arXiv:2301.01965v2 [math.ST] 1 Nov 2023

基于含不规则微观结构噪声的高频订单价格推断日内瞬时波动率

Markus Bibinger*[a]

[a]数学与计算机科学学院，数学研究所，维尔茨堡尤利乌斯-马克西米利安大学，*markus.bibinger@uni-wuerzburg.de*

摘要

我们研究随机边界模型中瞬时波动率的估计，该模型针对高频限价订单价格，包含单侧微观结构噪声。基于带跳跃和一般随机波动率的伊藤半鞅的离散含噪观测值，我们提出一种利用局部次序统计量的简单显式估计量，并建立其一致性和稳定中心极限定理等渐近性质。渐近分析基于由广义反正弦律推导的次序统计量尾概率展开。为利用局部次序统计量的复杂分布进行偏差校正，我们开发了一种高效的数值算法。我们通过蒙特卡洛模拟展示该估计方法的有限样本表现。

关键词：反正弦律、限价订单簿、市场微观结构、非参数边界模型、波动率估计

数学主题分类：*62M09*、*60J65*、*60F05*

1. 引言

日内价格时间序列通常被描述为连续时间随机过程的离散化路径。为了实现无套利市场，对数价格过程应为半鞅。基于最高可用观测频率的高频数据进行风险估计时，必须考虑微观结构摩擦。为将这些市场微观结构效应与长期价格演变的动态区分开来，人们提出了带有加性噪声的观测模型，参见例如 [13], [2] 和 [19]。市场微观结构噪声可描述电子市场中成交价格在买方和卖方订单价位之间的波动等多种效应；传统上，它是一个均值为零的中心化（白）噪声过程。这些模型能够解释高频数据的许多典型事实。然而，若能获取包含买方和卖方限价单的委托提交、撤单和成交数据在内的完整限价订单簿，就不清楚究竟应该考察哪些时间序列。虽然这对单一价格过程的概念提出了挑战，但也引出了一个问题：能否更有效地利用这些信息，尤其是改进风险量化。[5], [20] 和 [8]第 1.8 章讨论了用于订单簿限价订单价格的随机边界模型。该模型保留了底层有效半鞅对数价格这一概念，该价格决定长期价格动态；同时还包含加性外生噪声，用于描述特定于市场的微观结构摩擦。其核心思想是，卖方订单价格（在大多数情况下）应高于不可观测的有效价格，而买方价格应低于

*谨此感谢德国研究联合会（DFG）通过资助项目 403176476 提供的经费支持。

有效价格。这会导致观测误差具有不规则性，即其期望非零，且分布的支撑集有下界或上界。不失一般性，考虑一个针对（最优）卖方订单价格的模型，我们得到具有下界的观测误差，并使用局部极小值进行估计。若改为对（最优）买方价格建模，则会得到具有上界的观测误差，并可使用局部极大值进行类似估计。实践中，两者可以结合使用。

众所周知，带有非规则噪声的模型在统计和概率性质上与带有规则噪声的模型大不相同，因此需要采用其他方法，参见例如 [23], [18] 和[24]。因此，与市场微观结构文献相比，我们的估计方法和渐近理论颇为不同，不过我们仍能借鉴其中的一些技术。在 [5] 中，研究者提出了一种估计量，用于估计连续半鞅的二次变差，即积分波动率；该估计量基于 n 个带有单侧噪声的离散观测值，收敛速度为$n^{-1/3}$。研究证明，该速率在标准的渐近极小极大意义下是最优的。一项重要发现是，这一收敛速度优于规则市场微观结构噪声条件下的最优速率 $n^{-1/4}$。

近期有一类文献提出了结构化的参数化市场微观结构噪声模型，这些模型纳入了基于观测到的订单簿数量（如成交量或交易类型）的信息，参见 [9], [16], [10] 和 [11]。将噪声分解为此类数量的参数函数与残差噪声后，代入估计积分波动率也能比采用无信息噪声的经典模型获得更快的收敛速度。尽管这种波动率估计精度的提升似乎与我们的研究有相似之处，但我们对市场微观结构的看法截然不同。我们关注的是采用单侧噪声而非中心化噪声的模型，但既不对噪声施加参数假设，也不纳入额外的交易信息。未来若能更深入地了解买卖报价的微观结构效应，或许值得进一步研究对单侧噪声模型进行这类改进，正如上述研究针对中心化噪声模型所讨论的那样。这有望进一步提高波动率估计的精度。

瞬时波动率的推断是金融文献中最重要的主题之一，参见例如 [22], [4]及其中的参考文献。在本文中，我们研究 [5]中的模型的瞬时波动率估计。使用长度不断缩小的区块上的局部极小值 $h_n \propto n^{-2/3} \propto （nh_n）^{-2}$后， [5] 中的局部极小值分布变得复杂且不可行，因此无法获得积分波动率估计量的中心极限定理。我们的瞬时波动率估计量与 [5], 中的估计量的局部化版本有关，并结合截断方法以消除半鞅的跳跃。然而，对于渐近理论，我们采用不同的方法，选择长度为 h_n的区块，其中 $h_n n^{2/3} \to \infty$ 缓慢变化。这使我们能够在半鞅波动率这一重要特殊情形下，以最佳可达速率建立稳定中心极限定理，该速率可任意接近 $n^{-1/6}$。我们利用这一结果构造逐点渐近置信区间。

尽管渐近理论依赖于略微不均衡的区块长度，以此渐近地平滑噪声分布对局部极小值分布的影响，但我们的数值研究表明，在实际情形中，采用能优化估计性能的区块长度时，置信区间表现良好。对不同噪声设定的稳健性是我们方法天然具备的一项优势。我们的估计量出奇地简单：它是区块极小值差值平方的局部平均，再乘以一个常数因子

该常数因子源自布朗运动在单位时间区间上的最小值的半正态分布的矩。这个估计量是一致的。然而，要在快速收敛速度下建立稳定中心极限定理，需要进行精细的偏差校正，并纳入对局部极小值渐近分布更精确的近似。为此，我们的分析基于反正弦律的一种推广，它给出了布朗运动在某一区间内为正的时间比例的分布。为了数值计算偏差校正函数，我们提出了一种高效算法。该算法将多个随机变量上的局部极小值运算，逐步化简为每一步对两个随机变量取极小值，并结合卷积步骤，可视为一种动态规划方法。事实证明，与自然的蒙特卡洛模拟近似相比，该方法效率高得多，也是我们数值应用中的关键组成部分。我们的收敛速度远快于规则噪声下瞬时波动率估计的最优速率 $n^{1/8}$，见 [14] 和 [4]。本文的主要贡献是为该估计量的渐近分析建立概率论基础，并确立稳定中心极限定理、渐近置信度以及一种可用于数值计算的方法。

处理跳跃的相关方法和证明技巧受 [21] 开创的截断方法启发，并在 [15]第13章中进行了总结。总体而言，对跳跃过程的策略和限制在一定程度上相似，但与无噪声或具有规则中心化噪声的情形（如 [7]）相比，在使用次序统计量处理非规则噪声时，若干细节存在较大差异。

我们在第2节介绍并进一步讨论我们的模型。第3节介绍估计方法，第4节介绍渐近结果。第5节讨论数值应用，蒙特卡洛模拟研究展示了该方法令人满意的有限样本表现。所有证明均在第6节给出。

2. 具有下界的单侧噪声模型及假设

考虑一个伊藤半鞅

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t a_s\,ds + \int_0^t \sigma_s\,dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \delta(s,z)\mathbf{1}_{\{|\delta(s,z)|\le 1\}}(\mu-\nu)(ds,dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \delta(s,z)\mathbf{1}_{\{|\delta(s,z)|>1\}}\mu(ds,dz)\,,\ t\ge 0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

其具有一维标准布朗运动（W_t），定义在某个滤过概率空间（Ω^X，$\mathcal{F}^X$，$(\mathcal{F}_t^X)$ $\mathbb{P}^X$）上。对于漂移过程（a_t）和波动率过程（σ_t），我们作出以下相当一般的假设。

假设1。 过程$(a_t)^{t\ge 0}$ 和$(\sigma_t)^{t\ge 0}$ 局部有界。波动率过程严格为正，$\inf_{t\in[0,1]}\sigma_t>0$, $\mathbb{P}^X$-几乎必然。对于所有的 $0\le t+s\le 1$, $t\ge 0$, $s\ge 0$，存在一些常数 $C_\sigma>0$和 $\alpha>0$，使得

$$\mathbb{E}\big[(\sigma_{t+s}-\sigma_t)^2\big]\le C_\sigma s^{2\alpha}\,. \tag{2}$$

条件（2）引入了正则性参数 α，用于刻画波动率过程的光滑性。参数 α 至关重要，因为它会自然地影响瞬时

波动率估计的收敛速率。不等式（2）的限制弱于 α-Hölder 连续性，因为它并不排除波动率跳跃。例如，任何跳跃幅度分布具有有限二阶矩的复合泊松跳跃过程，都满足带有 $\alpha = 1/2$ 的条件（2）。这是因为此类过程在（2）中的二阶矩有界于某个常数乘以 $(s^2 + s)$，也就是参数为 s 的泊松分布的二阶矩，因此这一结论显然成立。关于更一般的跳跃过程，[15] 的第13节等文献中给出了类似的界限。这一点很重要，因为已有实证证据表明，在日内高频金融数据中存在波动率跳跃，尤其是价格与波动率同时跳跃；例如参见 [28]和 [6]。此外，本文提出的理论适用于一般的随机波动率，也允许粗糙波动率。粗糙分数随机波动率模型近来颇受欢迎，例如被用于 [12] 和 [25] 的宏观模型中。

式（1）的跳跃分量如 [15] 及相关文献中所示，其中可预测函数 δ 定义在 $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$上，泊松随机测度 μ 由$\nu(ds, dz) = \lambda(dz) \otimes ds$补偿，且 λ是一个 σ-有限测度。我们施加以下标准条件，其广义 Blumenthal-Getoor 指数或跳跃活跃度指数为 r，$0 \le r \le 2$。

假设2。 假设$\sup_{\omega,\, x} |\delta(t, x)|/\gamma(x)$ 局部有界，且存在一个非负的确定性函数 γ，使得

$$\int_{\mathbb{R}} (\gamma^r(x) \wedge 1)\lambda(dx) < \infty\,. \tag{3}$$

本文始终使用记号 $a \wedge b = \min(a, b)$和 $a \vee b = \max(a, b)$。当 $r = 0$时，跳跃为有限活跃度，此时该假设限制最严格。 r越大，允许的跳跃分量就越一般。我们将在对 r施加较弱限制的条件下推导结果。

过程 (X_t)，可分解为

$$X_t = C_t + J_t\,, \tag{4}$$

其中包含连续分量 (C_t) 和右连续且有左极限的跳跃分量 (J_t)，它为连续时间下潜在有效对数价格过程提供了一个模型。

在固定时间区间 $[0, 1]$，内，限价订单簿于时刻 t_i^n，$0 \le i \le n$ 的高频（最优）卖方订单价格，无法通过 (X_t) 的离散观测记录得到充分建模。为此，我们提出一种带有下界的单侧微观结构噪声加性模型：

$$Y_i = X_{t_i^n} + \epsilon_i\,,\ i = 0, \dots, n,\quad \epsilon_i \overset{iid}{\sim} F_\eta, \epsilon_i \ge 0\,. \tag{5}$$

该模型的关键性质是噪声的支撑集具有下界。这个边界是否为零并不那么重要；它也可以是另一个常数，甚至可以是随时间变化的正则变差函数。对于此类模型推广，本文提出的方法和结果具有稳健性。我们将下界设为零，这似乎是限价单最自然的选择。

假设3。 独立同分布噪声 $(\epsilon_i)_{0 \le i \le n}$，其累积分布函数（累积分布函数）为 F_η，满足

足

$$F_\eta(x) = \eta x\big(1+\mathcal{O}(1)\big),\ as\ x \downarrow 0\,. \tag{6}$$

这是一个非参数模型，因为极值指数为 -1 ，且其最小值 最大值吸引域接近边界。关于单侧噪声的这一标准假设， [18]和 [24] 已在不同框架下使用。我们不要求对最大值吸引域、矩以及噪声分布的尾部作出假设。满足（6）的参数化示例包括某个区间上的均匀分布、指数分布，以及具有重尾的标准帕累托分布。

噪声的独立同分布假设至关重要，而推广到弱相关噪声将需要大量工作和新的证明概念。相反，异质性，即时变噪声水平 $\eta(t)$，在温和假设下可以纳入我们的渐近分析。

