arXiv:2301.01973v2 [math.NA] 1 Apr 2024

面向最优控制下对流主导偏微分方程的流线迎风 Petrov-Galerkin 降阶方法

FABIO ZOCCOLAN[1],MARIA STRAZZULLO[2], 和 GIANLUIGI ROZZA[3]

Abstract. 本文研究针对高 P´eclet 数对流扩散偏微分方程的分布式线性二次最优控制问题。在这种情况下，稳态和非稳态情形都会出现计算不稳定性。为克服这些不利影响，我们在最优性系统中采用流线迎风 Petrov–Galerkin 技术。我们将采用有限元法进行离散化，并使用 *optimize-then-discretize* 方法。对于抛物型情形，我们将考虑稳定化时空框架，并在涉及时间导数的两个双线性型中进行稳定化。随后，我们将基于这一离散化过程构建降阶模型，并分析两种可能的设置：在线阶段是否也需要稳定化。为状态、控制和伴随变量构建降阶基时，我们将在分区方法中采用本征正交分解算法。据我们所知，这是首次在此设置下将降阶模型应用于稳定化抛物型问题。本文通过计算实验展开讨论，研究有限元法和降阶模型解之间的相对误差及其相应的计算时间。

1. Introduction

最优控制理论的主要目标是通过一种称为控制的输入，改变物理或工程系统，从而获得期望的输出。从理论角度看，可以遵循 J.L. Lions[30, 31] 的方法，用偏微分方程（PDEs）描述状态问题。实施最优控制意味着求解一个约束优化问题，其中需要最小化一个代价泛函。这个过程会得到一个最优性系统，该系统将被离散化，以进行数值模拟；在这一框架下，这类模拟的需求日益增长。因此，需要有效且快速的数值技术，以便在科学与工业应用中发挥最优控制的作用。

在本文中，我们将考虑大佩克莱数下的对流扩散方程 [43] 。这类方程广泛应用于许多工程领域，因为它们能够模拟粒子、能量、热量等的传输。当佩克莱数´较大时，离散化过程中会出现数值不稳定性。我们采用有限元法（FEM） [10, 26, 39] ，并在先优化后离散的框架下运用流线迎风 Petrov–Galerkin（SUPG）技术，如[13], 中所做的那样，以确保离散化的强一致性。对于抛物型问题，我们将采用时空离散 [20, 47, 51, 52, 53, 57] ，并对与时间导数相关的双线性型进行 SUPG 稳定化。值得注意的是，采用时空离散会使系统通过一次性方法求解。该技术的主要优点是可将离散后的抛物型问题视为稳态问题。这样，经典降阶模型便可较为容易地推广使用 [51]。然而，其缺点是，同时提高

[1] Section de Mathématiques, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1015 Lausanne, Switzerland, email: fabio.zoccolan@epfl.ch

[2] DISMA Politecnico di Torino Corso Duca degli Abruzzi 24 Turin Italy. ,,,,[3] mathLab, email: maria.strazzullo@polito.it

Mathematics Area, SISSA, via Bonomea 265, I-34136 Trieste, Italy.email: gianluigi.rozza@sissa.it

Key words and phrases. 降阶方法、时变参数化最优控制问题、稳定化、本征正交分解。

时间和空间分辨率可能会导致系统规模过大，使其在多查询场景下无法求解。因此，降阶技术有助于显著减轻这一计算负担。我们指出，还可以采用其他方法求解最优控制问题系统，例如迭代方法，这些方法已应用于稳态和非稳态情形。感兴趣的读者可参阅 [34] 了解详情。我们强调，即使采用这些替代方法，也可能只能减轻与问题表述相关的离线计算成本。因此，为简便起见，我们决定像 [8, 51, 53]中那样，直接求解单次求解系统。在这种情况下，离散化过程可能需要大量计算资源，尤其是对于参数化时变问题。参数可以表示所研究系统的物理或几何特征。

在这种情况下，我们决定利用方程的参数依赖性，通过分区方法中的本征正交分解（POD）算法构建降阶模型（ROM） [22, 41, 40, 44] 。具体而言，离散化过程分为两个阶段：离线 阶段通过在适当选取的参数下计算有限元解来构建低维空间；在线 阶段则在新的低维框架中，针对新的参数实例求解系统。因此，我们考虑两种可能的策略：第一种仅在离线阶段对系统进行稳定化；第二种则在在线阶段也采用 SUPG。事先并不总能确定仅在离线阶段进行稳定化是否会导致不稳定，因为人们也可能预期控制本身具有“稳定作用”。然而，我们将看到，在数值实验中并非如此，因此有必要引入在线稳定化，以克服降阶解中这种不理想的行为。对于不含最优控制的问题，文献 [38, 55] 已研究过这种设置。此外，据我们所知，这是首次在降阶模型框架下分析分布式控制下时变对流占优问题的 SUPG 稳定化。

本文结构安排如下。第一节将阐述偏微分方程最优控制理论的一些理论方面。第三节将介绍对流主导问题，以及在先优化后离散方法下，有限元离散中的SUPG技术。第四节将聚焦于降阶模型框架，第五节将介绍相关数值模拟。首先，我们将介绍两个具体的对流-扩散问题：Graetz-Poiseuille问题和正方形区域传播前沿问题。前者曾在不涉及最优控制的情况下以多种形式进行研究 [17, 38, 45, 55] ，也曾在包含最优控制但不含稳定化的情况下进行研究 [35, 51]。后者则以类似形式在不涉及最优控制的情况下进行研究 [38, 55]。本文将在较高P´éclet数下，对这两个问题在稳态和非稳态情形下进行分布式最优控制分析。我们将展示有限元法与降阶模型解之间的相对误差，并分析计算时间。

2. Problem Formulation

本节将阐述稳态和抛物型偏微分方程的线性二次最优控制问题（最优控制问题）的基本性质。有关稳态问题的详细讨论可参阅 [14, 17, 28, 36, 37, 43] ，有关抛物型偏微分方程的详细讨论可参阅 [50, 51, 52] 。本文仅考虑分布式控制，这意味着控制作用于整个物理域。

最优控制旨在满足偏微分方程问题约束的条件下，通过最小化适当的代价泛函来实现预设的最优性条件。所提出的框架遵循 J.L. Lions 理论 [30, 31]。从数学角度来看，最优控制问题可表述为具有以下特征：

- e，状态方程函数，它以偏微分方程问题或偏微分方程的弱形式，表达系统中输出与控制之间的关系。如果一对 $(y,\ u) \in X := Y \times U$是状态方程 e的解，则称其为 $physical$ 或 $feasible$； y 称为状态变量，输出，而 u 是控制变量，输入。X_{ad} 是所有可行对 $(y,\ u)$ 的集合；

- $z(y) = Oy$，对输出的直接观测。这里，线性算子 O 作用于状态以描述观测：我们将观测空间记为 Z。我们只考虑那些可在区域的一部分上测量的状态变量；

- J，目标泛函，用于描述要实现的目标；
- 合适的空间 Y 和 U，分别作为状态空间和控制空间。由于可能存在限制，控制和/或状态的定义域可以取为更小的空间；因此，我们引入 $Y_{ad} \subseteq Y$和 $U_{ad} \subseteq U$，分别作为容许状态空间和控制空间。然而，我们始终考虑无约束问题，即 $X_{ad} = X$。在处理 $X_{ad} \subset Y_{ad} \times U_{ad}$ [24, 30, 39]时，适定性理论可以采用拉格朗日方法 [11, 35]，也可以采用一般的伴随方法。

考虑 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，一个开、有界且规则的区域，以及时间区间 $(0, T) \subset \mathbb{R}^+$：对我们而言，始终有 $n = 2$。记 Γ_D 和 Γ_N 为边界 Ω ∂上分别指定狄里克雷边界条件和诺伊曼边界条件的部分。我们将观测区域$\Omega_{obs} \subseteq \Omega$定义为区域中我们希望状态变量取期望值的部分。 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^p$，其中自然数 p，是参数空间； $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}$ 是一个p向量，可表示感兴趣的物理参数或几何参数。在本文中，我们研究参数化最优控制问题（OCP($\boldsymbol{\mu}$)s），即依赖于参数 $\boldsymbol{\mu}$的系统。

2.1. **稳态问题**。 我们采用拉格朗日方法，在完全可容许的设定下陈述 OCP($\boldsymbol{\mu}$) 的适定性，即当 $X_{ad} = Y \times U$, [11, 24, 56] 时。我们希望求解:

$$\min_{(y(\boldsymbol{\mu}),u(\boldsymbol{\mu}))\in Y\times U} J(y(\boldsymbol{\mu}), u(\boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\mu}) \text{ s.t. } e(y(\boldsymbol{\mu}), u(\boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\mu}) = 0, \tag{1}$$

因此，我们定义拉格朗日算子 $\mathcal{L}: Y \times U \times Q^* \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\mathcal{L}(y(\boldsymbol{\mu}), u(\boldsymbol{\mu}), p(\boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\mu}) = J(y(\boldsymbol{\mu}), u(\boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\mu}) + \langle p(\boldsymbol{\mu}), e(y(\boldsymbol{\mu}), u(\boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\mu})\rangle_{Q^*Q}, \tag{2}$$

其中， $p(\boldsymbol{\mu})$ 是属于 Q^* 的拉格朗日乘子， Q^* 是 Q 的对偶空间。为简洁起见，我们记 $y := y(\boldsymbol{\mu})$、 $u := u(\boldsymbol{\mu})$ 和 $p := p(\boldsymbol{\mu})$：仅在必要时明确写出参数依赖性。需要指出的是，本文始终考虑线性二次问题。

问题 2.1.1 (线性二次问题)。 考虑巴拿赫空间 Y, U 和 Z，以及 $\alpha > 0$。设 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}$ 已给定。设观测映射 $O : Y \to Z$ 是一个线性有界算子。考虑一个单元 $z_d(\boldsymbol{\mu}) \in Z$，它称为期望解剖面（期望观测输出）。设 J 是如下形式的二次目标泛函

$$J(y, u; \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} m\left(Oy(\boldsymbol{\mu}) - z_d(\boldsymbol{\mu}), Oy(\boldsymbol{\mu}) - z_d(\boldsymbol{\mu})\right) + \frac{\alpha}{2} n(u(\boldsymbol{\mu}), u(\boldsymbol{\mu})), \tag{3}$$

其中 $m: Z \times Z \to \mathbb{R}$ 和 $n: U \times U \to \mathbb{R}$ 是对称连续双线性型。令$e: Y \times U \to Q$，其中 Q 是满足一组边界和/或初始条件的巴拿赫空间，且该集合为仿射集，即存在 $A(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{B}(Y, Q)$、 $B(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{B}(U, Q)$ 和 $f(\boldsymbol{\mu}) \in Q$，使得

$$e(y, u; \boldsymbol{\mu}) = A(\boldsymbol{\mu})y + B(\boldsymbol{\mu})u - f(\boldsymbol{\mu}), \quad \forall \big(y(\boldsymbol{\mu}), u(\boldsymbol{\mu})\big) \in Y \times U. \tag{4}$$

具有上述性质的最小化问题(1) 称为线性二次最优控制问题。

假设 $A(\boldsymbol{\mu})$ 存在有界逆，则问题 2.1.1 有唯一解[24, 定理 1.43]。此外，对于线性二次最优控制问题($\boldsymbol{\mu}$)，问题 1 的一对 (y, u) 是一个解，当且仅当存在 $p \in Q^*$ 使得 (5) 成立 [11, 56]:

$$\begin{cases} m(Oy, O\bar{y}; \boldsymbol{\mu}) + \langle A^*(\boldsymbol{\mu})p, \bar{y}\rangle_{Y^*Y} = m\left(O\bar{y}, z_d; \boldsymbol{\mu}\right), & \forall \bar{y} \in Y, \\ \alpha n(u, \bar{u}; \boldsymbol{\mu}) + \langle B^*(\boldsymbol{\mu})p, \bar{u}\rangle_{U^*U} = 0, & \forall \bar{u} \in U, \\ \langle \bar{p}, A(\boldsymbol{\mu})y + B(\boldsymbol{\mu})u\rangle_{Q^*Q} = \langle \bar{p}, f(\boldsymbol{\mu})\rangle_{Q^*Q}, & \forall \bar{p} \in Q^*. \end{cases} \tag{5}$$

在 (5) 中，on, 而 第一个方程称为伴随方程，第二个方程称为梯度方程 状态方程 是第三个。

注 2.1.2 (记号**)**。 从现在起，我们始终使用希尔伯特空间。为简化记号，我们将以下列唯一方式表示由 $A(\boldsymbol{\mu})$ $B(\boldsymbol{\mu})$ 定义的各种双线性型：

$$\langle A(\boldsymbol{\mu})y,p\rangle_{QQ^*} := a(y,p;\boldsymbol{\mu}) \qquad \langle B(\boldsymbol{\mu})u,p\rangle_{QQ^*} := b(u,p;\boldsymbol{\mu}).$$

2.2. **非定常问题**。 我们简要介绍基于 [51, 52] 的时变线性二次最优控制问题（OCP）**(**$\boldsymbol{\mu}$**)**s。在零初始条件下，可以考虑鞍点形式，利用前几节中的工具证明其适定性。与稳态情形不同，这里还需要一些额外的技术假设，而“Graetz-Poiseuille”和“正方形中的传播前沿”问题都满足这些假设。

考虑两个可分希尔伯特空间 Y和 H，它们满足 $Y \hookrightarrow H \hookrightarrow Y^*$；此外，再考虑另外两个希尔伯特空间 U和 $Z \supseteq Y$，其中 Y和 U分别是通常的状态空间和控制空间，而 Z是观测空间。我们赋予这些空间由各自内积导出的标准范数：$(\cdot,\cdot)_Y$、$(\cdot,\cdot)_Z$、$(\cdot,\cdot)_U$以及 $(\cdot,\cdot)_H$。定义以下希尔伯特空间 $\mathcal{Y} = L^2(0,T;\, Y)$、$\mathcal{Y}^* = L^2(0,T;\, Y^*)$、 $\mathcal{U} = L^2(0,T;\, U)$、 $\mathcal{Z} := L^2(0,T;\, Z) \supseteq \mathcal{Y}$，其相应范数例如在 T T 中， $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{U}$ 的范数分别为 $\|y\|^2_{\mathcal{Y}}\,\mathrm{dt}$ 和 $\|u\|^2_{\mathcal{U}}\,\mathrm{dt}$，其他空间的范数类似。0 0 此外，定义希尔伯特空间 $\mathcal{Y}_t$，其内积为 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{Y}_t}$：

$$\mathcal{Y}_t := \left\{ y \in \mathcal{Y} \quad \text{s.t.} \quad \frac{\partial y}{\partial t} \in \mathcal{Y}^* \right\}, \quad (y,z)_{\mathcal{Y}_t} := \int_0^T (y,z)_Y \mathrm{dt} + \int_0^T \left(\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right)_{Y^*} \mathrm{dt}.$$

