arXiv:2301.01974v1 [math.FA] 5 Jan 2023

广义（一致）马祖尔交性质

Pradipta Bandyopadhyay 和 Deepak Gothwal

Abstract. 设巴拿赫空间 X 中有一族 $\mathcal{C}$ 的闭有界凸集。若 X 具有 $\mathcal{C}$-MIP 性质，则称之为具有该性质：每个 $C \in \mathcal{C}$ 都是包含它的闭球的交。本文提出了比 $\mathcal{C}$-MIP 更强的版本，并表明它是 MIP 更令人满意的推广，因为可以获得 MIP 各种刻画的完整类比。

我们还提出了（强） $\mathcal{C}$-MIP 的一致版本，并对它们作了类似的刻画。即使在这种情况下，强 $\mathcal{C}$-UMIP 似乎也比 $\mathcal{C}$-UMIP 具有更丰富的刻画。

1. 引言

S. Mazur [10] 开创了对赋范空间中球的下述交性质的研究，该性质如今称为马祖尔交性质（MIP）：

> 每个闭有界凸集都是包含它的闭
> 球的交集。

J. R. Giles、D. A. Gregory 和 B. Sims [7] 给出了 MIP 的多种刻画，其中最著名的判据指出， $B(X^*)$ 的 w*-切割点在 $S(X^*)$ 中范数稠密。Chen 和 Lin [4] 引入了弱星半凹陷点的概念，以刻画 MIP。论文 [9] 是关于 MIP 及相关研究的一篇优秀综述。

Whitfield 和 Zizler 在 [16] 引入了 MIP 的一致版本（UMIP），并得到了与 [7] 类似的刻画，但缺少了关于 w*-切割点的刻画。最近，作者在 [3]中根据“一致 w*-半切割点”给出了这样的刻画。

不久之后， [7], 出现了几篇探讨 MIP 推广的论文，主要研究给定族中的闭有界凸集何时是若干球的交。例如，

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 46B20，即将在 JMAA 发表。
Key words and phrases. 相容类，（强） $\mathcal{C}$-MIP，（强） $\mathcal{C}$-UMIP。

(a) $\mathcal{K} = \{ X\}$ [15, 12]中的所有紧凸集
(b) $\mathcal{W} = \{ X\}$ [17]中的所有弱紧凸集
(c) $\mathcal{F} = \{ X$ 中的所有具有有限仿射 维数} [13]

设 $\mathcal{C}$ 是 X 的有界子集族。设 $\tau_{\mathcal{C}}$ 是 X^* 上在 $\mathcal{C}$ 的集合上一致收敛的拓扑。若每个包含闭凸集 $C \in \mathcal{C}$ 的闭球的交集恰为 $C \in \mathcal{C}$，则称 X 具有 $\mathcal{C}$-MIP。

在 [12, 13, 15], 中，作者根据 X^* 中 B_{X^*} 的极点所生成的锥在拓扑 $\tau_{\mathcal{C}}$ 下的稠密性，刻画了上述 (a) 和 (c) 两种情形下的 $\mathcal{C}$-MIP。

第一作者研究了 $\mathcal{C}$有界集 $\mathcal{C}$ 的一般族在 [2] 中的 MIP，并得出了一些必要条件和充分条件，重现了 [12, 13, 15]的结果。Chen 和 Lin [5] 也讨论了$\mathcal{C}$-MIP。两篇论文都指出，如果按 [5], 中的定义， B（X^*）的“$\mathcal{C}$-凹陷点”之锥在 X^*中 $\tau_{\mathcal{C}}$-稠密，那么 X 具有 $\mathcal{C}$-MIP。两篇论文还在附加假设下证明了逆命题。

在 [7], 中，关于 MIP [7, 有若干种等价刻画：定理 2.1（ii）、（iii）和（iv）]。 [15, 3]中也得到了 UMIP 的类似刻画。迄今为止， [2] 是唯一尝试为 $\mathcal{C}$-MIP 得出此类类似结果的工作（见下文定理 2.6）。

最近，Cheng 和 Dong [6] 用“$\mathcal{C}$-半切”点刻画了 $\mathcal{C}$-MIP。然而，他们的定义似乎既不是对 [4] 的弱星半凹陷点，也不是对 [5]的$\mathcal{C}$-凹陷点的自然推广。

Vanderwerff [14] 为上述族$\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{W}$ 引入了以下更强的概念，我们称之为强 $\mathcal{C}$-MIP：

> *For every convex* $C \in \mathcal{C}$ *and* $\beta \geq 0$, $\overline{C + \beta B(X)}$ *is the intersection of closed balls containing it.*

对于 $\mathcal{C} = \mathcal{K}$，他证明了这等价于 $B(X^*)$的极点在 $S(X^*)$中 w* 稠密。

本文证明，对于一般的族，强 $\mathcal{C}$-MIP 实际上是对 MIP 更令人满意的推广。它可以用（强） $\mathcal{C}$-半切点这一更自然的概念来刻画。此外，还可以得到与 [7,定理 2.1]完全类似的结果。

我们还引入了 $\mathcal{C}$-MIP 的一致版本及其更强形式，并对它们作了类似的刻画。即使在这种情况下，强 $\mathcal{C}$-UMIP 的刻画似乎也比 $\mathcal{C}$-UMIP 更丰富。

在最后一节中，我们通过例子和反例总结了本文讨论的各种概念之间的相互关系。

2. Preliminaries

本文中，X 是一个实巴拿赫空间。

对于 $x \in X$ 和 $r > 0$，我们用 $B(x,r)$表示开球 $\{y \in X : \|x-y\| < r\}$，用 $B[x,r]$ 表示闭球 $\{y \in X : \|x-y\| \le r\}$。我们用 $B(X)$表示闭单位球 $\{x \in X : \|x\| \le 1\}$，用 $S(X)$表示单位球面 $\{x \in X : \|x\| = 1\}$。

