性无关（因为 $h^{1,2}(Y) \neq 0$），这就证明了该引理。

剩下要证明的是断言 (4)。利用扩张论证 [55, 引理 3.2], ，只需证明非常一般的 Gushel–Mukai 三维簇满足等式 (4)。因此，我们可以假设 Y 是普通的，而且

$$Y = Y' \cap Q ,$$

其中 Q 是一个二次超曲面，$Y' = \mathrm{Gr}(2,5) \cap H_1 \cap H_2$ 是一个光滑四维簇（其中 H_1、H_2 是 Pl¨ucker 超平面），且 Y' 满足

$$A^*(Y') = \mathrm{Im}\big(A^*(\mathrm{Gr}(2,5)) \to A^*(Y')\big) .$$

（事实上，光滑四维簇 Y' 具有平凡的肖群 [35, 推论 4.6], ，而非常一般的Y' 没有本原上同调，这由 [35, 引理 3.15] 可知。）于是，超额交公式蕴含

$$\Delta_Y \cdot h = \frac{1}{2} \Delta_{Y'}|_{Y \times Y} ,$$

由此可得结论 (4)。 □

引理 4.4 得证后，命题 3.3 的所有条件均已满足，因此族 $\mathcal{Y} \to B$ 的纤维 Y 具有 MCK 分解；这就证明了 (v)。（v3）

5. 典范环

定理 5.1. 设 Y 是一个皮卡数 1 的 Fano 三维簇。假设 Y 具有 MCK 分解，且 Y 是族 $\mathcal{Y} \to B$ 的一个成员，使得 $\mathcal{Y} \times_B \mathcal{Y} \to B$ 具有 Franchetta 性质。对于 $m \in \mathbb{N}$，令

$$R^*(Y^m) := \left\langle (p_i)^*(h), (p_{ij})^*(\Delta_Y) \right\rangle \ \subset \quad A^*(Y^m)$$

为由极化 $h \in A^1(Y)$ 的拉回以及对角线 $\Delta_Y \in A^3(Y \times Y)$ 的拉回所生成的 $\mathbb{Q}$-子代数。（这里，p_i 和 p_{ij} 分别表示从 Y^m 到 Y 和 $Y \times Y$ 的各种投影。）循环类映射诱导出单射

$$R^*(Y^m) \ \hookrightarrow \ H^*(Y^m, \mathbb{Q}) \quad \textit{for all } m \in \mathbb{N}\,.$$

证明。此结果受到关于三次超曲面 [11, Section 2.3] 的类似结果的启发。反过来，[11] 的结果则受到关于超椭圆曲线 [49], [50]（参见下文注记 5.2）以及 K3 曲面 [54], [57] 的类似结果的启发。

令 d 表示 Y 的次数，并令 $2b := \dim H^3(Y, \mathbb{Q})$。如同在 [11, Section 2.3], 中那样，记作 $o := \frac{1}{d} h^3 \in A^3(Y)$（“特征零循环”），并

$$\tau := \Delta_Y - \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{3} h^j \times h^{3-j} \ \in \ A^3(Y \times Y)$$

（这个循环 τ 不过是上文所讨论的动机 $h^3(Y)$ 上的投影算子。）此外，记

$$\begin{aligned} h_i &:= (p_i)^*(h) \ \in \ A^1(Y^m)\,, \\ o_i &:= (p_i)^*(o) \ \in \ A^3(Y^m)\,, \\ \tau_{i,j} &:= (p_{ij})^*(\tau) \ \in \ A^3(Y^m)\,. \end{aligned}$$

我们定义 $\mathbb{Q}$-子代数

$$\bar{R}^*(Y^m) := \langle o_i, h_i, \tau_{i,j} \rangle \ \subset \ H^*(Y^m, \mathbb{Q})$$

