arXiv:2301.01963v1 [math.RA] 5 Jan 2023

李代数的 Bogomolov 乘子

PRADEEP K. RAI

摘要。Rostami等人的工作将域 Ω 上李代数 L 的 Bogomolov 乘子定义为外积 $L \wedge L$的某个子代数的特定商。如果 L 是有限维的，我们通过推导一个 Hopf 型公式，将该对象识别为第二上同调群 $H^2(L,\Omega)$ 的某个子群。作为应用，我们肯定地回答了 Kunyavskiĭ 提出的两个问题：Bogomolov 乘子是否在李代数的同斜下保持不变，以及是否存在一族 Bogomolov 乘子维数无界的李代数。

1. 引言

有限群 G 的 Bogomolov 乘子是 G的一个上同调不变量，研究它的背景之一是 Noether问题。该问题询问，函数域 $k(x_g : g \in G)$ 的不变子域 $k(G)$ 是否为代数闭域 k 上的纯超越扩张，其中该代数闭域的特征为零。Bogomolov 乘子在发现复数 $\mathbb{C}$上 Noether问题的反例方面发挥了关键作用。Saltman [7] 率先给出了这类反例，他证明，如果非分歧上同调群 $H^2_{nr}(k(G)\ \mathbb{C})$ 非零，那么 G上的 Noether问题无解。Bogomolov 随后证明，$H^2_{nr}(k(G)\ \mathbb{C})$ 自然同构于第二上同调群 $H^2(G,\mathbb{C})$ 的子群 $B_0(G)$；该子群由限制到 G [2]的阿贝尔子群后消失的类构成。这一结果促成了更多 Noether问题反例的发现。后来，Kunyavskiĭ 将 $B_0(G)$ [3], 命名为“Bogomolov 乘子”，而 Moravec 则将 $B_0(G)$ 同调描述为 $H^2(G,\mathbb{C})$ [5]的一个商。沿用 Moravec 的构造，Rostami等人 [6]将 Bogomolov 乘子的概念推广到了李代数。为方便读者，我们在此给出其定义。

设 L 是 Ω 上的一个李代数。L 的外平方定义为由符号 $m \wedge n$ 生成的李代数 $L \wedge L$，其中 $m,\ n \in L$，并满足以下关系：

(i) $\alpha(m \wedge n) = \alpha m \wedge n = m \wedge \alpha n$, (ii) $(m + m') \wedge n = m \wedge n + m' \wedge n$, (iii) $m \wedge (n + n') = m \wedge n + m \wedge n'$, (iv) $[m, m'] \wedge n = m \wedge [m', n] - m' \wedge [m, n]$, (v) $m \wedge [n, n'] = [n', m] \wedge n - [n, m] \wedge n'$, (vi) $[(m \wedge n), (m' \wedge n')] = -[n, m] \wedge [m', n']$, (vii) $m \wedge n = 0$ 只要 $m = n$,

2010年 数学主题分类。17B56, 14E08。关键词和短语。博戈莫洛夫乘子，李代数，第二上同调群。

对于所有 $\alpha \in \Omega$ m, m', n, $n' \in L$。

容易看出，K: $L \times L \mapsto [L, L]$ 由 $(m, n) \mapsto [m, n]$ 诱导出一个 $\bar{}$ $\bar{}$同态 K: $L \wedge L \mapsto [L, L]$，使得对所有 m, $n \in L$, K($m \wedge n$) $= [m, n]$。已知 $\bar{}$K 的核同构于舒尔乘子 H^2（L, Ω）（定义如下）。我们将其记为 M(L)。定义 $M_0(L)$ 为群 h$m \wedge n$ |m, $n \in L$, $[m, n] = 0$i。因子群 $\mathcal{M}(L)$ $\mathcal{M}_0(L)$ 定义为李代数 L 的博戈莫洛夫乘子 $B(L)$。