对于有界子集 $A \subseteq X$，用 $\mathrm{co}(A)$（分别用 $\mathrm{aco}(A)$）表示 A的凸包（分别表示绝对凸包）。令 $\|f\|_A := \sup\{|f(x)| : x \in A\}$，其中$f \in X^*$，且 $diam_A(B) = \sup\{\|f-g\|_A : f,g \in B\}$，适用于 X^* 的任意非空子集 B。对于 $f \in X^*$、$\varepsilon > 0$和 $A \in \mathcal{C}$，$B_A(f,\varepsilon) := \{g \in X^* : \|f-g\|_A < \varepsilon\}$。

对于有界集合 $C \subseteq X$ 和 $x \in X$，令 $d(x,C) = \inf\{\|x-z\| : z \in C\}$ 表示距离函数。

对于 $A \subseteq X$，由 A 生成的锥为 $\mathrm{cone}(A) = \{\lambda a : \lambda \ge 0, a \in A\}$。

定义 2.1. 若有界子集 X 的一个类 $\mathcal{C}$ 满足以下条件，则称其为相容类:

(I) $C \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $x \in X \implies \alpha C + x \in \mathcal{C}$, $C \cup \{x\} \in \mathcal{C}$;
(II) $C \in \mathcal{C}$ 蕴含 $C \in \mathcal{C}$ 的闭绝对凸包。(III) $C \in \mathcal{C}$ 和 $A \subseteq C$ 蕴含 $A \in \mathcal{C}$。(IV) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ 蕴含 $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$。

我们的定义与 [2, 5, 6] 中的定义略有不同。

定义 2.2. 对于一个相容类 $\mathcal{C}$, X 若每个闭凸集 $C \in \mathcal{C}$ 都是包含它的闭球的交，则称其具有 $\mathcal{C}$-MIP。

请注意，上述族 $\mathcal{K}$, $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{F}$ 按照此定义并不完全是相容类。我们必须考虑这类集合及其子集。不过，性质 $\mathcal{C}$-MIP保持不变。我们还应在相容类的示例列表中加入由所有有界集构成的族 $\mathcal{B}$，它对应于 MIP 本身。

全文中，$\mathcal{C}$ 表示一个相容集类。我们用 $\tau_{\mathcal{C}}$表示，或在不会引起歧义时简记为 τ，表示 X^*上在 $\mathcal{C}$中的集合上一致收敛的拓扑；换言之，它是由半范数族 $\{\|\cdot\|_C : C \in \mathcal{C}\}$生成的 X^* 上的拓扑。由于 $\mathcal{C}$ 是一个相容类，族 $\{B_C(0,\varepsilon) : C \in \mathcal{C}, \varepsilon > 0\}$ 构成了$\tau_{\mathcal{C}}$ 在 0 处的一个局部基。对于类 $\mathcal{C} = \mathcal{F}$、$\mathcal{K}$、$\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{B}$，拓扑 $\tau_{\mathcal{C}}$ 分别与

w*、bw*、Mackey 和范数拓扑一致。我们注意到，拓扑 $\tau_{\mathcal{F}}$ (w*)和 $\tau_{\mathcal{K}}$ (bw*)在有界集上是一致的。

定义 2.3. (a) 对于 $x \in S(X)$，我们用 $D(x)$ 表示集合 $\{f \in S(X^*) : f(x) = 1\}$。$D$ 的任意一个选择称为支撑映射。(b) 由 $x \in S(X)$ 确定的 $B(X^*)$ 的弱星切片是如下形式的集合

$$S(B(X^*), x, \delta) := \{f \in B(X^*) : f(x) > 1 - \delta\}$$

其中 $0 < \delta < 1$ 为某个元素。

(c) 对于 $\varepsilon, \delta > 0$, $x \in S(X)$，并令 $C \in \mathcal{C}$ 表示

$$\begin{aligned} d_1(C, x, \delta) &= \sup_{0<\lambda<\delta,\ y\in C} \frac{\|x + \lambda y\| + \|x - \lambda y\| - 2}{\lambda} \\ d_2(C, x, \delta) &= diam_C(S(B(X^*), x, \delta)) \\ d_3(C, x, \delta) &= diam_C(D(S(X) \cap B(x, \delta))) \end{aligned}$$

(d) [2] 对于 $\varepsilon, \delta > 0$ 和 $C \in \mathcal{C}$

$$M_{\varepsilon,\delta,C}(X) = \{x \in S(X) : \sup_{0<\|y\|<\delta, y\in C} \frac{\|x + y\| + \|x - y\| - 2}{\|y\|} < \varepsilon\}.$$

换言之，$M_{\varepsilon,\ \delta,\ C}(X) = \{x \in S(X) : d_1(C, x, \delta) < \varepsilon\}$。定义

$$M_{\varepsilon,C}(X) = \bigcup_{\delta>0} M_{\varepsilon,\delta,C}(X).$$

(e) Define $H = \bigcap\{\overline{D(M_{\varepsilon,C}(X))}^{\tau} : C \in \mathcal{C}, \varepsilon > 0\}$.

下面的引理是对 [3, 引理 2.10] 的简单推广。详细内容可见 [1, 引理 2.1]:

引理 2.4. 对任意 $\alpha, \delta > 0$，有，
(i) $d_2(C, x, \alpha) \leq d_1(C, x, \delta) + \frac{2\alpha}{\delta}$. (ii) $d_3(C, x, \delta) \leq d_2(C, x, \delta)$.
(iii) $d_1(C, x, \delta) \leq d_3(C, x, 2\delta)$.

定义 2.5. (a) 如果对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $B(X^*)$ 的一个弱星切片 S，使得 $f \in S$ 且 $diam(S) < \varepsilon$，则称 $f \in S(X^*)$ 是 $B(X^*)$ 的弱星凹陷点。
(b) [4] 我们称 $f \in S(X^*)$ 是 $B(X^*)$ 的弱星半凹陷点，如果对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $B(X^*)$ 的一个弱星切片 S，使得$S \subseteq B(f, \varepsilon)$。

(c) [5] 我们称 $f \in S(X^*)$ 是 $B(X^*)$ 的 $\mathcal{C}$-凹陷点，如果对每个 $A \in \mathcal{C}$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在 $B(X^*)$ 的一个弱星切片 S，使得$f \in S$ 且 $diam_A(S) < \varepsilon$。(d) [6] 我们称 $f \in S(X^*)$ 是 $B(X^*)$ 的 $\mathcal{C}$-半切点，如果对每个 $A \in \mathcal{C}$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在 $B(X^*)$ 的一个弱星切片 S，使得 $S \subseteq cone(B_A(f, \varepsilon))$。