3. 瞬时波动率估计量的构造

我们将观测区间 $[0,1]$ 划分为 h_n^{-1}个等距分块， $h_n^{-1} \in \mathbf{N}$，并在每个分块上取局部极小值。因此，对于 $k = 0, \ldots, h_n^{-1} - 1$，我们得到局部的分块极小值

$$m_{k,n} = \min_{i \in \mathcal{I}_k^n} Y_i\ ,\ \mathcal{I}_k^n = \{i \in \{0,\ldots,n\} :\ t_i^n \in [kh_n, (k+1)h_n)\}\,. \tag{7}$$

虽然 h_n^{-1}是整数，但 nh_n 通常不是整数。不过，为了便于理解，可以将 nh_n 看作一个整数值序列，它表示在等距观测情况下每个块中的含噪观测值数量。对于类似模型中的积分波动率，可以将 [5] 中公式（2.9）的估计量局部化，从而得到一个瞬时波动率估计量。其思路是，差值 $m_{k、n} - m_{k-1、n}$ 的局部极小值可以估计有效价格的差值，而差值平方之和可用于估计波动率。不过，事情并没有那么简单。为了确定局部极小值差值平方的期望，我们引入函数

$$\Psi_n(\sigma^2) = \frac{\pi}{2(\pi-2)} h_n^{-1}\mathbb{E}\Big[\Big(\min_{i\in\{0,\ldots,nh_n-1\}}\big(\sigma B_{\frac{i}{n}} + \epsilon_i\big) - \min_{i\in\{1,\ldots,nh_n\}}\big(\sigma \tilde{B}_{\frac{i}{n}} + \epsilon_i\big)\Big)^2\Big], \tag{8}$$

其中，(B_t)和$(\tilde{B}_t)$表示两个相互独立的标准布朗运动。在 [5], 中，块长度平衡了分块最小误差的阶$(nh_n)^{-1}$ （见条件（6）），以及随机半鞅边界在一个块内变化的阶 $h_n^{1/2}$。对于 $h_n n^{2/3} \to \infty$， Ψ_n 趋于恒等函数，因此我们有

$$\Psi_n(\sigma^2) = \sigma^2 + \mathcal{O}(1),\ \text{as}\ n \to \infty\,. \tag{9}$$

在这一渐近情形下，局部极小值主要由边界过程的局部极小值决定，因此忽略右侧的噪声 (ϵ_i) 后，一阶近似等于 (8)。随后，布朗运动在区间上的最小值服从半正态分布，其矩可直接推出 (9)。关于 (9) 的正式证明见第 6.2 节定理 1 证明中的步骤3。注意，我们对 Ψ_n 的定义与 [5], 中的定义不同，例如

他们的公式 (A.35) 中还额外包含因子 $\pi/(\pi-2)$。通过简单的渐近近似 (9)，我们无需 Ψ_n^{-1}即可得到相合估计量。

当不存在价格跳跃时，瞬时平方波动率σ_τ^2 的一个简单相合估计量为

$$\hat{\sigma}^2_{\tau-} = \frac{\pi}{2(\pi-2)K_n} \sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} h_n^{-1}\big(m_{k,n} - m_{k-1,n}\big)^2\,, \tag{10}$$

对于适当的序列 $h_n \to 0$ 和 $K_n \to \infty$。仅使用时间 τ之前的观测值，该估计量可在交易日内的时间 $\tau \in (0,1]$ 在线获得。对于接近 0 的 τ，当 $\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor \le K_n$时，可调整因子 K_n^{-1}以求得平均值。由于这对渐近理论并不重要，为了记号简洁，我们保留 K_n^{-1}。使用整个区间上的事后数据，而不只使用时间 τ之前的观测值，也可以采用

$$\hat{\sigma}^2_{\tau+} = \frac{\pi}{2(\pi-2)K_n} \sum_{k=\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor + 1}^{(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor + K_n)\wedge(h_n^{-1}-1)} h_n^{-1}\big(m_{k,n} - m_{k-1,n}\big)^2\,, \tag{11}$$

或者采用一个平均值以时间 $\tau \in (0,\ 1)$ 为中心的估计量。两个估计量 (11) 和 (10) 之间的差异可用于推断波动率过程在时间$\tau \in (0,\ 1)$ 可能发生的跳跃，方法与 [6] 类似。

为构造瞬时波动率的置信区间，建立瞬时四次幂变差估计量也很有用:

$$\widehat{\sigma^4_{\tau-}} = \frac{\pi}{4(3\pi-8)K_n} \sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} h_n^{-2}\big(m_{k,n} - m_{k-1,n}\big)^4\,. \tag{12}$$

通过这些估计量的阈值版本，可以得到对（X_t）中的跳跃具有稳健性的瞬时波动率估计量。我们截断绝对值超过阈值 $u_n = \beta\cdot h_n^\kappa, \kappa \in (0,1/2)$ 的局部极小值之差，其中常数 β 为正，由此得到

$$\hat{\sigma}^{2,(tr)}_{\tau-} = \frac{\pi}{2(\pi-2)K_n} \sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} h_n^{-1}\big(m_{k,n} - m_{k-1,n}\big)^2 \mathbf{1}_{\{|m_{k,n}-m_{k-1,n}|\le u_n\}}\,, \tag{13}$$

以及估计量 (11) 和 (12) 的相应版本。

4. 渐近结果

我们针对等距观测值 $t_i^n = i/n$ 建立渐近结果。首先，在（X_t）中不存在跳跃的设定下讨论渐近理论。

定理 1 (连续情形的稳定中心极限定理 (X_t))。 令 h_n，使得 $h_n n^{2/3} \to \infty$，并且对于任意的 δ，$0 < \delta < 2\alpha/(1+2\alpha)$，都有 $K_n = C_K h_n^{\delta - 2\alpha/(1+2\alpha)}$，且存在某个常数 $C_K > 0$。若(X_t) 连续，即在(4)中有 $J_t = 0$ ，则在假设 *1* 和 *3* 下，瞬时波动率估计量

(10) 是一致的，$\hat{}\sigma_{\tau-}^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma_{\tau-}^2$，并满足稳定中心极限定理

$$K_n^{1/2}\Big(\hat{\sigma}_{\tau-}^2 - \Psi_n\big(\sigma_{\tau-}^2\big)\Big) \xrightarrow{st} \mathcal{N}\Big(0, \frac{7\pi^2/4 - 2\pi/3 - 12}{(\pi-2)^2}\sigma_{\tau-}^4\Big)\,. \tag{14}$$

仅当时刻τ发生波动率跳跃时，σ_τ^2 与其左极限 $\sigma_{\tau-}^2$ 才有区别。特别地，对于任意固定的 $\tau \in (0,\ 1)$，该估计量对 σ_τ^2也具有一致性。收敛速度 $K_n^{-1/2}$可任意接近 $n^{-2\alpha/(3+6\alpha)}$，这是我们模型中的最优速度。根据 [5] ，当 $h_n \propto n^{-2/3}$且 $K_n \propto h_n^{-2\alpha/(1+2\alpha)}$时，即 $\delta \downarrow 0$，可达到最优速度。在重要的特殊情形下，当 $\alpha = 1/2$且波动率为半鞅时，收敛速度可任意接近 $n^{-1/6}$。这远快于加性中心化微观结构噪声模型中的最优收敛速度；已知该速度为 $n^{-1/8}$，参见 [14] 和 [4]。渐近方差中的常数由若干方差项和协方差项（包括局部极小值的平方）构成，约为2.44。文献 [5] 和 Ψ_n 证明，函数 Ψ_n 单调且可逆，其反函数 Ψ_n^{-1}可通过蒙特卡罗模拟近似得到，参见第5.1节。与中心化噪声方法不同，该估计量的渐近分布不依赖于噪声水平 η。因此，我们不需要预估计噪声参数；在较弱假设 $0 < \eta\ (t)\ < \infty$对所有 t均成立的条件下，该理论可直接推广到式（6）中的时变噪声水平 $\eta\ (t)$。式（14）中的稳定收敛强于弱收敛，这一点很重要，因为极限分布是依赖于随机波动率的混合正态分布。关于稳定收敛的介绍，参见 [15], 第2.2.1节。对于标准化中心极限定理，我们可以使用瞬时四次幂变差估计量（12）。

命题 2（可行中心极限定理）。 在定理 *1* 的条件下，瞬时四次幂变差估计量（12）是一致的，因此我们得到瞬时波动率估计的标准化中心极限定理

$$K_n^{1/2}\frac{\pi-2}{\sqrt{\widehat{\sigma_{\tau-}^4}(7\pi^2/4 - 2\pi/3 - 12)}}\Big(\hat{\sigma}_{\tau-}^2 - \Psi_n\big(\sigma_{\tau-}^2\big)\Big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)\,. \tag{15}$$

命题 2 给出了瞬时波动率估计的渐近置信区间。对于 $q \in (0,\ 1)$，有

$$\mathbb{P}\Bigg(\sigma_{\tau-}^2 \in \Bigg[\Psi_n^{-1}\Big(\hat{\sigma}_{\tau-}^2 - \frac{\sqrt{\widehat{\sigma_{\tau-}^4}(7\pi^2/4 - 2\pi/3 - 12)}}{\pi-2}K_n^{-1/2}\Phi^{-1}(1-q/2)\Big)\,,$$
$$\Psi_n^{-1}\Big(\hat{\sigma}_{\tau-}^2 + \frac{\sqrt{\widehat{\sigma_{\tau-}^4}(7\pi^2/4 - 2\pi/3 - 12)}}{\pi-2}K_n^{-1/2}\Phi^{-1}(1-q/2)\Big)\Bigg]\Bigg) \to 1-q\,,$$

根据 Ψ_n^{-1} 的单调性，其中 Φ 是标准正态分布的累积分布函数。根据 [5] 中公式 (A.35) 的结果，Ψ_n^{-1} 可微，且根据 (9)，其导数为 $\big(\Psi_n^{-1}\big)' = 1 + o(1)$，因此德尔塔方法（针对稳定收敛）同样可得渐近置信区间和中心极限定理

$$K_n^{1/2}\Big(\Psi_n^{-1}\big(\hat{\sigma}_{\tau-}^2\big) - \sigma_{\tau-}^2\Big) \xrightarrow{st} \mathcal{N}\Big(0, \frac{7\pi^2/4 - 2\pi/3 - 12}{(\pi-2)^2}\sigma_{\tau-}^4\Big)\,. \tag{16}$$

我们不能简单地用一阶近似 $\sigma^2_{\tau-}$ 替换 (14) 中的 $\Psi_n\big(\sigma^2_{\tau-}\big)$，也不能用 $\hat{}\sigma^2_{\tau-}$ 替换 (16) 中的 $\Psi_n^{-1}\big(\hat{}\sigma^2_{\tau-}\big)$，因为偏差收敛到零的速度不够快。也就是说，$(\hat{}\sigma^2_{\tau-}-\sigma^2_{\tau-}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\big(K_n^{-1/2}\big)$ 通常并不成立。此外，如果条件 $h_n n^{2/3}\to\infty$ 不成立，中心极限定理便不适用。

定理 3 (带跳跃的稳定中心极限定理，适用于 (X_t))。设 h_n，使得 $h_n n^{2/3}\to\infty$，并且对于任意 δ, $0<\delta<2\alpha/(1+2\alpha)$，$K_n = C_K h_n^{\delta-2\alpha/(1+2\alpha)}$，且存在某个常数 $C_K>0$。在假设 *1*、*2* 和 *3* 下，

$$r<\frac{2+2\alpha}{1+2\alpha}\,, \tag{17}$$

截断现货波动率估计量(13) 满足

$$\kappa\in\Big(\frac{1}{2-r}\frac{\alpha}{2\alpha+1},\frac{1}{2}\Big)\,, \tag{18}$$

是一致的，$\hat{}\sigma^{2,(tr)}_{,\tau-}\xrightarrow{\mathbb{P}}\sigma^2_{\tau-}$，并满足稳定中心极限定理

$$K_n^{1/2}\Big(\hat{\sigma}^{2,(tr)}_{\tau-}-\Psi_n\big(\sigma^2_{\tau-}\big)\Big)\xrightarrow{st}\mathcal{N}\Big(0,\frac{7\pi^2/4-2\pi/3-12}{(\pi-2)^2}\sigma^4_{\tau-}\Big)\,. \tag{19}$$

因此，为了以（几乎）最优速率获得中心极限定理，我们必须对跳跃活动度施加温和的限制。对于具有半鞅波动率的标准模型，即 $\alpha=1/2$，需要满足 $r<3/2$；而对于 $\alpha=1$，则需要更强的条件 $r<4/3$。这些条件等价于 [7]，中定理 1 的条件；该定理在对 (X_t) 施加类似假设的情况下，给出了瞬时波动率估计的中心极限定理，但对于中心化微观结构噪声，其收敛速率较慢。采用具有相同阈值处理的截断四次幂估计量，可再次得到可行的中心极限定理和渐近置信区间。

