无名手稿编号（将由编辑插入）

带投资的 Sparre Andersen 模型的破产概率：年金支付情形

Yuri Kabanov · Platon Promyslov

arXiv:2301.01966v1 [math.PR] 5 Jan 2023

2023年1月6日

谨以此文纪念 Tomas Bj¨ork。

摘要 本文是对 Eberlein、Kabanov 和 Schmidt 关于带投资的 Sparre Andersen 非寿险模型中破产概率渐近行为的论文的补充；该模型将资金投资于价格遵循几何 L´évy 过程的风险资产。我们运用半马尔可夫过程的技巧，将上述论文的结果推广至年金情形以及具有双侧跳跃的模型。

关键词 破产概率 · Sparre Andersen 模型 · 带投资的精算模型 · 更新过程 · 年金 · 分布方程
数学主题分类（2010）60G44
JEL 分类 G22 · G23

1 引言

在经典的保险公司 Sparre Andersen 模型中，索赔次数构成一个更新过程。近期研究（参见 [1], [2] 及其中的参考文献）通过假设保险公司的资本储备全部投资于一种风险资产，丰富了这一模型；该资产的价格按照几何 L´évy 过程演变。Eberlein、Kabanov 和 Schmidt 在论文 [2] 中研究了这类模型的非寿险版本。研究表明，在业务过程满足相当宽松的假设时，终极破产概率的渐近行为基本上与包含风险投资的 Cram [1], [2] ér–Lundberg 模型相同。

莫斯科国立罗蒙诺索夫大学、俄罗斯科学院“计算机科学与控制”联邦研究中心（俄罗斯莫斯科），以及弗朗什-孔泰大学数学实验室，CNRS 6623 联合研究组，法国贝桑松德格雷路 16 号，邮编 25030。电子邮箱：ykabanov@univ-fcomte.fr。

莫斯科国立罗蒙诺索夫大学，莫斯科，俄罗斯 电子邮箱：platon.promyslov@gmail.com

条件下，终极破产概率的渐近行为基本上与包含风险投资的 Cram´ér–Lundberg 模型相同。具体而言，当初始资本 u趋于无穷大时，破产概率按函数$u^{-\beta}$ 衰减，至多相差一个乘法常数。衰减率 β 仅取决于价格过程的特征。[2] 中的分析方法很大程度上依赖于风险过程只有向下跳跃这一假设，因此该过程只能通过跳跃穿越零水平。这一特性使得将问题直接化简为离散时间马尔可夫框架成为可能。

[2] 的方法留下了一个尚未解决的问题：这些结果是否也适用于向上跳跃的情况。风险过程以连续方式穿过零水平，是年金模型的一个特征。在不太常见的双侧跳跃混合模型中，穿越可能以两种方式发生。当然，我们预期答案是肯定的：Kabanov、Pergamenshchikov 和 Pukhlyakov 已经针对含投资的 Cram´er–Lundberg 模型确立了这一点；此外，Paulsen 提出并研究了非常一般的 L´evy Ornstein–Uhlenbeck 模型，参见 [8],[9], [10], [11], ，以及 Kabanov 和 Pergamenshchikov 最近发表的一篇论文 [6] 。

我们的短文基于研究 [2], ，针对含投资的 Sparre Andersen 模型的年金版本，给出了向上跳跃情形的肯定答案。我们简要讨论了所需的改动，由此得到一个包含向上和向下跳跃的模型结果，该模型用于描述一家具有两种业务活动的公司资本储备的演变。我们的方法基于通过增加维度，将半马尔可夫过程嵌入马尔可夫过程。

本文采用随机微积分的标准记号，并使用 [6], [2] 中详细讨论的概念。

2 模型

所考虑的含风险投资的 Sparre Andersen 模型包含两个要素：

1. 风险金融资产 $S = (S_t)_{t\geq 0}$ 的价格过程。它的形式为$S = \mathcal{E}(R)$，其中 $\mathcal{E}$ 是随机指数， R 是一个具有 Lévy 三元组 (a, σ^2, Π) 的 Lévy 过程，并且满足 $\Pi((-\infty, -1]) = 0$。后一条件确保跳跃 $\Delta R > -1$，因此价格 $S > 0$。在这种情况下， $S = e^V$，其中 $V = \ln S$ 又是一个 Lévy 过程，可由下式给出

$$V_t = at - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t + h * (\mu - \nu)_t + (\ln(1 + x) - h) * \mu_t, \qquad (2.1)$$

其中 $h(x) := xI_{\{|x|\leq 1\}}$。 V 的 Lévy 三元组为 (a_V, σ^2, Π_V)，其中

$$a_V = a - \frac{\sigma^2}{2} + \Pi(h(\ln(1 + x)) - h)$$

以及 $\Pi_V = \Pi\varphi^{-1}$、 $\varphi : \ x \mapsto \ln(1 + x)$。

假设 R 是非确定性的，也就是说，参数 σ^2或 Π 至少有一个不为零。

2.“业务过程”。它是一个独立的 S 复合更新过程$P = (P_t)$。传统上，它可以写成以下形式

$$P_t = ct + \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \tag{2.2}$$

其中 $N = (N_t)$ 是一个计数更新过程，其到达间隔时间（跳跃间隔的长度）$U_i := T_i - T_{i-1}, i \geq 2$ 构成独立同分布序列，且独立于随机变量独立同分布序列 $\xi_i = \Delta P_{T_i}, i \geq 1$；两者具有共同分布 F_ξ, $F_\xi(\{0\}) = 0$。下文中，具有该分布的一个“典型”随机变量记为 ξ。照例， $T_0 := 0$。我们将 U_i 的共同分布记为 F，并用同一符号表示其分布函数。