本文为域 Ω 上的有限维李代数 L 定义了一个上同调对象 $B_0(L)$，并证明它同构于博戈莫洛夫乘子 $B(L)$。在此之前，我们回顾有限维李代数的舒尔乘子的定义。设 L 是一个有限维李代数， A 是平凡的 L-模。若映射 f: $L \times L \mapsto A$ 是双线性、交错且满足以下条件，则称其为一个 2-余循环

$$f([x_1, x_2], x_3) + f([x_2, x_3], x_1) + f([x_3, x_1], x_2) = 0.$$

并称 f 为 2-余边界，若存在一个线性 σ: $L \mapsto A$ ，使得

$$f(x_1, x_2) = -\sigma([x_1, x_2]).$$

2-余循环和 2-余边界的集合分别记为 $Z^2(L, A)$ 和 $B^2(L, A)$，它们关于通常的加法构成阿贝尔群。群 $Z^2(L, A)/B^2(L, A)$ 称为以 A 为系数的第二上同调群，记为 $H^2(L, A)$。

李代数 L 的舒尔乘子定义为阿贝尔李代数 $H^2(L, \Omega)$，其中将 Ω 视为中心 L-模。现在我们可以定义 $B_0(L)$。

定义。 对于 Ω 上的有限维李代数 L ，我们定义 $B_0(L)$ 如下:

$$B_0(L) = \{\overline{f} \in H^2(L, \Omega) \mid f(x_1, x_2) = 0 \text{ whenever } [x_1, x_2] = 0\}.$$

Batten [1, 定理 3。6] 确立了李代数舒尔乘子的以下霍普夫公式 L:

$$H^2(L, \Omega) \cong \frac{F' \cap R}{[F, R]},$$

其中 $1 \mapsto R \mapsto F \mapsto L \mapsto 1$ 是 L 的一个自由表示， F' 是 F 的导出子代数。

令 $K(L)$ 表示集合 $\{[x, y] \mid x, y \in L\}$。在下述定理中，我们推导出 $B_0(L)$ 的 Hopf 型公式。

定理 1.1. 设 L 是一个有限维李代数，且有一个自由表示$L \cong F/R$。则 $B_0(L)$ $\cong$ $F' \cap R\langle K(F) \cap R\rangle$。

以下推论由 [6, 命题 4。1] 以及定理 1.1得出。

推论 1.2. 设 L 是一个有限维李代数。则 $B(L) \cong B_0(L)$。

作为一项应用，我们回答了 Kunyavskiĭ [4]提出的几个问题。他针对有限维李代数提出了以下问题 L:

问题 1.3. [4, 问题 7。1] $B(L)$ 的维数能否尽可能大?

问题 1.4. [4, 问题 7。2] $B(L)$ 是否在李代数的同斜下保持不变?

若存在同构 α:$L/Z(L) \mapsto K/Z(K)$ 和 β: $L' \mapsto K'$，使得下图交换，则称两个李代数 L 和 K 同斜。

$$\begin{array}{ccc} \frac{L}{Z(L)} \times \frac{L}{Z(L)} & \xrightarrow{\phi} & L' \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha\times\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ \frac{K}{Z(K)} \times \frac{K}{Z(K)} & \xrightarrow{\theta} & K' \end{array}$$

其中

$$\phi\Big(l_1 + Z(L), l_2 + Z(L)\Big) = [l_1, l_2] \quad \text{for} \quad l_1, l_2 \in L$$

and

$$\theta\Big(k_1 + Z(K), k_2 + Z(K)\Big) = [k_1, k_2] \quad \text{for} \quad k_1, k_2 \in K.$$