（其中 i 遍历 $1 \le i \le m$，且 $1 \le i < j \le m$）。可以证明（正如 [11, 引理 2.11] 和 [57, 引理 2.3]一样），$\mathbb{Q}$-代数 $R^*(Y^m)$ 同构于由 o_i、h_i、τ_{ij} 生成的自由分次 $\mathbb{Q}$-代数，并满足以下关系：

$$o_i \cdot o_i = 0, \quad h_i \cdot o_i = 0, \quad h_i^3 = d\, o_i\,; \tag{5}$$

$$\tau_{i,j} \cdot o_i = 0, \quad \tau_{i,j} \cdot h_i = 0, \quad \tau_{i,j} \cdot \tau_{i,j} = 2b\, o_i \cdot o_j\,; \tag{6}$$

$$\tau_{i,j} \cdot \tau_{i,k} = \tau_{j,k} \cdot o_i\,; \tag{7}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2b+2}} \prod_{i=1}^{b+1} \tau_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)} = 0\,. \tag{8}$$

为了证明定理 5.1，我们需要检查这些关系在模有理等价意义下也成立。关系 (5) 位于 $R^*(Y)$ 中，因此由 Franchetta

性质可知， Y 满足该性质。关系 (6) 位于 $R^*(Y^2)$ 中。第一条和最后一条关系显然成立，因为 Y 是 Fano，所以有 $A^6(Y^2) = \mathbb{Q}$。至于 (6) 中的第二条关系，则由 $Y \times Y$ 的 Franchetta 性质推出。（或者，也可以由 MCK 分解推出第二条关系：事实上，乘积 $\tau \cdot h_i$ 属于 $A^4_{(0)}(Y^2)$，并且很容易验证 $A^4_{(0)}(Y^2)$ 嵌入 $H^8(Y^2, \mathbb{Q})$。）

关系（7）发生在 $R^*(Y^3)$ 中，并且由 MCK 关系得出。事实上，我们有

$$\Delta_Y^{sm} \circ (\pi_Y^3 \times \pi_Y^3) = \pi_Y^6 \circ \Delta_Y^{sm} \circ (\pi_Y^3 \times \pi_Y^3) \ \text{ in } A^6(Y^3) \,,$$

（利用 Lieberman引理）可转化为

$$(\pi_Y^3 \times \pi_Y^3 \times \Delta_Y)_* \Delta_Y^{sm} = (\pi_Y^3 \times \pi_Y^3 \times \pi_Y^6)_* \Delta_Y^{sm} \ \text{ in } A^6(Y^3) \,,$$

这意味着

$$\tau_{1,3} \cdot \tau_{2,3} = \tau_{1,2} \cdot o_3 \ \text{ in } A^6(Y^3) \,.$$

接下来需要考虑关系（8），它发生在 $R^*(Y^{2b+2})$ 中。为验证该关系在模有理等价的意义下也成立，我们注意到关系（8）涉及一个包含于以下空间中的循环

$$A^*\big(\mathrm{Sym}^{2b+2}(h^3(Y))\big) \,.$$

但是，Chow动机的消失性成立

$$\mathrm{Sym}^{2b+2}\, h^3(Y) = 0 \ \text{ in } \mathcal{M}_{\mathrm{rat}} \,,$$

因为 $\dim H^3(Y, \mathbb{Q}) = 2b$ 和 $h^3(Y)$ 按照 Kimura [22]的意义是奇有限维的（已知所有 Fano 三维簇都具有 Kimura 有限维动机 [51, 定理 4]）。这就证明了关系式 (8) 在有理等价意义下成立，并结束了证明。□

Remark 5.2. 给定一条曲线 C 和一个整数 $m \in \mathbb{N}$，可以定义典范环

$$R^*(C^m) := \big\langle (p_i)^*(K_C), (p_{ij})^*(\Delta_C) \big\rangle \ \subset \ A^*(C^m)$$

（其中 p_i、p_{ij} 分别表示从 C^m 到 C 和 $C \times C$的各种投影）。Tavakol 已证明[50, 推论 6.4] 若 C 是一条超椭圆曲线，则循环类映射诱导单射

$$R^*(C^m) \ \hookrightarrow \ H^*(C^m, \mathbb{Q}) \ \ \textit{for all } m \in \mathbb{N} \,.$$

另一方面，存在许多（非双曲的）曲线，其典范环$R^*(C^3)$无法单射地映入上同调（这与 Ceresa循环不消失有关，参见 [50, 定理 4.2] 以及 [12, 例 2.3 和注 2.4]）。