风险过程 $X = X^u, u > 0$ 定义为非齐次线性随机方程的解

$$X_t = u + \int_0^t X_{s-} dR_s + P_t. \tag{2.3}$$

破产概率是初始资本 $\Psi(u)$ 的函数：$= \mathrm{P}[\tau^u < \infty]$，其中 $\tau^u := \inf\{t : X_t^u \leq 0\}$。

主要关注的情形包括： $c > 0$ 和 $\xi_i < 0$ （一种非寿险模型，见 [2]），以及 $c < 0$ 和 $\xi_i > 0$ （年金支付模型）。本文研究的后一种情形通常被解释为这样一种模型：创业公司支付薪资并出售创新成果。 F_ξ 在两个半轴上都收取费用的情形，可视为一家公司兼营两类业务的模型，参见例如 [1]。我们还研究 ξ_i 可能取正值和负值的情形。

若 $c \geq 0$ 和 $\xi > 0$，则永远不会发生破产，因此不考虑这种情形。

基本假设。随机变量 V_{T_1} 的累积量生成函数 H： $q \to \ln \mathrm{E}\ e^{-qV_{T_1}}$在有效定义域 H的边界上不存在根 $\beta > 0$ 。也就是说，若 $\operatorname{int}\operatorname{dom} H = (\underline{q}, \bar{q})$，则存在唯一的根$\beta \in (0, \bar{q})$。

我们要寻找满足以下条件的情形：

$$0 < \liminf_{u\to\infty} u^\beta \Psi(u) \leq \limsup_{u\to\infty} u^\beta \Psi(u) < \infty. \tag{2.4}$$

论文 [2] 讨论了非寿险的情形。我们以更清晰的形式表述其主要结果。

定理 2.1（[2]）假设漂移 $c \geq 0$，分布 F_ξ 集中于（$-\infty, 0$），$\mathrm{E}[|\xi|^\beta] < \infty$，且对于某个 $\varepsilon > 0$，$\mathrm{E}[e^{\varepsilon T_1}] < \infty$。那么，只要满足以下条件中的至少一项，式（2.4）便成立：

1. $\sigma \neq 0$ 或 ξ 从下方无界。2a. $\Pi((-1,0)) > 0$ 且 $\Pi((0,\infty)) > 0$。2b. $\Pi((-1,0)) = 0$ 且 $\Pi(h) = \infty$。2c. $\Pi((0,\infty)) = 0$ 且 $\Pi(|h|) = \infty$。2d. 对每个 $t > 0$， $\Pi((-\infty, 0)) = 0$、 $0 < \Pi(h) < \infty$、 $F((0,t)) > 0$。2e. 对每个 $t > 0$， $\Pi((0,\infty)) = 0$、 $0 < \Pi(|h|) < \infty$、 $F((0,t)) > 0$。

[2] 中的证明大量依赖于这样一个假设：业务过程具有正漂移和与非寿险情形相对应的负索赔。在这种情况下，破产只可能在跳跃发生的瞬间发生，因此只需在 T_1、T_2 等时刻监测风险过程。如果 $\xi_i > 0$，这种将问题简化为离散时间破产模型的方法就行不通。

本文研究 Sparre Andersen 型年金模型，其中破产是由于资源耗尽所致，风险过程以连续方式达到零。主要结果可表述如下。

定理 2.2 假设漂移 $c < 0$，分布 F_ξ 集中于 $(0,\infty)$，$\mathrm{E}[\xi^\beta] < \infty$，且 $\mathrm{E}[e^{\varepsilon T_1}] < \infty$ 对于某个 $\varepsilon > 0$成立。那么，只要下列条件至少有一个成立，式 (2.4) 即成立：

1. $\sigma \neq 0$。2a. $\Pi((-1,0)) > 0$ 且 $\Pi((0,\infty)) > 0$。2b. $\Pi((-1,0)) = 0$ 且 $\Pi(h) = \infty$。2c. $\Pi((0,\infty)) = 0$ 且 $\Pi(|h|) = \infty$。2d. $\Pi((-1,0)) = 0, 0 < \Pi(h) < \infty, F((t,\infty)) > 0$ 对每个 $t > 0$ 均成立。2e. $\Pi((0,\infty)) = 0, 0 < \Pi(|h|) < \infty, F((t,\infty)) > 0$ 对每个 $t > 0$均成立。

对于混合情形，我们有以下结果。

定理 2.3 假设漂移 $c \in \mathrm{R}$，分布 F_ξ 在两个半轴 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 上均有正质量，$\mathrm{E}[|\xi|^\beta] < \infty$，且对某个 $\varepsilon > 0$ 有 $\mathrm{E}[e^{\varepsilon T_1}] < \infty$。那么，只要满足以下条件之一，式 (2.4) 就成立：

1. $\sigma \neq 0$ 或 $|\xi|$ 无界。2a. $\Pi((-1,0)) > 0$ 且 $\Pi((0,\infty)) > 0$。2b. $\Pi((-1,0)) = 0$ 且 $\Pi(h) = \infty$。2c. $\Pi((0,\infty)) = 0$ 且 $\Pi(|h|) = \infty$。

2d. $\Pi((-1,0)) = 0$，$0 < \Pi(h) < \infty$，且对情形$c < 0$ 中的每个 $t > 0$ 都有 $F((t,\infty)) > 0$，对情形 $c \geq 0$中的每个 $\varepsilon > 0$ 都有 $F_\xi((0,\varepsilon)) > 0$。