以下用我们的记号和术语总结已知的 $\mathcal{C}$-MIP 结果。

定理 2.6. [2, 定理 1，推论 1], [5, 定理 1.10], [6, 定理 2.3] 设 $\mathcal{C}$ 是一个有界集的相容类。考虑以下命题：

(a) 由 $B(X^*)$ 的 $\mathcal{C}$-切割点生成的锥在 X^* 中范数稠密。(b) 由 H 生成的锥在 X^* 中范数稠密。(c) 若 C_1、$C_2 \in \mathcal{C}$ 是闭凸集，且存在 $f \in X^*$ 使得 $\sup f(C_1) < \inf f(C_2)$，则存在互不相交的闭球 B_1、B_2，使得 $C_i \subseteq B_i$、$i = 1, 2$。(d) X 具有 $\mathcal{C}$-MIP。(e) 每个 $f \in S(X^*)$ 都是 $B(X^*)$ 的 $\mathcal{C}$-半切点。(f) 对每个范数稠密子集 $A \subseteq S(X)$ 和每个支撑映射 ϕ，由 $\phi(A)$ 生成的锥在 X^* 中范数稠密。

那么，$(a) \implies (b) \implies (c) \implies (d) \iff (e) \implies (f)$。此外，若 $A = \{x \in S(X) : D(x)$ 含有一个 $\mathcal{C}$-切割点 $B(X^*)\}$

在 $S(X)$中范数稠密，则所有陈述都等价。

注 2.7. 在 [5, 定理 1.10], 中证明了，在一个较弱的假设下，(a) 和 (d) 等价：$B(X^*)$ 的每个弱星切片都包含一个$\mathcal{C}$-切割点。

3. Strong $\mathcal{C}$-MIP

定义 3.1. 若巴拿赫空间 X 满足以下性质，则称其具有强 $\mathcal{C}$-MIP：对于每个闭凸集 $C \in \mathcal{C}$ 及 $\beta \geq 0$，$C + \beta B(X)$ 都是包含它的闭球的交集。

Vanderwerff [14] 分别将其称为 $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ 和 $\mathcal{W}$的 $\mathcal{K}$-IP 与 $\mathcal{W}$-IP。显然，对于 $\mathcal{C} = \mathcal{B}$，$\mathcal{C}$-MIP 与强 $\mathcal{C}$-MIP 是一致的。有关一些例子和反例，请参见第 5 节。

定义 3.2. 若对每个 $f \in S(X^*)$、$\varepsilon > 0$ 和 $C \in \mathcal{C}$，都存在 $\delta > 0$ 和 $x \in S(X)$，使得 $D(S_X \cap B(x, \delta)) \subseteq B_C(f, \varepsilon)$，则称 X 上的对偶映射是范数-τ 拟连续的。

在我们看来，以下概念是对 [5] 的 $\mathcal{C}$-切点和 [4] 的弱星半凹陷点的一种更自然的推广，也比 [6]中定义的 $\mathcal{C}$-凹陷点更自然。

定义 3.3. 如果对于每个 $A \in \mathcal{C}$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在 $B(X^*)$的一个弱星切片 S，使得 $S \subseteq B_A(f, \varepsilon)$，则称 $B(X^*)$中的 $f \in S(X^*)$是一个强 $\mathcal{C}$-半切点。

我们首先注意到，强 $\mathcal{C}$-半切点可以完全类似于引理 2.2]进行刻画。

引理 3.4. 对于 $f \in S(X^*)$，以下条件等价：
(a) $f \in H$，即对于每个 $C \in \mathcal{C}$，$f \in \bigcap_{\varepsilon>0} D(M_{\varepsilon,\ C}(X))^{\tau}$。(b) f 是一个强 $\mathcal{C}$-半切点。(c) 对于每个 $\beta \geq 0$ 以及满足 $\inf f(C + \beta B(X)) > 0$的闭凸集 $C \in \mathcal{C}$，存在 X 中的一个闭球 $B[x_0, r_0]$，包含 $C + \beta B(X)$，且满足 $0 \notin B[x_0, r_0]$。(d) 对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $C \in \mathcal{C}$，都存在 $\delta > 0$ 和 $x \in S(X)$，使得 $D(S_X \cap B(x, \delta)) \subseteq B_C(f, \varepsilon)$。

证明。$(a) \implies (b)$：对于 $C \in \mathcal{C}$，令 $f \in \bigcap_{\varepsilon>0} D(M_{\varepsilon,\ C}(X))^{\tau}$。设给定 $\varepsilon > 0$。我们有 $f \in D(M_{\varepsilon/4,\ C}(X))^{\tau}$。因此，存在 $\delta > 0$ 和 $x \in M_{\varepsilon/4,\ \delta,\ C}(X)$ 以及 $g \in D(x)$，使得 $\|f - g\|_C < \varepsilon/4$。

由于 $x \in M_{\varepsilon/4,\ \delta,\ C}(X)$，我们有 $d_1(C, x, \delta) < \varepsilon/4$。根据引理 2.4$(i)$，对于$\alpha = \varepsilon\delta/8$,

$$d_2(C, x, \alpha) \leq d_1(C, x, \delta) + \frac{2\alpha}{\delta} < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2.$$

因此，$diam_C(S(B(X^*)\ x, \alpha) < \varepsilon/2$。

由于 $g \in S(B(X^*)\ x, \delta)$，$S(B(X^*)\ x, \delta) \subseteq B_C(f, \varepsilon)$。

$(b) \implies (c)$：取 $\beta \geq 0$ 和 $C \in \mathcal{C}$，使得 $\inf f(C + \overline{\beta B(X))} > 0$。

令 $\inf f(\overline{C + \beta B(X)}) = \alpha > 0$。现在，存在 $\delta > 0$ 和 $x \in S(X)$，使得

$$S := S(B(X^*), x, \delta) \subseteq B_C(f, \alpha).$$

取 $g \in S$ 和 $c \in C$。我们有,

$$g(c) = f(c) - \|f - g\|_C > \alpha + \beta - \alpha = \beta.$$

因此，对于 $y \in \overline{C + \beta B(X)}$，有 $g(y) > 0$。

因此，根据 [3, 定理 2.6], ，存在一个闭球 $B[x_0, r_0]$ ，其中包含 $C + \beta B(X)$，且满足 $0 \notin B[x_0, r_0]$。