称这对 (α, β) 为 L 和 K之间的同斜。

在以下定理中，我们对问题 1.3 和1.4 给出肯定回答。

定理 1.5。 设 $n \geq 1$ 是一个自然数。存在一个有限维、类为 *2* 的幂零李代数 L，使得 B的维数(L) 大于或等于 n。

定理 1.6. 设 L 和 M 是域 Ω上的两个同斜有限维李代数。那么 $B(L) \cong B(M)$。

2. Hopf 型公式

设域 Ω 上的有限维李代数 L，其中心理想为 H，并设平凡 L-模 A。限制映射 Res : Hom(L, A) $\to$Hom(H, A) 定义如下：对于同态 f: $L \to A$, Res(f) 是 f 在 H 上的限制。另有膨胀映射 Inf : Hom(L/H, A) $\to$Hom(L, A)，其定义是将同态 $\alpha \in$Hom(L/H, A) 映到同态 $\alpha' \in$Hom(L, A)，该同态由 $\alpha'(x, y) = \alpha(\beta(x)$ $\beta(y))$ 定义，其中任意 $x, y \in L$ 均成立，且 β: $L \to L/H$ 是自然群同态。另一个膨胀映射 Inf : $H^2(L/H, A)$ $\to H^2(L, A)$ 的定义类似，它将 $[\alpha] \in H^2(L/H, A)$ 映到 $[\alpha'] \in H^2(L, A)$，其中 $\alpha'(x, y) = \alpha(\beta(x)$ $\beta(y))$，对任意 $x, y \in L$ 均成立。接下来，我们定义传递映射 Tra : Hom(H, A) $\to H^2(L/H, A)$ 如下：对于 β 的固定截面 μ，定义映射f: $L/H \times L/H \to L$，使得对任意 $x, y \in L/H$， $f(x, y) = [\mu$ (x) $\mu(y)] - \mu([x, y])$。给定同态 $\chi \in$Hom(H, A)，可以验证 $\chi f \in Z^2(L/H, A)$，且 χf 的上同调类不依赖于 μ 的选取。传递映射 Tra 定义为将同态 χ 映到 χf的上同调类的映射

现在我们可以引用一些后续研究所需的结果。以下五项正合序列由 P. Batten 在其博士论文中建立 [1, 定理 3。1]

定理 2.1。设 L 是一个李代数， H 是 L 的中心理想， $1 \mapsto H \mapsto L \mapsto L/H \mapsto 1$ 是自然正合序列，且 A 是平凡的 L-模。则

诱导序列

$$1 \to \mathrm{Hom}(L/H, A) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{Hom}(L, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Hom}(H, A) \xrightarrow{\mathrm{Tra}} H^2(L/H, A) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^2(L, A) \tag{2.1}$$

是正合的。

设 L 是一个李代数，T 是 L 的一个子集。用 $\mathfrak{h}T\mathfrak{i}$ 表示由 T 生成的 L 的子空间，用 $\mathrm{Hom}_T(L, A)$ 表示将 T 映射到 0 的同态集合。下面的引理对我们后续的研究至关重要。

引理 2.2。设 L 是域 Ω 上的有限维李代数，H 是 L 的一个中心理想。那么 $\mathrm{Tra}(\lambda) \in B_0(L/H)$ 当且仅当 $\lambda \in \mathrm{Hom}_T(H, \Omega)$，其中$T = \langle K(L) \cap H \rangle$。

证明。设 $\mu : L/H \to L$ 是一个截面，使得 $\mu(0) = 0$，并令 Tra 使用 μ 定义为 $\mathrm{Tra}(\lambda) = [\lambda f]$，其中

$$f(x, y) = [\mu(x), \mu(y)] - \mu([x, y]) \quad \forall\ x, y \in L/H.$$

设 $\lambda \in \mathrm{Hom}_T(H, \Omega)$，且 $x, y \in L/H$ 满足 $[x, y] = 0$.。于是 $\lambda f(x, y) = \lambda([\mu(x) \ \mu(y)])$。但是 $[\mu(x) \ \mu(y)] \in T$.。因此 $\lambda f(x, y) = 0$。这证明了$[\lambda f] \in B_0(L/H)$。于是 $\mathrm{Tra}(\lambda) \in B_0(L/H)$。反过来，设 $\mathrm{Tra}(\lambda) \in B_0(L/H)$。取 $l_1, l_2 \in L$ 使得 $[l_1, l_2] \in H$.。注意到 $[l_1, l_2] = [\mu(l_1 + H) \ \mu(l_2 + H)]$，因为 H 是中心的。此外 $\mu([l_1 + H, l_2 + H]) = \mu([l_1, l_2] + H) = 0$，因为$[l_1, l_2] \in H$ 且 $\mu(0) = 0$.。因此，

$$\lambda([l_1, l_2] = \lambda([\mu(l_1 + H) \ \mu(l_2 + H)]) - \lambda\mu([l_1 + H, l_2 + H]) = \lambda f(l_1 + H, l_2 + H).$$

由于 $\mathrm{Tra}(\lambda) = [\lambda f] \in B_0(L/H)$ 且 $[l_1 + H, l_2 + H] = 0$属于 L/H，我们有$\lambda f(l_1 + H, l_2 + H) = 0$。因此，只要 $[l_1, l_2] \in H$.，就有 $\lambda([l_1, l_2]) = 0$。这证明了 $\lambda \in \mathrm{Hom}_T(H, \Omega)$. □