2e. $\Pi((0,\infty)) = 0, 0 < \Pi(|h|) < \infty, F((t,\infty)) > 0$ 在情形$c < 0$ 下对每个 $t > 0$ 成立，而在情形 $c \geq 0$下对每个 $\varepsilon > 0$，> 0 在$((0,\varepsilon))$ F_ξ成立。

年金情形和混合情形需要采用一种不同的方法，该方法借鉴了半马尔可夫过程理论。具体而言，我们将业务过程 P 视为二维马尔可夫过程 (P, D) 的一个分量，其中第二个分量 $D = D^r$ 是一个“时钟”，即用于测量自上一次索赔时刻以来已逝时间的过程。我们假设 $U = T_1$ 的分布可能不同于后续到达间隔时间的共同分布：在时刻零，到达间隔时间已有一部分 r 逝去。这一特征有明显的现实依据：例如，当项目仍在进行时，创业公司可能会改变其治理方式。

在本文中，我们始终使用上标 r 来强调随机变量或过程的分布取决于 r，通常省略 $r = 0$。

严格来说，“时钟” $D^r = (D^r_t)$ 是一个过程，其初始值为 $D^r_0 = r$，$D^r_t = r + t$ 在区间 $[0, T_1)$ 上，而在所有其他到达间隔时间上 $[T^r_n, T^r_{n+1})$，$n \geq 1$ 中 $D^r_t := t - T^r_n$。也就是说，“时钟”在每个时刻 T^r_n 都会从零重新开始。我们

用 F^r 表示第一个到达间隔时间 $T_1^r = T_1^r - T_0$ 的分布。按照我们的约定 $F^0 = F$。

或者， D^r 可以表示为以下线性方程的解

$$D_t^r = r + t - \int_{[0,t]} D_{s-}^r dN_s.$$

通常，$\mathbf{P}[T_1^r > t] = \mathbf{P}[T_i > t + r]/\mathbf{P}[T_i > r]$, $i > 1$。对于指数分布，$F^r = F$对所有 $r \geq 0$ 均成立（“无记忆性”）。

我们假设 $F^r \geq F$。

回想一下，假设 P^r 与 R相互独立，意味着联合二次特征 $[P^r, R]$ 为零，并且破产过程 $X^{u,\ r}$ 可以写成类似于线性微分方程解的柯西公式的形式：

$$X_t^{u,r} = e^{V_t}(u - Y_t^r), \tag{2.5}$$

其中

$$Y_t^r := -\int_{(0,t]} \mathcal{E}_{s-}^{-1}(R) dP_s^r = -\int_{(0,t]} e^{-V_{s-}} dP_s^r. \tag{2.6}$$

过程 $\mathcal{E}(R) = e^V$严格为正，这意味着破产时间

$$\tau^{u,r} := \inf\{t \geq 0 :\ X_t^{u,r} \leq 0\} = \inf\{t \geq 0 :\ Y_t^r \geq u\}.$$

我们研究的关键内容如下

引理 2.4 假设当 $t \to \infty$ 时， $Y_t^r \to Y_\infty^r$ 几乎必然成立，其中 Y_∞^r 是一个有限随机变量，满足 $G(u,r) := \mathbf{P}[Y_\infty^r > u] > 0$ 对每个 $u > 0$ 和 $r \geq 0$ 都成立。若 $G_* := \inf_q G(0,q) > 0$，则

$$\bar{G}(u,r) \leq \Psi(u,r) = \frac{\bar{G}(u,r)}{\mathbf{E}\left[\bar{G}(X_{\tau^{u,r}}^{u,r}, D_{\tau^{u,r}}^r) \,|\, \tau^{u,r} < \infty\right]} \leq \frac{1}{\bar{G}_*}\bar{G}(u,r). \tag{2.7}$$

证明.令 τ 为相对于滤过 $(\mathcal{F}_t^{P,\ D\ R,\ })$ 的任意停时。由于我们假设有限极限 Y_∞^r 存在，随机变量

$$Y_{\tau,\infty}^r := \begin{cases} -\lim_{N\to\infty} \int_{(\tau,\tau+N]} e^{-(V_{s-}-V_\tau)} dP_s^r, & \tau < \infty, \\ 0, & \tau = \infty, \end{cases}$$

定义良好。在集合 $\{\tau < \infty\}$ 上

$$Y_{\tau,\infty}^r = e^{V_\tau}(Y_\infty^r - Y_\tau^r) = X_\tau^{u,r} + e^{V_\tau}(Y_\infty^r - u). \tag{2.8}$$

令 ζ 为一个 $\mathcal{F}_{\tau}^{P,\ \ D\ R,\ }$-可测随机变量。

利用强马尔可夫性质，我们得到

$$\mathbf{P}\left[Y_{\tau,\infty}^r > \zeta,\ \tau < \infty\right] = \mathbf{E}\left[\bar{G}(\zeta, D_\tau^r) I_{\{\tau<\infty\}}\right] \tag{2.9}$$

注意到 $\Psi(u,r):=\mathrm{P}\ [\tau^{u,r}<\infty]\geq \mathrm{P}\ [Y^r_\infty>u]>0$，由此利用 (2.8) 可推得

$$\begin{aligned}\bar G(u,r)&=\mathbf{P}\left[Y^r_\infty>u,\ \tau^{u,r}<\infty\right]=\mathbf{P}\left[Y^r_{\tau^{u,r},\infty}>X^{u,r}_{\tau^{u,r}},\ \tau^{u,r}<\infty\right]\\&=\mathbf{P}[\tau^{u,r}<\infty]\mathbf{E}\left[\bar G(X^{u,r}_{\tau^{u,r}},D^r_{\tau^{u,r}})\,|\,\tau^{u,r}<\infty\right]\\&\geq\mathbf{P}[\tau^{u,r}<\infty]\mathbf{E}\left[\bar G(0,D^r_{\tau^{u,r}})\,|\,\tau^{u,r}<\infty\right]\\&\geq\mathbf{P}[\tau^{u,r}<\infty]\inf_q\bar G(0,q)\end{aligned}$$