$(c) \implies (b)$：设给定 $C \in \mathcal{C}$ 和 $\varepsilon > 0$ 。

设 $z_0 \in X$ 满足 $\|z_0\| = 1 + \varepsilon/2$ ，且 $f(z_0) > 1 + \varepsilon/4$。令 $D = \overline{aco}(C \cup \{z_0\})$。我们有 $D \in \mathcal{C}$。

考虑 $A := \{x \in D : f(x) \geq \varepsilon/4\}$。我们有 $A \in \mathcal{C}$。

对于 $\beta = \frac{\varepsilon/4}{1+\varepsilon/4}$，$\overline{f(A + \beta B(X))} \geq \varepsilon/4 - \beta > 0$。因此，存在一个闭球 $B[x_0, r_0]$，其中包含 $\overline{A + \beta B(X)}$，且满足 $0 \notin B[x_0, r_0]$。

因此，对于 $r_1 = r_0 - \beta$ 和 $x_1 = x_0$，$A \subseteq B[x_1, r_1]$ 和 $d(0, B[x_1, r_1]) > \beta$。

考虑 $S = \{g \in B(X^*) : g(x_1/\|x_1\|) > (r_1 + \beta)/\|x_1\|\}$。

对于 $g \in S$，$g(x_1/\|x_1\|) > (r_1 + \beta)/\|x_1\|$。因此，$g(x_1) > r_1 + \beta$，这意味着 $\inf g(B[x_1, r_1]) \geq \beta$。于是，对于所有 $x \in A$，$g(x) > 0$。因此，将 Phelps 引理 [3, 定理 2.5] 应用于半范数 $\|\cdot\|_D$，

$$\left\| f - \frac{\|f\|_D}{\|g\|_D} g \right\|_D < \varepsilon/2.$$

考虑 $y_0 = \frac{\varepsilon}{4} \frac{z_0}{f(z_0)}$。由于 $f(z_0) > \varepsilon/4$，D是绝对凸的，并且 $f(y_0) = \varepsilon/4$，$y_0 \in A$，因此 $g(y_0) > \beta$。

Therefore, $g(z_0) = \dfrac{f(z_0)g(y_0)}{\varepsilon/4} > \dfrac{(1+\varepsilon/4)\beta}{\varepsilon/4} = 1$ and so, $\|g\|_D \geq 1$.

由于 $f, g \in B(X^*)$ 和 $D \subseteq (1 + \varepsilon/2)B(X)$，

$$1 \leq \|f\|_D, \|g\|_D \leq 1 + \varepsilon/2.$$

因此，

$$\left| \|f\|_D - \|g\|_D \right| < \varepsilon/2.$$

最后，

$$\|f - g\|_C \leq \|f - g\|_D \leq \left\| f - \frac{\|f\|_D}{\|g\|_D} g \right\|_D + \left| \|f\|_D - \|g\|_D \right| < \varepsilon.$$

$(b) \implies (d)$：设 $f \in S(X^*)$ 是一个强 $\mathcal{C}$-半切点。给定 $\varepsilon > 0$和 $C \in \mathcal{C}$ 。存在 $\delta > 0$ 和 $x \in S(X)$，使得

$$S(B(X^*), x, \delta) \subseteq B_C(f, \varepsilon/4).$$

因此，$d_2(C, x, \delta) = diam_C(S(B(X^*) x, \delta)) < \varepsilon/2$且 $D(x) \subseteq B_C(f, \varepsilon/4)$。现在，由引理 2.4，$d_3(C, x, \delta) = diam_C(D(S(X) \cap B(x, \delta))) < \varepsilon/2$。因此，

$$D(S(X) \cap B(x, \delta)) \subseteq B_C(f, \varepsilon).$$

$(d) \implies (a)$：为证明 $f \in \overline{D(M_{\varepsilon,\ C}(X))}^{\tau}$ 对所有 $C \in \mathcal{C}$ 和 $\varepsilon > 0$ 都成立，令 $0 < \eta < \varepsilon$ 和 $C_1 \in \mathcal{C}$。只需证明存在 $x \in M_{\varepsilon,\ C}$ 和 $g \in D(x)$ 使得 $\|f - g\|_{C_1} < \eta$。

设 $C_0 = C \cup C_1 \in \mathcal{C}$。由 (d)，存在 $\delta > 0$ 和 $x \in S(X)$，使得 $D(S(X) \cap B(x, \delta)) \subseteq B_{C_0}(f, \eta/2)$。

因此，$d_3(C_0, x, \delta) \leq \eta$ 且 $D(x) \subseteq B_{C_0}(f, \eta/2)$。由引理 2.4，$d_1(C_0, x, \delta/2) \leq d_3(C_0, x, \delta) \leq \eta$。因此，$x \in M_{\eta,\ \delta/2,\ C_0} \subseteq M_{\varepsilon,\ \delta/2,\ C} \subseteq M_{\varepsilon,\ C}$ 且 $\|f - g\|_{C_1} < \eta$ 对任意 $g \in D(x)$ 均成立。□

下面给出刻画强 $\mathcal{C}$-MIP 的主要定理。同样，我们得到 [7, 定理 2.1] 的完整类比。

定理 3.5. 对于巴拿赫空间 X，以下条件等价：

(a) X 具有强 $\mathcal{C}$-MIP。(b) 每个 $f \in S(X^*)$ 都是强 $\mathcal{C}$-半切点。(c) 对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $C \in \mathcal{C}$，$D(M_{\varepsilon,\ C}(X))$ 在 $S(X^*)$ 中是 τ-稠密的。(d) X 上的对偶映射是范数-τ 拟连续的。(e) X 中的每个支撑映射都将 $S(X)$ 中的范数稠密集映射到 $S(X^*)$ 中的 τ-稠密集。