我们的目标是 求解以下无约束线性二次型参数抛物型最优控制问题**(**$\boldsymbol{\mu}$**)** :

问题 2.2.1 （参数抛物型最优控制问题**(**$\boldsymbol{\mu}$**)**）。 给定 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}$ 求 $(y(\boldsymbol{\mu})\ u(\boldsymbol{\mu})) \in \mathcal{Y}_t \times \mathcal{U}$使其满足

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y(\boldsymbol{\mu})}{\partial t} + A(\boldsymbol{\mu})y(\boldsymbol{\mu}) + B(\boldsymbol{\mu})u(\boldsymbol{\mu}) - f(\boldsymbol{\mu}) = 0, & in\ \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial y(\boldsymbol{\mu})}{\partial n} = 0, & on\ \Gamma_N \times (0,T), \\ y(\boldsymbol{\mu}) = l, & on\ \Gamma_D \times (0,T), \\ y(\boldsymbol{\mu})(0) = y_0, & in\ \Omega, \end{cases}$$

$$and \qquad \min_{(y(\boldsymbol{\mu}),u(\boldsymbol{\mu}))\in\mathcal{Y}_t\times\mathcal{U}} J(y,u;\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} m\left(Oy(\boldsymbol{\mu}) - z_d(\boldsymbol{\mu}), Oy(\boldsymbol{\mu}) - z_d(\boldsymbol{\mu})\right) + \frac{\alpha}{2} n(u(\boldsymbol{\mu}), u(\boldsymbol{\mu})),$$

其中 m： $\mathcal{Y}_t \times \mathcal{Y}_t \to \mathbb{R}$ 和 n： $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ 是对称且连续的双线性型， z_d（$\boldsymbol{\mu}$） $\in \mathcal{Z}$是观测到的期望解剖面， $\alpha > 0$ 是固定的惩罚参数。在我们的测试案例中，始终取 $y_0 \equiv 0$。

同样地，我们记 y： $= y(\boldsymbol{\mu})$ 和 u： $= u(\boldsymbol{\mu})$，省略参数依赖性。假设 $A(\boldsymbol{\mu})$ 存在有界逆，且 $f(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{Y}^*$，则问题 2.2.1[24, 56]存在唯一解。此外，若假设 $f(\boldsymbol{\mu})$ 汇集了状态方程中的所有强迫项、边界项以及可能的提升项，则可基于问题 2.2.1 的弱形式建立拉格朗日方法。为简化记号，我们分别记 a： $\mathcal{Y}_t \times \mathcal{Y}_t \to \mathbb{R}$ 和 b： $\mathcal{U} \times \mathcal{Y}_t \to \mathbb{R}$ 为定义如下的双线性型： $a(y,q;\ \boldsymbol{\mu}) = \langle A(\boldsymbol{\mu})y$、$q\rangle_{\mathcal{Y}^*\mathcal{Y}}$ 以及 $b(u,q;\ \boldsymbol{\mu}) = \langle B(\boldsymbol{\mu})u,\ q\rangle_{\mathcal{Y}^*\mathcal{Y}}$。为适当定义伴随变量，采用 $q \in \mathcal{Y}_t$ 而非 $q \in \mathcal{Y}$ [51] 更为恰当。记 p： $= p(\boldsymbol{\mu})$ 为伴随检验函数，并考虑 $Q^* = \mathcal{Y}_t$，在我们的设定下 $p(T) = 0$ 成立 [30]。

注 2.2.2. 对于稳态问题和非定常问题，我们均将 $Y = H^1(\Omega)$与 $Z = L^2(\Omega_{obs})$ 之间的嵌入视为观测函数 O。因此， $\mathcal{Z} = \mathcal{Y}$，我们的期望状态记为$y_d$。

在下一节中，我们将把所提出的公式扩展到对流占优情形。

3. Truth Discretization

本节将介绍所涉及的离散化过程。首先，我们将考虑高 P´eclet 数情况下对流占优方程的SUPG稳定化。随后采用先优化后离散的方法，即首先推导出稳定化偏微分方程的最优性条件（即系统（5）），然后按照单次方法或整体求解方法 [23, 47, 48]对其进行离散化。

让我们从稳态情形开始讨论。从现在起，我们始终假设在Y, U, Q 希尔伯特空间中进行研究。我们采用有限元离散化，并将其称为高保真或真实近似。我们考虑区域 Ω_h 上的拟一致网格，其中 h 表示网格尺寸，即网格中一个单元的最大直径。 $\mathcal{T}_h$ 是 Ω 上的一个正规三角剖分，并且

$$\Omega_h := \operatorname{int}\left(\bigcup_{K\in\mathcal{T}_h} K\right),$$

其中 K是 $\mathcal{T}_h$的一个三角形。我们定义有限元空间 $Y^{\mathcal{N}} = Y \cap X^{\mathcal{N},1}$, $U^{\mathcal{N}} = U \cap X^{\mathcal{N},1}$和 $\left(Q^{\mathcal{N}}\right)^* = Q^* \cap X^{\mathcal{N},1}$，其中

$$X^{\mathcal{N},1} = \left\{v^{\mathcal{N}} \in C^0(\bar{\Omega}) : v^{\mathcal{N}}_{|K} \in \mathbb{P}^1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}$$

并且 $\mathbb{P}^1(K)$表示定义在 K上的次数至多为 1 的多项式空间。我们始终使用相同的三角剖分 $\mathcal{T}_h$ ，并对状态、控制和伴随变量采用 $\mathbb{P}^1$-有限元近似。 $Y^{\mathcal{N}}, U^{\mathcal{N}}, Q^{\mathcal{N}}$的维数均等于 $\mathcal{N}$。离散问题的总维数为 $\mathcal{N}_{tot} = 3 \cdot \mathcal{N}$。为简单起见，我们假设 $Q_h^* = Y^{\mathcal{N}}$。令 $\mathbf{y}$、$\mathbf{u}$和$\mathbf{p}$分别表示 $y^{\mathcal{N}}$、 $u^{\mathcal{N}}$和 $p^{\mathcal{N}}$的系数向量，它们分别用 $Y^{\mathcal{N}}$、$U^{\mathcal{N}}$和 $(Q^{\mathcal{N}})^*$的节点基表示。我们用 $\boldsymbol{y}_d$表示离散化期望状态的分量向量，即 y_d在 $Y^{\mathcal{N}}$上的 Galerkin 投影。此外，从现在起，式 (3) 中的算子 m和 n分别表示 Ω_{obs} 上和 Ω 上的 L^2 乘积。

3.1. 对流主导最优控制问题中的 SUPG稳定化（$\boldsymbol{\mu}$）问题。本节将说明对流主导最优控制问题（$\boldsymbol{\mu}$）以及应用于先优化后离散方法的SUPG技术。下面开始回顾算子对参数的依赖关系。首先从对流-扩散方程的定义开始。

Defi义 3.1.1 （对流-扩散方程）。考虑如下问题：

$$L(\boldsymbol{\mu})y := -\varepsilon(\boldsymbol{\mu})\Delta y + \mathbf{b}(\boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla y = f(\boldsymbol{\mu}) \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{7}$$

在 $\partial\Omega$ 上满足适当的边界条件。设：

- 扩散系数 $\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ 属于 $L^\infty(\Omega)$，并且依赖于参数 $\boldsymbol{\mu}$。假设存在常数 $\bar{\varepsilon} > 0$，使得 $\varepsilon(x) \geq \bar{\varepsilon}$, 对几乎所有的 $x \in \Omega$;
- 对流场 $\boldsymbol{b} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ 属于 $(L^\infty(\Omega))^2$，并且依赖于参数 $\boldsymbol{\mu}$。假设散度 $\mathbf{b}(x)$ 存在，并且对几乎所有的 $x \in \Omega$，散度$\mathbf{b}(x) = 0$ 成立;
- $f(\boldsymbol{\mu}) : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个 $L^2(\Omega)$ 函数，它可以依赖于参数 $\boldsymbol{\mu}$。

在这种情况下，(7) 是一个对流-扩散问题，而 $L(\boldsymbol{\mu})$ 是对流-扩散算子。

由 (7) 可轻易导出对流-扩散问题的弱形式：求$y \in Y$，使得 $a(y, q; \boldsymbol{\mu}) = F(q; \boldsymbol{\mu})$ 对所有 $q \in Q^*$ 均成立，其中

$$a(y, q; \boldsymbol{\mu}) := \int_\Omega \varepsilon(\boldsymbol{\mu})\nabla y \nabla q + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla y q \, \mathrm{dx}, \quad F(q; \boldsymbol{\mu}) := \int_\Omega f(\boldsymbol{\mu}) q \, \mathrm{dx}, \quad y \in Y, q \in Q^*. \tag{8}$$

从数值角度来看，当对流项$\mathbf{b}(\boldsymbol{\mu}) \cdot \nabla u$ “主导”扩散项 $-\varepsilon(\boldsymbol{\mu})\Delta u$时，也就是说，当 $|\mathbf{b}(\boldsymbol{\mu})| \gg \varepsilon(\boldsymbol{\mu})$ 时，近似解可能会沿对流场方向 [43]出现不稳定现象。为了给出不稳定性的指标，我们考虑与有限元法离散化相关的正则三角剖分 $\mathcal{T}_h$。对于任意单元 $K \in \mathcal{T}_h$，其中h_K 是 K 的直径，接下来可以将局部 *P´eclet* 数定义为 [43, 39]:

$$\mathbb{P}\mathrm{e}_K(x) := \frac{|\mathbf{b}(x)| h_K}{2\varepsilon(x)}, \quad \forall x \in K. \tag{9}$$

定义 3.1.2 (对流主导问题**)。** 根据定义 *3.1.1*，当 $\mathbb{P}\mathrm{e}_K(x) > 1$, $\forall x \in K$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$ [43] 时，我们处理的是一个对流主导问题。

为解决不稳定问题，我们将采用 SUPG 方法 [10, 25, 26, 43], ，这是一种强一致稳定化技术；也就是说，它对弱偏微分方程是一致的，且其精度阶数可以高于一阶。现在考虑对流-扩散算子（7）。为简单起见，我们在 $H_0^1(\Omega)$ 上定义该算子，并省略参数依赖性。算子 L 可分解为其对称部分和反对称部分 [43], ，定义如下:

$$\text{symmetric part: } L_S y = -\varepsilon \Delta y, \qquad \text{skew-symmetric part: } L_{SS} y = \mathbf{b} \cdot \nabla y; \quad \forall y \in H_0^1(\Omega), \tag{10}$$

也就是说, $L = L_S + L_{SS}$. 对称部分和反对称部分可直接通过公式推导 ae:

$$L_S = \frac{L + L^*}{2}, \qquad L_{SS} = \frac{L - L^*}{2}, \tag{11}$$

其中， L^* 是与 L 相关的伴随算子。现在，让我们分析最优控制问题（5）：我们采用 [13] 中的先优化后离散方法。离散状态方程描述如下，其中控制是分布式的，即作用于整个区域 Ω:

$$a_s\left(y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}\right) + b_s\left(u^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}\right) = F_s(q^{\mathcal{N}}), \quad \forall q^{\mathcal{N}} \in \left(Q^{\mathcal{N}}\right)^*, \tag{12}$$

with

$$a_s\left(y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}\right) := a\left(y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}\right) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(L y^{\mathcal{N}}, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|} L_{SS} q^{\mathcal{N}}\right)_K, \tag{13}$$

$$b_s\left(u^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}\right) := -\int_\Omega u^{\mathcal{N}} q^{\mathcal{N}} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(u^{\mathcal{N}}, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|} L_{SS} q^{\mathcal{N}}\right)_K, \tag{14}$$

and

$$F_s(q^{\mathcal{N}}) := F\left(q^{\mathcal{N}}\right) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(f, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|} L_{SS} q^{\mathcal{N}}\right)_K, \tag{15}$$

其中 $\left(\cdot,\ \cdot\right)_K$ 表示通常的 $L^2(K)$-乘积， f 汇集了所有强迫项和提升项，而 δ_K表示与单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 相关的一个正的无量纲稳定化参数。原则上，由于 δ_K 是局部的，它可以因 K而异。伴随方程也是一个对流占优方程，但其对流项的符号与状态方程中的对流项相反。事实上，由 (11) 可得 $L^* = L_S - L_{SS}$。SUPG方法导出了离散伴随方程

$$a_s^*\left(z^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}}\right) + \left(y^{\mathcal{N}} - y_d, z^{\mathcal{N}}\right)_s = 0, \quad \forall z^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}}, \tag{16}$$

with

$$\begin{aligned} a_s^*\left(z^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}}\right) &:= a^*\left(z^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}}\right) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K^a \left((L_S - L_{SS}) p^{\mathcal{N}}, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|}\left(-L_{SS}\right) z^{\mathcal{N}}\right)_K, \\ \left(y^{\mathcal{N}} - y_d, z^{\mathcal{N}}\right)_s &:= \int_{\Omega_{obs}} (y^{\mathcal{N}} - y_d) z^{\mathcal{N}} \,\mathrm{dx} + \sum_{K \in \mathcal{T}_{h|\Omega_{obs}}} \delta_K^a \left(y^{\mathcal{N}} - y_d, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|}\left(-L_{SS}\right) z^{\mathcal{N}}\right)_K, \end{aligned} \tag{17}$$

其中， a^* 是 a 的伴随形式， δ_K^a 是与稳定化伴随双线性形式相关的参数。由于本文在数值模拟中考虑 $\delta_K = \delta_K^a$ ，因此从现在起，我们将两个稳定化参数都记为 δ_K。而离散梯度方程保持不变:

$$b^*\left(v^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}}\right) + \alpha n\left(u^{\mathcal{N}}, v^{\mathcal{N}}\right) = 0, \quad \forall v^{\mathcal{N}} \in U^{\mathcal{N}}. \tag{18}$$

在这种设置下，数值解的计算将得到一个非对称系统；但如果 y， u， p 是正则的 [13]，则该方法对最优性系统具有强一致性。综上，稳态最优控制问题的 SUPG 最优性系统如下：

$$
\begin{aligned}
&\textit{discretized adjoint equation:} && a_s^*\left(z^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}}\right)+\left(y^{\mathcal{N}}-y_d, z^{\mathcal{N}}\right)_s=0, \quad \forall z^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}},\\
&\textit{discretized gradient equation:} && b^*\left(v^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}}\right)+\alpha n\left(u^{\mathcal{N}}, v^{\mathcal{N}}\right)=0, \quad \forall v^{\mathcal{N}} \in U^{\mathcal{N}},\\
&\textit{discretized state equation:} && a_s\left(y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}\right)+b_s\left(u^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}\right)=F_s(q^{\mathcal{N}}), \quad \forall q^{\mathcal{N}} \in\left(Q^{\mathcal{N}}\right)^*,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