并得到该结果。□

鉴于上述引理，主定理的证明归结为证明有限极限 Y^r_∞ 的存在性，并求出它们分布尾部的渐近形式。

我们引入以下记号

$$Q^r_k:=-\int_{(T^r_{k-1},T^r_k]}e^{-(V_{s-}-V_{T^r_{k-1}})}dP^r_s,\qquad M^r_k:=e^{-(V_{T^r_k}-V_{T^r_{k-1}})}.\tag{2.10}$$

引理 2.5 随机变量 Y^r_∞ 具有如下表示形式

$$Y^r_\infty=Q^r_1+M^r_1\tilde Y^r_\infty,$$

其中

$$Q^r_1:=-\int_{[0,T^r_1]}e^{-V_{s-}}dP^r_s,\qquad M^r_1:=e^{-V_{T^r_1}},\tag{2.11}$$

(Q^r_1,M^r_1)与 $\tilde Y^r_\infty$ 相互独立，且 $\tilde Y^r_\infty$ 和 Y^0_∞ 的分布相同。

证明。注意,

$$\begin{aligned}Y^r_{T^r_n}&=-\int_{[0,T^r_1]}e^{-V_{s-}}dP^r_s-\sum_{k=2}^n e^{V_{T^r_{k-1}}}\int_{(T^r_{k-1},T^r_k]}e^{-(V_{s-}-V_{T^r_{k-1}})}dP^r_s\\&=Q^r_1+M^r_1\left(Q^r_2+\sum_{k=3}^n M^r_2...M^r_{k-1}Q^r_k\right),\end{aligned}$$

括号中的随机变量与(Q^r_1,M^r_1)相互独立，且其分布与 Y^0_{n-1}相同。□

引理 2.6 假设 Y_∞ 从上方无界。如果 $c<0$，那么

$$\inf_q\bar G(0,q)\geq\mathbf{E}[\bar G(\xi,0)]>0.$$

如果 $c\in\mathrm{R}$ 且分布函数 $F^r\leq F$，那么

$$\inf_q\bar G(0,q)>0.$$

证明。利用引理 2.5，我们有：

$$\begin{aligned}\bar{G}(0,r) &= \mathbf{P}[Y_\infty^r > 0] = \mathbf{P}[Q_1^r/M_1^r + \tilde{Y}_\infty^r > 0] \\ &= \int \mathbf{P}\left[|c|e^{V_t}\int_{[0,t]} e^{-V_s}ds - \xi_1 + \tilde{Y}_\infty^r > 0\right] F_{T_1^r}(dt) \\ &\geq \mathbf{P}[\tilde{Y}_\infty^r > \xi_1] = \int \mathbf{P}[\tilde{Y}_\infty^r > x]F_\xi(dx) = \int \bar{G}(x,0)F_\xi(dx) > 0\end{aligned}$$

因为 Y_∞ 无界。

检查证明可知，大多数论证稍作修改后，也适用于 c 可取任意符号，且分布 F_ξ 在$(-\infty, 0)$和$(0,\infty)$上有质量的情形。特别是，有限极限 Y_∞ 存在的证明保持不变。

令 $f_t := |\xi_1| + |c|te^{2V_t^*}$，其中 $V_t^* := \sup_{s\leq t}|V_s|$。则

$$|Q_1^r|/M_1^r \leq |\xi_1| + |c|e^{V_{T_1^r}}\int_{[0,T_1^r]} e^{-V_s}ds \leq f_{T_1^r}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\bar{G}(0,r) &= \mathbf{P}[\tilde{Y}_\infty^r > -Q_1^r/M_1^r] = \mathbf{E}\bar{G}(-Q_1^r/M_1^r, 0) \geq \mathbf{E}\bar{G}(|Q_1^r|/M_1^r, 0) \\ &\geq \mathbf{E}\int \bar{G}(f_t,0)F^r(dt) = -\mathbf{E}\int F^r(t)d\bar{G}(f_t,0) \\ &\geq -\mathbf{E}\int F(t)d\bar{G}(f_t,0) \geq \mathbf{E}\int \bar{G}(f_t,0)F(dt) > 0,\end{aligned}$$

其中我们使用性质 $F^r \geq F$。因此，$\inf_r G(0,r) > 0$。 □

3 分布方程解的尾部

与许多关于带投资的破产的结果一样，证明基于隐式更新理论。正如在 [2] 中一样，我们将使用以下结合了若干有用事实的表述：

定理 3.1 假设对于某个 $\beta > 0$,

$$\mathbf{E}[M^\beta] = 1, \quad \mathbf{E}[M^\beta (\ln M)^+] < \infty, \quad \mathbf{E}[|Q|^\beta] < \infty. \tag{3.1}$$

设 Y_∞ 是分布方程 $Y_\infty \stackrel{d}{=} Q + MY_\infty$ 的解，并令 $\bar{G}(u) := \mathrm{P}[Y_\infty > u]$。则 $\limsup u^\beta \bar{G}(u) < \infty$。如果随机变量 Y_∞ 从上方无界，则 $\liminf u^\beta \bar{G}(u) > 0$。