定理 2.3。设 L 是域 Ω上的有限维李代数，H 是 L的中心理想，且 $T = \langle K(L) \cap H \rangle$。则诱导序列

$$1 \to \mathrm{Hom}(L/H, \Omega) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{Hom}(L, \Omega) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Hom}_T(H, \Omega) \xrightarrow{\mathrm{tra}} B_0(L/H) \xrightarrow{\mathrm{inff}} B_0(L) \tag{2.2}$$

是正合的，其中 tra 和 inff 分别是Tra 和Inf的限制。

证明。该定理由正合列 2.1、引理 2.2 以及以下显而易见的观察得出：

(i) $\mathrm{Res}(\mathrm{Hom}(L, \Omega) \leq \mathrm{Hom}_T(H, \Omega)$. (ii) $\mathrm{Inf}(B_0(L/H) \leq B_0(L)$。

□

下一个定理由引理 2.2 和 [1, 推论 3。7]。

定理 2.4。设 L 是一个有限维李代数，L^* 是其覆盖，且 $A \leq L^*$ 满足以下三个条件

(1) $A \leq Z(L^*) \cap [L^*, L^*]$;

(2) $A \cong M(L)$; (3) $L \cong L^*/A$, 且 $T = \langle K(L^*) \cap A \rangle$。则映射 $\mathrm{tra}: \mathrm{Hom}_T(A, \Omega) \mapsto B_0(L)$ 是双射。

推论 2.5. 设 L 是一个有限维李代数, L^* 是其满足以下三个条件的覆盖$A \leq L^*$

(1) $A \leq Z(L^*) \cap [L^*, L^*]$;
(2) $A \cong M(L)$; (3)
$L \cong L^*/A$。则 $B_0(L)$
$\cong$ $^{A}\mathrm{h}_{K(L^*)\cap A}\mathrm{i}$。

证明。 设 $T = \langle K(L^*) \cap A \rangle$。由于 A是一个阿贝尔李代数，同态不过是线性变换。因此 $\mathrm{Hom}_T(A, \Omega) \cong \mathrm{Hom}\left(\frac{A}{T}, \Omega\right) \cong \frac{A}{T}$。由定理 2.4可得结论。 □

定理 2.6. 设 H是 L 中的一个中心理想，且 $T = \langle K(L) \cap H \rangle$。则 $^{L'\cap H}\langle K(L)\cap H\rangle$与映射 $\mathrm{tra}: \mathrm{Hom}_T(H, \Omega) \mapsto B_0(L/H)$的像同构。特别地，如果映射 tra 是满射，则 $L'\cap H\langle K(L)\cap H\rangle \cong B_0(L/H)$ 。

证明。 根据定理 2.3，我们有以下正合列

$$\mathrm{Hom}(L, \Omega) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Hom}_T(H, \Omega) \xrightarrow{\mathrm{tra}} B_0(G/H).$$

由此可知，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Res}(H,\Omega)}\mathrm{Res}(\mathrm{Hom}(L,\Omega))$与 Tra 的像同构。因此，要证明该定理，我们只需证明

$$\frac{L' \cap H}{\langle K(L) \cap H \rangle} \cong \frac{\mathrm{Hom}_T(H, \Omega)}{\mathrm{Res}(\mathrm{Hom}(L, \Omega))}.$$

由于 H是阿贝尔的，因此自然限制映射 $\mathrm{Res}_1: \mathrm{Hom}_T(H, \Omega) \to \mathrm{Hom}_T(L' \cap Z, \Omega)$ 是满射。因此

$$\frac{\mathrm{Hom}_T(H, \Omega)}{\ker \mathrm{Res}_1} \cong \mathrm{Hom}_T(L' \cap H, \Omega).$$

考虑自然限制映射 $\mathrm{Res}_2: \mathrm{Hom}(H,\Omega) \mapsto \mathrm{Hom}(L' \cap H,\Omega)$, 不难看出，$\ker \mathrm{Res}_1 = \ker \mathrm{Res}_2$. 令 J为 $\mathrm{Hom}(H,\Omega)$ 中由所有 χ 组成的子集，这些元素均可扩张为一个同态 $L \to \Omega$。借鉴 [1, 定理 3.2] 的证明，我们有 $J = \ker \mathrm{Res}_2$. 但显然 $J = \mathrm{Res}(\mathrm{Hom}(L,\Omega))$。因此可得

$$\frac{\mathrm{Hom}_T(H, \Omega)}{\mathrm{Res}(\mathrm{Hom}(L, \Omega))} \cong \mathrm{Hom}_T(L' \cap H, \Omega).$$