6. 一张表

下文的表 1 列出了所有皮卡数 1 的 Fano 三维簇（Fano 三维簇的分类见 [18]）。最后一列指出是否存在 MCK 分解。注意，满足 $X_{,2}(X) = 0$ 的 Fano 三维簇具有平凡的肖群（即 $A^*_{hom}(X) = 0$），因此这些 Fano 三维簇显然存在 MCK 分解。星号表示本文解决的新情形。问号表示我无法解决的情形。

标签索引		次数 h^1,2		描述	MCK
4	4	1	0	$\mathbb{P}^3$	平凡
3	3	2	0	$X_2 \subset \mathbb{P}^4$	平凡
2.1	2	1	21	$X_6 \subset \mathbb{P}(1^3, 2, 3)$	$*$
2.2	2	2	10	$X_4 \subset \mathbb{P}(1^4, 2)$	$*$
2.3	2	3	5	$X_3 \subset \mathbb{P}^4$	[8], [12]
2.4	2	4	2	$X_{(2,2)} \subset \mathbb{P}^5$	[32]
2.5	2	5	0	Gr(2, 5) $\cap L \subset \mathbb{P}^9$	平凡
1.2	1	2	52	$X_6 \subset \mathbb{P}(1^4, 3)$	$*$
1.4.a	1	4	30	$X_4 \subset \mathbb{P}^4$	?
1.4.b	1	4	30	$X \xrightarrow{2:1} Q$ 带有四次分歧轨迹	$*$
1.6	1	6	20	$X_{(2,3)} \subset \mathbb{P}^5$	[34]
1.8	1	8	14	$X_{(2,2,2)} \subset \mathbb{P}^6$	?
1.10.a	1	10	10	普通 Gushel–Mukai 三维簇	?
1.10.b	1	10	10	特殊 Gushel–Mukai 三维簇	$*$
1.12	1	12	7	OGr+(5, 10) $\cap L \subset \mathbb{P}^{15}$	?
1.14	1	14	5	格拉斯曼流形 Gr(2, 6) $\cap L \subset \mathbb{P}^{14}$	[37]
1.16	1	16	3	拉格朗日格拉斯曼流形 LGr(3, 6) $\cap L \subset \mathbb{P}^{13}$	?
1.18	1	18	2	$G_2/P \cap L \subset \mathbb{P}^{13}$	[38]
1.22	1	22	0	$V(s) \subset$ 格拉斯曼流形 Gr(3, 7)	平凡

表 1. Picard 数为 1 的所有 Fano 三维簇。这里，$X_{(d_1,\dots,d_r)}$ 表示多重次数为 $(d_1, \dots, d_r)$ 的完全交，Q 是二次超曲面，$L \subset \mathbb{P}^r$ 是适当维数的线性子空间。记号拉格朗日格拉斯曼流形 LGr(3, 6) 和 OGr+(5, 10) 分别表示拉格朗日格拉斯曼流形和正交格拉斯曼流形的一个连通分支。在 1.22 中，$V(s)$ 表示某个向量丛截面的零点轨迹。