离散代数系统可写为：

$$
\begin{pmatrix} M_s & 0 & K_s^T \\ 0 & \alpha M & B^T \\ K_s & B_s & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} M_s \mathbf{y}_d \\ 0 \\ \mathbf{f}_s \end{pmatrix},
\tag{20}
$$

其中， M_s 是与 m相关的稳定化质量矩阵， M 是与 n相关的未稳定化质量矩阵， K_s 和 K_s^T分别是与 a_s 和 a_s^*相关的刚度矩阵， B_s 是与 b_s相关的稳定化质量矩阵， B^T 是与 b^* 相连的块，而$\mathbf{f}_s$是一个向量，其分量为稳定化力项的系数。

我们用 $|||\cdot|||$ 表示对流-扩散算子中双线性型 a 的能量范数，即

$$
|||w|||^2 := \varepsilon\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\left\|(\operatorname{div} \boldsymbol{b})^{\frac{1}{2}} w\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).
\tag{21}
$$

因此，我们在 $H_0^1(\Omega)$上定义 SUPG 范数为

$$
\|w\|_{SUPG}^2 := |||w|||^2+\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K\left(L_{SS} w, \frac{h_K}{|\boldsymbol{b}|} L_{SS} w\right)_K, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).
\tag{22}
$$

在对稳定化参数 δ_K 作出局部假设的条件下（其定义将在定理3.1.3中给出），可以证明，SUPG 双线性型 (13) 关于 SUPG 范数[43], 是强制的，这意味着稳定化问题是适定的。最后，我们可以给出最优控制问题 [13]解的伴随变量和状态变量的误差估计；值得指出的是， [21] 中也对这一背景下的误差进行了精细的局部分析。

定理3.1.3 （状态和伴随变量的误差）。 设 $m, r \geq 1$ 和 (y, u, p) 是 （5） 的解，其中 $y \in H^{m+1}$（Ω） $p \in H^{r+1}$（Ω）。此外，设 $y^{\mathcal{N}}, u^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}}$ 是（19）的数值解。若 δ_K 满足

$$
0<\delta_K \leq \frac{h_K}{\varepsilon \eta_{inv}^2} \quad \textit{and} \quad \delta_K=\begin{cases} \delta_1 \dfrac{h_K}{\varepsilon}, & \mathbb{P}\mathrm{e}_K(x) \leq 1, \\ \delta_2, & \mathbb{P}\mathrm{e}_K(x)>1, \end{cases}
\tag{23}
$$

w其中 $\delta_1, \delta_2>0$ 为选定的常数， η_{inv} 定义为以下逆常数 t

$|y^{\mathcal{N}}|_{1,K} \leq \eta_{inv} h_K^{-1}\|y^{\mathcal{N}}\|_{L^2(K)}$ and $\|\Delta y^{\mathcal{N}}\|_{L^2(K)} \leq \eta_{inv} h_K^{-1}\|\nabla y^{\mathcal{N}}\|_{L^2(K)}$ $\forall y^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}}$，其中 $|\cdot|_{1,K}$, $\|\cdot\|_K$ 分别为 K 上的半范数和 L^2-范数，则存在 $C>0$ 使得 t

$$
\begin{aligned}
\left\|y-y^{\mathcal{N}}\right\|_{SUPG} &\leq C\left(h^m\left(\varepsilon^{1/2}+h^{1/2}\right)|y|_{H^{m+1}(\Omega)}+\left\|u^{\mathcal{N}}-u\right\|_{L^2(\Omega)}\right), \quad \forall h, \\
\left\|p-p^{\mathcal{N}}\right\|_{SUPG} &\leq C\left(h^r\left(\varepsilon^{1/2}+h^{1/2}\right)|p|_{H^{r+1}(\Omega)}+\left\|y^{\mathcal{N}}-y\right\|_{L^2(\Omega)}\right), \quad \forall h.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

3.2. 时变对流主导最优控制问题中的 SUPG(μ)s。 我们简要讨论应用于时变问题的 SUPG 技术。考虑 (2.2.1)，主要挑战在于，为确保一致性，时间导数也应纳入稳定化设置[27]。不过，也有人提出了其他方法：例如，在 [46], 中，时间导数不进行稳定化。我们的讨论借鉴了有关 Graetz-Poiseuille 和无最优控制的正方形中的传播前沿问题的研究 [38, 54], ，这些研究也对时间导数进行了稳定化。这会在离散后的状态方程和伴随方程中引入非对称项。据我们所知，采用先优化后离散方法处理抛物型最优控制问题中的 SUPG，仍是一个新颖的研究方向

从理论角度看，这在文献中尚属首次。关于应用于一般抛物型问题的 SUPG，请参见 [16, 19, 27] 。

我们首先对方程进行时间离散化，在时空 方法中，将每个离散时刻视为稳态对流-扩散方程，然后使用 SUPG 对其进行稳定化。时间区间 $(0,T)$ 被划分为 N_t 个等长子区间 $\Delta t := t_i - t_{i-1}$，$i \in \{1,\ldots,N_t\}$。另一方面，所有涉及时间导数的项均采用等价于经典隐式欧拉方法的时间离散化方式 [3, 23, 47, 51, 52, 53]。状态方程采用后向欧拉方法进行时间正向离散化；而伴随方程则采用前向欧拉方法进行时间反向离散化，这相当于相对于时间采用后向欧拉方法 $T-t$，对于$t \in (0,T)$ [15, 51]。离散空间的总维数为 $\mathcal{N}_{tot} = 3 \cdot \mathcal{N} \cdot N_t$。我们回顾一下，$Y, U, Q$ 是希尔伯特空间，并且 $Y^{\mathcal{N}} \equiv (Q^{\mathcal{N}})^*$。

对于状态方程，添加到与状态 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 的时间导数相关的形式和双线性型 a 中的稳定化项 [27, 38, 54] 如下: —

$$s\left(y^{\mathcal{N}}(t), q^{\mathcal{N}}\right) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{\partial y^{\mathcal{N}}(t)}{\partial t} + \left(L_S + L_{SS}\right) y^{\mathcal{N}}(t), \frac{h_K}{|\boldsymbol{b}|} L_{SS} q^{\mathcal{N}} \right)_K,$$

其中，对于每个 $t \in (0,T)$ 和 $q^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}}$， $y^{\mathcal{N}}(t) \in Y^{\mathcal{N}}$。相反，添加到与伴随变量 $\frac{\partial p}{\partial t}$ 的时间导数相关的形式和双线性型 a^* 中的稳定化项为:—

$$s^*\left(z^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}}(t)\right) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(-\frac{\partial p^{\mathcal{N}}(t)}{\partial t} + \left(L_S - L_{SS}\right) p^{\mathcal{N}}(t), -\frac{h_K}{|\boldsymbol{b}|} L_{SS} z^{\mathcal{N}} \right)_K.$$

We c可以采用后向欧拉法将离散化后的状态公式写为: :

$$\begin{aligned} &\text{for each } i \in \{1,2,\cdots,N_t\}, \text{ find } y_i^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}} \text{ s.t. } \forall q^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}}, \\ &\frac{1}{\Delta t} m_s\left(y_i^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}) - y_{i-1}^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}), q^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right) + a_s\left(y_i^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}), q^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right) + b_s\left(u_i^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right) = F_s\left(q^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right), \end{aligned} \tag{25}$$

给定满足以下条件的初始条件 $y_0^{\mathcal{N}}$

$$\left(y_0^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}\right)_{L^2(\Omega)} = \left(y_0, q^{\mathcal{N}}\right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall q^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}}. \tag{26}$$

上述稳定化项 m_s 定义如下:

$$m_s\left(y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right) = \left(y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}\right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(y^{\mathcal{N}}, \frac{h_K}{|\boldsymbol{b}|} L_{SS} q^{\mathcal{N}} \right)_K \tag{27}$$

该项与时间离散化有关；相反， a_s 和 F_s 的定义与稳态情形相同。同样，也可以对伴随形式应用前向欧拉法，推导出相同的结果:

$$\begin{aligned} &\text{for each } i \in \{N_t - 1, N_t - 2, ..., 1\}, \text{ find } p_i^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}} \text{ s.t.} \\ &\frac{1}{\Delta t} m_s^*\left(p_i^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}) - p_{i+1}^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}), z^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right) + a_s^*\left(z^{\mathcal{N}}, p_i^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\mu}\right) = -\left(y_i^{\mathcal{N}} - y_{d_i}, z^{\mathcal{N}}\right)_s \quad \forall z^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}}. \end{aligned} \tag{28}$$

上文中的稳定化项 m_s^* 定义如下:

$$m_s^*\left(p^{\mathcal{N}}, z^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right) = \left(p^{\mathcal{N}}, z^{\mathcal{N}}\right)_{L^2(\Omega)} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(p^{\mathcal{N}}, \frac{h_K}{|\boldsymbol{b}|} L_{SS} z^{\mathcal{N}} \right)_K. \tag{29}$$

现在我们考察离散化方案。与稳态情形一样，对于 $1 \le i \le N_t$， $y_i \in Y^{\mathcal{N}}$、 $u_i \in U^{\mathcal{N}}$ 和 $p_i \in Y^{\mathcal{N}}$ 分别表示包含状态、控制和伴随变量有限元离散系数的列向量。因此，我们定义 $\boldsymbol{y} = \left[y_1^T, \ldots, y_{N_t}^T\right]^T$、 $\boldsymbol{u} = \left[u_1^T, \ldots, u_{N_t}^T\right]^T$ 和 $\boldsymbol{p} = \left[p_1^T, \ldots, p_{N_t}^T\right]^T$。向量 $\boldsymbol{f}_s = \left[f_{s_1}^T, \ldots, f_{s_{N_t}}^T\right]^T$ 表示稳定化强迫项的分量， $\boldsymbol{y}_d = \left[y_{d_1}^T, \ldots, y_{d_{N_t}}^T\right]^T$ 是由期望状态解的离散时间分量构成的向量；而 $\boldsymbol{y}_0 = \left[y_0^T, 0^T, \ldots, 0^T\right]^T$ 表示状态的初始条件向量，

其中，0 是 $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ 中的零向量。我们注意到，在我们的测试算例中，始终考虑 $y_0 = 0$。因此，块矩阵系统描述如下。

- 状态方程。回顾一下， K_s 和 B_s 是与稳定化双线性型 a_s 和 b_s相关的矩阵。采用后向欧拉法进行时间离散时，需要求解

$$M_s y_i + \Delta t K_s y_i + \Delta t B_s u_i = M_s y_{i-1} + f_{s_i}\Delta t \quad \text{for } i \in \{1, 2, \ldots, N_t\}, \tag{30}$$

其中， M_s 是相对于 m_s的有限元离散的稳定化质量矩阵。因此，回顾 $y_0 = 0$，相应的块矩阵子系统为

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_s + \Delta t K_s & 0 & & \\ -M_s & M_s + \Delta t K_s & 0 & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & -M_s & M_s + \Delta t K_s \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_s} \boldsymbol{y} + \Delta t \underbrace{\begin{bmatrix} B_s & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & B_s \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}_s} \boldsymbol{u} = \Delta t \boldsymbol{f}_s,$$

然后，可以将所有内容改写为更紧凑的形式：

$$\mathcal{A}_s \boldsymbol{y} + \Delta t \mathcal{C}_s \boldsymbol{u} = \Delta t \boldsymbol{f}_s. \tag{31}$$

- 梯度 方程。回顾一下， B^T 表示与 b^* 型相关的质量矩阵，且
因此 在每个时间步长，我们都必须求解方程

$$\alpha \Delta t M u_i + \Delta t B^T p_i = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, N_t\}, \tag{32}$$

这可转化为以下块系统：

$$\Delta t \cdot \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} M & & & \\ & M & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & M \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N_t} \end{bmatrix} + \Delta t \underbrace{\begin{bmatrix} B^T & 0 & \cdots & \\ & B^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & B^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}^{\mathcal{T}}} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{N_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

用向量表示法可得

$$\alpha \Delta t \mathcal{M} \boldsymbol{u} + \Delta t \mathcal{C}^T \boldsymbol{p} = 0. \tag{33}$$

- 伴随方程：在每个时间步长，我们都必须按如下方式求解 (28)，并考虑 M_s^T 的矩阵形式 m_s^*:

$$M_s^T p_i = M_s^T p_{i+1} + \Delta t \left(-M_s^T y_i - K_s^T p_i + M_s^T y_{d_i}\right) \quad \text{for } i \in \{N_t - 1, N_t - 2, \ldots, 1\}.$$

与前面的步骤一样，我们推导出以下块系统：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_s^T + \Delta t K_s^T & -M_s^T & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & M_s^T + \Delta t K_s^T & -M_s^T \\ & & & M_s^T + \Delta t K_s^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_s^T} \boldsymbol{p} + \begin{bmatrix} \Delta t M_s^T y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta t M_s^T y_{N_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta t M_s^T y_{d_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta t M_s^T y_{d_{N_t}} \end{bmatrix}.$$

然后，将 $\mathcal{M}_s^T$定义为 $\mathbb{R}^{\mathcal{N}\cdot N_t} \times \mathbb{R}^{\mathcal{N}\cdot N_t}$ 中对角元素为$[M_s^T, \ldots, M_s^T]$的对角矩阵，需要求解的伴随系统为：

$$\Delta t \mathcal{M}_s^T \boldsymbol{y} + \mathcal{A}_s^T \boldsymbol{p} = \Delta t \mathcal{M}_s^T \boldsymbol{y}_d.$$

最后，我们通过单次求解方法求解系统（34）：

$$\begin{bmatrix} \Delta t \mathcal{M}_s^T & 0 & \mathcal{A}_s^T \\ 0 & \alpha \Delta t \mathcal{M} & \Delta t \mathcal{C}^T \\ \mathcal{A}_s & \Delta t \mathcal{C}_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta t \mathcal{M}_s^T \boldsymbol{y}_d \\ 0 \\ \Delta t \boldsymbol{f}_s \end{bmatrix}. \tag{34}$$