But

$$\mathrm{Hom}_T(L' \cap H, \Omega) \cong \mathrm{Hom}\left(\frac{L' \cap H}{T}, \Omega\right) \cong \frac{L' \cap H}{T}$$

因为 $L' \cap H$ 是阿贝尔的。证明至此完成。 □

定理 1.1 的证明: 设 $\bar{R} = \frac{R}{[F,R]}$和 $\bar{F} = \frac{F}{[F,R]}$。则 $\bar{R}$是 $\bar{F}$的中心理想，并且 $L \cong \frac{\bar{F}}{\bar{R}}$。根据 [1, 引理 3。4] 传递映射 Tra: $Hom(\bar{R}, \Omega) \mapsto H^2(L, \Omega)$ 是满射。因此根据引理 2.2，映射 tra: $\bar{}\mathrm{Homh}_{K(\bar{F})\cap\bar{R}}\mathrm{i}(R, \Omega) \mapsto B_0(L)$ 也是满射。由此，根据定理

2.6, $B_0(L) \cong \frac{\bar{R}\cap[\bar{F},\bar{F}]}{\langle K(\bar{F})\cap\bar{R}\rangle}$。然而 $\bar{R}\cap[\bar{F},\bar{F}] = \frac{F\cap R}{[F,R]}$ 以及 $\langle K(\bar{F})\cap\bar{R}\rangle = \langle K(F)\cap R\rangle_{[F,R]}$。因此 $B_0(L) \cong \frac{F\cap R}{\langle K(F)\cap R\rangle}$。

3. 应用

以下命题的证明与 [6,命题 43] 的证明完全相同。

定理 3.1. 设 L 是一个李代数，其自由表示为 $L \cong F/R$，且 M 是 L 的一个理想，使得 $T = \ker(F \mapsto L/M)$。则序列

$$0 \mapsto \frac{R\cap\langle K(F)\cap T\rangle}{\langle K(F)\cap R\rangle} \mapsto B_0(L) \mapsto B_0(L/M) \mapsto \frac{M\cap L'}{\langle K(L)\cap M\rangle} \mapsto 0,$$

是正合的。

定义。 若李代数 L 满足 $L' = Z(L)$ 且 $\dim L' = n$，则称其为秩为 n 的广义海森堡李代数。

最自由广义海森堡李代数是一个由 d 生成的广义海森堡李代数（由 d 个元素最小生成），其秩为 $\frac{1}{2}d(d-1)$，其中 $d \geq 2$ 为某个值。我们将其记为 L_d。注意，L_d 有如下表示：

$$\langle x_1, \ldots, x_d,\ y_{ij} \mid\ [x_i, x_j] = y_{ij}, 1 \leq i < j \leq d,\ \text{class } 2\rangle,$$

且 $\dim L_d = \frac{1}{2}d(d+1)$。

定理 3.2. 设 L_d 为秩为 $\frac{1}{2}d(d-1)$ 的最自由广义海森堡李代数。则 $B_0(L_d) = 0$.

证明。设 $f: L_d \times L_d \mapsto \Omega$ 是一个 2-余循环，使得 $f \in B_0(L_d)$。令 $B = \{x_1, \ldots, x_d, [x_i, x_j] \mid 1 \leq i < j \leq d\}$。定义映射 $\mu: B \mapsto \Omega$ 如下：

$$\mu(x_i) = 0 \text{ for } 1 \leq i \leq d,$$

$$\mu([x_i, x_j]) = -f(x_i, x_j) \text{ for } 1 \leq i < j \leq d.$$

由于 B 是 L_d 的基，我们可以将此映射线性扩展到 L_d，并将其记为 σ，使得 σ 是一个线性变换。令 $x, y \in L_d$。由于 B 是一组基，我们可以将 x 和 y 写成

$$x = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i + \sum_{1\leq i<j\leq d} \alpha_{ij}[x_i, x_j],$$

$$y = \sum_{k=1}^{d} \beta_k x_k + \sum_{1\leq k<l\leq d} \beta_{kl}[x_k, x_l],$$

对于某些 α_i, β_i, α_{ij}, $\beta_{ij} \in \Omega$。现在利用 f 的双线性以及当 $[a, b] = 0$ 时 $f(a, b) = 0$ 这一事实，可得