致谢。感谢 Lego University of Schiltigheim 的 Kai Laterveer 先生为这项工作提供灵感。

参考文献

[1] A. Beauville, 《阿贝尔簇的 Chow 环》。《数学年刊》273 (1986)，647—651，[2] A. Beauville, 《关于 Bloch–Beilinson 滤过的分裂》，载于：《代数循环与动机》（J. Nagel 和 C. Peters 编），伦敦数学会讲义丛书 344，剑桥大学出版社，2007，[3] A. Beauville 和 C. Voisin, 《关于 K3曲面的 Chow 环》，《代数几何杂志》13 (2004)，417—426，[4] M. Beltrametti 和 L. Robbiano, 《加权射影空间理论导论》，Exposition. Math. 4 (1986)，第 2 期，111—162，[5] N. Bergeron 和 Z. Li, 《超Kähler流形模空间上的重言类》，《杜克数学杂志》，arXiv:1703.04733，[6] M. Cornalba, 《关于代数簇循环覆盖的拓扑的一则观察》，《意大利数学联合会通报》(5) 18-A (1981)，323—328，[7] C. Delorme, 《各向异性射影空间》，《法国数学会通报》103 (1975)，203—223，[8] H. Diaz, 《三次超曲面的Chow环》，International Math. Research Notices 2021 第 22 期 (2021)，17071—17090，[9] I. Dolgachev, 《加权射影簇》，载于：《群作用与向量场》。施普林格出版社，柏林，海德堡，1982，第 34—71 页，[10] L. Fu、R. Laterveer 和 Ch. Vial, 《某些超Kähler簇的广义Franchetta猜想》（附与 M. Shen 合作的附录），Journal Math. Pures et Appliquées (9) 130 (2019)，1—35，[11] L. Fu、R. Laterveer 和 Ch. Vial, 《某些超Kähler簇的广义Franchetta猜想，II》，Journal de l'Ecole Polytechnique–Mathématiques 8 (2021)，1065—1097，[12] L. Fu、R. Laterveer 和 Ch. Vial, 《乘法的 Chow–Künneth 分解与上同调 K3 型簇》，Annali Mat. Pura ed Applicata 200 第 5 期 (2021)，2085—2126，[13] L. Fu、Z. Tian 和 Ch. Vial, 《动机超Kähler解消猜想：I. 广义Kummer簇》，Geometry & Topology 23-1 (2019)，427—492，[14] W. Fulton, 《交理论》，施普林格出版社数学成果丛书，柏林、海德堡、纽约、东京，1984，[15] M. Green 和 P. Griffiths, 《一个有趣的零循环》，《杜克数学杂志》119 第 2 期 (2003)，261—313，[16] A. Iliev 和 L. Manivel, 《素 Fano三维簇与可积系统》，《数学年刊》339 第 4 期 (2007)，937—955，[17] V. Iskovskikh, 《Fano 三维簇 I》，《苏联科学院通报》数学系列第 41 卷第 3 期 (1977)，485—527，[18] V. Iskovskih 和 Yu. Prokhorov, 《代数几何V：Fano簇》，数学科学百科全书 47，施普林格出版社，柏林，1999，[19] U. Jannsen, 《动机层与 Chow群上的滤过》，载于：Motives（U. Jannsen 等编），纯数学专题讨论会论文集第 55 卷 (1994)，第 1 部分，[20] U. Jannsen, 《关于有限维动机与 Murre 猜想》，载于：《代数循环与动机》（ J. Nagel 和 C. Peters 编），剑桥大学出版社，剑桥，2007，[21] S.-I. Kimura, 《关于 Alexander概形的刻画》，Comp. Math. 92 第 3 期 (1994)，273—284，[22] S.-I. Kimura, 《Chow 群在某种意义下是有限维的》，《数学年刊》331 第 1 期 (2005)，173—201，[23] S.-I. Kimura, 《Chow动机循环映射的满射性》，载于：《动机与代数循环》，菲尔兹研究所通讯，第 56 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009，第 157—165 页，[24] A. Kuznetsov, 《超平面截面与导出范畴》，《数学通报》70 (2006)，447—547，[25] A. Kuznetsov, 《Fano三维簇的导出范畴》，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》264 (2009)，110—122，[26] A. Kuznetsov 和 Y. Prokhorov, 《关于高维del Pezzo簇》，arXiv:2206.01549，[27] R. Laterveer, 《一个具有有限维动机的三次四维簇族》，《日本数学会杂志》70 第 4 期 (2018)，1453—1473，[28] R. Laterveer, 《关于某类 K¨uchle 四维簇的 Chow 环的一则评论 $d3$》，《澳大利亚数学会通报》100 第 3 期 (2019)，410—418，[29] R. Laterveer, 《代数循环与 Verra四维簇》，《东北数学杂志》72 第 3 期 (2020)，451—485，