在上一节中，我们引入了过程 $Y = (Y_t)$。假设它在无穷远处的极限为 Y_∞，且这是一个有限的、上方无界的随机变量，我们已证明它满足所需的分布方程，并且其尾函数给出了破产概率的上下界。剩下要做的是检查定理 2.2 的假设是否能确保上述性质，并应用上述定理得出结果。我们将在接下来的几节中完成这些工作。

4 极限 $\boldsymbol{Y^r_\infty}$ 的存在性

首先，我们回顾 [2]中的若干结果。

引理**4.1**（**[2],** 引理2.1）设 $T>0$ 是与 R 独立的随机变量。假设对某个 $\varepsilon>0$，有 $\mathrm{E}[e^{\varepsilon T}]<\infty$。令 $\beta\in(0,\bar q)$ 为方程$H(q)=0$的根。若 $q\in[\beta,\bar q)$ 满足 $H(q)\le\varepsilon/2$，则

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\le T}e^{-qV_s}\right]<\infty. \tag{4.1}$$

推论**4.2** 假设对某个 $\varepsilon>0$，有 $\mathrm{E}[e^{\varepsilon T_1}]<\infty$。令

$$\widehat{Q}_1:=\sup_{t\le T_1}|e^{-V_-}\cdot P_t|.$$

若 $\mathrm{E}[|\xi_1|^\beta]<\infty$，则 $\mathrm{E}[\widehat{Q}_1^\beta]<\infty$。

尽管上述结论比 [2]，中的推论2.2稍微一般一些，但证明完全相同。还要注意，该结论不取决于 c 或 ξ_1 的符号，只需要 $|\xi_1|^\beta$ 可积。特别地，这意味着 $\mathrm{E}[|Q_1^\beta|]<\infty$

引理**4.3** 假设对于某个 $\varepsilon>0$，$\mathrm{E}[e^{\varepsilon T_1}]<\infty$ 且 $\mathrm{E}[|\xi_1|^{\beta\wedge\varepsilon\wedge1}]<\infty$。那么，当 $t\to\infty$ 时，$Y_t\to Y_\infty$ 几乎必然成立，其中 Y_∞ 是一个有限随机变量。

证明。序列 Y_{T_n}, $n\ge1$ 几乎必然收敛到有限随机变量 Y_∞，这一点已在 [2] 的引理**4.1**中证明；此外还证明了，对于任意 $p\in(0,\beta\wedge\varepsilon\wedge1)$，$\rho:=\mathrm{E}[M_1^p]<1$。

令 $I_n:=(T_{n-1},T_n]$，并且

$$\Delta_n:=\sup_{v\in I_n}\left|\int_{(T_{n-1},v]}e^{-V_{s-}}dP_s\right|=\prod_{i=1}^{n-1}M_i\sup_{v\in I_n}\left|\int_{(T_{n-1},v]}e^{-(V_{s-}-V_{T_{n-1}})}dP_s\right|.$$

根据博雷尔–坎泰利引理，要得到所述结论，只需证明对于每个 $\delta>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}[\Delta_n\ge\delta]<\infty.$$

但这是成立的，因为切比雪夫不等式和推论**4.2**表明 $\mathbf{P}[\Delta_n\ge\delta]\le\delta^{-p}\rho^p\mathrm{E}[Q_1|^p]$. □

根据引理 2.5，序列 $Y^r_{T^r_n}$ 几乎处处收敛到 Y^r_∞，通过与上述相同的论证，我们可以得出 Y^r_t 也收敛。

5 当 $\boldsymbol{Y_\infty}$ 的分布从上方无界时?

本节标题中的问题在 [2] 中针对非寿险情形进行了研究，即当 $c<0$ 且 $F_\xi((0,\infty))=1$ 时。本文运用上述论文中提出的技术，为所有新的情形给出了从上方无界的充分条件。其依据是以下基本观察：若 $f\colon X\times Y\to \mathrm{R}$ 是可测函数，随机变量 η 和 ζ 相互独立，且分别服从分布 F_η 和 F_ζ，那么只要存在一个可测集 $X_0\subseteq X$，使得 $F_\eta(X_0)>0$，并且对每个 $x\in X_0$，随机变量 $f(x,\zeta)$ 都从上方无界，则随机变量 $f(\eta,\zeta)$ 从上方无界。

令 $A_n:=M_1\ldots M_n,\quad n\geq 1,\quad A_0:=0$。
一个易于验证的充分条件如下

引理 5.1（**[2],** 引理 5.1）若存在 $n\geq 1$，使得随机变量 Q_1 和 $(Q_1+\cdots+A_{n-1}Q_n)/A_n$ 从上方无界，则 Y_∞ 从上方无界。

通常只需使用 $n=1$ 即可，但有时我们需要使用 $n=2$。简要考察这些表达式

$$Q_1=-c\int_0^{T_1}e^{-V_r}dr-e^{-V_{T_1}}\xi_1 \tag{5.1}$$

$$Q_1/A_1=-ce^{V_{T_1}}\int_0^{T_1}e^{-V_r}dr-\xi_1, \tag{5.2}$$

$$Q_1/A_2+Q_2/M_2=-ce^{V_{T_2}}\int_0^{T_2}e^{-V_r}dr-\xi_1e^{V_{T_2}-V_{T_1}}-\xi_2 \tag{5.3}$$

这表明，当 ξ 从下方无界时，Y_∞ 从上方无界（当然，年金模型不满足后一性质）。

利用上述无界性的充分条件，我们来考察各种情况。

1. 设 $\sigma\neq 0$。在这种情况下，以下引理很有用：

引理 5.2 设 $K>0$、$\sigma\neq 0$ 和 $0\leq s<t$。那么随机变量

$$\zeta:=Ke^{\sigma W_t}-\int_0^t e^{\sigma W_r}dr,\qquad \tilde{\zeta}:=Ke^{\sigma(W_t-W_s)}-e^{\sigma W_t}\int_0^t e^{\sigma W_r}dr, \tag{5.4}$$