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} \alpha_i\beta_k f(x_i, x_k).$$

此外，利用李括号的双线性、σ的线性以及对所有 l_1，l_2，$l_3 \in L_d$，$f(l_1$，$[l_2, l_3])$ =0 这一事实，可得

$$\sigma([x,y]) = -\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\alpha_i\beta_k f(x_i, x_k).$$

因此 $f(x$，$y) = -\sigma([x,y])$。于是 f是一个余边界，且 $f = 0$。证明完毕。

□

Rostami等人 [6] 证明了海森堡李代数的博戈莫洛夫乘子是平凡的。我们将这一事实作为定理 3.2的一个推论加以证明。

维数为 $2n+1$，$n > 0$ 的海森堡李代数由以下表示给出：

$$\langle x_1, \ldots, x_{2n},\ v \mid\ [x_{2i-1}, x_{2i}] = v, [x_j, x_k] = 0, 1 \le i \le n, (j,k) \neq (2i-1, 2i)\rangle.$$

推论3.3。设 H_{2n+1} 为维数为 $2n+1$. 的海森堡李代数。那么$B_0(H_{2n+1}) = 0$.

证明。设 L_{2n} 为秩为 $n(2n-1)$ 的广义海森堡李代数，M为由 $[x_{2r-1}, x_{2r}] - [x_{2s-1}, x_{2s}]$、$1 \le r < s \le n$ 和 $[x_t, x_u]$、$1 \le t < u \le 2n$、$(t$、$u) \neq (2i-1$、$2i)$ 对任意 $i \le n$. 生成的理想。容易看出，L_{2n}/M与 H_{2n+1}. 同构。由于根据定理 3.2，$B_0(L_{2n}) = 0$，由定理 3.1 可得

$$B_0(L_{2n}/M) \cong \frac{M \cap L'_{2n}}{\langle K(L_{2n}) \cap M\rangle}.$$

由于对于 $1 \le r < s \le n$,

$$[x_{2r-1} - x_{2s-1}, x_{2r} + x_{2s}] = [x_{2r-1}, x_{2r}] - [x_{2s-1}, x_{2s}] + [x_{2r}, x_{2s-1}] + [x_{2r-1}, x_{2s}],$$

因此 $M \cap L'_{2n} = \mathrm{h}K(L_{2n}) \cap M\mathrm{i}$。于是 $B_0(L_{2n}/M) = 0$，从而 $B_0(H_{2n+1})$ =0。

□

现在我们继续证明定理 1.5。

定理 1.5 的证明：设 d 是一个大于 $4n$ 的自然数，且 L_d 是由 d 生成的最自由广义海森堡李代数，其生成元为 x_1、x_2、$\ldots x_d$。设 M是由 $[x_1, x_2]+[x_3, x_4]$、$[x_5, x_6]+[x_7, x_8]$、$\ldots [x_{4n-3}, x_{4n-2}]+[x_{4n-1}, x_{4n}]$. 由于 $B_0(L_d) = 0$，由定理 3.1 可得

$$\dim B_0(L_d/M) = \dim \frac{L'_d \cap M}{\langle K(L_d) \cap M\rangle}.$$

接下来我们证明 $K(L_d) \cap M = \{0\}$。为此，令 $l \in K(L_d) \cap M.$。由于 $l \in M$，存在 $\gamma'_k s$ 使得

$$l = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{k+1}\Big([x_{4k+1}, x_{4k+2}] + [x_{4k+3}, x_{4k+4}]\Big).$$

此外，存在 α_i 和 β_j，使得

$$l = \left[\sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{d} \beta_j x_j\right]$$

因为 $l \in K(L_d)$。因此

$$\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{k+1}\Big([x_{4k+1}, x_{4k+2}] + [x_{4k+3}, x_{4k+4}]\Big) = \sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=i+1}^{d} (\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i)[x_i, x_j].$$

由此可得

$$\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i = 0 \quad \text{when} \quad (i,j) \neq (2k+1, 2k+2) \text{ for any } k = 0, 1, \ldots n-1, \tag{3.1}$$

and

$$\gamma_{k+1} = \alpha_{4k+1}\beta_{4k+2} - \alpha_{4k+2}\beta_{4k+1} = \alpha_{4k+3}\beta_{4k+4} - \alpha_{4k+4}\beta_{4k+3}$$