证明。由引理 3.4 可得 (a)、(b)、(c) 和 (d) 等价。

$(d) \Rightarrow \implies (e)$：设 $A \subseteq S(X)$ 在 $S(X)$ 中范数稠密。设 $\phi : S(X) \to S(X^*)$ 是一个支撑映射。设 $f \in S(X^*)$、$C \in \mathcal{C}$ 和 $\varepsilon > 0$。只需找到满足 $\|f - \phi(x_0)\|_C < \varepsilon$ 的 $x_0 \in A$。

根据（d），存在 $\delta > 0$ 和 $x \in S(X)$，使得 $D(S_X \cap B(x, \delta)) \subseteq B_C(f, \varepsilon)$。由于 A 在 $S(X)$ 中稠密，存在 $x_0 \in A$ 使得 $\|x_0 - x\| < \delta$。由此可得 $D(x_0) \subseteq B_C(f, \varepsilon)$。因此，对于任意支撑映射 ϕ，$\|f - \phi(x_0)\|_C < \varepsilon$。

$(e) \implies (d)$：假设对偶映射不是范数-τ 拟连续的。那么存在 $f \in S(X^*)$、$\varepsilon > 0$ 和 $C \in \mathcal{C}$，使得对于任意 $x \in S(X)$ 和 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $y_{n,\ x} \in S(X)$ 和 $g_{n,\ x} \in D(y_{n,\ x})$，使得 $\|y_{n,\ x} - x\| < 1/n$ 和 $\|g_{n,\ x} - f\|_C \geq \varepsilon$。

令 $\phi : S(X) \to S(X^*)$ 为一个支撑映射，将 $y_{n,x}$ 映射到 $g_{n,x}$。令 $A = \{y_{n,x} : x \in S(X)\ n \in \mathbb{N}\}$。那么 A 在 $S(X)$ 中范数稠密，但 $\phi(A)$ 在 $S(X^*)$ 中并非 τ-稠密。□

注 3.6. 对于 $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ 或 $\mathcal{W}$，Vanderwerff [14] 指出，强$\mathcal{C}$-MIP 等价于以下条件：

(b') 对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $C \in \mathcal{C}$，$S(X^*)$ 中属于 $B(X^*)$ 的弱星切片且其 C-直径为 $\leq \varepsilon$ 的点，在 $S(X^*)$ 中是 τ-稠密的。

容易看出，该条件等价于上面的 (b)，并且对任意相容族 $\mathcal{C}$ 都成立。现在考虑以下条件：

(b'') $B(X^*)$ 中的 $\mathcal{C}$-切点在 $S(X^*)$ 中是 τ-稠密的。显然，$(b'') \Longrightarrow (b)$。此外，如果 $B(X^*)$ 的每个弱星切片都包含一个$\mathcal{C}$-切点，那么两者等价。注意，这一条件在任意阿斯普伦德空间中都成立。

由于 $\tau_{\mathcal{F}}$ 与 $\tau_{\mathcal{K}}$ 拓扑在有界集上一致，我们得到

推论 3.7. 对于巴拿赫空间 X，以下条件等价：

(a) X 具有强 $\mathcal{K}$-MIP。(b) X 具有强 $\mathcal{F}$-MIP。(c) $B(X^*)$ 的极点在 $S(X^*)$ 中弱星稠密。

尽管我们已经提供了充分的证据，表明强 $\mathcal{C}$-半切点比 $\mathcal{C}$-半切点更自然，但仍有一个问题尚未解答：能否用强 $\mathcal{C}$-半切点来刻画 $\mathcal{C}$-MIP?

那么我们来考虑以下条件：

(a') 由 $B(X^*)$ 的强 $\mathcal{C}$-半切点生成的锥在 X^* 中是 τ-稠密的。

由定理 2.6 可知，这个条件通常比 $\mathcal{C}$-MIP 更强；如果 $B(X^*)$ 的每个弱星切片都包含一个强 $\mathcal{C}$-半切点，则它与之等价。这个条件略弱于定理 2.6 中给出等价性的条件。

众所周知，范数具有 Fr´echet 光滑性的巴拿赫空间满足 MIP。事实上，这一点连 Mazur 本人都早已知晓。请注意，相容类 $\mathcal{C}$ 是 [11, 第 64] 页所定义的有界结构。根据 [11, 第 64], 页讨论的$\mathcal{C}$-光滑性定义，我们得到以下推论。

推论 3.8. 如果 X 上的范数是 $\mathcal{C}$-光滑的，那么 X 具有强 $\mathcal{C}$- MIP。

注 3.9. 对于 $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ 和 $\mathcal{W}$，Vanderwerff 在 [14] 中指出了这一点。

4. $\mathcal{C}$-UMIP and Strong $\mathcal{C}$-UMIP

本节讨论 $\mathcal{C}$-MIP 和强 $\mathcal{C}$-MIP 的一致版本。

以下定量结果包含在 [3, 定理 2.6] 的证明中。我们将反复用到它。

引理 4.1. 设 $A \subseteq X$ 满足 $M = \sup\{\|x\| : x \in A\}$ 且 $d = d(0, A) > 0$。假设存在 $x_0 \in S(X)$ 和 $0 < \gamma < 1$，使得

$$S = \{f \in B(X^*) : f(x_0) > \gamma\} \subseteq \{f \in B(X^*) : f(x) > 0 \text{ for all } x \in A\}.$$

那么，对于 $\lambda \geq M/(1-\gamma)$,

$$A \subseteq B\left[\lambda x_0, \lambda - \frac{d(1-\gamma)}{1+\gamma}\right].$$

我们注意到，定义强 $\mathcal{C}$-MIP 的一致版本有三种方式（下文的 (a)、(b) 和 (c)），且它们彼此等价。

定理 4.2。在巴拿赫空间 X 中，以下条件等价:

(a) 对每个 $\varepsilon > 0$、$\beta \geq 0$、$M \geq 2$ 和 $0 < \eta < \varepsilon$，都存在$K > 0$，使得对于每个满足 $diam(C) \leq M$ 且 $d(0, C + \beta B(X)) \geq \varepsilon$ 的闭凸集 $C \in \mathcal{C}$，都存在 $z_0 \in X$、$0 < r \leq K$，使得$C + \beta B(X) \subseteq B[z_0, r]$ 且 $d(0, B[z_0, r]) > \eta$。