注 1。从理论角度来看，人们或许会思考，既然噪声和有效价格都会影响局部极小值的渐近分布，我们为何不为 $h_n\propto n^{-2/3}$ 推导渐近理论。然而，在这种平衡情形下，渐近分布是不可行的。因此，*[5]* 无法为其积分波动率估计量建立中心极限定理。此外，他们的估计量仅以隐式形式定义，并取决于未知函数Ψ_n^{-1}。即使对噪声施加参数假设，假定其服从指数分布，也无法为 $h_n\propto n^{-2/3}$ 得到可行的极限理论，参见 *[5]* 中的讨论。选择 h_n，使得$h_n n^{2/3}\to\infty$ 缓慢变化，则可得到一个简单、显式且相合的估计量，以及适用于瞬时波动率估计的可行中心极限定理。特别地，我们仅将 Ψ_n 用于简单估计量的偏差校正，而估计量本身和（估计的）渐近方差均不依赖于 Ψ_n。通常，只有当均方误差中的方差项支配波动率平方偏差项时，才能以近乎最优的速率获得瞬时波动率估计量的中心极限定理，例如参见定理 *13.3.3* 及其下方第 *[15]* 节中的说明。因此，（14）是所能达到的最佳中心极限定理。此外，我们选择 h_n，避免了对噪声作出强假设；若使用更小的区块，这些假设将不可避免。数值研究将表明，本文给出的渐近结果在实践中有用，并有助于对瞬时波动率进行有效推断。特别是，第 *5.2* 节围绕实践中如何选择区块长度这一问题展开。

5. 实现与模拟

5.1. Ψ_n的蒙特卡洛近似

尽管函数 Ψ_n 在渐近意义下趋于恒等函数，但它对于校正式（14）中估计量的偏差至关重要。我们可以通过蒙特卡洛模拟对该函数进行数值计算。因此，我们需要在许多次迭代中，针对波动率平方的一组细网格取值，计算 $\Psi_n(\sigma^2)$ 的蒙特卡洛均值。随后，我们还可以对该函数进行数值求逆，并使用 $\Psi_n^{-1}(\cdot)$。为使这一过程可行且计算开销不会过高，我们需要一种算法，能够针对给定的 n 和块长度 h_n，高效地从局部极小值的分布中抽样。

考虑 $nh_n \in \mathbb{N}$，其中 $Z_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$，且观测误差 $(\epsilon_k)_{k\geq 0}$，其最小值

$$M_1^{nh_n} := \min_{k=1,\dots,nh_n} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} Z_i + \epsilon_k \right),$$

对于某个固定的 $\sigma > 0$，并且对于 $l \in \{0, \dots, nh_n\}$：

$$M_l^{nh_n} := \min_{k=l,\dots,nh_n} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{k} Z_i + \epsilon_k \right),$$

其中我们令 $Z_0 := 0$。由于

$$\Psi_n(\sigma^2) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\pi - 2} h_n^{-1} \mathbb{E}\left[\left(M_0^{nh_n - 1} - M_1^{nh_n} \right)^2 \right],$$

其中 $M_0^{nh_n-1}$独立于 $M_1^{nh_n}$生成，我们希望分别模拟服从$M_0^{nh_n-1}$和 $M_1^{nh_n}$的样本。需要注意的是，对于有限的 nh_n， $M_0^{nh_n-1}$和 $M_1^{nh_n}$的矩并不完全相等，这一点对于 nh_n的中等取值尤其重要。与第 5.2 节的模拟一样，我们采用指数分布的观测误差 (ϵ_k)，并设定给定的噪声水平 η。在数据应用中，我们也可以使用估计得到的噪声水平

$$\hat{\eta} = \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - Y_{i-1} \right)^2 \right)^{-1/2} = \eta + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\left(n^{-1/2} \right).$$

该估计量适用于所有具有有限四阶矩的噪声分布。鉴于 [5], 中对模型的讨论，指数分布噪声是满足条件 (6) 的最自然示例。采用其他噪声分布进行模拟也得到了类似结果。这是意料之中的，因为该估计量仅取决于局部极小值，而其分布渐近地更多由布朗运动而非噪声分布决定。为了高效模拟给定 n、 h_n、 η 和波动率平方 σ^2 下的局部极小值，我们采用一种特定的动态规划原理。注意，

$$\begin{aligned} M_1^{nh_n} &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_1 + \min\left(\epsilon_1, M_2^{nh_n} \right) \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_1 + \min\left(\epsilon_1, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_2 + \min\left(\epsilon_2, M_3^{nh_n} \right) \right) \end{aligned}$$

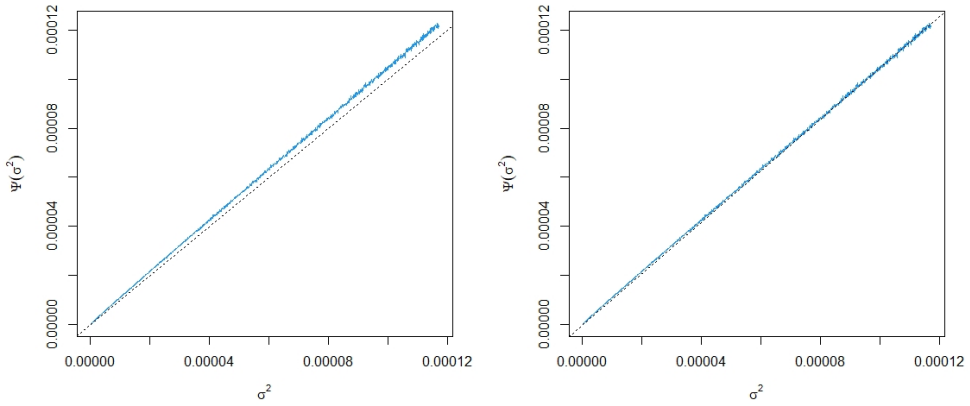


图 1：蒙特 卡洛方法在细网格上估计 $\Psi_n(\sigma^2)$（蓝线），其中 $n = 23{,}400$ 且 $n \cdot h_n = 15$。左侧 ， 虚线 表示恒等函数；右侧虚线表示斜率为 1.046 的线性函数。

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_1 + \min\left(\dots \min\left(\epsilon_{nh_n-2}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{nh_n-1} + \min\left(\epsilon_{nh_n-1}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{nh_n} + \epsilon_{nh_n} \right) \right) \dots \right).$$

在基准噪声模型 $\epsilon_k \overset{iid}{\sim} \text{Exp}(\eta)$ 中，随机变量 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{nh_n} + \epsilon_{nh_n}$ 服从指数修正高斯（EMG）分布。对于任意固定的噪声分布，我们都可以轻松地从该卷积中生成实现值。现在，按照最后一个变换的逆向过程，生成一个服从 $M_1^{nh_n}$ 分布的伪随机变量。伪代码如下：

```
1. Generate U_{nh_n}~ EMG(sigma^2/n,eta)~ Exp(eta)+sigma/sqrt(n)*Norm(1)
2. U_{nh_n-1}=min(U_{nh_n},Exp(eta))+sigma/sqrt(n)*Norm(1)
3. iterate until U_1
```

其中端点 U_1 服从 $M_1^{nh_n}$的目标分布。因此，在每个迭代步骤中，我们取过程当前状态与一个独立指数分布随机变量的最小值，并与一个独立正态分布随机变量进行卷积。若要从 $M_0^{nh_n-1}$ 的分布中抽样，则使用相同的算法，只需在最后一步省去与正态分布的卷积。

与针对每个取值运行标准蒙特卡洛模拟（在长度为 h_n的区块上计算局部极小值）相比，该算法能够大幅加快从局部极小值分布中抽样以及对 Ψ_n进行数值近似的速度。

图1绘出了在包含 1500 个 σ^2取值的网格上， $n = 23{,}400$ 和$n \cdot h_n = 15$时 $\Psi_n(\sigma^2)$的蒙特卡洛近似结果。在这种情况下， h_n 相当小，但事实证明，这种配置对下文第 5.2 节很有用。我们知道 $\Psi_n(\sigma^2)$是单调的，因此图1中蓝线的波动是由蒙特卡洛均值不够精确造成的，尽管每个网格点我们都进行了 $N = 100{,}000$ 次迭代。尽管如此，根据最小二乘估计，我们可以看到该函数相当接近斜率为 1.046 的线性函数。图1左图将该函数与恒等函数进行比较，后者以虚线表示；右图则将其与斜率为 1.046 的线性函数进行比较。我们可以看到，使用如此小的 h_n值时，对式（14）中的偏差进行校正至关重要。尽管函数$\Psi_n(\sigma^2)$并非完全线性，但将估计值除以 1.046 进行简单的偏差校正，效果几乎与采用基于蒙特卡洛近似的、更精确的数值求逆一样好

表1：用于衡量估计量(10)的偏差和偏离 $\Psi_n(\sigma^2) - \sigma^2$的回归斜率。

$n \cdot h_n$	10	15	25	39	78	234
h_n^{-1}	2340	1560	936	600	300	100
$h_n \cdot n^{2/3}$	0.350	0.524	0.874	1.36	2.73	8.18
斜率	1.077	1.046	1.025	1.016	1.008	1.003
近似偏差	7.7%	4.6%	2.5%	1.6%	0.8%	0.3%

由于在所有考察的情形下， $\Psi_n(\sigma^2)$的蒙特卡洛近似都呈现出接近线性函数的形态，因此我们报告了不同 h_n 值下基于最小二乘法和 $N = 100{,}000$ 次蒙特卡洛迭代得到的估计斜率，并列于表1，以简洁地概括函数$\Psi_n(\sigma^2)$与恒等函数之间的偏离程度。使用我们的算法，在普通计算机上模拟所有网格点的全部迭代只需几个小时。

5.2. 估计量的模拟研究

我们模拟 $n = 23{,}400$ 个观测值，对应于纳斯达克交易日（共 6.5 小时）内每秒进行一次观测。有效价格过程根据以下模型进行模拟

$$\begin{aligned} dX_t &= \nu_t \sigma_t \, dW_t \,, \\ d\sigma_t^2 &= 0.0162 \cdot \left(0.8465 - \sigma_t^2\right) dt + 0.117 \cdot \sigma_t \, dB_t \,, \\ \nu_t &= \left(6 - \sin(3\pi t/4)\right) \cdot 0.002 \,, \; t \in [0,1] \,. \end{aligned}$$

因子 (ν_t) 生成典型的 U形日内波动率模式。(W_t, B_t) 是具有杠杆效应 $d[W,B]_t = -0.2\,dt$ 的二维布朗运动。随机波动率部分具有若干现实特征，且模拟模型与近期文献一致，参见[6] 及其中的参考文献。我们不在 X_t 中加入漂移，以避免引入另一个过程或更多参数。在合理范围内变化的任何漂移都不会影响本文展示的数值结果。通过以下方式生成带有下界的单侧微观结构噪声的观测值

$$Y_i = X_{\frac{i}{n}} + \epsilon_i \,, \; 0 \le i \le n \,,$$

噪声服从指数分布， $\epsilon_i \overset{iid}{\sim} \text{Exp}(\eta)$，其中 $\eta = 10{,}000$。此时噪声方差相当小，但这与真实纳斯达克数据的典型事实一致，例如 [4] 和 [6]中分析的情况。[1]

图 2 中的黑线显示了波动率平方的一条固定路径。在接下来的蒙特卡洛模拟中，我们固定这条路径，并在每次迭代中根据模型生成新的 (X_t) 和 (Y_i) 观测值。图 2 中的蓝线给出了基于每个区块 $n \cdot h_n = 15$ 个观测值，经过 $N = 50{,}000$ 次迭代得到的蒙特卡洛均值波动率估计，使用的是

[1]请注意，噪声水平估计与用于常规市场微观结构噪声的估计类似。以苹果公司等股票的交易为例，典型噪声水平约为 15,000； 3M 的约为 4,000，参见 [4] 的补充材料。对于中间报价或最优卖价 / 买价，噪声水平仅略高一些（方差更小）。