对于任意 $k = 0,\ 1,\ \ldots n-1$。由方程 3.1 可得

$$\alpha_{4k+1}\beta_{4k+3} - \alpha_{4k+3}\beta_{4k+1} = 0 \tag{3.2}$$

$$\alpha_{4k+1}\beta_{4k+4} - \alpha_{4k+4}\beta_{4k+1} = 0 \tag{3.3}$$

$$\alpha_{4k+2}\beta_{4k+3} - \alpha_{4k+3}\beta_{4k+2} = 0 \tag{3.4}$$

$$\alpha_{4k+2}\beta_{4k+4} - \alpha_{4k+4}\beta_{4k+2} = 0, \tag{3.5}$$

对于 $k = 0,\ 1,\ \ldots n-1$.

设 $\alpha_{4k+1} = \beta_{4k+1} = 0$. 则 $\gamma_{k+1} = 0$. 再设 $\alpha_{4k+1} = 0$ 但$\beta_{4k+1} \neq 0$. 由方程 3.2 和 3.3，$\alpha_{4k+3} = \alpha_{4k+1} = 0$。因此，在这种情况下，$\gamma_{k+1} = 0$也成立。由此我们证明了，若 $\alpha_{4k+1} = 0$，则 $\gamma_{k+1} = 0$。类似地，若 α_{4k+2}、α_{4k+3}、α_{4k+4}、β_{4k+1}、β_{4k+2}、β_{4k+3}、β_{4k+4} 中任一个为零，则 $\gamma_{k+1} = 0$.因此，现在可以假设，对于 $i = 1$、2、3、4，α_{4k+i} 和 β_{4k+i} 均不为零。由方程 3.2 和 3.3 可推得 $\beta_{4k+3}/\beta_{4k+4} = \alpha_{4k+3}/\alpha_{4k+4}$.因此 $\gamma_{k+1} = 0$，从而 $l = 0$。由此可得 $K(L_d) \cap M = \{0\}$。

此外，$M \leq L'_{d^\circ}$ 因此 $\dim B_0(L_d/M) = \dim(M) = n$. 根据推论 1.2$\dim B(L_d/M) = n$. 取 L 为 L_d/M 即可完成证明。

定理 1.6 的证明：设 (θ, ϕ) 是 L 与 M之间的一个同斜，即，$\theta : Z^L_L(\ ) \mapsto Z^M_M(\ )$ 和 ϕ：~~$\gamma_2(L) \mapsto$~~ $\gamma_2(M)$ 是同构，并且只要 $\theta(l_i Z(L)) = m_i Z(M)$ 对于 $i = 1, 2$ 成立，就有 $\phi([l_1, l_2]) = [m_1, m_2]$. 设 $f \in B_0(L)$，其中 $f : L \times L \mapsto \Omega$ 是一个余循环。定义 c_f：$M \times M \mapsto \Omega$，使得 $c_f(m_1, m_2) = f(l_1, l_2)$，其中$l_1$ 和 l_2 由 $\theta^{-1}(m_i + Z(M)) = l_i + Z(L)$ 给出，适用于 $i = 1, 2$。证明的其余部分由以下引理得出：

引理 3.4. 设 c_f 为上述定义的映射。则

(i) c_f 定义良好。

(ii) c_f 是一个 2-余循环。(iii) $\overline{c_f} \in B_0(M)$。

证明。 由于 f是双线性的，并且当 $[k,l] = 0$时， $f(k,l) = 0$。因此，对于每个 $z_1, z_2 \in Z(L)$，都有 $f(l_1 + z_1, l_2 + z_2) = f(l_1, l_2)$。这表明 c_f定义良好。

为证明 c_f是一个 2-余循环，设 $m_1, m_2, m_3 \in M$，并令 $\theta^{-1}(m_i + Z(M)) = l_i + Z(L)$，其中 $i = 1, 2, 3$。显然， $\theta^{-1}(m_1 + m_2 + Z(M)) = l_1 + l_2 + Z(L)$。因此， $c_f(m_1 + m_2, m_3) = f(l_1 + l_2, l_3)$，这等于 $f(l_1, l_3) + f(l_2, l_3)$，也就是 $c_f(m_1, m_3) + c_f(m_2, m_3)$。类似地， $c_f(m_1, m_2 + m_3) = c_f(m_1, m_2) + c_f(m_1, m_3)$。因此 c_f是双线性的。此外，显然 c_f是交错的，因为 f是交错的。接下来，对于 $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$，注意到 $c_f([m_i, m_j], m_k) = f([l_i, l_j], l_k)$，因为