(b) 对每个 $\varepsilon > 0$、$M \geq 2$ 和 $0 < \eta < \varepsilon$，都存在 $K > 0$，使得对于每个满足 $diam(C) \leq M$ 且$d(0, C) \geq \varepsilon$ 的闭凸集 $C \in \mathcal{C}$，都存在 $z_0 \in X$、$0 < r \leq K$，使得 $C \subseteq B[z_0, r]$ 且 $d(0, B[z_0, r]) > \eta$。

(c) 对于每个 $\varepsilon > 0$、$\beta \geq 0$ 和 $M \geq 2$，存在 $K > 0$ 和 $0 < \eta < \varepsilon$，使得对于每个满足 $diam(C) \leq M$ 和 $d(0, C + \beta B(X)) \geq \varepsilon$ 的闭凸集 $C \in \mathcal{C}$，都存在 $z_0 \in X$、$0 < r \leq K$，使得$C + \beta B(X) \subseteq B[z_0, r]$ 且 $d(0, B[z_0, r]) > \eta$。

(d) 对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于每个 $C \in \mathcal{C}$、$C \subseteq B(X)$ 和 $f \in S(X^*)$，都存在 $x \in S(X)$，使得

$$S(B(X^*), x, \delta) \subseteq B_C(f, \varepsilon).$$

(e) 对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于每个 $C \in \mathcal{C}$、$C \subseteq B(X)$ 和 $f \in S(X^*)$，都存在 $x \in S(X)$，使得 $D(S_X \cap B(x, \delta)) \subseteq B_C(f, \varepsilon)$。

(f) 对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对于每个 $C \in \mathcal{C}$，$C \subseteq B(X)$ 和 $f \in S(X^*)$，都存在 $x \in M_{\varepsilon,\ \delta,\ C}$，使得 $D(x) \subseteq B_C(f, \varepsilon)$。

证明。注意，对于任意有界的 $C \subseteq X$ 和 r， $\beta > 0$,

$$C \subseteq B[z_0, r] \iff C + \beta B(X) \subseteq B[z_0, r+\beta]$$

and

$$d(0, B[z_0, r+\beta]) = d(0, B[z_0, r]) - \beta$$

满足 $d(0, B[z_0, r]) > \beta$。

显然，$(a) \implies (b)$ 且 $(a) \implies (c)$。

$(b) \implies (d)$：这是引理 3.4 的证明（$(c) \implies (b)$）的一个定量上更精确的版本。

设给定 $\varepsilon > 0$。令 $\alpha = \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon} > 0$ 和 $\eta \in (\alpha, \varepsilon/4)$。选取 K，使其适用于 $\varepsilon/4$、 η 和 $M = 4$。也就是说，对于每个满足 $d(0, C) \geq \varepsilon/4$ 且 $diam(C) \leq 4$ 的 $C \in \mathcal{C}$，都存在一个包含 C 的闭球 $B[z_0, r]$，满足 $r \leq K$ 且 $d(0, B[z_0, r]) > \eta$。我们将证明 $\delta = \frac{\eta - \alpha}{K+\eta}$ 可行。

令 $C \in \mathcal{C}$ 满足 $C \subseteq B(X)$ 且 $f \in S(X^*)$。如引理 3.4 的证明（$(c) \implies (b)$）中那样，令 $z_0 \in X$ 满足 $\|z_0\| = 1 + \varepsilon/2$ 且 $f(z_0) > 1 + \varepsilon/4$，以及 $D = \overline{aco}(C \cup \{z_0\})$。同样， $D \in \mathcal{C}$ 且 $\|f\|_D \geq 1$。对于 $A = \{y \in D : f(y) \geq \varepsilon/4\}$， $A \in \mathcal{C}$， diam $(A) \leq 4$ 且 $d(0, A) \geq \varepsilon/4$。

根据假设，存在 $x_0 \in X$ 和 $r > 0$ 使得 $A \subseteq B[x_0, r]$,$d(0, B[x_0, r]) > \eta$ 且 $r \leq K$。因此， $\|x_0\| > r + \eta$。现在令

$$S := S\left(B(X^*), \frac{x_0}{\|x_0\|}, \delta\right) = \left\{g \in B(X^*) : g\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) > \frac{K+\alpha}{K+\eta}\right\}.$$

那么，对于 $g \in S$，我们有 $g(x_0/\|x_0\|) > (K+\alpha)/(K+\eta) > (r+\alpha)/(r+\eta)$。因此， $g(x_0) > (r+\alpha)\|x_0\|/(r+\eta)$。但是， $\|x_0\| > r + \eta$。因此， $g(x_0) > r + \alpha$。所以， inf $g(B[x_0, r]) > g(x_0) - r > \alpha > 0$。于是，再次如引理 3.4（$(c) \implies (b)$）所示，对 $\|.\|_D$应用 Phelps 引理 [3, 定理 2.5]，

$$\left\| f - \frac{\|f\|_D}{\|g\|_D} g \right\|_D < \varepsilon/2.$$

现在，仿照引理 3.4（$(c) \implies (b)$）中的论证，我们有，对于 $g \in S$,

$$\|f - g\|_C \leq \|f - g\|_D < \varepsilon.$$

$(c) \implies (d)$：这是上述证明的一个小变体。

给定 $\varepsilon > 0$。设 $\alpha = \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon} > 0$ 和 $\beta \in (\alpha, \varepsilon/4)$。选取 K 和 η，使得对于 $\varepsilon/4 - \beta$, β和 $M = 4$，也就是说，对于每个满足 $d(0, C + \beta B(X)) \geq \varepsilon/4 - \beta$ 且 $diam(C) \leq 4$ 的 $C \in \mathcal{C}$，都存在一个包含$C + \beta B(X)$、 $d(0, B[z_0, r]) > \eta > 0$和 $r \leq K$ 的闭球 $B[z_0, r]$。