4. ROMs for advection-dominated OCP($\boldsymbol{\mu}$)s

有限元模拟在计算时间和内存存储方面可能代价高昂：当离散空间维数较高时，这一问题显然更加突出。此外，对于参数化偏微分方程，可能需要针对参数$\boldsymbol{\mu}$的多个取值重复进行模拟。为克服这些困难，我们将采用降阶模型方法。降阶模型的基本思想是利用当前问题的参数依赖性，构造一个称为降阶空间的低维空间，使其能够良好地逼近初始有限元空间 [9, 22, 42, 41, 40]。考虑一个由最优性条件（5）描述的一般参数化最优控制问题。对于稳态最优控制问题$(\boldsymbol{\mu})$，我们定义相对于函数空间$\mathbb{W} = Y \times U \times Q^*$ 的最优性系统的参数化解集；对于非稳态问题，则定义相对于 $\mathbb{W} = \mathcal{Y}_t \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}_t$ 的参数化解集，具体如下

$$\mathbb{M} := \{(y(\boldsymbol{\mu}), u(\boldsymbol{\mu}), p(\boldsymbol{\mu})) \text{ solution of (5)} \mid \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}\}. \tag{35}$$

时间依赖问题扩展到时空形式十分直接 [8, 51] ，只需进行少量修改，因此我们将仅讨论稳态框架。

假设 4.0.1（解流形的光滑性）。 连续解流形 $\mathbb{M}$ 关于参数 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}$是光滑的。

为了进行计算模拟，我们希望找到一种合适的 $\mathbb{M}^{\mathcal{N}}$ $\mathbb{M}$离散化：由于（5）的数值解可能出现振荡，无法正确近似真实解，因此流形 $\mathbb{M}^{\mathcal{N}}$ 将由稳定化系统（20）的解来描述。设$\mathbb{W}^{\mathcal{N}} \subset \mathbb{W}$ 是连续空间 $\mathbb{W}$的有限元近似，我们将 $\mathbb{W}^{\mathcal{N}}:= Y^{\mathcal{N}} \times U^{\mathcal{N}} \times \left(Q^{\mathcal{N}}\right)^*$称为高保真空间。于是，对于稳定化问题，我们将离散参数化解流形定义为

$$\mathbb{M}^{\mathcal{N}} := \left\{\left(y^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}), u^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}), p^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu})\right) \text{ FEM solution of the (20)} \mid \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}\right\}. \tag{36}$$

从 $\mathbb{M}^{\mathcal{N}}$ 出发，降阶建模技术通过对快照进行线性组合，构造一个低维降阶空间 N ，记作$\mathbb{W}^N$；快照即在适当选取的参数值 $\boldsymbol{\mu}$ 下计算得到的最优解$\left(y^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu})\ u^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu})\ p^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu})\right)$ 的高保真评估。显然，我们有$\mathbb{W}^N \subset \mathbb{W}^{\mathcal{N}}$，并记作 $\mathbb{W}^N = Y^N \times U^N \times \left(Q^N\right)^*$。这里， Y^N、 U^N和（Q^N）*分别是状态、控制和伴随变量的降阶空间 。采用分区方法，通过本征正交分解（POD）算法收集快照。采用这一策略是因为文献 [28, 36, 50]显示其效果良好。构建这些降阶函数空间后，再对其进行标准的 Galerkin 投影 [7, 39, 43]。

4.1. **降阶模型的离线-在线过程**。 降阶模型过程分为两个阶段：

- 离线阶段：在此，通过求解稳定化高保真系统 (20) 来收集快照。其次，构建低维基，进而建立并存储所有降阶空间 Y^N、U^N 和 $(Q^N)^*$。此外，还会组装并存储所有与 $\boldsymbol{\mu}$ 无关的量。这一阶段可能开销较大，且取决于 $\mathcal{N}$。
- 在线阶段：在此，选定参数 $\boldsymbol{\mu}$，并将先前存储的所有与 $\boldsymbol{\mu}$ 无关的量与刚计算出的、依赖于 $\boldsymbol{\mu}$ 的量结合起来，从而基于 Galerkin 投影构建降阶块矩阵系统。为便于实现，这一阶段应独立于 $\mathcal{N}$。离线阶段因使用稳定化快照而包含稳定化，而在线阶段则未必需要。因此，我们有两种选择：如果在此阶段也进行稳定化，则称为在线-离线稳定化；否则，将这种设置称为仅离线稳定化。

在线阶段能够独立于 $\mathcal{N}$ 进行的一个充分条件是，允许在仿射分解 [22]中分离依赖于 $\boldsymbol{\mu}$ 的变量与解 $(y,\ u,\ p)$。

假设 n 4.1.1. 我们要求稳定化系统 (20) 中的所有形式都关于 $\boldsymbol{\mu} \in$ 是仿射的 $\mathcal{P}$.

在第4.2节中，我们介绍离线阶段所使用的POD算法。现在，我们说明降阶解的显式表达式。根据其基函数，我们定义 (37
)
$Y^N = \operatorname{span}\{\eta_n^y,\ n=1,\dots,N\}$, $U^N = \operatorname{span}\{\eta_n^u,\ n=1,\dots,N\}$, $(Q^N)^* = \operatorname{span}\{\eta_n^p,\ n=1,\dots,N\}$, 降阶状态、降阶控制和降阶伴随空间。构造出这些空间后，我们考虑用于状态变量和伴随变量的增广空间。因此，设 $\{\tau_n\}_{n=1}^{2N} = \{\eta_n^y\}_{n=1}^N \cup \{\eta_n^p\}_{n=1}^N$ 为空间 Z^N的基函数，其中 $Z^N \equiv Y^N \equiv (Q^N)^*$，则有 $Z^N = \operatorname{span}\{\tau_n, n=1,\dots,2N\}$ [14, 18, 28, 29, 37, 36]。

4.2. **本征正交分解**。本节简要介绍用于构造离散解流形及相应降阶空间的本征正交分解（POD）Galerkin 算法 [8, 22, 50, 51] 。由于在非稳态情形下采用时空结构，因此这一过程无需区分时间依赖性与稳态性。首先，通过选取 $\mathcal{P}$ 中的 N_{train} 个单元进行抽样。接下来，将训练样本集合定义为 $\mathcal{P}_{N_{\text{train}}}$：显然有 $\mathcal{P}_{N_{\text{train}}} \subset \mathcal{P}$，其基数为 $|\mathcal{P}_{N_{\text{train}}}| = N_{\text{train}}$。集合 $\mathcal{P}_{N_{\text{train}}}$ 称为训练集。我们应确保 N_{train}足够大，从而保证 $\mathcal{P}_{N_{\text{train}}}$ 能够良好地“近似”参数空间 $\mathcal{P}$。$\mathcal{P}_{N_{\text{train}}}$ 通过蒙特卡洛抽样方法构造，采用支撑集等于 $\mathcal{P}$的均匀密度。

从采样开始，POD算法对状态、伴随变量和控制变量的 N_{train} 快照进行处理：

$$\left\{\left(y^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}_j), u^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}_j), p^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}_j)\right)\right\}_{j=1}^{N_{\text{train}}} \text{ with } \boldsymbol{\mu}_j \in \mathcal{P}_{N_{\text{train}}}. \tag{38}$$

完成这一步后，进行压缩阶段：根据（38），只考虑最重要的参数信息并舍弃冗余信息，以此构建 N 基函数，其中$N \le N_{\text{train}}$。

考虑 $W^{\mathcal{N}}$一个一般的高保真空间。给定参数化解 $w^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}_j) \in W^{\mathcal{N}}$，对于 $1 \le j \le N_{train}$，本征正交分解可得到一个低维空间 $W_N \subset W^{\mathcal{N}}$，使以下量最小化：

$$\sqrt{\frac{1}{N_{\text{train}}} \sum_{\boldsymbol{\mu}_j \in \mathcal{P}_{N_{\text{train}}}} \min_{\bar{w} \in W^N} \left\| w^{\mathcal{N}}\left(\boldsymbol{\mu}_j\right) - \bar{w} \right\|_W^2}.$$

首先，我们收集一组有序参数 $\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_{N_{\text{train}}} \in \mathcal{P}_{N_{\text{train}}}$，并计算有序快照 $w^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}_1) \dots, w^{\mathcal{N}}\left(\boldsymbol{\mu}_{N_{\text{train}}}\right)$。定义$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N_{\text{train}} \times N_{\text{train}}}$为快照的相关矩阵，如下所示：

$$\mathbf{C}_{ij} := \frac{1}{N_{\text{train}}} \left(w^{\mathcal{N}}\left(\boldsymbol{\mu}_i\right), w^{\mathcal{N}}\left(\boldsymbol{\mu}_j\right)\right)_W, \quad 1 \le i,j \le N_{\text{train}}. \tag{39}$$

下一步是求解以下问题的特征值—特征向量对（λ_n, e_n）：

$$\mathbf{C} e_n = \lambda_n e_n, \text{ with } \|e_n\| = 1, \text{ for } 1 \le n \le N_{\text{train}}.$$

为简便起见，我们将特征值 λ_1、.....、$\lambda_{N_{\text{train}}}$按降序排列。考虑前 N个特征值，即 λ_1、.....、λ_N，以及对应的特征向量 e_1、.....、e_N。我们用记号 $(e_n)_k$表示状态特征向量 $e_n \in \mathbb{R}^{N_{\text{train}}}$ 的第 k 个分量。完成此步骤后，降阶空间的基函数 η_n 通过以下公式构造：

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_{k=1}^{N_{\text{train}}} (e_n)_k \, w^{\mathcal{N}}\left(\boldsymbol{\mu}_k\right), \quad 1 \le n \le N. \tag{40}$$

POD算法总结于算法1中。对于最优控制问题，我们采用分区方法：分别对全部三个变量执行POD算法，将 $Y^{\mathcal{N}}$压缩至 Y^N、$U^{\mathcal{N}}$压缩至 U^N，以及将$(Q^{\mathcal{N}})^*$压缩至$(Q^N)^*$。随后应用聚合空间 技术，将降阶状态空间 Y^N 与伴随空间$(Q^N)^*$ 合并到空间 Z^N中。后一个空间将用于描述状态变量和伴随变量。

由于 N 和 N_{train} 都可以由我们选择，因此应找到明确的准则来决定它们。一个可行的方法是根据特征值的研究来设定它们，使用估计式 [22, 40, 58]:

$$\sqrt{\frac{1}{N_{\text{train}}}\sum_{k=1}^{N_{\text{train}}}\left\|w^{\mathcal{N}}\left(\boldsymbol{\mu}_k\right)-\Pi^N\left(w^{\mathcal{N}}\left(\boldsymbol{\mu}_k\right)\right)\right\|_W^2}=\sqrt{\sum_{k=N+1}^{N_{\text{train}}}\lambda_k}, \tag{41}$$

其中 $\Pi^N\colon W\to W^N$是将 W中的函数映射到 W^N上的 Galerkin 投影算子。方程（41）的第二项可以衡量在选定的、基数为 N_{train}的训练集上， N 降阶基对有限元空间的近似效果。

算法1 POD算法

输入：参数域 $\mathcal{P}$、有限元空间 $W^{\mathcal{N}}$ 和 N_{train}。输出：降阶空间 W^N。从高保真空间 $W^{\mathcal{N}}$开始: 1：采样 $\mathcal{P}_{\text{train}}\subset\mathcal{P}$；2：对所有 $\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}_{\text{train}}$ 执行；3：收集高保真快照$w^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}_i)\in W^{\mathcal{N}}$；4：结束循环；5：组装矩阵 $\mathsf{C}_{ij}:=\frac{1}{N_{\text{train}}}\left(w^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}_i)\ w^{\mathcal{N}}\left(\boldsymbol{\mu}_j\right)\right)_W$, $1\le i,j\le N_{\text{train}}$。 6：计算特征值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{N_{\text{train}}}$以及相应的正交归一特征向量$e_1,\ldots,e_{N_{\text{train}}}$，它们属于 C；7：按照某个准则选定 N后，定义 $W^N=\operatorname{span}\{\eta_n,n=1,\ldots,N\}$，其中$\eta_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\sum_{k=1}^{N_{\text{train}}}(e_n)_k\,w^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}_k)$。

注 4.2.1（时间依赖问题）。 处理时间依赖的最优控制问题时，*POD* 程序中不会将各个时间点分开。因此，时空问题被视为稳态问题来研究，且每个快照都包含所有时间点。

4.3. **仅离线与在线-离线稳定化**。 我们简要说明第 4.1 节所述的两种不同降阶模型程序在实际中意味着什么。这两种技术仅针对稳态问题展示，但将其扩展到抛物型问题十分直接。

两种程序的离线阶段相同。通过求解稳定化系统 (19) 收集快照。随后，根据算法1中的本征正交分解程序计算有限元空间 Y^N, U^N 和 $(Q^N)^*$，紧接着还会构建增广空间 Z^N。两种策略的区别在于在线阶段。仅离线方法旨在求解以下降阶模型系统:

$$\begin{aligned} a^*\left(z^N,p^N\right)+\left(y^N-y_d,z^N\right)&=0, \qquad \forall z^N\in Z^N,\\ b^*\left(v^N,p^N\right)+\alpha n\left(u^N,v^N\right)&=0, \qquad \forall v^N\in U^N,\\ a\left(y^N,q^N\right)+b\left(u^N,q^N\right)&=F(q^N), \qquad \forall q^N\in Z^N, \end{aligned} \tag{42}$$

这意味着在线阶段求解系统 (5)，不进行任何稳定化，这与离线阶段相反。而在离线-在线过程中，我们也旨在在线阶段求解稳定化系统:

$$\begin{aligned} a_s^*\left(z^N,p^N\right)+\left(y^N-y_d,z^N\right)_s&=0, \qquad \forall z^N\in Z^N,\\ b^*\left(v^N,p^N\right)+\alpha n\left(u^N,v^N\right)&=0, \qquad \forall v^N\in U^N,\\ a_s\left(y^N,q^N\right)+b_s\left(u^N,q^N\right)&=F_s(q^N), \qquad \forall q^N\in Z^N. \end{aligned} \tag{43}$$

值得一提的是，状态和伴随变量约化解均在聚合空间 Z^N中求得。

5. Numerical Results

本节将针对 Graetz-Poiseuille 问题和正方形区域传播前沿问题开展数值模拟。对于稳态情形，数值实验通过 RBniCS 库 [2]编写；而对于非稳态情形，则使用 RBniCS 和 multiphenics [1] 库实现。这些都是基于 Python 的库，构建于 FEniCS [32]之上。执行在线-离线稳定化过程时，无论稳态还是非稳态情形，我们在降阶层级上始终采用与高保真近似相同的稳定化参数 δ_K。