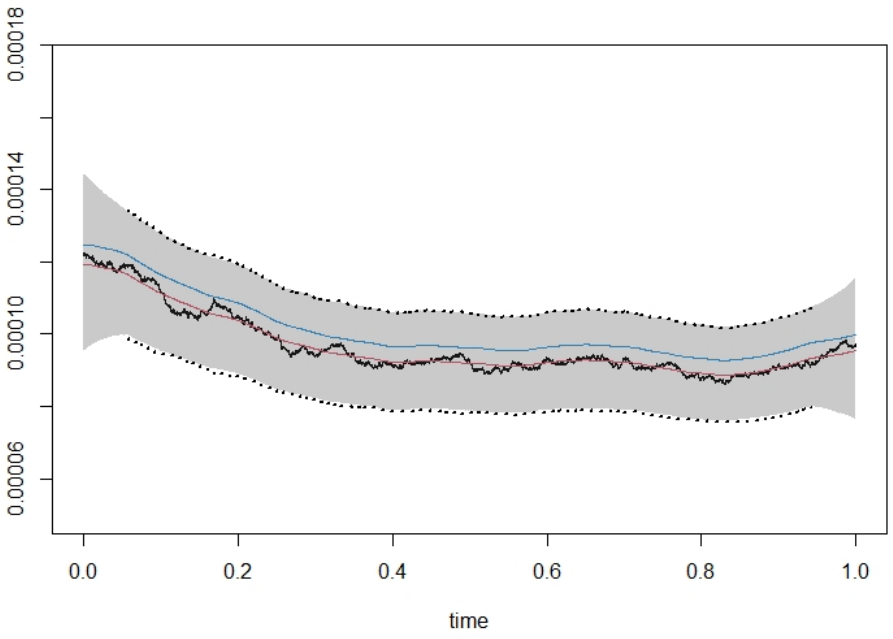


图 2：真实瞬时波动率、估计瞬时波动率及逐点置信集。

未调整估计量 (10)，但采用以估计瞬时波动率的区块为中心的窗口，即以时间 τ 为中心的窗口，并且使用 $K_n = 180$。我们绘制了每个区块的估计值，其中靠近边界的估计值所依据的观测值较少。红线给出了使用数值求得的函数Ψ_n计算的偏差校正后的波动率估计，该函数基于第 5.1 节的算法，取 $n \cdot h_n = 15$ 和 $n = 23{,}400$。我们确定 $n \cdot h_n = 15$ 和 $K_n = 180$ 是合适的取值，能够使均方误差较小。事实上， $K_n = 180$ 的取值相当大，以换取较小的方差，因此图 2 中估计的瞬时波动率相当平滑。因此，与真实的半鞅波动率相比，估计的波动率看起来更平滑，但我们的估计很好地捕捉到了日内模式。我们预计，在实际应用中，这通常是一种颇具吸引力的实现方式，因为较小的K_n 会导致更大的方差。将 $K_n = 180$ 取值较大时，我们必须采用相当小的区块大小 h_n，以控制估计的总体偏差。由于 $h_n \cdot n^{2/3} \approx 0.52$ 较小，此处偏差校正至关重要。尽管如此，我们的渐近结果对于这种实现方式仍然表现良好。这可以从蒙特卡洛迭代得到的逐点经验 10% 和 90% 分位数（灰色区域所示），与采用式 (14) 中渐近方差的极限正态分布的 10% 和 90% 分位数的比较中看出。对于距离边界大于 $K_n/2$ 的区块，后者绘制为虚线，其方差的阶为 K_n^{-1}。靠近边界时，由于用于估计的区块数量较少，经验方差会增大。此外，偏差校正几乎等同于将每个估计值除以 1.046；对于所选调优参数下具有显著正偏差的简单估计值，这一校正能够正确地进行尺度调整。总体而言，尽管此处的 $h_n \cdot n^{2/3} < 1$，我们的渐近结果仍能很好地拟合有限样本。不过请注意， $\sigma_t \cdot \eta \approx 100$，而且考虑常数后，我们的渐近展开实际上要求 $h_n^{3/2} n \sigma_t \eta$ 较大。由于模拟情形

表 2：不同 h_n 和 K_n 取值下的估计汇总统计量，MSD = 平均标准差，MAB = 平均绝对偏差，MABC = 偏差校正估计量的平均绝对偏差。

K_n	120			180			240		
nh_n	平均标准差	平均绝对偏差	偏差校正估计量的平均绝对偏差	平均标准差	平均绝对偏差	偏差校正估计量的平均绝对偏差	平均标准差	平均绝对偏差	偏差校正估计量的平均绝对偏差
10	14.6	7.59	0.73	12.0	7.51	0.90	10.5	7.60	1.13
15	14.4	4.59	0.88	11.8	4.57	1.17	10.3	4.46	1.43
25	14.3	2.56	1.24	11.8	2.63	1.66	10.3	2.86	1.91
78	14.7	2.44	2.52	12.3	3.53	3.42	11.0	4.33	4.16

所有数值均乘以因子 10^6。

采用了符合实际的取值，因此我们建议在实际高频金融数据应用中使用类似的区块长度。根据 [4]，补充材料中的汇总统计量，一些资产的噪声信号比较高，因此较大的区块更为合适。

表 2 总结了在选择不同 nh_n 和 K_n 时估计的表现。我们给出以下量：

1. MSD：对所有网格点上的 N 次迭代取平均后的**平均标**准差；
2. MAB： N 次迭代在所有网格点上的平均绝对偏差，对于估计量（10）未进行偏差校正；
3. MABC： N 次迭代在所有网格点上的平均绝对偏差，对于估计量（10），通过将估计值除以表1所列因子进行简单的偏差校正。

所有结果均基于 $N = 50{,}000$次蒙特卡洛迭代。首先，用于图2的数值并非均方误差的唯一最小化取值。表2中给出的其他几种组合也能得到同样好的结果。总体而言，在较宽的块长度和窗口大小范围内，性能相当。对于较大的 K_n，方差会减小；而在固定 h_n时，偏差会随着 K_n 增大而增大。影响偏差的重要因素是总窗口大小 $K_n \cdot h_n$，在此范围内，波动率在估计时近似为常数。方差只取决于 K_n；在固定 K_n 时改变块长度不会显著影响方差。因此，表2各列中的MSD几乎保持不变，而校正后的偏差MABC则因窗口大小逐渐增大而自上而下递增。未经偏差校正时，MAB受到两种效应的共同影响。较大的区块会减小由 $\Psi_n(\sigma_t^2) - \sigma_t^2$导致的系统偏差，但随着窗口大小增大而产生的偏差，在 $n \cdot h_n = 78$以及 K_n的两个较大取值下占主导。

6. 证明

6.1. 布朗运动负部积分的分布律

我们理论中的一个关键引理给出了布朗运动负部积分的累积分布函数上界。我们基于 [27] 对莱维反正弦定律的推广证明了一个引理。该结果与 [17] 中式 (261) 的猜想一致，其中给出了密度函数的展开式，并精确给出了首项的常数。记 f_+ 为某个实值函数 f 的正部，记 f_- 为其负部。

引理 4. 对于标准布朗运动 $(W_t)^{t\geq 0}$，有

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^1 (W_t)_-\,dt \leq x\Big) = \mathcal{O}(x^{1/3}),\ x\to 0\,.$$

证明。 注意到分布相等 $\int_0^1 (W_t)_-\,dt \overset{d}{=} \int_0^1 (W_t)_+\,dt$，因此

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^1 (W_t)_-\,dt \leq x\Big) = \mathbb{P}\Big(\int_0^1 (W_t)_+\,dt \leq x\Big)\,, x>0\,.$$

对于任意 $\epsilon>0$，不等式

$$\int_0^1 (W_t)_+\,dt \geq \int_0^1 W_t\cdot \mathbf{1}(W_t>\epsilon)\,dt \geq \epsilon\int_0^1 \mathbf{1}(W_t>\epsilon)\,dt$$

可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\int_0^1 (W_t)_+\,dt \leq x\Big) &\leq \mathbb{P}\Big(\epsilon\int_0^1 \mathbf{1}(W_t>\epsilon)\,dt \leq x\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(1-\int_0^1 \mathbf{1}(W_t\leq\epsilon)\,dt \leq x/\epsilon\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\int_0^1 \mathbf{1}(W_t\leq\epsilon)\,dt \geq 1-x/\epsilon\Big)\,.\end{aligned}$$

利用 [27], 中的 (15) 和 (16)，我们得到

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^1 \mathbf{1}(W_t\leq\epsilon)\,dt \geq 1-x/\epsilon\Big) = \frac{1}{\pi}\int_{1-x/\epsilon}^1 \frac{\exp(-\epsilon^2/(2u))}{\sqrt{u(1-u)}}du + 2\Phi(\epsilon) - 1\,,$$

其中 Φ 是标准正态分布的累积分布函数。因此，我们得到

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^1 (W_t)_+\,dt \leq x\Big) \leq \frac{1}{\pi}\int_{1-x/\epsilon}^1 \frac{\exp(-\epsilon^2/(2u))}{\sqrt{u(1-u)}}du + 2\int_0^\epsilon \frac{\exp(-u^2/2)}{\sqrt{2\pi}}du\,,$$

而初等界给出上界

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^1 (W_t)_+\,dt \leq x\Big) \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{x}{\epsilon}}\frac{1}{\sqrt{1-x/\epsilon}} + \frac{2\epsilon}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

取 $\epsilon = x^{1/3}$，我们得到上界

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^1 (W_t)_+\,dt \leq x\Big) \leq \frac{2}{\pi}x^{1/3}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2/3}}} + \frac{2x^{1/3}}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

□

6.2. 连续情形下的瞬时波动率估计渐近性

6.2.1. 定理 *1* 的证明

下文中，若存在某个 $n_0\in\mathbb{N}$ 和一个常数 K，使得对所有 $n\geq n_0$ 均有 $A_n\leq KB_n$，则我们将 $A_n\lesssim B_n$ 用于表示两个实数列。

步骤1

首先，我们证明该近似

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2_{\tau-} &= \frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1} h_n^{-1}\big(m_{k,n}-m_{k-1,n}\big)^2 \\ &= \frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1} h_n^{-1}\big(\tilde{m}_{k,n}-\tilde{m}^*_{k-1,n}\big)^2+\mathcal{O}_{\mathbb{P}}\big(h_n^{\alpha\wedge 1/2}\big)\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{k,n} &= \min_{i\in\mathcal{I}^n_k}\left(\epsilon_i+\sigma_{(k-1)h_n}(W_{t^n_i}-W_{kh_n})\right), \text{ and}\\ \tilde{m}^*_{k-1,n} &= \min_{i\in\mathcal{I}^n_{k-1}}\left(\epsilon_i-\sigma_{(k-1)h_n}(W_{kh_n}-W_{t^n_i})\right).\end{aligned}$$

我们证明，对于 $k\in\{1,\dots,h_n^{-1}-1\}$，有

$$m_{k,n}-m_{k-1,n}=\tilde{m}_{k,n}-\tilde{m}^*_{k-1,n}+\mathcal{O}_{\mathbb{P}}\big(h_n^{1/2}\big). \tag{20}$$

我们从 $m_{k,n}$ 中减去 X_{kh_n}，并从 $m_{k-1,n}$中减去 X_{kh_n}，并利用对所有 i 都有

$$\big(Y_i-X_{kh_n}\big)-\big(X_{t^n_i}-\big(X_{kh_n}+\sigma_{(k-1)h_n}(W_{t^n_i}-W_{kh_n})\big)\big)=\big(\sigma_{(k-1)h_n}(W_{t^n_i}-W_{kh_n})+\epsilon_i\big).$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\min_{i\in\mathcal{I}^n_k}\big(Y_i-X_{kh_n}\big)-\max_{i\in\mathcal{I}^n_k}\big(X_{t^n_i}-\big(X_{kh_n}+\sigma_{(k-1)h_n}(W_{t^n_i}-W_{kh_n})\big)\big)\\ &\quad\le\min_{i\in\mathcal{I}^n_k}\big(\sigma_{(k-1)h_n}(W_{t^n_i}-W_{kh_n})+\epsilon_i\big).\end{aligned}$$

交换$\big(Y_i-X_{kh_n}\big)$和 $\big(\sigma_{(k-1)h_n}(W_{t^n_i}-W_{kh_n})+\epsilon_i\big)$的角色，利用类似的不等式和三角不等式，并令 $M_t:=X_{kh_n}+\int_{kh_n}^t\sigma_{(k-1)h_n}\,dW_s$，可得

$$\begin{aligned}\Big|m_{k,n}-X_{kh_n}-\tilde{m}_{k,n}\Big| &\le \max_{i\in\mathcal{I}^n_k}\big|X_{t^n_i}-M_{t^n_i}\big|\le\sup_{t\in[kh_n,(k+1)h_n]}\big|X_t-M_t\big|\\ &\le\sup_{t\in[kh_n,(k+1)h_n]}\Big|C_t-C_{kh_n}-\int_{kh_n}^t\sigma_{(k-1)h_n}\,dW_s\Big|.\end{aligned}$$

我们将 (C_t) 写作 (X_t)，以强调连续性，见 (4)。(20)由此得出

$$\sup_{t\in[kh_n,(k+1)h_n]}\Big|C_t-C_{kh_n}-\int_{kh_n}^t\sigma_{(k-1)h_n}\,dW_s\Big|=\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(h_n^{1/2}), \tag{21}$$