我们将证明 $\delta = \frac{\beta - \alpha}{K+\beta}$ 可行。

令 $C \in \mathcal{C}$ 满足 $C \subseteq B(X)$ 和 $f \in S(X^*)$。

与前面一样，令 $z_0 \in X$ 满足 $\|z_0\| = 1 + \varepsilon/2$ 和 $f(z_0) > 1 + \varepsilon/4$。令 $D = \overline{aco}(C \cup \{z_0\})$ 和 $A = \{y \in D : f(y) \geq \varepsilon/4\}$。则 D、$A \in \mathcal{C}$、$\|f\|_D \geq 1$、$\operatorname{diam}(A) \leq 4$，且 $d(0, A + \beta B(X)) \geq \varepsilon/4 - \beta$。

根据假设，存在 $x_0 \in X$ 和 $0 < r \leq K$ 使得 $A + \beta B(X) \subseteq B[x_0, r]$，且 $d(0, B[x_0, r]) > \eta$。因此，$\|x_0\| > r + \eta$ 和 $A \subseteq B[x_0, r - \beta]$，$d(0, B[x_0, r - \beta]) \geq \eta + \beta$ 和 $r - \beta \leq K$。

其余证明与上文相同，并可得

$$S\left(B(X^*), \frac{x_0}{\|x_0\|}, \delta\right) \subseteq B_C(f, \varepsilon).$$

$(d) \implies (a)$：设给定 $\varepsilon > 0$, $\beta \geq 0$, $M \geq 2$ 和 $0 < \eta < \varepsilon$。

设 $L = M + \varepsilon + 2\beta$。显然，$L > 1$。

设 $\varepsilon_1 = \varepsilon/L$ 和 $\eta_1 = \eta/L$。选取 $0 < \delta < 1$，使得对于任意满足 $C_1 \subseteq B(X)$ 和 $f \in S(X^*)$ 的 $C_1 \in \mathcal{C}$，存在 $x \in S(X)$，使得

$$S(B(X^*), x, \delta) \subseteq B_{C_1}(f, \varepsilon_1 - \eta_1).$$

设 $K = (L + \varepsilon)/\delta$。

设 $C \in \mathcal{C}$ 满足 $diam(C) \leq M$ 且 $d(0, C + \beta B(X)) \geq \varepsilon$。我们将证明存在一个半径为 $\leq K$ 的闭球 B，使得 $C + \beta B(X) \subseteq B$ 且 $d(0, B) > \eta$。

情形 I：$C + \beta B(X) \setminus B[0, L] \neq \emptyset$。

若 $z \in C + \beta B(X) \setminus B[0, M + \varepsilon + 2\beta]$，则 $d(0, B[z, M + 2\beta]) \geq \varepsilon > \eta$，$C + \beta B(X) \subseteq B[z, M + 2\beta]$ 且 $M + 2\beta \leq K$。

情形 II：$C + \beta B(X) \subseteq B[0, L]$。

设 $\widetilde{C} = \frac{1}{L} C$ 和 $\alpha = \beta/L$。那么，$\widetilde{C} \subseteq D := \frac{1}{L}(C + \beta B(X)) = \widetilde{C} + \sim\alpha B(X) \subseteq B(X)$ 且 $d(0, D) \geq \varepsilon_1$。因此，$d(0, C) \geq \varepsilon_1 + \alpha$。只需证明存在一个半径为 $\leq K/L$ 的闭球 B，使得 $D \subseteq B$ 且 $\sim d(0, B) > \eta_1$。设 $D' = D + \eta_1 B(X) = C + (\eta_1 + \alpha) B(X)$。

$\sim$选取 $f \in S(X^*)$，使得 $\inf f(C) \geq \varepsilon_1 + \alpha$。对于这个 f，存在 $x \in S(X)$，使得

$$S := S(B(X^*), x, \delta) \subseteq B_{\widetilde{C}}(f, \varepsilon_1 - \eta_1).$$

$\sim$设 $h \in S$。对于 $y \in C$，我们有，

$$h(y) \geq f(y) - \|f - h\|_{\widetilde{C}} > (\varepsilon_1 + \alpha) - (\varepsilon_1 - \eta_1) = \eta_1 + \alpha.$$

也就是说，对于所有 $y \in D'$，$h(y) > 0$。因此，

$$S \subseteq \{g \in X^* : g(x) > 0 \text{ for all } x \in D'\}.$$

由引理 4.1 可知，对于 $\lambda = (1+\varepsilon_1)\delta$

$$D' \subseteq B\left[\lambda x, \lambda - \frac{d(0,D')\delta}{2-\delta}\right].$$

因此，

$$D \subseteq B\left[\lambda x, \lambda - \frac{d(0,D')\delta}{2-\delta} - \eta_1\right].$$

此外，

$$d(0, B\left[\lambda x, \lambda - \frac{d(0,D')\delta}{2-\delta} - \eta_1\right]) \geq \frac{d(0,D')\delta}{2-\delta} + \eta_1 > \eta_1$$

and

$$\lambda - \frac{d(0,D')\delta}{2-\delta} - \eta_1 \leq \lambda = \frac{1+\varepsilon_1}{\delta} = K/L.$$

证明至此完成。

(d)、(e) 和 (f) 等价，这可由引理 2.4 得出。 □

定义 4.3. 对于相容类 $\mathcal{C}$，若定理 4.2 中任一等价条件成立，则称 X 具有强 $\mathcal{C}$-UMIP。

我们再次注意到

推论 4.4. 强 $\mathcal{K}$-UMIP 与强 $\mathcal{F}$-UMIP 等价。

现在我们讨论 $\mathcal{C}$-MIP 的一致版本。

定义 4.5. 对于一个相容类 $\mathcal{C}$, X，若对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $M \geq 2$，都存在 $K > 0$ 和 $0 < \eta \leq \varepsilon$，使得对任意满足 $diam(C) \leq M$ 且 $d(0, C) \geq \varepsilon$ 的闭凸集 $C \in \mathcal{C}$，都存在$z_0 \in X$, $0 < r \leq K$，使得 $C \subseteq B[z_0, r]$ 且 $d(0, B[z_0, r]) \geq \eta$，则称其具有 $\mathcal{C}$-UMIP。