我们将对所有三个变量的有限元法解与降阶解之间的相对误差进行分析，定义如下：

(44)
$$e_{y,N}(\boldsymbol{\mu}) := \frac{\left\|y^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}) - y^{N}(\boldsymbol{\mu})\right\|_{Y}}{\|y^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu})\|_{Y}},\ e_{u,N}(\boldsymbol{\mu}) := \frac{\left\|u^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}) - u^{N}(\boldsymbol{\mu})\right\|_{U}}{\|u^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu})\|_{U}},\ e_{p,N}(\boldsymbol{\mu}) := \frac{\left\|p^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}) - p^{N}(\boldsymbol{\mu})\right\|_{Q^*}}{\|p^{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu})\|_{Q^*}},$$

分别对应于状态、控制和伴随变量。由于我们处理的是参数化最优控制问题，因此，对于降阶空间中通过本征正交分解程序获得的每个维度 $N = 1, \ldots, N_{\max}$，我们将针对测试集中 $\boldsymbol{\mu}$ 均匀分布的、每个维度大小为N_{test}的 $\mathcal{P}_{\text{test}} \subseteq \mathcal{P}$，计算式（44）的简单平均值 $\mathcal{P}_{\text{test}} \subseteq \mathcal{P}$。更确切地说，我们将绘制式（44）平均值的以10为底的对数。对于抛物型问题，我们将考虑相对于每个离散时间点 t的误差之和。

关于降阶模型的效率，我们使用加速比指标比较有限元法解与降阶解的计算成本。该量定义为：

(45)
$$\text{speedup-index} = \frac{\text{computational time of the high-fidelity solution}}{\text{computational time of the reduced solution}},$$

对于测试集中的每个 $\boldsymbol{\mu}$，相对于降阶空间的维度 N 计算该量。与相对误差的处理方式相同，我们将考虑该量相对于 N的样本平均值；不过，为完整起见，我们还将给出通过测试集计算得到的最小值和最大值。对于每个测试案例，我们将使用相同的 $\mathcal{P}_{\text{test}}$ 来计算相对误差和加速比指标。稳态结果采用16GB内存和Intel Core i7-7500U 双核处理器，中央处理器频率为2.7GHz；而有限元法和降阶模型的抛物型模拟则采用16GB内存和Intel Core i$7-7700$ Quad Core，中央处理器频率为3.60GHz。对于所有模拟，我们都依靠FEniCS [6, 5]中提供的直接$MUMPS$求解器，求解由离散化过程导出的代数系统。

注 5.0.1. 我们强调，本次数值研究的主要目标是分析在线-离线稳定化相较于仅离线稳定化的优势。在模拟中，各变量似乎未能完全达到稳态行为。我们认为，这一方面是由于控制变量具有时间依赖性，另一方面则是由于我们为模拟选取的终止时间T 值较小。 T 的选择受到模拟所需计算工作量的影响。

5.1. **Graetz-Poiseuille问题的数值实验**。Graetz-Poiseuille问题研究直管道中的热传导，其壁面可通过热交换来描述，也可保持在某一固定温度。这是对流主导文献 [17, 38, 45, 55]中一个广为人知的例子。我们先介绍稳态情形。在整个区域内施加分布式控制，参数 $\boldsymbol{\mu} = \mu_1 > 0$ 是一个物理分量，用于表征扩散项。系统的空间坐标记为（x_0、 x_1）。Ω 的边界为 Γ。参考图1，我们在侧面Γ_1: $= [0,1] \times \{0\}$, $\Gamma_5 := [0,1] \times \{1\}$, $\Gamma_6 := \{0\} \times [0,1]$ 上施加狄利克雷边界条件（BC），令其满足 $y = 0$；在 $\Gamma_2 := [1,2] \times \{0\}$ 和$\Gamma_4 := [1,2] \times \{1\}$ 上则令其满足 $y = 1$。我们考虑齐次诺伊曼边界条件

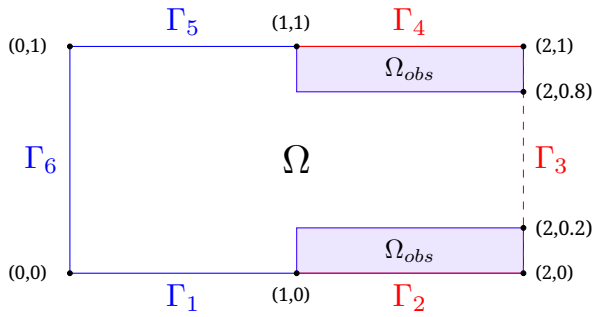

图1. Graetz-Poiseuille问题的几何形状。

在 $\Gamma_3 := \{2\} \times [0,1]$ 上。该问题的经典表述为：

$$
\begin{cases}
-\dfrac{1}{\mu_1}\Delta y(\boldsymbol{\mu}) + 4x_1(1-x_1)\partial_{x_0} y(\boldsymbol{\mu}) = u, & \text{in } \Omega, \\
y(\boldsymbol{\mu}) = 0, & \text{on } \Gamma_1 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6, \\
y(\boldsymbol{\mu}) = 1, & \text{on } \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \\
\dfrac{\partial y(\boldsymbol{\mu})}{\partial \nu} = 0, & \text{on } \Gamma_3.
\end{cases} \tag{46}
$$

现在我们要推导最优性系统。$\Omega_{obs} := [1,2] \times [0.8,1] \cup [1,2] \times [0,0.2]$，如图1所示。在这种情况下，状态属于空间：

$$
\tilde{Y} := \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ s.t. it satisfies the Dirichlet BCs in (46)} \right\}.
$$

为便于实际应用，最好引入一个提升函数 $R_y \in H^1(\Omega)$，使其满足式(46)中的边界条件。因此，我们定义变量 $\bar{y} := y - R_y$，其中 $\bar{y} \in Y$，

$$
Y := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } v = 0 \text{ on } \Gamma \setminus \Gamma_3 \right\}.
$$

然而，不失一般性，我们将新变量 $\bar{y}$ 记为 y，并规定$U := \mathrm{L}^2(\Omega)$ 和 $Q := Y^*$。因此，伴随变量 p 在 $\Gamma \setminus \Gamma_3$上为零。数学表述如下（我们省略了对 $\boldsymbol{\mu}$的依赖）。固定 $\alpha > 0$，求使下式达到极值的一对 $(y,u) \in Y \times U$

$$
\min_{(y,u) \in Y \times U} J(y,u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{obs}} \left(y - y_d\right)^2 \, \mathrm{dx} + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} u^2 \, \mathrm{dx} \quad \text{such that } e\left(y,u,p;\boldsymbol{\mu}\right) = 0, \tag{47}
$$

其中 $e(y,u,p;\boldsymbol{\mu}) := a(y,p;\boldsymbol{\mu}) + b(u,p;\boldsymbol{\mu}) - \langle p, f(\boldsymbol{\mu}) \rangle_{Y^* Y}$. 如第2节和第3节所述，我们采用拉格朗日方法，并在“先优化后离散”框架下使用 SUPG稳定化。对于状态、控制和伴随空间，我们采用 $\mathbb{P}^1$-有限元法近似。这里，稳定化形式a_s 和 a_s^* 分别为：

$$
a_s\left(y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right) := a\left(y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K \left(4x_1(1-x_1)\partial_{x_0} y^{\mathcal{N}}\right)\left(h_K \partial_{x_0} q^{\mathcal{N}}\right), \quad y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}},
$$

$$
a_s^*\left(z^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right) := a^*\left(z^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K \left(4x_1(1-x_1)\partial_{x_0} p^{\mathcal{N}}\right)\left(h_K \partial_{x_0} z^{\mathcal{N}}\right), \quad z^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}}.
$$

我们考虑参数空间 $\mathcal{P} := \left[10^4, 10^6\right]$ 以及有限元空间所用的尺寸为 $h = 0.029$ 的相当粗的网格。训练集 $\mathcal{P}_{\text{train}}$ 的基数为 $N_{\text{train}} = 100$。我们对所有 $\delta_K = 1.0$ $for\ all K \in \mathcal{T}_h$ 取值，并令惩罚项为 $\alpha = 0.01$。我们研究状态在 L^2-范数下向期望解剖面 $y_d(x) = 1.0$的收敛性，该函数定义在图1的 Ω_{obs} 上。我们采用分区方法，对 $N_{\max} = 20$ 执行本征正交分解算法。图2和图3展示了状态和伴随变量在相对误差最佳情形下的降阶解。具体而言，我们绘制了 $N = 1$ 和 $N = 6$对应的仅离线解与在线-离线稳定化解。这些值

N 的值可由图4推知。根据梯度方程（19），我们预期分布式控制 u 等于伴随变量 p 乘以常数因子 α。我们考虑相对

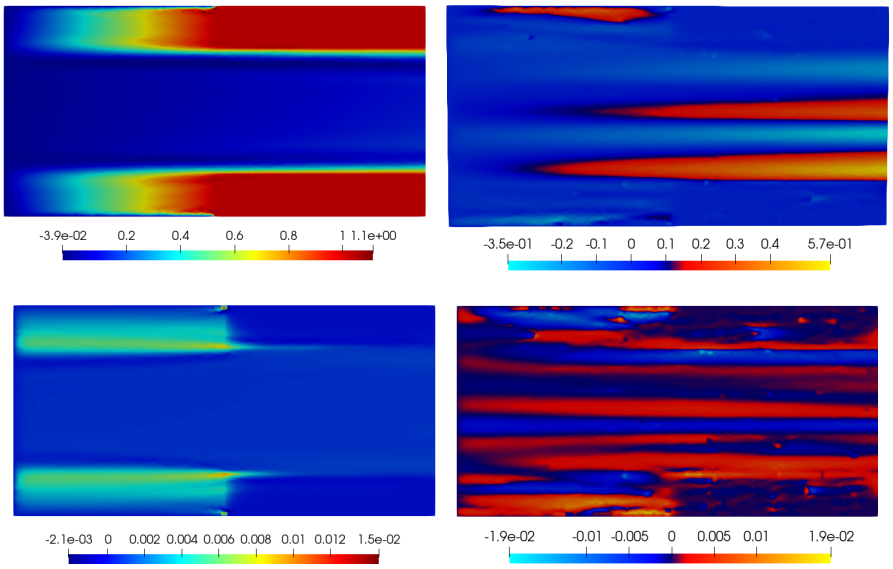

图2.（上）仅离线稳定化状态（左）及其相对于有限元法解的误差（右）；（下）仅离线稳定化伴随变量（左）及其相对于有限元法解的误差（右）；针对 Graetz-Poiseuille问题； $N = 1$, $\mathcal{P} = \left[10^4, 10^6\right]$, $\mu_1 = 10^5$ $h = 0.029$ $\delta_K = 1.0$ $\alpha = 0.01$,,,。

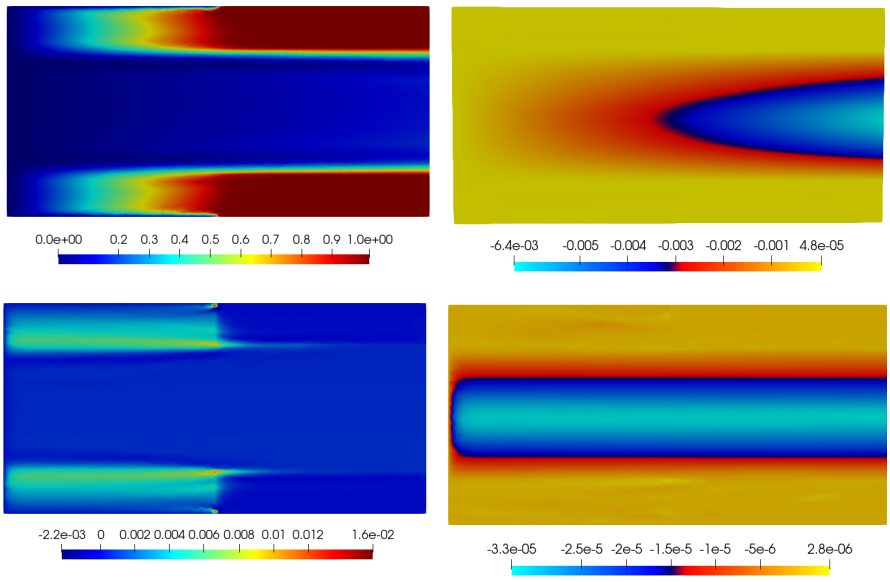

图3.（上）在线-离线稳定化状态（左）及其相对于有限元法解的误差（右）；（下）在线-离线稳定化伴随变量（左）及其相对于有限元法解的误差（右）；针对 Graetz-Poiseuille问题； $N = 6$, $\mathcal{P} = \left[10^4, 10^6\right]$, $\mu_1 = 10^5$ $h = 0.029$ $\delta_K = 1.0$ $\alpha = 0.01$,,,。

图4中有限元法与降阶解之间的误差。我们使用一个包含 $\mathcal{P}_{\text{test}}$ 100

个单元的测试集 $\mathcal{P}$。如前所述，在 $N = 6$ 时，在线-离线稳定化的三种误差均达到最小值；具体而言，状态误差达到$e_{y,\ 6} = 9.65 \cdot 10^{-9}$，伴随变量误差达到$e_{p,\ 6} = 1.98 \cdot 10^{-8}$，控制误差达到$e_{u,\ 6} = 6.00 \cdot 10^{-9}$。与此情况相反，仅离线稳定化的误差始终未低于 10^{-2}。这意味着，对于这个问题，最佳选择是采用在线-离线稳定化过程。然而，在 $N = 6$ 之后，误差开始略微增大。

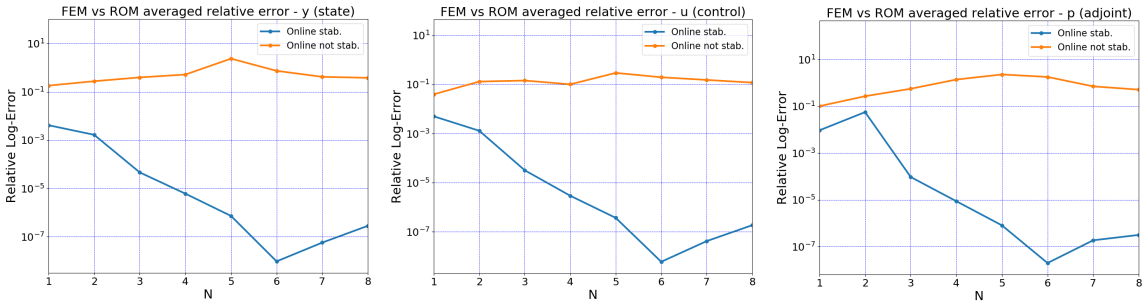

图4. 在线-离线和仅离线稳定化下，状态（左）、控制（中）和伴随变量（右）的有限元法解与降阶解之间的相对误差，$\alpha = 0.01$,$N_{\text{test}} = 100$ ，
$h = 0.029$, $\mathcal{P} = [10^4, 10^6]$。Graetz-Poiseuille问题。

我们对这一现象的解释基于 $\mathcal{P}$。尽管该参数空间可能过大，但对于每个 $\mu_1 \in \mathcal{P}$，乘在扩散算子前的系数值仍然绝对较小，几乎为 10^{-4} 和 10^{-5}。因此，得益于 SUPG 稳定化和分布式控制作用，大多数快照可能与 $\mu_1 = 10^5$的解非常相似：这意味着只需很少的基即可达到较小的相对误差。事实上，特征值 λ_7^y， λ_7^u 为 $\approx 10^{-15}$ 和 $\lambda_7^p \approx 10^{-16}$；按降序排列，后续所有特征值都非常接近机器零。因此，根据式（40），所有包含 $N \geq 7$ 的基分量都会受到本征正交分解正交归一化过程所致的舍入误差影响（详情见 [40]）。

最后，我们来看看表1中的加速比指标。由于在线阶段不考虑稳定化形式，因此仅离线稳定化降阶模型过程的所有平均值都更好。不过，在线-离线稳定化降阶解的表现也非常出色，例如，对于 $N = 6$，平均值为 284.3。一般而言，在这种情况下，前 20 个基元素的加速比指标平均约为 $2 \cdot 10^2$ 个数量级。下面来看一下零初始条件下问题（46）的抛物型版本。该抛物型

	仅离线稳定化			离线-在线稳定化		
N	min	平均值	max	min	平均值	max
1	162.1	296.6	338.1	170.8	261.7	285.9
2	172.2	342.1	391.3	178.4	298.5	327.1
3	168.5	336.2	383.7	192.0	298.9	325.3
4	165.1	336.1	385.6	256, 7	298.0	322.6
5	164.8	331.6	376.6	220.1	287.6	307.7
6	198.3	321.0	366.4	192.3	284.3	305.7
7	186.1	318.4	348.6	228.6	282.6	306.9

表1. Graetz-Poiseuille问题在在线-离线和仅离线稳定化下的加速比指标，其中 $\mathcal{P}_{\text{test}}$ 取样自 $\mathcal{P} = [10^4, 10^6]$, $N_{\text{test}} = 100$, $h = 0.029$,
$\delta_K = 1.0$ $\alpha = 0.01$, .