以及针对 $m_{k-1,n}$ 和 $\tilde{m}^*_{k-1,n}$ 的类似估计。我们将其分解

$$\sup_{t\in[kh_n,(k+1)h_n]}\Big|C_t-C_{kh_n}-\int_{kh_n}^t\sigma_{(k-1)h_n}\,dW_s\Big|\le\sup_{t\in[kh_n,(k+1)h_n]}\Big|\int_{kh_n}^t(\sigma_s-\sigma_{(k-1)h_n})\,dW_s\Big|$$

$$+\sup_{t\in[kh_n,(k+1)h_n]}\int_{kh_n}^{t}|a_s|ds\,.$$

根据假设1，通过 [15] 中第4.4.1节的局部化处理，我们可以假设 (σ_t) 和 (a_t) 在 $[0,1]$ 上有界。利用 Itô等距和 Fubini定理，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{kh_n}^{t}(\sigma_s-\sigma_{(k-1)h_n})\,dW_s\Big)^2\Big]&=\mathbb{E}\Big[\int_{kh_n}^{t}(\sigma_s-\sigma_{(k-1)h_n})^2\,ds\Big]\\&=\int_{kh_n}^{t}\mathbb{E}\big[(\sigma_s-\sigma_{(k-1)h_n})^2\big]\,ds\,,\end{aligned}$$

使得假设1推出，对于任意 $t\in[kh_n,(k+1)h_n]$，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{kh_n}^{t}(\sigma_s-\sigma_{(k-1)h_n})\,dW_s\Big)^2\Big]&\le C_\sigma\int_{kh_n}^{t}(s-(k-1)h_n)^{2\alpha}\,ds\\&\le C_\sigma(2\alpha+1)^{-1}(t-(k-1)h_n)^{2\alpha+1}=\mathcal{O}\big(h_n^{2\alpha+1}\big)\,.\end{aligned}$$

根据Doob鞅最大不等式，且由于$\sup_{t\in[kh_n,\,(k+1)\,h_n]}\int_{kh_n}^{t}|a_s|ds\;=\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(h_n)$，可得

$$\sup_{t\in[kh_n,(k+1)h_n]}\Big|C_t-C_{kh_n}-\int_{kh_n}^{t}\sigma_{(k-1)h_n}\,dW_s\Big|=\mathcal{O}_{\mathbb{P}}\big(h_n^{(1/2+\alpha)\wedge1}\big)\,.$$

我们得出（21）成立，因为 $\alpha>0$。由于

$$h_n^{-1}\big(m_{k,n}-m_{k-1,n}\big)\big(m_{k,n}-\tilde m_{k,n}\big)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}}\big(h_n^{\alpha\wedge1/2}\big)\,,$$

并且对于 $(m_{k-1,\,n}-\tilde m^*_{k-1,\,n})$ 也可类似证明，因此我们通过写出以下内容得出步骤1

$$\begin{aligned}\big(m_{k,n}-m_{k-1,n}\big)^2-\big(\tilde m_{k,n}-\tilde m^*_{k-1,n}\big)^2&=\big(m_{k,n}-m_{k-1,n}+\tilde m_{k,n}-\tilde m^*_{k-1,n}\big)\\&\quad\times\big(m_{k,n}-\tilde m_{k,n}+\tilde m^*_{k-1,n}-m_{k-1,n}\big).\end{aligned}$$

步骤2

我们利用步骤1对瞬时波动率估计的偏差进行界定。对于 $\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor>K_n$，根据函数 Ψ_n 在 (8) 中的定义，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[\hat\sigma^2_{\tau-}-\Psi_n(\sigma^2_{\tau-})\big]=\frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1}h_n^{-1}\mathbb{E}\Big[\big(m_{k,n}-m_{k-1,n}\big)^2\Big]-\mathbb{E}\big[\Psi_n(\sigma^2_{\tau-})\big]\\&=\frac{1}{K_n}\frac{\pi}{2(\pi-2)}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1}h_n^{-1}\mathbb{E}\Big[\big(\tilde m_{k,n}-\tilde m^*_{k-1,n}\big)^2\Big]-\mathbb{E}\big[\Psi_n(\sigma^2_{\tau-})\big]+\mathcal{O}\big(h_n^{\alpha\wedge1/2}\big)\\&=\frac{1}{K_n}\frac{\pi}{2(\pi-2)}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1}\frac{2(\pi-2)}{\pi}\mathbb{E}\big[\Psi_n(\sigma^2_{(k-1)h_n})\big]-\mathbb{E}\big[\Psi_n(\sigma^2_{\tau-})\big]+\mathcal{O}\big(h_n^{\alpha\wedge1/2}\big)\\&\lesssim\frac{1}{K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1}\mathbb{E}\big[\sigma^2_{(k-1)h_n}-\sigma^2_{\tau-}\big]+\mathcal{O}\big(h_n^{\alpha\wedge1/2}\big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \frac{1}{K_n} \sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} \mathbb{E}\big[\sigma_{(k-1)h_n} - \sigma_{\tau-}\big] + \mathcal{O}\big(h_n^{\alpha\wedge 1/2}\big) \\
&\lesssim \frac{1}{K_n} \sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} \Big(\mathbb{E}\big[\big(\sigma_{(k-1)h_n} - \sigma_{\tau-}\big)^2\big]\Big)^{1/2} + \mathcal{O}\big(h_n^{\alpha\wedge 1/2}\big) \\
&= \mathcal{O}\big((K_n\, h_n)^{\alpha}\big) = o\big(h_n^{\alpha/(1+2\alpha)}\big) = o\big(K_n^{-1/2}\big)\,.
\end{aligned}
$$

第一个 $\lesssim$ 估计实际上是一个等式，只是多了一个因子（$1 + o(1)$），因为对于所有 $x \geq 0$，$\Psi_n'(x) = 1 + o(1)$；这里利用了上述基于 [5] 中公式 (A.35) 的可微性。对于渐近上界，我们使用了二项式公式

$$
\sigma_{(k-1)h_n}^2 - \sigma_{\tau-}^2 = \big(\sigma_{(k-1)h_n} - \sigma_{\tau-}\big)\big(\sigma_{(k-1)h_n} + \sigma_{\tau-}\big) \leq 2\,C\,\big(\sigma_{(k-1)h_n} - \sigma_{\tau-}\big)\,,
$$

利用步骤1中的结论，即 (σ_t) 有上界 C，并根据假设1应用 Hölder不等式，结合式 (2) 得出结论。最后，我们用到了对于所有 α，$(\alpha \wedge 1/2) > \alpha/(2\alpha + 1)$。

步骤3

为了证明 $\hat{}\sigma_{\tau-}^2$ 的一致性，我们证明

$$
\mathbb{E}\Big[\hat{\sigma}_{\tau-}^2 - \sigma_{\tau-}^2\Big] = o(1)\,. \tag{22}
$$

这包括对式 (9) 的证明。记 $\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}$ 为在 $\sigma_{(k-1)h_n}$ 条件下的正则条件概率，记 $\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}$ 为关于条件测度的期望。由塔式法则可得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[h_n^{-1}\big(\tilde{m}_{k,n} - \tilde{m}_{k-1,n}^*\big)^2\big] &= \mathbb{E}\big[h_n^{-1}\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\big(\tilde{m}_{k,n} - \tilde{m}_{k-1,n}^*\big)^2\big]\big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\big(h_n^{-1/2}\tilde{m}_{k,n}\big)^2\big] + \mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\big(h_n^{-1/2}\tilde{m}_{k-1,n}^*\big)^2\big] \\
&\quad - 2\,\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[h_n^{-1/2}\tilde{m}_{k,n}\big]\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[h_n^{-1/2}\tilde{m}_{k-1,n}^*\big]\Big]\,,
\end{aligned} \tag{23}
$$

根据 $\tilde{m}_{k,\,n}$ 和 $\tilde{m}_{k-1,\,n}^*$ 的条件独立性。

我们分别建立并使用 $(\tilde{m}_{k,\,n})$ 和 $(\tilde{m}_{k-1,\,n}^*)$ 的尾概率近似。对于 $x \in \mathbb{R}$，有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\Big(h_n^{-1/2}\min_{i\in\mathcal{I}_k^n}\big(\epsilon_i + \sigma_{(k-1)h_n}(W_{t_i^n} - W_{kh_n})\big) > x\sigma_{(k-1)h_n}\Big) \\
&= \mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\Big(\min_{i\in\mathcal{I}_k^n}\big(h_n^{-1/2}\big(W_{t_i^n} - W_{kh_n}\big) + h_n^{-1/2}\sigma_{(k-1)h_n}^{-1}\epsilon_i\big) > x\Big) \\
&= \mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\Bigg[\prod_{i=\lfloor knh_n\rfloor+1}^{\lfloor (k+1)nh_n\rfloor}\mathbb{P}\Big(\epsilon_i > h_n^{1/2}\sigma_{(k-1)h_n}\big(x - h_n^{-1/2}(W_{t_i^n} - W_{kh_n})\big)|\mathcal{F}^X\Big)\Bigg] \\
&= \mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\Bigg[\exp\Big(\sum_{i=\lfloor knh_n\rfloor+1}^{\lfloor (k+1)nh_n\rfloor}\log\big(1 - F_\eta\big(h_n^{1/2}\sigma_{(k-1)h_n}\big(x - h_n^{-1/2}(W_{t_i^n} - W_{kh_n})\big)\big)\big)\Big)\Bigg]
\end{aligned} \tag{24}
$$

根据条件期望的塔式法则，并且由于 $\epsilon_i \overset{iid}{\sim} F_\eta$，可得

$$W_{t_i^n} - W_{kh_n} = \sum_{j=1}^{i-\lfloor knh_n \rfloor} \tilde{U}_j,\ \tilde{U}_j \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, n^{-1}), j \geq 2, \tilde{U}_1 \sim \mathcal{N}\big(0, t^n_{\lfloor knh_n \rfloor + 1} - kh_n\big)\,,$$
$$U_j = h_n^{-1/2}\tilde{U}_j \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}\big(0, (nh_n)^{-1}\big), j \geq 2, U_1 \sim \mathcal{N}\big(0, h_n^{-1}\big(t^n_{\lfloor knh_n \rfloor + 1} - kh_n\big)\big)\,.$$

根据（6），并对 $z \mapsto \log(1-z)$ 进行一阶泰勒展开，可得

$$\log\big(1 - F_\eta(y)\big) \overset{(6)}{=} \log\big(1 - \eta y(1 + o(1))\big) = -\eta y + o(\eta y) = -\eta y_+ + o(\eta y)\,,$$

当 $y \to 0$ 时，由于对任意 $y \leq 0$，$F_\eta(y) = 0$，我们在最后一个等式中取正部。由此可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\Big(h_n^{-1/2} \min_{i \in \mathcal{I}_k^n} \big(\epsilon_i + \sigma_{(k-1)h_n}(W_{t_i^n} - W_{kh_n})\big) > x\sigma_{(k-1)h_n}\Big) = \\
&= \mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\Big[\exp\Big(-h_n^{1/2}\sigma_{(k-1)h_n}\eta \sum_{i=\lfloor knh_n \rfloor + 1}^{\lfloor (k+1)nh_n \rfloor} \Big(x - \sum_{j=1}^{i-\lfloor knh_n \rfloor} U_j\Big)_+ (1 + o(1))\Big)\Big] \\
&= \mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\Big[\exp\Big(-h_n^{1/2} n h_n \sigma_{(k-1)h_n}\eta \int_0^1 (B_t - x)_-\, dt\,(1 + o(1))\Big)\Big]\,.
\end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们利用了以下事实：黎曼和几乎必然收敛到被积函数中含有标准布朗运动 $(B_t)_{t \geq 0}$ 的积分。由于期望中的表达式是有界的（它是条件概率的乘积，且每个条件概率都不超过 1），由控制收敛定理可得。若 $nh_n^{3/2} \to \infty$，则可推出

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\Big(h_n^{-1/2} \min_{i \in \mathcal{I}_k^n} \big(\epsilon_i + \sigma_{(k-1)h_n}(W_{t_i^n} - W_{kh_n})\big) > x\sigma_{(k-1)h_n}\Big) = \mathbb{P}\big(\inf_{0 \leq t \leq 1} B_t \geq x\big) \\
&+ \mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\Big[\mathbf{1}\big(\inf_{0 \leq t \leq 1} B_t < x\big)\exp\Big(-h_n^{3/2} n \sigma_{(k-1)h_n}\eta \int_0^1 (B_t - x)_-\, dt\,(1 + o(1))\Big)\Big] \\
&= \mathbb{P}\big(\inf_{0 \leq t \leq 1} B_t \geq x\big) + \mathbb{P}\big(\inf_{0 \leq t \leq 1} B_t < x\big) \cdot o(1)\,. \qquad (25)
\end{aligned}$$