[30] R. Laterveer，关于某些Fano四维簇的Chow 环，Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math. 19 (2020), 39—52,[31] R. Laterveer，关于类型为 $S2$的Fano簇的Chow 环，Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 90 (2020), 17—28,[32] R. Laterveer，代数循环与两个二次曲面的交，Mediterranean Journal of Mathematics 18 no. 4 (2021),[33] R. Laterveer，代数循环与三个二次超曲面的交，Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 173 no. 2 (2022), 349—367,[34] R. Laterveer，代数循环与一个二次超曲面和一个三次曲面的交，Forum Mathematicum 33 no. 3 (2021), 845—855,[35] R. Laterveer，动机与Pfaffian–Grassmannian等价，Journal of the London Math. Soc. 104 no. 4 (2021), 1738—1764,[36] R. Laterveer，Fatighenti-Mongardi列表中Fano簇的Chow 环，Communications in Algebra 50 no. 1 (2022), 131—145,[37] R. Laterveer，代数循环与属8的Fano三维簇，Portugal. Math. (N.S.) Vol. 78, Fasc. 3-4 (2021), 255—280,[38] R. Laterveer，代数循环与属10的Fano三维簇，预印本,[39] R. Laterveer 和 Ch. Vial，关于Cynk–Hulek Calabi–Yau簇及Schreieder簇的Chow 环，Canadian Journal of Math. 72 no. 2 (2020), 505—536,[40] J. Murre，关于代数簇Chow 群上的猜想滤过，第一部分和第二部分，Indag. Math. 4 (1993), 177—201,[41] J. Murre, J. Nagel 和 C. Peters，纯动机理论讲义，Amer. Math. Soc. University Lecture Series 61, Providence 2013,[42] A. Negut, G. Oberdieck 和 Q. Yin，K3曲面点的Hilbert概形的动机分解，arXiv:1912.09320v1,[43] K. O'Grady，可分解循环与Noether-Lefschetz轨迹，Doc. Math. 21 (2016), 661—687,[44] D. Orlov，三维簇V5上的向量丛例外集，Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat., Mekh., No. 5, 69–71 (1991) [Moscow Univ. Math. Bull. 46 (5), 48–50 (1991)],[45] N. Pavic, J. Shen 和 Q. Yin，关于O'Grady广义Franchetta猜想，Int. Math. Res. Notices (2016), 1—13,[46] T. Scholl，经典动机，载于: Motives (U. Jannsen et alii, eds.), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. 55 (1994), Part 1,[47] M. Shen 和 Ch. Vial，某些超K¨ahler四维簇的傅里叶变换，Memoirs of the AMS 240 (2016), no. 1139,[48] M. Shen 和 Ch. Vial，Hilbert立方 $X^{[3]}$的动机，Forum Math. Sigma 4 (2016), 55 pp.,[49] M. Tavakol，模空间 M_2^{rt}的典范环，International Math. Research Notices 2014 no. 24 (2014), 6661—6683,[50] M. Tavakol，带有有理尾的超椭圆曲线模空间上的重言类，J. Pure Applied Algebra 222 no. 8 (2018), 2040—2062,[51] Ch. Vial，中间代数雅可比簇上的投影算子，New York J. Math. 19 (2013), 793—822,[52] Ch. Vial，上同调群和Chow 群上的niveau滤过与coniveau滤过，Proceedings of the LMS 106 no. 2 (2013), 410—444,[53] Ch. Vial，某些超K¨ahler簇的动机，J. Reine Angew. Math. 725 (2017), 235—247,[54] C. Voisin，关于某些代数超K¨ahler流形的Chow 环，Pure Appl. Math. Q. 4 no. 3 part 2 (2008), 613—649,[55] C. Voisin，Chow环、对角线分解与族的拓扑，Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2014,[56] Q. Yin，Faber–Pandharipande循环的一般非平凡性，International Math. Res. Notices 2015 no. 5 (2015), 1263—1277,

[57] Q. Yin，K3 曲面的幂上的有限维性与循环，Comment. Math. Helv. 90 (2015), 503–511。

数学高级研究所，法国国家科学研究中心——斯特拉斯堡大学，7 RUE REN ´E DESCARTES, 67084 斯特拉斯堡 CEDEX，法国。电子邮箱：robert.laterveer@math.unistra.fr