无控制的 Graetz-Poiseuille 问题已在 [38, 55], 中提出，而 [51, 49]研究的是无对流主导的边界控制下的 OCP Graetz问题。

回顾图1，对于固定的 $T>0$，抛物型 Graetz-Poiseuille 问题表述如下：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial y(\boldsymbol{\mu})}{\partial t}-\dfrac{1}{\mu_1}\Delta y(\boldsymbol{\mu})+4x_1(1-x_1)\partial_{x_0}y(\boldsymbol{\mu})=u, & \text{in } \Omega\times(0,T),\\
y(\boldsymbol{\mu})=0, & \text{on } \Gamma_1\cup\Gamma_5\cup\Gamma_6\times(0,T),\\
y(\boldsymbol{\mu})=1, & \text{on } \Gamma_2\cup\Gamma_4\times(0,T),\\
\dfrac{\partial y(\boldsymbol{\mu})}{\partial \nu}=0, & \text{on } \Gamma_3\times(0,T),\\
y(\boldsymbol{\mu})(0)=0, & \text{in } \Omega.
\end{cases}
\tag{48}
$$

我们按照第3.2节所述，在时空框架下进行模拟，使用预先设定数量的时间步 N_t，并采用 $\mathbb{P}^1$-有限元法近似求得高保真解。状态和伴随变量沿时间方向导数对应的相对稳定化形式（34）分别为：

$$
\begin{aligned}
m_s\left(y^{\mathcal{N}},q^{\mathcal{N}};\boldsymbol{\mu}\right)&=\left(y^{\mathcal{N}},q^{\mathcal{N}}\right)_{L^2(\Omega)}+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\delta_K h_K\left(y^{\mathcal{N}},\partial_{x_0}q^{\mathcal{N}}\right)_K,\quad y^{\mathcal{N}},q^{\mathcal{N}}\in Y^{\mathcal{N}},\\
m_s^*\left(p^{\mathcal{N}},z^{\mathcal{N}};\boldsymbol{\mu}\right)&=\left(p^{\mathcal{N}},z^{\mathcal{N}}\right)_{L^2(\Omega)}-\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\delta_K h_K\left(p^{\mathcal{N}},\partial_{x_0}z^{\mathcal{N}}\right)_K,\quad p^{\mathcal{N}},z^{\mathcal{N}}\in Y^{\mathcal{N}}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

我们考虑终止时间为 $T=3.0$，时间步长为 $\Delta t=0.1$，因此有 $N_t=30$。我们选择了一个相当粗的网格 $h=0.038$，高保真维数总计为 $\mathcal{N}_{tot}=314820$。这意味着，对于固定的 t，单个有限元空间的维数为 $\mathcal{N}=3498$。我们考虑初始条件 $y_0(x)=0$ 对所有 $x\in\Omega$（参见图1）。我们希望状态解在 L^2-范数下收敛到期望解剖面 $y_d(x,\ t)=1.0$，该函数定义于对所有 $t\in[0,3.0]$ 且对所有 x 在 Ω_{obs} 中。此处，SUPG稳定化采用参数 $\delta_K=1.0$ 对所有$K\in\mathcal{T}_h$ 实现。 $\mathcal{P}:=\left[10^4,10^6\right]$，我们选择了基数为 $N_{\text{train}}=100$ 的训练集 $\mathcal{P}_{\text{train}}$。随后，我们使用 $N_{\max}=20$ 执行本征正交分解算法。惩罚参数为 $\alpha=0.01$。

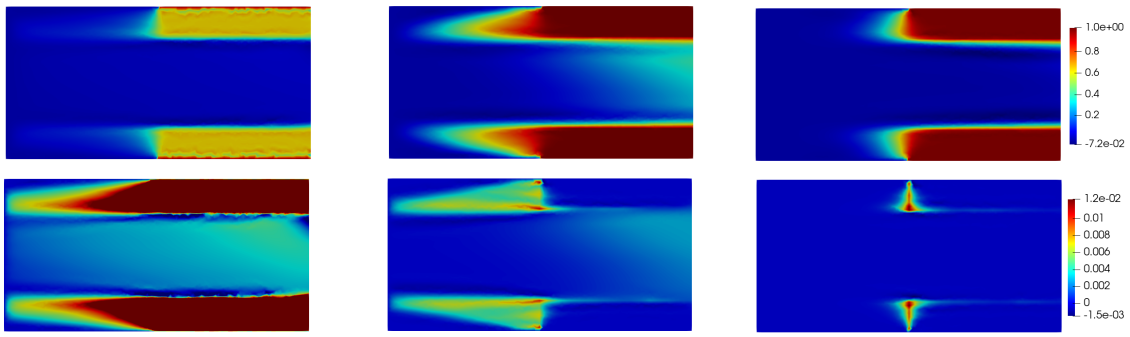

图5。（上）状态的SUPG有限元解，（下）$t=0.1$, $t=1.5$, $t=3.0$处的伴随变量的SUPG有限元解。抛物型格雷茨-泊肃叶问题，$\mu_1=10^5$, $N_t=30$, $h=0.038$ $\delta_K=1.0$ $\alpha=0.01$,,。

如图6所示，就精度而言，仅离线稳定化降阶解的表现不尽理想，不如在线-离线稳定化解。我们考虑了 $\mathcal{P}$中的一个包含100个单元的测试集。与第5.1节的稳态情形一样，经过近 $N=6$ 后，在线-离线稳定化误差开始波动，这是因为相关矩阵（39）的特征值接近机器零。出于这一原因，我们展示了从1到10的误差趋势。不过，状态和伴随变量的误差保持在 10^{-7} 附近，而控制的误差保持在 10^{-6} 附近。对于 $N=6$，我们有$e_{y,\ 6}=4.20\cdot10^{-7}$, $e_{u,\ 6}=1.10\cdot10^{-6}$ 和$e_{p,\ 6}=3.18\cdot10^{-7}$；而对于 $N=20$，在线-离线稳定化降阶模型的结果为$e_{y,\ 20}=1.93\cdot10^{-7}$, $e_{u,\ 20}=3.25\cdot10^{-7}$ 和$e_{p,\ 20}=1.21\cdot10^{-7}$。

最后，表2展示了加速指数趋势。我们能够在计算一个高保真解所需的时间内，计算出大量降阶解：对于离线-在线稳定化，{v1}的

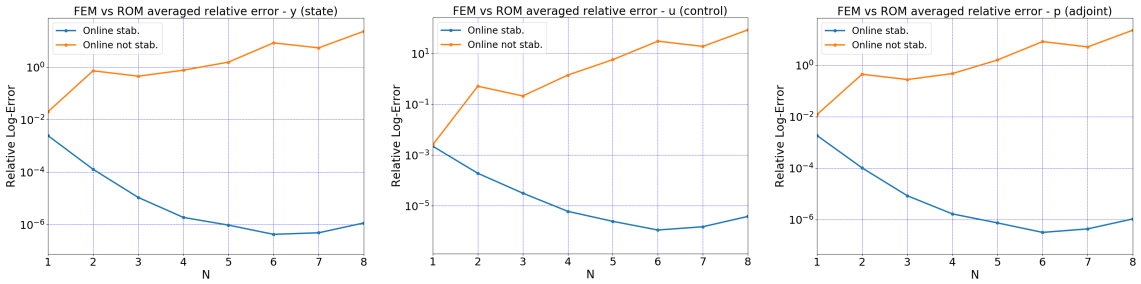

图 6. 有限元法与仅离线和在线-离线稳定化解之间的相对误差：状态（左）、控制（中）和伴随变量（右），抛物型 Graetz-Poiseuille 问题，$N_t = 30$, $N_{\text{test}} = 100$, $\mathcal{P} = [10^4, 10^6]$, $h = 0.038$。

平均值接近26000。总体而言，$N \leq 20$的平均加速比指标约为 $2 \cdot 10^4$ 个数量级。

	仅离线稳定化			离线-在线稳定化		
N	min	平均值	max	min	平均值	max
1	21588.3	26588.8	30971.5	18968.4	23588.0	27062.7
2	23821.3	29723.4	34817.2	20757.2	26018.9	29929.1
3	23571.0	29468.6	34349.5	20547.9	25698.2	29662.5
4	23062.2	28880.6	33702.7	21385.2	25380.9	28883.3
5	25762.9	28767.9	33488.8	23021.5	25882.4	29388.9
6	27003.2	29707.7	34544.7	23236.5	26054.7	29677.5
7	26658.5	29481.1	34277.3	23206.6	25879.5	29505.4

表2. 抛物型格雷茨问题在在线-离线稳定化和仅离线稳定化下的加速比指标，其中 $\mathcal{P} = [10^4, 10^6]$, $\alpha = 0.01$, $N_t = 30$, $N_{\text{test}} = 100$, $h = 0.038$。

5.2. 正方形区域传播前沿问题的数值实验。 本节从数值角度考虑 [38, 55] 中以对流占优形式研究的问题，并在此基础上加入分布式控制。设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的单位正方形。我们考虑图7所示的表示。同样在本例中，(x_0, x_1) 是正方形区域的坐标。

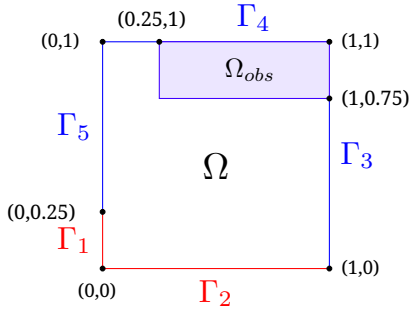

图7. 正方形问题的几何结构

参见图7，$\Gamma_1 := \{0\} \times [0, 0.25]$, $\Gamma_2 := [0, 1] \times \{0\}$, $\Gamma_3 := \{1\} \times [0, 1]$, $\Gamma_4 := [0, 1] \times \{1\}$,$\Gamma_5 := \{0\} \times [0.25, 1]$; $\Omega_{obs} := [0.25, 1] \times [0.75, 1]$。给定 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$，问题可表述为

$$
\begin{cases} -\dfrac{1}{\mu_1}\Delta y(\boldsymbol{\mu}) + (\cos\mu_2, \sin\mu_2) \cdot \nabla y(\boldsymbol{\mu}) = u, & \text{in } \Omega, \\ y(\boldsymbol{\mu}) = 1, & \text{on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ y(\boldsymbol{\mu}) = 0, & \text{on } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5. \end{cases} \tag{50}
$$

我们假设 $Y = H^1(\Omega)$ 与 $Z = L^2(\Omega_{obs})$ 之间的嵌入为观测算子。在我们的测试算例中，$\mathcal{P}$:$= [10^4, 10^5] \times [0, 1.57]$。在这种情况下，我们的状态 y 的定义区域为

$$\tilde{Y} := \{v \in H^1(\Omega) \text{ s.t. BC in (50)}\}.$$

与上一段完全相同，我们定义提升函数 $R_y \in H^1(\Omega)$，使其满足式（50）中的边界条件。我们定义 $\bar{y} := y - R_y$，尽管为方便记号，我们再次将 $\bar{y}$ 记作 y。我们考虑 $Y := H_0^1(\Omega)$、$U = L^2(\Omega)$ 和 $Q := Y^*$，因此伴随变量 p 满足 $p = 0$，其中 $\partial\Omega$。我们按照式（47）定义目标泛函 J；而 a 和 b 则为

$$a(y, p; \boldsymbol{\mu}) := \int_\Omega \frac{1}{\mu_1} \nabla y \cdot \nabla p + (\cos\mu_2, \sin\mu_2) \cdot \nabla y p \, \mathrm{dx}, \text{ and } b(u, p; \boldsymbol{\mu}) := -\int_\Omega up \, \mathrm{dx}.$$

且 $\langle p, \ f(\boldsymbol{\mu})\rangle_{Y^*Y} = -a(R_y, \ p; \ \boldsymbol{\mu})$。随后，我们按照第2节和第3节中的常规讨论进行。

我们采用 $\mathbb{P}^1$-有限元法近似求解最优性系统，并使用常规 SUPG 稳定化技术，得到系统（19）。我们注意到，稳定化形式 a_s 和 a_s^* 分别为:

$$a_s(y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}) := a(y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K h_K (\cos\mu_2, \sin\mu_2) \cdot \nabla y^{\mathcal{N}} (\cos\mu_2, \sin\mu_2) \cdot \nabla q^{\mathcal{N}},$$

$$a_s^*(z^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}) := a^*(z^{\mathcal{N}}, p^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \int_K h_K (\cos\mu_2, \sin\mu_2) \cdot \nabla p^{\mathcal{N}} (\cos\mu_2, \sin\mu_2) \cdot \nabla z^{\mathcal{N}},$$