我们无法得到 $\int_0^1 (B_t - x)_-\, dt$ 的下界。然而，利用在给定$\{\inf_{0 \leq t \leq 1} B_t < x\}$的条件下，$(B_t)$ 首次进入 x 的时刻 T_x 具有连续的条件密度 $f(t|T_x < 1)$，由引理 4 和布朗运动的性质可知，对任意 $\delta > 0$，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\Big[\mathbf{1}\big(\inf_{0 \leq t \leq 1} B_t < x\big)\exp\Big(-h_n^{3/2} n \sigma_{(k-1)h_n}\eta \int_0^1 (B_t - x)_-\, dt\Big)\Big] \\
&\leq \exp\big(-\big(h_n^{3/2}n\big)^\delta \sigma_{(k-1)h_n}\eta\big)\mathbb{P}\big(\inf_{0 \leq t \leq 1} B_t < x\big) + \mathbb{P}\Big(\inf_{0 \leq t \leq 1} B_t < x, \int_0^1 (B_t - x)_-\, dt \leq \big(h_n^{3/2}n\big)^{-1+\delta}\Big) \\
&\leq \Big(\exp\big(-\big(h_n^{3/2}n\big)^\delta \sigma_{(k-1)h_n}\eta\big) + \int_0^1 \mathbb{P}\Big(\int_s^1 (B_t)_-\, dt \leq \big(h_n^{3/2}n\big)^{-1+\delta}\Big) f(s|T_x < 1)\, ds\Big)\mathbb{P}\big(\inf_{0 \leq t \leq 1} B_t < x\big) \\
&\leq \Big(\exp\big(-\big(h_n^{3/2}n\big)^\delta \sigma_{(k-1)h_n}\eta\big) + \int_0^1 \mathbb{P}\Big((1-s)\int_0^1 (B_t)_-\, dt \leq \big(h_n^{3/2}n\big)^{-1+\delta}\Big) \\
&\qquad\qquad \times f(s|T_x < 1)\, ds\Big)\mathbb{P}\big(\inf_{0 \leq t \leq 1} B_t < x\big)\,.
\end{aligned}$$

我们着重考察第一个因子的第二项，因为指数项衰减得更快。它被一个常数乘以

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathbb{P}\Big((1-s)\int_0^1 (B_t)_-\,dt \le \big(h_n^{3/2}n\big)^{-1+\delta}\Big)\,ds \\
&\le \int_0^{1-b_n} \mathbb{P}\Big((1-s)\int_0^1 (B_t)_-\,dt \le \big(h_n^{3/2}n\big)^{-1+\delta}\Big)\,ds + \int_{1-b_n}^1 ds \\
&\le \mathbb{P}\Big(b_n\int_0^1 (B_t)_-\,dt \le \big(h_n^{3/2}n\big)^{-1+\delta}\Big) + b_n = \mathcal{O}\Big(\big(h_n^{3/2}nb_n^{-1}\big)^{-\frac{1+\delta}{3}} + b_n\Big)\,,
\end{aligned}$$

对于任意序列 (b_n)，$b_n \in \in(0,1)$，这里我们使用引理 4。选择使阶数最小的 b_n，可得

$$\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\Big[\mathbf{1}\big(\inf_{0\le t\le 1} B_t < x\big)\exp\Big(-h_n^{3/2}n\sigma_{(k-1)h_n}\eta\int_0^1 (B_t-x)_-\,dt\Big)\Big] = \mathbb{P}\big(\inf_{0\le t\le 1} B_t < x\big)\cdot R_n\,,$$

几乎必然成立，且余项满足

$$R_n = \mathcal{O}\Big(\big(h_n^{3/2}n\big)^{-\frac{1+\delta}{4}}\Big)\,.$$

根据 T_x 的无条件莱维分布，$f(s|T_x<1)$ 是显式的，但我们省略其具体形式，因为它不影响渐近阶。在条件 $nh_n^{3/2}\to\infty$ 下，布朗运动在区间上的最小值因而在局部极小值的分布中占主导地位，而噪声的影响较小；这与选择 $h_n \propto n^{-2/3}$ 时不同。根据反射原理，有

$$\mathbb{P}\big(-\inf_{0\le t\le 1} B_t \ge x\big) = \mathbb{P}\big(\sup_{0\le t\le 1} B_t \ge x\big) = 2\mathbb{P}\big(B_1 \ge x\big) = \mathbb{P}\big(|B_1| \ge x\big)\,, \tag{26}$$

对于 $x \ge 0$。

利用通过尾概率积分表示矩的方法，我们借此并结合对 $\tilde{m}^*_{k-1,n}$ 完全类似的估计，来近似条件期望。由此可得，对所有 $k \in \{1,\dots,h_n^{-1}-1\}$，有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[h_n^{-1/2}\tilde{m}_{k,n}\big] = \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(h_n^{-1/2}\tilde{m}_{k,n} > x\big)\,dx - \int_0^\infty \mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(-h_n^{-1/2}\tilde{m}_{k,n} > x\big)\,dx \\
&= -\int_0^\infty \mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\sigma_{(k-1)h_n}\sup_{0\le t\le 1} B_t > x\big)\,dx + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \\
&= -\int_0^\infty \mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\sigma_{(k-1)h_n}|B_1| > x\big)\,dx + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \\
&= -\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\sigma_{(k-1)h_n}|B_1|\big] + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_{(k-1)h_n} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)\,.
\end{aligned}$$

我们使用了（26）。类似的计算可得，对于 $\tilde{m}^*_{k-1,\ n}$，结果相同：

$$\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[h_n^{-1/2}\tilde{m}^*_{k-1,n}\big] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_{(k-1)h_n} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)\,.$$

对于二阶条件矩，我们得到，对所有 $k \in \{1, \dots, h_n^{-1} - 1\}$，均有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[h_n^{-1}\big(\tilde{m}_{k,n}\big)^2\big] &= 2\int_0^\infty x\,\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(|h_n^{-1/2}\tilde{m}_{k,n}| > x\big)\,dx \\
&= 2\int_0^\infty x\,\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\sigma_{(k-1)h_n}\sup_{0\le t\le 1} B_t > x\big)\,dx + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \\
&= 2\int_0^\infty x\,\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\sigma_{(k-1)h_n}|B_1| > x\big)\,dx + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \\
&= \sigma^2_{(k-1)h_n} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)\,.
\end{aligned}$$

最后一个恒等式运用了将正态分布的二阶矩表示为尾概率积分的例子。类似的计算可得

$$\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[h_n^{-1}\big(\tilde{m}^*_{k-1,n}\big)^2\big] = \sigma^2_{(k-1)h_n} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)\,.$$

将条件矩的恒等式代入 (23)，可得

$$\mathbb{E}\big[h_n^{-1}\big(\tilde{m}_{k,n} - \tilde{m}^*_{k-1,n}\big)^2\big] = 2\Big(1 - \frac{2}{\pi}\Big)\mathbb{E}[\sigma^2_{(k-1)h_n}] + \mathcal{O}(1)\,,$$

使得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\hat{\sigma}^2_{\tau-} - \sigma^2_{\tau-}\big] &= \frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} h_n^{-1}\mathbb{E}\Big[\big(\tilde{m}_{k,n} - \tilde{m}^*_{k-1,n}\big)^2\Big] - \mathbb{E}[\sigma^2_{\tau-}] + \mathcal{O}(1) \\
&= \frac{1}{K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} \mathbb{E}[\sigma^2_{(k-1)h_n} - \sigma^2_{\tau-}] + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)\,.
\end{aligned}$$

这就证明了 (22)。由于下一步将表明估计量的方差趋于零，因此一致性成立。

步骤 4

我们确定了该估计量的渐近方差。将矩表示为尾概率的积分，并采用与上文类似的近似方法，可得对所有 $k \in \{1, \dots, h_n^{-1} - 1\}$，

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\tilde{m}^2_{k,n}\big) &= \mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}^4_{k,n}\big] - \Big(\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}^2_{k,n}\big]\Big)^2 = 2\sigma^4_{(k-1)h_n}h_n^2 + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(h_n^2), \\
\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\tilde{m}^2_{k,n}, \tilde{m}_{k,n}\tilde{m}^*_{k-1,n}\big) &= \mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}^3_{k,n}\big]\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}^*_{k-1,n}\big] \\
&\quad - \mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}^2_{k,n}\big]\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}_{k,n}\big]\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}^*_{k-1,n}\big] \\
&= \frac{2}{\pi}\,\sigma^4_{(k-1)h_n}h_n^2 + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(h_n^2), \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\Big(\tilde{m}_{k,n}\tilde{m}^*_{k-1,n}\Big) &= \mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}^2_{k,n}\big]\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\big(\tilde{m}^*_{k-1,n}\big)^2\big] \\
&\quad - \big(\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}_{k,n}\big]\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}^*_{k-1,n}\big]\big)^2 \\
&= \sigma^4_{(k-1)h_n}\Big(1 - \frac{4}{\pi^2}\Big)h_n^2 + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(h_n^2).
\end{aligned}$$

我们使用了半正态分布的前四阶矩，并通过尾概率积分来表示这些矩。$\tilde{m}_{k,n}$ 与 $\tilde{m}^*_{k,n}$ 之间的依赖结构也会影响 $\hat{}\sigma^2_{\tau-}$ 的方差。我们对协方差采用与上文局部极小值的矩类似的近似步骤，利用

$$
\begin{aligned}
h_n^{-1}\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\tilde{m}_{k,n},\tilde{m}^*_{k,n}\big) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(h_n^{-1/2}\tilde{m}_{k,n}>x, h_n^{-1/2}\tilde{m}^*_{k,n}>y\big)\\
&\qquad -\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(h_n^{-1/2}\tilde{m}_{k,n}>x\big)\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(h_n^{-1/2}\tilde{m}^*_{k,n}>y\big)\Big)\,dxdy\\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\Big(\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\sigma_{(k-1)h_n}\sup_{0\le t\le 1}B_t>x, \sigma_{(k-1)h_n}\big(\sup_{0\le t\le 1}B_t-B_1\big)>y\big)\\
&\qquad -\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\sigma_{(k-1)h_n}\sup_{0\le t\le 1}B_t>x\big)\mathbb{P}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\sigma_{(k-1)h_n}\big(\sup_{0\le t\le 1}B_t-B_1\big)>y\big)\Big)dxdy+\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1).
\end{aligned}
$$

这表明，$(\tilde{m}_{k,\ n},\ \tilde{m}^*_{k,\ n})$的联合分布与布朗运动在一个区间上的最小值以及最小值和端点之差的分布有关；等价地，它也与最大值以及最大值和端点之差的分布有关。后者可直接由最大值和端点的联合密度得到，这是随机过程中的一个著名结果，参见例如 [26]。利用这一点，对于所有 $k\in\{1,\ .....,\ h_n^{-1}-1\}$，我们得到

$$
\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\tilde{m}_{k,n}\,,\,\tilde{m}^*_{k,n}\big)=\Big(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\Big)h_n\,\sigma^2_{(k-1)h_n}(1+\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(h_n^{\alpha}))+\mathcal{o}_{\mathbb{P}}\big(h_n\big)\,.
$$

概率阶为 h_n^{α} 的额外余项源于在 $\tilde{m}_{k,\ n}$ 和 $\tilde{m}^*_{k,\ n}$ 中对 (σ_t) 采用了不同的近似。这意味着，对于所有 $k\in\{1,\ .....,\ h_n^{-1}-1\}$，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\tilde{m}_{k,n}\tilde{m}^*_{k-1,n},\tilde{m}_{k+1,n}\tilde{m}^*_{k,n}\big)=\\
&\Big(\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}_{k,n}\tilde{m}^*_{k,n}\big]-\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}_{k,n}\big]\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}^*_{k,n}\big]\Big)\mathbb{E}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big[\tilde{m}^*_{k-1,n}\big]\mathbb{E}\big[\tilde{m}_{k+1,n}\big]\\
&=\sigma^4_{(k-1)h_n}\Big(\frac{1}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}\Big)h_n^2+\mathcal{o}_{\mathbb{P}}\big(h_n^2\big)\,.
\end{aligned}
$$

通过类似的步骤，我们推导出另外两个协方差，它们对渐近方差有贡献：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\tilde{m}^2_{k,n},\big(\tilde{m}^*_{k,n}\big)^2\big)&=-h_n^2\frac{\sigma^4_{(k-1)h_n}}{2}+\mathcal{o}_{\mathbb{P}}\big(h_n^2\big)\,,\\
\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma_{(k-1)h_n}}\big(\big(\tilde{m}^*_{k,n}\big)^2,m_k\tilde{m}^*_{k-1,n}\big)&=-h_n^2\frac{2}{3\pi}\sigma^4_{(k-1)h_n}+\mathcal{o}_{\mathbb{P}}\big(h_n^2\big)\,.
\end{aligned}
$$