从下方和上方均无界。

˜ ζ 和 ζ 从上方无界这一性质已在 [2],引理 5.2 中得到证明。利用类似的论证可以证明其从下方无界。˜显然，如果 $K=0$，那么 ζ 和 ζ 从下方无界。

¯过程 $V:=V-\sigma W$ 与维纳过程 W 相互独立。若 $c<0$，则

$$Q_1\geq|c|\inf_{r\leq T_1}e^{-\bar{V}_r}\int_0^{T_1}e^{-\sigma W_r}dr-\xi_1e^{-\bar{V}_{T_1}}e^{-\sigma W_{T_1}}.$$

¯根据对 V, ξ_1, T_1 的条件化以及前述引理，我们可得Q_1 从上方无界。由于

$$Q_1/A_1 \geq |c| e^{\bar{V}_{T_1}} \inf_{r \leq T_1} e^{-\bar{V}_r} e^{\sigma W_{T_1}} \int_0^{T_1} e^{-\sigma W_r} dr - \xi_1,$$

同理可得， Q_1/A_1 从上方无界。若 $c \geq 0$，则必有 $F_\xi(-\infty,0)) > 0$ （回想一下，我们排除了 $c \geq 0, \xi > 0$ 的情形，因为此时不可能发生破产）。引理 5.2 意味着随机变量 Q_1 和 $Q_1/A_2 + Q_2/M_2$ 从上方无界。

2. 设 $\sigma = 0$，且 ξ 从下方有界。我们分别讨论几种子情形。

2a. $\Pi((-1, 0)) > 0$ 且 $\Pi((0, \infty)) > 0$。取 $\varepsilon > 0$，使得 $\Pi((-1, -\varepsilon)) > 0$ 且 $\Pi((\varepsilon, \infty)) > 0$，并令

$$V^{(1)} := I_{\{-1<x<-\varepsilon\}} \ln(1+x) * \mu + I_{\{x>\varepsilon\}} \ln(1+x) * \mu.$$

那么过程 $V_{(1)}$ 和 $V_{(2)} := V - V_{(1)}$ 相互独立。

注意， $V^{(1)}$ 是两个相互独立的复合泊松过程之和，它们分别具有负跳跃和正跳跃，且跳跃的绝对值均大于某个常数 $c_\varepsilon > 0$。

引理 5.3 设 $K > 0, t > 0$。则随机变量

$$\zeta := K e^{-V_t^{(1)}} - \int_0^t e^{-V_r^{(1)}} dr \tag{5.5}$$

上下均无界，随机变量

$$\widehat{\zeta} := e^{-V_t^{(1)}} \int_0^t e^{-V_r^{(1)}} dr.$$

上方无界。

证明。论证很简单，这里只说明思路。可以考虑这样的轨迹： $V_{(1)}$ 在零点附近有大量负跳跃，而所有正跳跃都集中在 t 附近。通过选择合适的参数，并利用正跳跃过程与负跳跃过程的独立性，我们得到：以严格正的概率， ζ 定义中的第一项可以任意接近零，而积分可以任意大。因此， ζ 下方无界。对称的论证得出结论： ζ 上方无界。 □

令 $c < 0$。则以下界显然成立：

$$Q_1 \geq |c| \inf_{r \leq T_1} e^{-V_r^{(2)}} \int_0^{T_1} e^{-V_r^{(1)}} dr - \xi_1 e^{-\bar{V}_{T_1}^{(2)}} e^{-V_{T_1}^{(1)}},$$

$$Q_1/A_1 \geq |c| e^{V_{T_1}^{(2)}} \inf_{r \leq T_1} e^{-V_r^{(2)}} e^{V_{T_1}^{(1)}} \int_0^{T_1} e^{-V_r^{(1)}} dr - \xi_1.$$

通过对随机变量 $V^{(2)}$、 T_1、 ξ_1（它们与 $V_{(1)}$ 相互独立）进行条件化，并利用引理 5.3，我们容易得到随机变量 Q_1 和 Q_1/A_1 从上方无界；根据引理 5.1， Y_∞ 也如此。

令 $c \geq 0$。与 [2] 中相同的论证表明， Q_1 和 $Q_1/A_2 + Q_2/M_2$ 在非零测集 $\{\xi_1 < 0,\, \xi_2 < 0\}$ 上从上方无界。

2b. $\Pi((-1,0)) = 0, \Pi(h) = \infty$.

我们根据 $\varepsilon \in (0,1)$ 的取值，对 V 进行分解。具体而言，令

$$V^\varepsilon := I_{\{x\leq\varepsilon\}} h * (\mu - \nu) + I_{\{x\leq\varepsilon\}}(\ln(1+x) - h) * \mu, \tag{5.6}$$

$$\tilde{V}^\varepsilon := I_{\{x>\varepsilon\}} h * (\mu - \nu) + I_{\{x>\varepsilon\}}(\ln(1+x) - h) * \mu. \tag{5.7}$$

注意到 $V_t = at + V_t^\varepsilon + \tilde{V}_t^\varepsilon$ 和

$$\tilde{V}^\varepsilon = I_{\{x>\varepsilon\}} \ln(1+x) * \mu - I_{\{x>\varepsilon\}} h * \nu.$$