对所有 $y^{\mathcal{N}}$, $q^{\mathcal{N}}$, $z^{\mathcal{N}}$, $p^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}}$。与此前一样，我们构建训练集 $\mathcal{P}_{\text{train}}$ 和测试集 $\mathcal{P}_{\text{test}}$，二者的基数均为 $n_{\text{train}} = 100$。网格尺寸 h 为 0.025，因此高保真近似的总维数为 12087，这意味着状态、控制和伴随空间的维数均为 $\mathcal{N} = 4029$。SUPG稳定化采用参数$\delta_K = 1.0$ 对所有 $K \in \mathcal{T}_h$实施。惩罚参数为 $\alpha = 0.01$，我们力求使状态解在 L^2-范数下收敛到期望解剖面 $y_d(x) = 0.5$，该剖面在图7的 Ω_{obs} 中对所有 x 定义。在图8中，我们观察到 $\boldsymbol{\mu} = (2 \cdot 10^4, \ 1.2)$对应的状态和伴随变量有限元解。另一方面，图9展示了 $\boldsymbol{\mu} = (2 \cdot 10^4, \ 1.2)$时，状态和伴随变量的仅离线与在线-离线降阶解，其中 $N = 50$。这些计算结果以及对

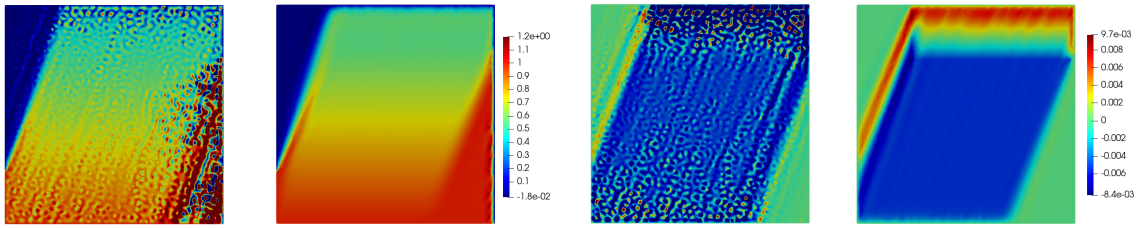

图 8. 未采用稳定化的数值解，以及采用 $\boldsymbol{\mu} = (2 \cdot 10^4, 1.2)$ 的 SUPG 有限元解：正方形区域传播前沿问题中的状态变量（左）和伴随变量（右），$\alpha = 0.01$, $h = 0.025$, $\delta_K = 1.0$。

相对误差表明，在这种情况下，在线-离线稳定化过程更为可取。图 10 中，三个变量的趋势相同，误差沿所有 N 持续减小：我们有 $e_{y,\ 50} = 1.20 \cdot 10^{-3}$, $e_{u,\ 50} = 7.67 \cdot 10^{-4}$ 和 $e_{p,\ 50} = 3.16 \cdot 10^{-3}$。关于加速比指标，表 3 显示其性能相当出色。对于最佳近似，我们发现，构建一个相应的有限元法解所需的时间，平均可计算 44 个在线-离线降阶解。显然，仅离线稳定化的方案略胜一筹。总体而言，对于 $N \leq 50$，加速比指标的平均值约为 $10^1, 10^2$ 个数量级。现在我们研究

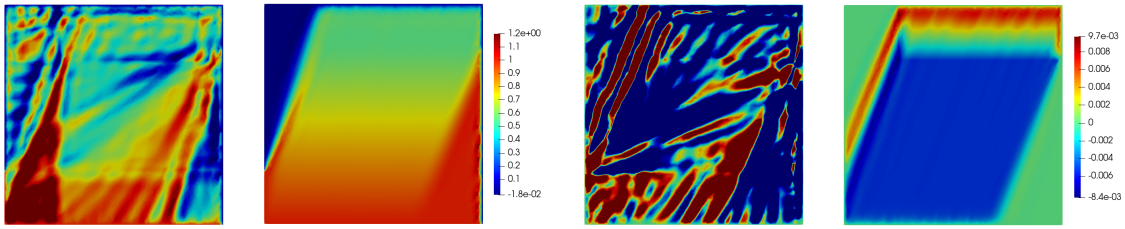

图9. 正方形区域传播前沿问题中，采用$\boldsymbol{\mu} = (2 \cdot 10^4,\ 1.2)$的仅离线稳定化降阶解和在线-离线稳定化降阶解，或状态（左）与伴随变量（右）。 $\alpha = 0.01$、 $N = 50$、 $h = 0.025$、 $\delta_K = 1.0$、 $\mathcal{P} = [10^4, 10^5] \times [0, 1.57]$。

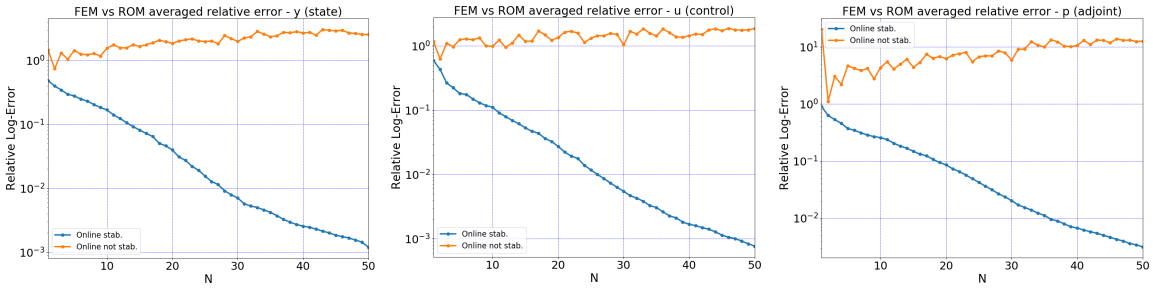

图 10 $\mathcal{P} = [10^4, 10^5] \times [0, 1.57]$。正方形区域传播前沿问题中，状态（左）、控制（中）和伴随变量（右）的有限元法解与降阶解之间的相对误差， $N_{\text{test}} = 100$、 $\alpha = 0.01$、 $h = 0.025$、 $\delta_K = 1.0$。

	仅离线稳定化			离线-在线稳定化		
N	min	平均值	max	min	平均值	max
1	123.1	198.8	243.1	110.0	162.7	181.9
10	132.2	200.4	244.2	110.8	158.3	176.9
20	84.6	158.3	191.7	60.1	124.3	141.3
30	78.8	114.7	137.8	65.0	92.5	104.7
40	54.2	78.6	96.1	46.9	64.2	72.3
50	33.2	53.0	64.8	28.5	44.0	49.9

表 3. 在线-离线和仅离线稳定化在训练集 $\mathcal{P} = [10^4, 10^5] \times [0, 1.57]$, $\alpha = 0.01$, $N_{\text{test}} =$ 100 $h = 0.025$ $\delta_K = 1.0$,,. 下正方形区域传播前沿问题的加速比指标。

固定 $T > 0$ 下的正方形区域传播前沿问题:

$$
(51)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y(\boldsymbol{\mu})}{\partial t} - \dfrac{1}{\mu_1}\Delta y(\boldsymbol{\mu}) + (\cos\mu_2, \sin\mu_2) \cdot \nabla y(\boldsymbol{\mu}) = u, & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ y(\boldsymbol{\mu}) = 1, & \text{on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0,T), \\ y(\boldsymbol{\mu}) = 0, & \text{on } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \times (0,T), \\ y(\boldsymbol{\mu})(0) = 0, & \text{in } \Omega, \end{cases}
$$

初值为 $y_0(x) = 0$ 对所有 $x \in \Omega$，其中 Ω 指图7中的区域。我们考虑终止时间 $T = 3.0$和时间步长 $\Delta t = 0.1$，因此 $N_t = 30$。我们选择网格尺寸为$h = 0.036$ 的较粗网格，时空系统的总维数为 $N_{tot} = 174780$，这意味着单个有限元空间的维数为 $\mathcal{N} = 1942$。同样，我们的目标是在 L^2-均值意义下获得期望解剖面 $y_d(x,t) = 0.5$，其定义于对所有 $t \in [0,3]$ 以及 x 在图7的 Ω_{obs} 中。惩罚参数为 $\alpha = 0.01$。我们设定 $\delta_K = 1.0$ 对所有 $K \in \mathcal{T}_h$。此处，状态方程的 (34) 中的稳定化形式

以及伴随方程分别为：

$$m_s\left(y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right) = \left(y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}}\right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \delta_K h_K \left(y^{\mathcal{N}}, (\cos\mu_2, \sin\mu_2)\cdot\nabla q^{\mathcal{N}}\right)_K, \quad y^{\mathcal{N}}, q^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}},$$

$$m_s^*\left(p^{\mathcal{N}}, z^{\mathcal{N}}; \boldsymbol{\mu}\right) = \left(p^{\mathcal{N}}, z^{\mathcal{N}}\right)_{L^2(\Omega)} - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \delta_K h_K \left(p^{\mathcal{N}}, (\cos\mu_2, \sin\mu_2)\cdot\nabla z^{\mathcal{N}}\right)_K, \quad p^{\mathcal{N}}, z^{\mathcal{N}} \in Y^{\mathcal{N}}.$$

我们考虑与稳态情形相同的参数空间，即 $\mathcal{P}:=\left[10^4, 10^5\right]\times\left[0, 1.57\right]$。训练集的基数为 $N_{\text{train}} = 100$。图11展示了某些时刻下 $\boldsymbol{\mu} = (2\cdot 10^4,\ 1。2)$ 的一个代表性稳定化有限元法解。我们选择执行本征正交分解程序，取$N_{max} = 30$。图12展示了三个变量的相对误差。如前所述，

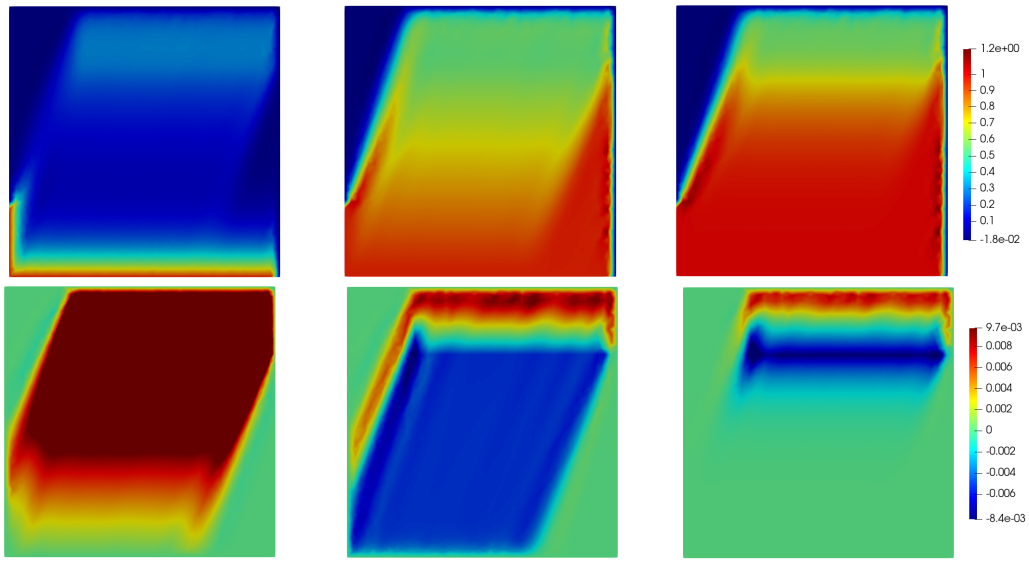

图11. （上） $\boldsymbol{\mu} = (2\cdot 10^4,\ 1。2)$ 的 SUPG 有限元法状态解；（下）其伴随变量解，对应时间 $t = 0.1$（左）、 $t = 1.5$（中）、 $t = 3.0$（右），抛物型方形区域传播前沿问题， $h = 0.036$, $\alpha = 0.01$, $\delta_K = 1.0$。

仅离线过程的误差表现并不理想。相反，值得注意的是，在在线-离线稳定化框架下，有限元法解与降阶解之间的误差会随着 N 的增大而减小。我们处理的是二维参数空间这一事实意味着，为了更好地逼近降阶解，需要更多的 N 基。我们有$e_{y,\ 30} = 2.17\cdot 10^{-3}$， $e_{u,\ 30} = 1.59\cdot 10^{-3}$ 和$e_{p,\ 30} = 5.62\cdot 10^{-3}$。因此，对于这一测试案例，我们也可以指出，SUPG稳定化是降阶模型的一种高效方法。

最后，我们展示表4中的加速比指标结果。对于 $N = 30$，降阶问题不仅具有最高精度，而且在一次有限元法模拟所需的时间内，我们平均能够计算出3981个降阶解。总体而言，加速比指标的平均数量级为10^3 。

6. Conclusions and Perspectives

本文介绍了在 SUPG 稳定化下，针对高 P´eclet 数的对流占优最优控制问题，在稳态和抛物型情形中采用降阶模型开展的数值实验。对于降阶模型，我们有两种稳定化方案：可以仅在离线阶段应用 SUPG，也可以在在线和离线阶段均应用 SUPG。我们分析了 Graetz-Poiseuille 和正方形区域传播前沿问题中降阶解与高保真解之间的相对误差，以及加速比指标；这些问题均采用分布式控制。

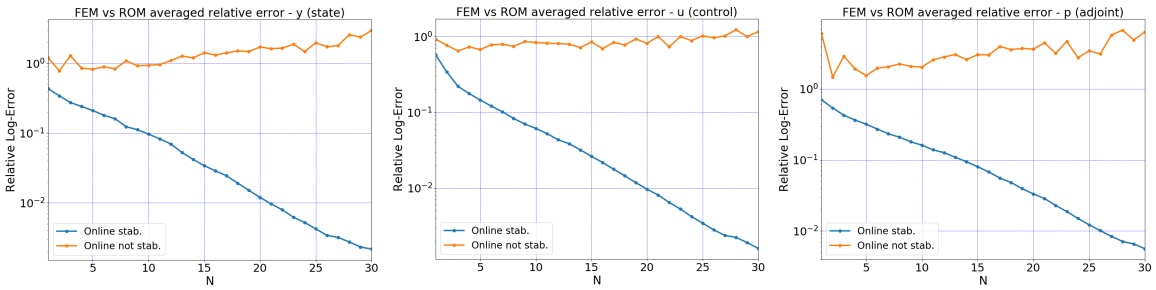

图12. 状态（左）、控制（中）和伴随变量（右）解的有限元法与仅离线和在线-离线稳定化降阶解之间的相对误差，其中 $\mathcal{P} = [10^4, 10^5] \times [0, 1.57]$, $N_t = 30$, $N_{\text{test}} = 100$, $\delta_K = 1.0$, $h = 0.036$。