也可以用 [6] 中讨论的半切点的一致版本来刻画。证明只需稍微修改定理 4.2 的论证。细节从略。

定理 4.6. 对于一个相容类 $\mathcal{C}$，以下命题等价：

(a) X 具有 $\mathcal{C}$-UMIP (b) 对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对每个 $C \in \mathcal{C}$，$C \subseteq B(X)$ 和 $f \in S(X^*)$，都存在 $x \in S(X)$，使得

$$S(B(X^*), x, \delta) \subseteq cone\ (B_C(f, \varepsilon)).$$

5. Summary

本节总结上述讨论的各种概念之间的相互关系。我们给出了一些逆向蕴含的反例。据我们所知，其他蕴含关系尚未解决。

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{MIP} & \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} & \text{强 } \mathcal{W}\text{-MIP} & \Rightarrow & \text{强 } \mathcal{K}\text{-MIP} & \Leftrightarrow \text{强 } & \mathcal{F}\text{-MIP} \\
\Updownarrow & & \Downarrow & & \Downarrow\not\Uparrow & & \Downarrow \\
\text{MIP} & \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} & \mathcal{W}\text{-MIP} & \Rightarrow & \mathcal{K}\text{-MIP} & \Rightarrow & \mathcal{F}\text{-MIP}
\end{array}$$

例子。

- Vanderwerff 在 [14, 定理 2.6] 中证明，存在一个巴拿赫空间具有 $\mathcal{W}$-MIP，但不具有强 $\mathcal{K}$-MIP。因此，$\mathcal{K}$-MIP 并不蕴含强 $\mathcal{K}$-MIP。这也表明，存在具有 $\mathcal{W}$-MIP 但不具有 MIP 的巴拿赫空间。

- Vanderwerff 在 [14, 定理 1.1] 中还证明，每个巴拿赫空间都可以通过重新赋范而具有 $\mathcal{W}$-MIP，因而也具有 $\mathcal{K}$-MIP。这再次表明，$\mathcal{W}$-MIP 并不蕴含 MIP。
- 在 ℓ_1中，盖托可微性与弱 Hadamard（即 $\mathcal{W}$-）可微性一致（见 [8]）。现在，ℓ_1作为一个可分空间，具有一个盖托光滑的等价范数，因而也是 $\mathcal{W}$-光滑的，因此具有强 $\mathcal{W}$-MIP。然而，作为一个可分非阿斯普伦德空间，它不具有 MIP 重赋范。

一致版本之间也存在类似的相互关系。在这种情况下，大多数反向蕴含仍未解决。

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{UMIP} \Rightarrow & \text{强 } \mathcal{W}\text{-UMIP} & \Rightarrow & \text{强 } \mathcal{K}\text{-UMIP} & \Leftrightarrow \text{强 } & \mathcal{F}\text{-UMIP} \\
\Updownarrow & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{UMIP} \Rightarrow & \mathcal{W}\text{-UMIP} & \Rightarrow & \mathcal{K}\text{-UMIP} & \Rightarrow & \mathcal{F}\text{-UMIP}
\end{array}$$

References

1. Pradipta Bandyopadhyay, *The Mazur Intersection Property in Banach Spaces and Related Topics*, 提交于印度统计学院，加尔各答的博士论文，1991年。2. Pradipta Bandyopadhyay, *The Mazur Intersection Property for Families of Closed Bounded Convex Sets in Banach Spaces*, 《Colloquium Mathematicum》LXIII (1992), 45–56。3. Pradipta Bandyopadhyay、Jadav Ganesh 和 Deepak Gothwal, *On Uniform MazurIntersection Property* 《Studia Mathematica》260 (2021), 第3期, 273–283。4. D. Chen 和 B. -L. Lin, *On B-Convex and Mazur Sets of Banach Spaces*, 《波兰科学院数学通报》43 (1995), 191-198。

5. D. Chen、B. -L. Lin, *Ball Separation Properties in Banach Spaces*, 《Rocky Mountain Journal of Mathematics》28 (1998), 835-873 6. Q. Cheng、Y. Dong, *Characterization of Normed Linear Spaces with Generalized Mazur Intersection Property*, 《Studia Mathematica》219 (2013), 第3期, 193–200。7. J. R. Giles、D. A. Gregory、B. Sims, *Characterisation of normed linear spaces with Mazur's intersection property*, 《Bulletin of the Australian Mathematical Society》18 (1978), 第1期, 105-123。8. J. R. Giles、S. Sciffer, *On weak Hadamard differentiability of convex functions onBanach spaces*, 《Bulletin of the Australian Mathematical Society》54 (1996), 第1期, 155–166。9. A. S. Granero、M. Jim´enez-Sevilla、J. P. Moreno, *Intersections of closed balls and geometry of Banach spaces*, 《Extracta Mathematica》19 (2004), 55-92。10. S. Mazur, *Über Schwache Konvergenz in den Raümen* (L^p), 《Studia Mathematica》4 (1933), 128–133。11. R. R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, 《数学讲义》1364, 施普林格出版社, 柏林, 1989年。12. A. Sersouri, *The Mazur Property for Compact Sets*, 《Pacific Journal of Mathematics》133 (1988), 185– 195。13. A. Sersouri, *Mazur's Intersection Property for Finite Dimensional Sets*, 《Mathematische Annalen》283 (1989), 165–170。14. J. Vanderwerff, *Mazur Intersection Properties for Compact and Weakly Compact Con-vex Sets*, 《Canadian Mathematical Bulletin》41 (1998), 第2期, 225–230。15. J. H. M. Whitfield、V. Zizler, *Mazur's intersection property of balls for compact convexsets*, 《Bulletin of the Australian Mathematical Society》35 (1987), 第2期, 267–274。16. J. H. M. Whitfield、V. Zizler, *Uniform Mazur's Intersection Property of Balls*, 《Canadian Mathematical Bulletin》30 (1987), 455-460。17. V. Zizler, *Renorming Concerning Mazur's Intersection Property of Balls for Weakly Compact Convex Sets*, 《Mathematische Annalen》276 (1986), 61–66。

（Pradipta Bandyopadhyay） Stat–Math Division, Indian Statistical Institute, 203, B. T. Road, Kolkata 700108, India.*Email address*: pradipta@isical.ac.in（Deepak Gothwal） Stat–Math Division, Indian Statistical Institute, 203, B. T.Road, Kolkata 700108, India.*Email address*: deepakgothwal190496@gmail.com