引理 5.4 令 $K > 0$， $t > 0$。则随机变量

$$\eta := \int_0^t e^{-V_r} dr - K e^{-V_t}, \qquad \eta' := e^{V_t} \int_0^t e^{-V_r} dr \tag{5.8}$$

从上方无界。

证明。在不失一般性的前提下，我们假设 $a = 0$。固定 $N > 0$，并选取足够小的 $\varepsilon > 0$，以确保 $\Pi(I_{\{x>\varepsilon\}} h) \geq N$。令 $\Gamma_\varepsilon := \{\sup_{s\leq t} |V_s^\varepsilon| \leq 1\}$。令 $\bar{}$ 分别表示 (5.6) 左端的过程 J^ε 和 J^ε。利用 Doob 不等式以及针对 $x > 0$ 的初等界 $x - \ln(1+x) \leq x^2/2$，可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left[\sup_{s\leq t} |V_s^\varepsilon| > 1\right] &\leq \mathbf{P}\left[\sup_{s\leq t} |J_s^\varepsilon| > 1/2\right] + \mathbf{P}\left[|\bar{J}_t^\varepsilon| > 1/2\right] \\
&\leq 2\mathbf{E}\left[\sup_{s\leq t} |J_s^\varepsilon|\right] + 2\mathbf{E}\left[|\bar{J}_t^\varepsilon|\right] \\
&\leq 2(I_{\{x\leq\varepsilon\}} h^2 * \nu_t)^{1/2} + I_{\{x\leq\varepsilon\}} h^2 * \nu_t \to 0, \quad \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

因此，至少当 ε 足够小时，集合 Γ_ε 非空，且在该集合上

$$\eta \geq \frac{1}{e} \int_0^t e^{-\tilde{V}_r^\varepsilon} dr - K e^{-\tilde{V}_t^\varepsilon + 1}. \tag{5.9}$$

在交集 $\Gamma_\varepsilon \cap \{I_{\{x>\varepsilon\}} h * \mu_{t/2} = 0, \ln(1+\varepsilon)\mu((t/2, t] \times (\varepsilon, 1]) \geq Nt + 1\}$ 上，我们有

$$\eta \geq \frac{1}{e} \int_0^{t/2} e^{Nr} dr - Ke = \frac{1}{eN}(e^{Nt/2} - 1) - Ke.$$

由于 V^ε 与 $\tilde{V}^\varepsilon$ 相互独立，该交集非空。由于 N 可以任意大， η 所要求的性质成立。

对 η' 的分析遵循相同的思路。在第一阶段，我们将 V 替换为 $\tilde{V}$ 并通过在区间 $[0, t]$ 的后半段加入大量正跳跃来补偿 $\tilde{V}$ 的线性下降。 □

设 $c<0$。则随机变量

$$Q_1=|c|\int_0^{T_1}e^{-V_r}dr-e^{-V_{T_1}}\xi_1,$$

$$Q_1/A_1=|c|e^{V_{T_1}}\int_0^{T_1}e^{-V_r}dr-\xi_1$$

根据引理，它们从上方无界。

设 $c\geq 0$。与 [2] 中相同的论证可得出结论：在非零测集 $\{\xi_1<0,\ \xi_2<0\}$ 上，Q_1 和 $Q_1/A_2+Q_2/M_2$ 从上方无界。

2c. $\Pi((0,\infty))=0, \Pi(|h|)=\infty$。

设 $c<0$。我们再次使用 V 的分解，该分解取决于 $\varepsilon\in$ 在 (0,1) 中的选取。令

$$V^\varepsilon:=I_{\{x\geq-\varepsilon\}}h*(\mu-\nu)+I_{\{x\geq-\varepsilon\}}(\ln(1+x)-h)*\mu, \tag{5.10}$$

$$\tilde V^\varepsilon:=I_{\{x<-\varepsilon\}}h*(\mu-\nu)+I_{\{x<-\varepsilon\}}(\ln(1+x)-h)*\mu, \tag{5.11}$$

$L:=I_{\{x<-\varepsilon\}}\ln(1+x)*\mu$ 且 $\Pi_\varepsilon:=\Pi(I_{\{x<-\varepsilon\}}|h|)\uparrow\infty$，其中 $\varepsilon\to 0$。于是

$$\tilde V^\varepsilon_t=I_{\{x<-\varepsilon\}}\ln(1+x)*\mu_t-I_{\{x<-\varepsilon\}}h*\nu=L_t+\Pi_\varepsilon t.$$

为证明 Q_1 从上方无界，我们作如下论证。与前面的子情形 2b 一样，我们将问题归结为验证随机变量

$$\tilde\eta=\int_0^t e^{-\tilde V^\varepsilon_r}dr-Ke^{-\tilde V^\varepsilon_r}$$

从上方无界。令 $t_1:=t_2/2$，其中 $t_2:=1/\Pi_\varepsilon$。注意，当$\varepsilon>0$ 足够小时，$t_2\leq t$。在集合 $\{L_t=L_{t_1}\}$ 上，我们有

$$\begin{aligned}\tilde\eta&\geq(t_2-t_1)e^{|\bar L_{t_1}|}e^{-\Pi_\varepsilon t_2}-Ke^{\bar L_{t_1}}e^{-\Pi_\varepsilon t}\\&=e^{|\bar L_{t_1}|}(1/(2e\Pi_\varepsilon)-Kee^{-\Pi_\varepsilon t})\geq e^{|\bar L_{t_1}|}/(4e\Pi_\varepsilon)\end{aligned}$$