	仅离线稳定化			离线-在线稳定化		
N	min	平均值	max	min	平均值	max
5	6136.6	8659.4	12654.5	4588.3	6605.8	9914.7
10	6018.7	8278.8	11989.5	4282.9	6231.7	9353.3
15	5611.3	7721.4	11359.5	3725.3	5779.0	8794.3
20	4820.0	7041.2	10143.0	3567.7	5318.9	8091.1
25	3814.1	5970.5	9212.2	2751.7	4366.6	6678.3
30	3432.0	5420.1	8462.8	2424.7	3981.3	6147.9

表4. 采用在线-离线和仅离线稳定化方法求解抛物型方形区域传播前沿问题时的加速比指标，训练集为 $\mathcal{P} := [10^4, 10^5] \times [0, 1.57]$,
$h = 0.036$ $\alpha = 0.01$ $N_t = 30$ $N_{\text{test}} = 100$ $\delta_K = 1.0$,,,,。

状态、控制和伴随空间采用 $\mathbb{P}^1$-有限元法近似，并使用先优化后离散框架。对于抛物型问题，我们采用时空方法，并以适当方式应用 SUPG 稳定化。对于降阶模型，我们针对这三个变量均采用分区方法和本征正交分解算法。在所有稳态和非稳态实验中，降阶模型技术在在线-离线稳定化框架下表现出色。尤其对于抛物型问题，得益于时空形式，加速比指标取得了较大数值。尽管加速比略有优势，仅离线稳定化技术在误差方面的表现却很差。当加速比指标相近时，应根据精度结果决定采用哪种策略。因此，在线-离线稳定化更为可取。

我们还针对 Graetz-Poiseuille问题中的几何参数化和边界控制进行了实验，此处未予展示。在线-离线稳定化的结果相当不错：由于问题的复杂性，相对误差出现了少量振荡。展望未来，或许可以设计一种强一致稳定化技术，消除这两种配置下的所有波动；据我们所知，这一研究主题在文献中仍属新颖。

对于先优化后离散框架下抛物型最优控制问题的 SUPG稳定化，进一步推导一些理论结果也很有意义，以便确定数值解相对于时间步长和网格尺寸的精度。

此外，未来发展的另一种可能方向是分析“先离散后优化”方法，并将其与我们的结果进行比较。

总之，另一个值得研究的目标是考察在线阶段新型稳定化技术的性能，例如在线消失黏性方法和在线校正方法 [4, 12, 33]。此外，将这一框架扩展至不确定性认证领域也将是未来的研究课题。

Acknowledgements

我们感谢欧盟研究与创新资助——地平线2020计划——欧洲研究理事会执行局框架下的支持：协同基金 H2020 ERC CoG 2015 AROMA-CFD项目681447“计算流体力学中的先进降阶方法及其应用”。我们还感谢 PRIN 2017 项目“复杂系统偏微分方程高效且精确求解的全阶与降阶方法数值分析”（NA-FROM-PDEs），以及 INDAM-GNCS 项目“面向工业应用的先进数值技术”。本文中的计算使用了 RBniCS [2] 库完成，该库由 SISSA mathLab 开发，是基于 FEniCS [32] 实现的多种降阶建模技术；我们感谢这两个库的开发者和贡献者。

References

[1] multiphenics——在 FEniCS 中轻松快速地构建多物理场问题原型。 `https://mathlab.sissa.it/multiphenics`。[2] RBniCS——FEniCS 中的降阶建模。 `https://www.rbnicsproject.org/`。[3] Tu˘gba Akman、B¨ulent Karas¨ozen 和 Zahire Kanar-Seymen。采用流线迎风/Petrov-Galerkin方法求解由时变扩散-对流-反应方程支配的最优控制问题。 *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*，7(2):221–235，2017。[4] Shafqat Ali。 *Stabilized reduced basis methods for the approximation of parametrized viscous flows*。博士论文，SISSA，2018。[5] Patrick R Amestoy、Alfredo Buttari、Jean-Yves L’excellent 和 Theo Mary。分块低秩多波前分解在多核架构上的性能与可扩展性。 *ACM Transactions on MathematicalSoftware (TOMS)*，45(1):1–26，2019。[6] Patrick R Amestoy、Iain S Duff、Jean-Yves L’Excellent 和 Jacko Koster。采用分布式动态调度的全异步多波前求解器。 *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 23 1 15 41, , ( ): – 。2001

[7] Kendall Atkinson 和 Weimin Han。 *Theoretical numerical analysis*，第39卷。施普林格，2005。[8] Francesco Ballarin、Gianluigi Rozza 和 Maria Strazzullo。第9章——用于参数化流动控制的时空POD-Galerkin方法。载于 Emmanuel Tr´elat 和 Enrique Zuazua（编）， *Numerical Control: Part A*，第23卷（ *Handbook of Numerical Analysis*），第307–338页。Elsevier，2022。[9] Peter Benner、Mario Ohlberger、Anthony Patera、Gianluigi Rozza 和 Karsten Urban。 *Model reduction of parametrized systems* 2017 。施普林格，。[10] Alexander N. Brooks 和 Thomas J.R. Hughes。针对对流占优流动的流线迎风/Petrov-Galerkin公式，尤其着重于不可压缩纳维-斯托克斯方程。 *Computer methods in applied mechanics and engineering* 32 1 3 199 259, 1982 , (-): – 。

[11] Giuseppe Carere。 *Reduced Order Methods for Optimal Control Problems constrained by PDEs with random inputs and applications* 2019 。硕士论文，阿姆斯特丹大学和SISSA，。[12] Rachida Chakir、Yvon Maday 和 Philippe Parnaudeau。用于参数化传热问题的非侵入式降阶基方法。 *Journal of Computational Physics*，376:617–633，2019。[13] S. Scott Collis 和 Matthias Heinkenschloss。流线迎风/Petrov-Galerkin方法在求解最优控制问题中的分析。 *CAAM TR02-01*，108，2002。[14] Luca Ded`e。参数化线性二次最优控制问题的降阶基方法与后验误差估计。 *SIAM Journal on Scientific Computing*，32(2):997–1019，2010。[15] Kenneth Eriksson 和 Claes Johnson。非线性抛物型问题的误差估计与自动时间步控制，I。 *SIAM journal on numerical analysis*，24(1):12–23，1987。[16] Sashikumaar Ganesan。用于种群平衡方程的算子分裂Galerkin/SUPG有限元方法：稳定性与收敛性。 *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 46 6 1447 1465, , ( ): – 。2012

[17] Fabrizio Gelsomino 和 Gianluigi Rozza。三维参数化传热问题中降阶建模技术的比较与结合。 *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*，17 4 371 394，2011 ( ): – 。[18] Anna-Lena Gerner 和 Karen Veroy。参数化鞍点问题的认证降阶基方法。*SIAM Journal on Scientific Computing*，34(5):A2812–A2836，2012。[19] Swetlana Giere、Traian Iliescu、Volker John 和 David Wells。用于对流占优扩散-对流-反应方程的SUPG降阶模型。 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*，289 454: –474，2015。[20] Rafaela Guberovic、Christoph Schwab 和 Rob Stevenson。斯托克斯方程与纳维-斯托克斯方程的时空变分鞍点形式。 *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 48 3 875 894, , ( ): – 。2014

[21] Matthias Heinkenschloss 和 Dmitriy Leykekhman。对流占优椭圆线性二次最优控制问题的SUPG解的局部误差估计。 *SIAM Journal on Numerical Analysis*，47(6):4607– 4638，2010。[22] Jan S. Hesthaven、Gianluigi Rozza 和 Benjamin Stamm。*Certified reduced basis methods for parametrized partial differential equations* 590 2016 ，第 卷。施普林格，。[23] Michael Hinze、Michael K¨oster 和 Stefan Turek。用于斯托克斯方程分布式控制的分层时空求解器。 *Technical ReportSPP1253-16-01*，2008。[24] Michael Hinze、Ren´e Pinnau、Michael Ulbrich 和 Stefan Ulbrich。 *Optimization with PDE constraints*，第23卷。施普林格科学与商业媒体，2008。[25] Thomas J.R. Hughes。*Finite Element Methods for Convection Dominated Flows AMD 34* 1979 ，迎风格式。，。

[26] Thomas J.R. Hughes。SUPG方法的发展与理解方面的最新进展，特别涉及可压缩欧拉方程和纳维-斯托克斯方程。 *International journal for numerical methods influids*，7(11):1261–1275，1987。[27] Volker John 和 Julia Novo。演化扩散-对流-反应方程的SUPG有限元离散误差分析。 *SIAM journal on numerical analysis*，49(3):1149–1176，2011。[28] Mark K¨ archer、Zoi Tokoutsi、Martin A. Grepl 和 Karen Veroy。具有分布式控制的参数化椭圆最优控制问题的认证降阶基方法。 *Journal of Scientific Computing*，75(1):276–307，2018。[29] Karl Kunisch 和 Stefan Volkwein。最优性系统的本征正交分解。 *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 42 1 1 23, 2008 ，( ): – 。

[30] Jacques-Louis Lions。 *Optimal control of systems governed by partial differential equations*，第170卷。施普林格出版社，1971。[31] Jacques-Louis Lions。 *Some aspects of the optimal control of distributed parameter systems*。工业与应用数学学会，1972。[32] Anders Logg、Kent-Andre Mardal 和 Garth Wells。*Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book* 84 2012 ，第 卷。施普林格科学与商业媒体，。[33] Yvon Maday 和 Eitan Tadmor。周期守恒律的谱消失黏性方法分析。 *SIAM Journal on Numerical Analysis*，26(4):854–870，1989。[34] Andrea Manzoni、Alfio Quarteroni 和 Sandro Salsa。 *Optimal control of partial differential equations*。施普林格，2021。[35] Federico Negri。 *Reduced basis method for parametrized optimal control problems governed by PDEs*。硕士论文，米兰理工大学和洛桑联邦理工学院，2011。[36] Federico Negri、Andrea Manzoni 和 Gianluigi Rozza。斯托克斯方程参数化最优流动控制问题的降阶基近似。 *Computers & Mathematics with Applications* 69 4 319 336, 2015 ，( ): – 。[37] Federico Negri 、 Gianluigi Rozza 、 Andrea Manzoni 和 Alfio Quarteroni。参数化椭圆最优控制问题的降阶基方法。 *SIAM Journal on Scientific Computing*，35(5):A2316–A2340，2013。[38] Paolo Pacciarini 和 Gianluigi Rozza。参数化对流-扩散偏微分方程的稳定化降阶基方法。 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*，274:1–18，2014。[39] Alfio Quarteroni。 *Numerical models for differential problems*，第2卷。施普林格，2009。[40] Alfio Quarteroni、Andrea Manzoni 和 Federico Negri。*Reduced basis methods for partial differential equations: an introduction* 92 2015 ，第 卷。施普林格，。[41] Alfio Quarteroni、Gianluigi Rozza 等。 *Reduced order methods for modeling and computational reduction*，第9卷。施普林格，2014。[42] Alfio Quarteroni、Gianluigi Rozza 和 Andrea Manzoni。参数化偏微分方程及其应用的认证降阶基近似。 *Journal of Mathematics in Industry*，1(1):1–49，2011。[43] Alfio Quarteroni 和 Alberto Valli。 *Numerical approximation of partial differential equations*，第23卷。施普林格科学与商业媒体，2008。[44] Gianluigi Rozza、Dinh Bao Phuong Huynh 和 Anthony T. Patera。仿射参数化椭圆强制偏微分方程的降阶基近似与后验误差估计。 *Archives of Computational Methods in Engineering* 15 3 229 275, 2008 ，( ): – 。

[45] Gianluigi Rozza、Ngoc-Cuong Nguyen、Anthony T. Patera 和 Simone Deparis。传热问题的降阶基方法与后验误差估计子。载于 *Heat Transfer Summer Conference*，第43574卷，第753–762页，2009。[46] Z. Kanar Seymen、Hamdullah Y¨ ucel 和 B¨ulent Karas¨ozen。采用时空离散的时变扩散-对流-反应方程分布式最优控制。 *Journal of Computational and Applied Mathematics* 261 146 157, 2014 ，：– 。

[47] Martin Stoll 和 Andrew J. Wathen。时变偏微分方程约束优化问题的整体求解。 *Unspecified Tech. Rep*，2010。[48] Martin Stoll 和 Andy Wathen。时变斯托克斯控制的整体求解。 *Journal of Computational Physics* 232 1 498 515, 2013 ，( ): – 。

[49] Maria Strazzullo。*Model Order Reduction for Nonlinear and Time-Dependent Parametric Optimal Flow Control Problems* 2021 。博士论文，SISSA，。

[50] Maria Strazzullo、Francesco Ballarin、Renzo Mosetti 和 Gianluigi Rozza。海洋环境科学与工程中参数化最优控制问题的模型降阶。 *SIAM Journal on Scientific Computing*，40 4 1055( ):B –B1079，2018。[51] Maria Strazzullo、Francesco Ballarin 和 Gianluigi Rozza。鞍点形式下参数化时变线性二次最优控制问题的 POD-Galerkin模型降阶。 *Journal of ScientificComputing*，83:1–35，2020。[52] Maria Strazzullo、Francesco Ballarin 和 Gianluigi Rozza。时空形式下线性参数化抛物型最优控制问题的认证降阶基方法。 *arXiv preprint arXiv:2103.00460*，2021。[53] Maria Strazzullo、Francesco Ballarin 和 Gianluigi Rozza。参数化非线性时变最优流动控制的 POD-Galerkin模型降阶：浅水方程的应用。 *Journal of NumericalMathematics*，30(1):63–84，2022。[54] Davide Torlo。 *Stabilized reduced basis method for transport PDEs with random inputs*。硕士论文，的里雅斯特大学和 SISSA，2016。[55] Davide Torlo、Francesco Ballarin 和 Gianluigi Rozza。针对含随机输入的参数化对流主导问题的稳定化加权降阶基方法。 *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* 6 4 1475 , ( ): –1502，2018。[56] Fredi Tr¨oltzsch。 *Optimal control of partial differential equations: theory, methods, and applications*，第 112 卷。美国数学会，2010。[57] Karsten Urban 和 Anthony T. Patera。抛物型偏微分方程降阶基近似的新误差界。 *Comptes Rendus Mathematique*，350(3-4):203–207，2012。[58] Luca Venturi。 *Weighted Reduced Order Methods for parametrized PDEs in uncertainty quantification problems*。硕士论文，的里雅斯特大学和 SISSA，2016。