所有进入渐近方差的协方差项都属于以下形式之一。对于给定 $\sigma^2_{\tau-}$ 的条件方差，我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}_{\sigma^2_{\tau-}}\big(\hat{\sigma}^2_{\tau-}\big)=\frac{1}{K_n^2}\frac{\pi^2}{4(\pi-2)^2}\Bigg(&\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1}h_n^{-2}\mathbb{V}\mathrm{ar}_{\sigma^2_{\tau-}}\Big(\tilde{m}^2_{k,n}+(\tilde{m}^*_{k,n})^2-2\tilde{m}_{k,n}\tilde{m}^*_{k-1,n}\Big)\\
-\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 2}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1}&4h_n^{-2}\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma^2_{\tau-}}\Big(\tilde{m}_{k,n}\tilde{m}^*_{k-1,n}\,,\,\tilde{m}^2_{k-1,n}+(\tilde{m}^*_{k-1,n})^2-2\tilde{m}_{k-1,n}\tilde{m}^*_{k-2,n}\Big)\Bigg)+\mathcal{o}_{\mathbb{P}}\big(K_n^{-1}\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{K_n^2}\frac{\pi^2}{4(\pi-2)^2}\Bigg(\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor -1} h_n^{-2}\Big(2\mathbb{V}\mathrm{ar}_{\sigma^2_{\tau-}}\big(\tilde m^2_{k,n}\big) + 4\mathbb{V}\mathrm{ar}_{\sigma^2_{\tau-}}\big(\tilde m_{k,n}\tilde m^*_{k-1,n}\big) \\
&+ 2\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma^2_{\tau-}}\big(\tilde m^2_{k,n}, (\tilde m^*_{k,n})^2\big) - 4\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma^2_{\tau-}}\big(\tilde m^2_{k,n}, \tilde m_{k,n}\tilde m^*_{k-1,n}\big) - 4\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma^2_{\tau-}}\big((\tilde m^*_{k,n})^2, \tilde m_{k,n}\tilde m^*_{k-1,n}\big)\Big) \\
&+ \sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 2}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor -1} 4h_n^{-2}\Big(2\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma^2_{\tau-}}\big(\tilde m_{k,n}\tilde m^*_{k-1,n}, \tilde m_{k-1,n}\tilde m^*_{k-2,n}\big) - \mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma^2_{\tau-}}\big(\tilde m_{k,n}\tilde m^*_{k-1,n}, \tilde m^2_{k-1,n}\big) \\
&\qquad - \mathbb{C}\mathrm{ov}_{\sigma^2_{\tau-}}\big(\tilde m_{k,n}\tilde m^*_{k-1,n}, (\tilde m^*_{k-1,n})^2\big)\Big)\Bigg) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\big(K_n^{-1}\big) \\
&= \frac{1}{K_n}\frac{\pi^2}{4(\pi-2)^2}\sigma^4_{\tau-}\Big(8 - \frac{16}{\pi^2} - 1 - \frac{8}{\pi} + \frac{8}{3\pi} + 2\Big(\frac{4}{3\pi} - \frac{16}{\pi^2}\Big)\Big) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\big(K_n^{-1}\big) \\
&= \frac{1}{K_n}\frac{1}{(\pi-2)^2}\Big(\frac{7\pi^2}{4} - \frac{2\pi}{3} - 12\Big)\sigma^4_{\tau-} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\big(K_n^{-1}\big)\,.
\end{aligned}
$$

步骤 5

要满足中心极限定理，平方偏差相对于方差必须渐近可忽略；当 $K_n = o(h_n^{-2\alpha/(1+2\alpha)})$ 时，这一条件成立。由于 $\tilde m_{k,n}$ 和 $\tilde m^*_{k-1,n}$ 的高阶矩存在，因此很容易验证 Lyapunov 型条件，从而可由经典的 m 依赖三角阵中心极限定理（例如 [3] 提出的定理）推出以 $\sigma^2_{\tau-}$ 为条件的渐近正态性。将这一条件渐近正态性与 $\mathcal{F}^X$-稳定收敛相结合，即可推出可行的中心极限定理。关于稳定性，我们证明 $\alpha_n = K_n^{1/2}\big(\hat\sigma^2_{\tau-} - \sigma^2_{\tau-}\big)$ 满足

$$
\mathbb{E}\left[Zg(\alpha_n)\right] \to \mathbb{E}\left[Zg(\alpha)\right] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}\left[g(\alpha)\right]\,, \tag{27}
$$

对于任意 $\mathcal{F}^X$-可测的有界随机变量 Z 和连续有界函数 g，其中 re

$$
\alpha = \sigma^2_{\tau-}\frac{1}{(\pi-2)}\sqrt{\frac{7\pi^2}{4} - \frac{2\pi}{3} - 12}\; U\,, \tag{28}
$$

其中 U 是一个与$\mathcal{F}^X$独立的标准正态分布随机变量。根据上述近似，只需证明基于式 (20) 中的 $\tilde m_{k,n}$ 和 $\tilde m^*_{k-1,n}$ 的统计量满足这一点，且 Z 相对于 $\sigma(\int_0^t \sigma_s\, dW_s, 0 \le t \le 1)$ 可测。令

$$
A_n = [\tau - (K_n+1)h_n, \tau]\,,\ \tilde X(n)_t = \int_0^t \mathbf{1}_{A_n}(s)\sigma_{\lfloor sh_n^{-1}\rfloor h_n}\, dW_s\,, \bar X(n)_t = X_t - \tilde X(n)_t\,.
$$

记 $\mathbf{H}_n$ 为由 $\bar X(n)_t$ 和 $\mathbf{F}_0^X$生成的 σ域。序列 $\big(\mathbf{H}^n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ 单调递增，且极限为 $\bigvee_n \mathbf{H}_n = \sigma(\int_0^t \sigma_s\, dW_s, 0 \le t \le 1)$。由于 $\mathbb{E}[Z|\mathbf{H}_n] \to Z$属于 $L^1(\mathbb{P})$，当 $n \to \infty$时，只需证明：对于某个 $n_0 \in \mathbf{N}$，若 Z 是 $\mathbf{H}_{n_0}$-可测的，则 $\mathbb{E}[Zg(\alpha_n)] \to \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[g(\alpha)]$, 。注意，$\alpha_n$ 仅包含基于 $X(n)_t$的局部极小值增量，这些增量与¯的 $X(n)_t$不相关。因此，对所有 $n \ge n_0$，由标准中心极限定理可得 $\mathbb{E}[Zg(\alpha_n)$ $] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[g(\alpha_n)] \to \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[g(\alpha)]$ 。这证明了（27），并完成了（14）的证明。

6.2.2. 命题 *2* 的证明

对于峰度估计量 (12)，当 $\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor > K_n$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\widehat{\sigma_{\tau-}^4} - \sigma_{\tau-}^4\big] &= \frac{\pi}{4(3\pi-8)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1} h_n^{-2}\mathbb{E}\Big[\tilde{m}_{k,n}^4 + (\tilde{m}_{k-1,n}^*)^4 - 4\tilde{m}_{k,n}^3\tilde{m}_{k-1,n}^* \\ &\qquad - 4\tilde{m}_{k,n}(\tilde{m}_{k-1,n}^*)^3 + 6\tilde{m}_{k,n}^2(\tilde{m}_{k-1,n}^*)^2\Big] - \mathbb{E}[\sigma_{\tau-}^4] + \mathcal{O}\big(h_n^{\alpha\wedge 1/2}\big) \\ &= \Big(\frac{\pi}{4(3\pi-8)}\big(6 - 16/\pi - 16/\pi + 6\big) - 1\Big)\mathbb{E}[\sigma_{\tau-}^4] + o(1) \\ &= o(1)\,,\end{aligned}$$

通过使用计算渐近方差时相同的矩。我们可以将其方差界定为

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}\big(\widehat{\sigma_{\tau-}^4}\big) &\le \frac{\pi^2}{16(3\pi-8)^2K_n^2}2K_nh_n^{-4}\,\mathbb{V}\mathrm{ar}\Big(\big(\tilde{m}_{k,n} - \tilde{m}_{k-1,n}^*\big)^4\Big) + o\big(K_n^{-1}\big) \\ &\le \frac{1}{K_n}\frac{\pi^2}{8(3\pi-8)^2}h_n^{-4}\,\mathbb{E}\Big[\big(\tilde{m}_{k,n} - \tilde{m}_{k-1,n}^*\big)^8\Big] + o\big(K_n^{-1}\big) \\ &\le \frac{1}{K_n}\frac{\pi^2}{8(3\pi-8)^2}h_n^{-4}\,256\,\mathbb{E}\Big[\tilde{m}_{k,n}^8\Big] + o\big(K_n^{-1}\big) = \mathcal{O}(K_n^{-1})\,,\end{aligned}$$

由此可直接推出命题 2。

6.3. 带跳跃的截断瞬时波动率估计的渐近性质

记

$$D_k^X := m_{k,n} - m_{k-1,n},\ k = 1,\dots,h_n^{-1}-1\,,$$

为基于观测值 (5) 的局部极小值之差，其中半鞅 (4) 是一般的且带有跳跃。记

$$D_k^C := \tilde{m}_{k,n} - \tilde{m}_{k-1,n}^*,\ k = 1,\dots,h_n^{-1}-1\,,$$

第 6.2 节中所考虑的不可观测局部极小值之差。特别地，统计量 D_k^C仅基于式 (4) 中的连续部分(C_t)，因此跳跃被消除。若能证明以下结论，则命题 2 可推出定理 3:

$$\frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1} h_n^{-1}\Big(\big(D_k^X\big)^2\mathbf{1}_{\{|D_k^X|\le u_n\}} - \big(D_k^C\big)^2\Big) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\big(h_n^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}}\big) = o_{\mathbb{P}}\big(K_n^{-1/2}\big)\,.$$

我们将截断估计量（基于包含跳跃的可用观测值）与非截断估计量（基于不包含跳跃的不可用观测值）之间的差异分解如下:

如下所示:

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1} h_n^{-1}\Big(\big(D_k^X\big)^2\mathbf{1}_{\{|D_k^X|\le u_n\}}-\big(D_k^C\big)^2\Big)\\
&=\frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1} h_n^{-1}\Big(\mathbf{1}_{\{|D_k^C|>cu_n\}}\Big(\big(D_k^X\big)^2\mathbf{1}_{\{|D_k^X|\le u_n\}}-\big(D_k^C\big)^2\Big)\\
&\qquad\qquad+\mathbf{1}_{\{|D_k^C|\le cu_n\}}\mathbf{1}_{\{|D_k^X|\le u_n\}}\Big(\big(D_k^X\big)^2-\big(D_k^C\big)^2\Big)\\
&\qquad\qquad-\mathbf{1}_{\{|D_k^C|\le cu_n\}}\mathbf{1}_{\{|D_k^X|>u_n\}}\big(D_k^C\big)^2\Big),
\end{aligned}$$

其中常数 $c\in$ 任意，且满足（0，1）。不失一般性，在本证明中可设 $\beta=1$，即 $u_n=h_n^{\kappa}$。我们将以下三项分别视为不同的误差项:

1. 基于连续部分的大绝对值统计量（C_t）；2. 未截断的统计量，其中包含（较小的）跳跃;

3. 对统计量中超过阈值的连续部分也进行截断（D_k^X）；

分别处理。利用（25）中的估计和高斯尾界，可以对概率 $\mathbb{P}(|D_k^C|>cu_n)$ 进行界定。注意，（25）中的余项非负。因此，对于某个 $y>0$，有:

$$\mathbb{P}\Big(h_n^{-1/2}\big|\tilde{m}_{k,n}\big|>y\Big)\le\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le t\le 1}B_t>y\Big),$$