当 ε足够小时，¯。由于随机变量 $|L_{t_1}|$ 从上方无界，因此 Q_1也从上方无界。

在集合 $\{L_t=0,\ \xi_1\leq K\}$ 上，对于任意 $\varepsilon>0$ 及充分大的 K，该集合均非零测，我们有以下界

$$Q_1/A_1\geq(|c|/\Pi_\varepsilon)(e^{\Pi_\varepsilon t}-1)-K.$$

由此可得，Q_1/A_1 从上方无界。

情形 $c\geq 0$ 按 [2]中的方法处理。

2d. $\Pi((-\infty,0))=0, 0<\Pi(h)<\infty$，且对每个 $t>0$，$F((t,\infty))>0$。

在此子情形 $V_t=L_t-bt$ 中，其中 $L_t:=\ln(1+x)*\mu_t$ 是一个递增过程，且 $b:=\Pi(h)-a$。注意 $b>0$，否则就会与存在某个 $\beta>0$ 使得 $\ln \mathrm{E}e^{-\beta V_1}=0$ 相矛盾。

令 $c<0$。任取 $N>0$。令 $s>0$ 为方程 $(|c|/b)(e^{bs}-1)=N$ 的解。取足够大的 K，以确保 $\mathrm{P}[\xi\leq K]>0$。选取$t>s$，使得 $F((s,t))>0$。在非零测集上

$$\{L_s=0, T_1\in(s,t),\ e^{L_t-L_s}\geq Ke^{bt},\ \xi<K\}$$

我们有

$$Q_1 \geq (|c|/b)(e^{bs}-1) - e^{bt-L_t}\xi \geq N-1.$$

因此， Q_1 在上方无界。

为证明 Q_1/A_1 在上方无界，取 $\varepsilon > 0$ 和 $K > 0$，使得 $F((t,\infty)) > 0$ 且 $F_\xi((0,K)) > 0$。令 $c_\varepsilon := (|c|/b)(e^{-b\varepsilon} - e^{-2b\varepsilon})$，则在非零测集上

$$\{T_1 > \varepsilon,\ L_{T_1-\varepsilon} = 0, L_{T_1} \geq \ln((N+K)/c_\varepsilon), \xi < K\}$$

我们有

$$Q_1/A_1 \geq (|c|/b)e^{L_{T_1}}e^{-bT_1}(e^{b(T_1-\varepsilon)}-1) - \xi \geq c_\varepsilon e^{L_t} - K \geq N.$$

因此，根据引理 5，1 Y_∞ 是无界的。

如果 $c \geq 0$，我们按照 [2], 中的方法进行，并利用 F 对零点的任意邻域均赋予正测度这一假设。

2e. $\Pi((0,\infty)) = 0, 0 < \Pi(|h|) < \infty$，并且对每个 $t > 0$，都有 $F((t,\infty)) > 0$。

我们再次有 $V = L_t - bt$，但现在跳跃过程 L 是递减的，且常数 $b < 0$。

令 $c < 0$。固定 $N > 0$。令 $s, t > 0$ 满足 $F((s,t)) > 0$。在非零测集上

$$\{T_1 \in (s,t),\ |L_{s/2}| \geq N,\ L_{s/2} = L_t,\ \xi < e^{|L_{s/2}|}\}$$

我们有

$$Q_1 \geq |c|(T_1/2)e^{|L_{(1/2)T_1}|-|b|T_1} - e^{|L_{(1/2)T_1}|-|b|T_1}\xi \geq |c|(s/2)e^{N-|b|t} - 1.$$

由于 N 是任意的， Q_1 从上方无界。

对于非零测集 $\{T_1 \geq t,\ L_t = 0,\ \xi \leq K\}$上的任意 $t > 0$ 和 $K > 0$

$$Q_1/A_1 \leq |c/b|(e^{|b|t}-1) - K.$$

这意味着 Q_1/A_1 从上方无界。

如果 $c \geq 0$，我们再次按照 [2] 中的方法进行。

致谢

本研究由俄罗斯科学基金会资助，项目编号为 n° 20-68-47030“复杂结构金融市场分析的计量经济学与概率方法”。

参考文献

1. Albrecher, H., Constantinescu, C., Thomann, E.: 风险投资下更新风险模型的渐近结果。随机过程与应用 122, 3767–3789 (2012) 2. Eberlein, E., Kabanov, Yu., Schmidt, T.: 带投资的 Sparre Andersen 模型的破产概率。随机过程与应用 144, 72–84 (2022) 3. Goldie, C.M.: 隐式更新理论与随机方程解的尾部。应用概率年刊 1, 126–166 (1991) 4. Grandell, I.: 风险理论概述。Springer，柏林 (1990) 5. Kabanov, Yu., Pergamenshchikov, S.: 保险业务中的风险投资十分危险：负风险和的情形。金融随机 20, 355–379 (2016) 6. Kabanov, Yu., Pergamenshchikov, S.: Lévy 驱动的广义 Ornstein–Uhlenbeck 过程的破产概率。金融随机 24, 39–69 (2020) 7. Kabanov, Yu., Pukhlyakov, N.: 带投资的破产概率：光滑性、积分微分方程与常微分方程、渐近行为。应用概率杂志 59, 556–570 (2020) 8. Paulsen, J.: 随机经济环境中的风险理论。随机过程与应用 46, 327–361 (1993) 9. Paulsen, J., 随机微积分及其在风险理论中的应用。讲义，卑尔根大学和哥本哈根大学 (1996) 10. Paulsen J.: 具有随机投资收益的风险过程中确定破产的尖锐条件。随机过程与应用 75, 135–148 (1998) 11. Paulsen, J., Gjessing, H.K.: 随机投资收益下的破产理论。应用概率进展 29, 965–985 (1997)