$$\begin{aligned}
\theta^{-1}\Big([m_i, m_j] + Z(M)\Big) &= \theta^{-1}\Big(\Big[m_i + Z(M), m_j + Z(M)\Big]\Big) \\
&= \Big[\theta^{-1}\Big(m_i + Z(M)\Big), \theta^{-1}\Big(m_j + Z(M)\Big)\Big] \\
&= \Big[l_i + Z(L), l_j + Z(L)\Big] \\
&= [l_i, l_j] + Z(L).
\end{aligned}$$

由此可知， c_f 是一个 2-余循环，因为 f 是一个 2-余循环。

为证明$\overline{c_f} \in B_0(M)$，假设 $[m_1, m_2] = 0$。但由于 $\phi([l_1, l_2]) = [m_1, m_2].$，有 $[l_1, l_2] = 0$。由于$\overline{f} \in B_0(L)$，可知 $f(l_1, \ l_2) = 0.$。因此$c_f(m_1, \ m_2) = 0.$

引理 3.5。 由 $\eta(\overline{f}) = \overline{c_f}$定义的映射 $\eta\colon B_0(L) \mapsto B_0(M)$是一个同构。

证明。 我们首先确保该映射定义良好。为验证这一点，考虑σ： $L \times L \mapsto \Omega$ 是一个上边界。于是

$$c_{f+\sigma}(m_1, m_2) = (f + \sigma)(l_1, l_2) = f(l_1, l_2) + \sigma(l_1, l_2) = c_f(m_1, m_2) + c_\sigma(m_1, m_2).$$

因此，我们有 $c_{f+\sigma} = c_f + c_\sigma.$。注意到 c_σ 是一个上边界，因为 σ 是一个上边界。因此， $\overline{c_f} = \overline{c_{f+\sigma}}$，即 $\eta(\overline{f}) = \eta(\overline{f + \sigma})$。这证明了 η 定义良好。

类似地，可以看出，对于每个 $\alpha \in \Omega$ 以及每对从 $L \times L$ 到 Ω 的余循环 f_1、 f_2， $c_{f_1+f_2} = c_{f_1} + c_{f_2}$ 和 $c_{\alpha f_1} = \alpha c_{f_1}$。因此， $\eta(\overline{f_1 + f_2}) = \eta(\overline{f_1}) + \eta(\overline{f_2})$，且 $\eta(\alpha\overline{f_1}) = \alpha\eta(\overline{f_1})$。由此可知， η 是一个线性映射。

最后，为了证明 η 是一个双射，我们以与定义从 $B_0(L)$ 到 $B_0(M)$ 的 η 相同的方式，定义另一个映射 χ： $B_0(M) \mapsto B_0(L)$。容易看出， $\eta\chi$ 和 $\chi\eta$ 都是恒等映射，因此 η 是一个双射。证明至此完成。□

□

参考文献

[1] P. Batten，李代数的覆盖与乘子，博士论文，北卡罗来纳州立大学， 1993 2, 3, 4, 5 。

[2] F. A. Bogomolov，线性表示商空间的布劳尔群，苏联科学院通报，数学系列 51 1987 3, 688 1 ( )，第 期，文章编号 。B.

[3] Kunyavskiı̆，有限单群的博戈莫洛夫乘子，《有理性问题的上同调与几何方法》，209–217，《数学进展》第 282 卷，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2010年。1

[4] B. Kunyavskiĭ，群与李代数之间的一些新类比，或者有什么比乘法表更简单？，EMS 通讯 118 2020 5 13 2, 3 ( )，–。P. Moravec，有限群与无限群的非分歧布劳尔群，《美国数学杂志》134 (2012)，第 6 期，1679-1704。1[6] Z. A. Rostami，M. Parvizi，P. Niroomand，李代数的博戈莫洛夫乘子，《哈杰特数学与统计杂志》49 2020 1190 1205 1, 2, 6, 7 ( )，-。D. J. Saltman，代数闭域上的 *Noether*问题，《数学发明》77 (1984)，第 1 期，71-84。1

(Pradeep K.Rai) 马恒达大学，海得拉巴，特伦甘纳邦，，印度电子邮箱地址：
raipradeepiitb@gmail.com