这是直观的，因为误差（ϵ_i）是非负的。我们对第一误差项的绝对值取期望，并应用三角不等式和 Hölder不等式，从而对任意$p\in$N，有

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1} h_n^{-1}\mathbf{1}_{\{|D_k^C|>cu_n\}}\Big(\big(D_k^X\big)^2\mathbf{1}_{\{|D_k^X|\le u_n\}}-\big(D_k^C\big)^2\Big)\Big|\Big]\\
&\le\frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1} h_n^{-1}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{|D_k^C|>cu_n\}}\Big|\big(D_k^X\big)^2\mathbf{1}_{\{|D_k^X|\le u_n\}}-\big(D_k^C\big)^2\Big|\Big]\\
&\le\frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1} h_n^{-1}\Big(\mathbb{P}\big(|D_k^C|>cu_n\big)2\big(u_n^4+\mathbb{E}\big[\big(D_k^C\big)^4\big]\big)\Big)^{1/2}\\
&\le\frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1} h_n^{-1}\Big(\mathbb{P}\big(h_n^{-1/2}|D_k^C|>ch_n^{\kappa-1/2}\big)\Big)^{1/2}\sqrt{2}\,u_n^2\\
&\le\frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1} h_n^{-1}\Big(2\,\mathbb{P}\Big(|B_1|>\frac{c}{2}h_n^{\kappa-1/2}\Big)\Big)^{1/2}\sqrt{2}\,u_n^2\\
&\le\frac{\sqrt{2}\pi}{(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor-1} h_n^{2\kappa-1}\exp\Big(-\frac{c^2}{4}h_n^{2\kappa-1}\Big)
\end{aligned}$$

$$= \mathcal{O}\Big(h_n^{(-p+1)(2\kappa-1)}\Big) = o\big(h_n^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}}\big)\,.$$

由于 $2\kappa - 1 < 0$ 和 p 可以任意大，我们得出第一误差项渐近可忽略。我们将使用以下初等不等式

$$\begin{aligned} D_k^X &= \min_{i\in\mathcal{I}_k^n}\big(C_{\frac{i}{n}} + J_{\frac{i}{n}} + \epsilon_i\big) - \min_{i\in\mathcal{I}_{k-1}^n}\big(C_{\frac{i}{n}} + J_{\frac{i}{n}} + \epsilon_i\big) \\ &\le \min_{i\in\mathcal{I}_k^n}\big(C_{\frac{i}{n}} + \epsilon_i\big) + \max_{i\in\mathcal{I}_k^n} J_{\frac{i}{n}} - \min_{i\in\mathcal{I}_{k-1}^n}\big(C_{\frac{i}{n}} + \epsilon_i\big) - \min_{i\in\mathcal{I}_{k-1}^n} J_{\frac{i}{n}} \\ &= D_k^C + \max_{i\in\mathcal{I}_k^n} J_{\frac{i}{n}} - \min_{i\in\mathcal{I}_{k-1}^n} J_{\frac{i}{n}} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\big(h_n^{\alpha\wedge 1/2}\big)\,, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} D_k^X &= \min_{i\in\mathcal{I}_k^n}\big(C_{\frac{i}{n}} + J_{\frac{i}{n}} + \epsilon_i\big) - \min_{i\in\mathcal{I}_{k-1}^n}\big(C_{\frac{i}{n}} + J_{\frac{i}{n}} + \epsilon_i\big) \\ &\ge \min_{i\in\mathcal{I}_k^n}\big(C_{\frac{i}{n}} + \epsilon_i\big) + \min_{i\in\mathcal{I}_k^n} J_{\frac{i}{n}} - \min_{i\in\mathcal{I}_{k-1}^n}\big(C_{\frac{i}{n}} + \epsilon_i\big) - \max_{i\in\mathcal{I}_{k-1}^n} J_{\frac{i}{n}} \\ &= D_k^C + \min_{i\in\mathcal{I}_k^n} J_{\frac{i}{n}} - \max_{i\in\mathcal{I}_{k-1}^n} J_{\frac{i}{n}} + \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\big(h_n^{\alpha\wedge 1/2}\big)\,. \end{aligned}$$

因此，我们可以将 $|D_k^X - D_k^C|$ 的上界表示为

$$\begin{aligned} \sup_{i\in\mathcal{I}_k^n, j\in\mathcal{I}_{k-1}^n} |J_{\frac{i}{n}} - J_{\frac{j}{n}}| &\le \sup_{s\in[kh_n,(k+1)h_n], t\in[(k-1)h_n,kh_n]} |J_s - J_t| \\ &\le \sup_{s\in[kh_n,(k+1)h_n]} |J_s - J_{kh_n}| + \sup_{t\in[(k-1)h_n,kh_n]} |J_{kh_n} - J_t|\,, \end{aligned}$$

以及连续部分近似的余项，其阶为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}\big(h_n^{\alpha\wedge 1/2}\big)$。由于半鞅的补偿小跳具有鞅结构，可以使用 càdlàg L_2-鞅的Doob不等式来界定这些上确界。基于上述准备结果，我们得到第二误差项绝对值期望的表达式:

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} h_n^{-1}\mathbf{1}_{\{|D_k^C|\le cu_n\}}\mathbf{1}_{\{|D_k^X|\le u_n\}}\Big(\big(D_k^X\big)^2 - \big(D_k^C\big)^2\Big)\Big|\Big] \\ &\le \frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} h_n^{-1}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{|D_k^C|\le cu_n\}}\mathbf{1}_{\{|D_k^X|\le u_n\}}\Big|\big(D_k^X\big)^2 - \big(D_k^C\big)^2\Big|\Big] \\ &\lesssim \frac{1}{K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} h_n^{-1}\mathbb{E}\Big[\sup_{i\in\mathcal{I}_k^n, j\in\mathcal{I}_{k-1}^n} |J_{\frac{i}{n}} - J_{\frac{j}{n}}|^2 \wedge (1+c)^2u_n^2\Big] \\ &\lesssim \frac{1}{K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} h_n^{-1}\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[kh_n,(k+1)h_n]} |J_t - J_{kh_n}|^2 \wedge u_n^2\Big] \\ &\lesssim \frac{1}{K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} h_n^{-1}\mathbb{E}\Big[|J_{(k+1)h_n} - J_{kh_n}|^2 \wedge u_n^2\Big] \\ &= \mathcal{O}\big(u_n^{2-r}\big)\,. \end{aligned}$$

应用上述初等不等式，$\big(D_k^X\big)^2 - \big(D_k^C\big)^2$ 上界中的一个交叉项阶数较低，因此直接忽略。可以使用柯西–施瓦茨不等式处理该项。最后一步中，我们采用 [1] 中公式 (54) 对阈值化跳跃增量绝对值期望的界。由此，为使第二误差项可忽略，我们得到以下条件：

$$\kappa(2-r) \geq \frac{\alpha}{1+2\alpha}\,. \tag{29}$$

由Doob不等式还可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[kh_n,(k+1)h_n]} |J_t - J_{kh_n}| \geq (1-c)u_n\Big) &\leq \frac{\mathbb{E}\big[\big|J_{(k+1)h_n} - J_{kh_n}\big|^{r\wedge 1}\big]}{\big((1-c)u_n\big)^{r\wedge 1}} + \mathcal{O}(h_n)\\ &= \mathcal{O}\big(h_n u_n^{-r}\big)\,.\end{aligned}$$

为得到此上界，我们将跳跃分解为大跳跃之和与补偿小跳跃鞅，并对后者应用Doob不等式。由此，我们得到第三个（绝对）误差项期望的以下估计

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} h_n^{-1}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{|D_k^C|\leq cu_n\}}\mathbf{1}_{\{|D_k^X|>u_n\}}\big(D_k^C\big)^2\Big]\\
&\leq \frac{\pi}{2(\pi-2)K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} h_n^{-1}\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{2\sup_{s\in[(k-1)h_n,(k+1)h_n]}|J_s - J_{kh_n}|\geq(1-c)u_n\}}\big(D_k^C\big)^2\Big]\\
&\lesssim \frac{1}{K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1} h_n^{-1}\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[kh_n,(k+1)h_n]}|J_t - J_{kh_n}| \geq (1-c)u_n\Big)\mathbb{E}\Big[\big(D_k^C\big)^2\Big]\\
&\lesssim \frac{1}{K_n}\sum_{k=(\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - K_n)\vee 1}^{\lfloor h_n^{-1}\tau\rfloor - 1}\left(\frac{\mathbb{E}\big[\big|J_{(k+1)h_n} - J_{kh_n}\big|^{r\wedge 1}\big]}{\big((1-c)u_n\big)^{r\wedge 1}} + \mathcal{O}(h_n)\right)\\
&= \mathcal{O}\big(h_n u_n^{-r}\big)\,.\end{aligned}$$

因此，为了使第三个误差项可忽略，我们得到如下条件

$$1 - \kappa r \geq \frac{\alpha}{1+2\alpha}\,. \tag{30}$$

由于在定理 3 的条件下，(29) 和 (30) 均成立，分解式中所有加项均可忽略，故证明完成。

参考文献

[1] Aït-Sahalia, Y. 和 Jacod, J.（2010）。布朗运动是否是对高频数据建模所必需的？《统计年鉴》，**38(5)**，3093–3128。[2] Aït-Sahalia, Y. 和 Jacod, J.（2014）。高频金融计量经济学。普林斯顿大学出版社。[3] Berk, K. N.（1973）。关于无界 m的 m依赖随机变量的中心极限定理。《概率年鉴》，**1(2)**，352–354。

[4] Bibinger, M.、Hautsch, N.、Malec, P. 和 Reiß, M.（2019）。资产价格的瞬时协变估计——统计理论与实证证据。《商业与经济统计学杂志》，37(3)，419–435。[5] Bibinger, M.、Jirak, M. 和 Reiß, M.（2016）。单侧误差下的波动率估计及其在限价订单簿中的应用。《应用概率年刊》，26(5)，2754–2790。[6] Bibinger, M.、Neely, C. 和 Winkelmann, L.（2019）。不连续杠杆效应的估计：来自纳斯达克订单簿的证据。《计量经济学杂志》，209(2)，158–184。[7] Bibinger, M. 和 Winkelmann, L.（2018）。含噪高频数据中的共同价格跳跃与波动率跳跃。《电子统计学杂志》，12(1)，2018–2073。[8] Bishwal, J.P.N.（2022）。随机波动率模型中的参数估计。施普林格，沙姆。[9] Chaker, S.（2017）。关于无摩擦价格的高频估计：观测到的流动性变量的应用。《计量经济学杂志》，201(1)，127–143。[10] Clinet, S. 和 Potiron, Y.（2021）。参数化市场微观结构噪声下的高频数据估计。《统计数学研究所年刊》，73，649–669。[11] Clinet, S. 和 Potiron, Y.（2019）。检验市场微观结构噪声是否可由限价订单簿中某些变量的信息内容完全解释。《计量经济学杂志》，209(2)，289–337。[12] El Euch, O.、Fukasawa, M. 和 Rosenbaum, M.（2018）。杠杆效应与粗糙波动率的微观结构基础。《金融与随机过程》22(2)，241–280。[13] Hansen, P.R. 和 Lunde, A.（2006）。已实现方差与市场微观结构噪声。《商业与经济统计学杂志》，24(2)，127–161。[14] Hoffmann, M.、Munk A. 和 Schmidt-Hieber, J.（2012）。加性误差测量下扩散系数的自适应小波估计。《IHP概率与统计年刊》，48(4)，1186–1216。[15] Jacod, J. 和 Protter, P.（2012）。过程离散化。施普林格，柏林—海德堡。[16] Li, Y.、Xie, S. 和 Zheng, X.（2016）。结合交易信息的积分波动率高效估计。《计量经济学杂志》，195(1)，33–50。[17] Svante J.（2007）。布朗游走面积、图枚举中的Wright常数及其他布朗面积。《概率调查》，4，80–145。[18] Jirak M.、Meister A. 和 Reiß, M.（2014）。单侧误差下非参数回归的自适应函数估计。《统计年鉴》，42(5)，1970–2002。[19] Li, Z. M. 和 Linton, O.（2022）。一种针对微观结构噪声的ReMeDI方法。《计量经济学》，90(1)，367–389。[20] Liu Y.、Liu Q.、Liu Z. 和 Ding D.（2017）。通过含多重记录的限价订单簿确定积分波动率。《量化金融》，17(11)，1697–1714。[21] Mancini, C.（2009）。随机扩散系数与跳跃模型的非参数阈值估计。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，36(2)，270–296。[22] Mancini, C.、Mattiussi, V. 和 Renò, R.（2015）。利用德尔塔序列进行瞬时波动率估计。《金融与随机过程》，19(2)，261–293。[23] Meister, A. 和 Reiß, M.（2013）。非规则误差下非参数回归的渐近等价。《概率理论及相关领域》，155(1)，201–229。[24] Reiß, M. 和 Wahl, M.（2019）。非参数边界模型中的函数估计与假设检验。《伯努利》，25(4A)，2597–2619。

[25] Rosenbaum, M. 和 Tomas, M.（2021）。从微观价格动态到多维粗糙波动率模型。《应用概率进展》，**53(2)**，425–462。[26] Shepp, L.A.（1979）。带漂移维纳过程的最大值及其位置的联合密度。《应用概率杂志》，**16(2)**，423–427。[27] Takács, L.（1996）。关于反正弦定律的一种推广。《应用概率年刊》，**6(3)**，1035–1040。[28] Tauchen, G. 和 Todorov, V.（2011）。波动率跳跃。《商业与经济统计学杂志》，**29(3)**，356–371。