arXiv:2301.01989v1 [math.AG] 5 Jan 2023

从树冈纳度为 3 的非超椭圆亏格 3 度量图的热带修改构造到度量树的热带态射

Hamdi D¨ervodeli

摘要

本文研究亏格 3 度量图Γ 的树冈纳度，其定义为从 Γ的任意热带修改到任意度量树的所有热带态射次数的最小值。记作 tgon(Γ)，且至多为 3。我们根据热带态射和树冈纳度来定义超椭圆度量图。设 Γ 是一个亏格 3 度量图，满足 tgon(Γ) $= 3$ 且不是超椭圆图。本文针对这类度量图 Γ，构造 Γ 的一个热带修改 Γ' 、一棵度量树 T以及一个次数为 3 的热带映射 φ: $\Gamma' \to T$。

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 3

2.1 度量图.....3 2.2 调和映射与热带态射.....
...6 2.3 树冈纳度.....7 2.4 超椭圆度量图.....
.....8

3 热带态射的构造 **10**

1 引言

我们研究度量图的树冈纳度。其动机源于过去二十年间所发现的图与代数曲线之间引人注目的相互作用。例如，图上存在一套完善的除子理论（见 BN07），其中还包括线性系、线性等价、典范除子、次数和秩等概念；此外，度量图之间满足适当平衡条件的映射，其行为类似于曲线之间的态射（见 BN07）。

回顾一下，代数曲线 C 的列数是所有从 C 到射影直线 $\mathbb{P}^1$的非恒定态射的次数中的最小值。文献中有两种图列数的概念，它们都受代数曲线列数的启发，分别是树（或几何）列数和除子列数，例如，已有研究将其用于普通图或度量图（见 Bak08）。另一种变体是稳定列数，即普通图所有细分的除子列数的下确界（见 CKK15）。

我们研究列数的一个热带版本，其中代数曲线和射影直线分别由度量图和度量树取代，而态射则由热带态射取代（见 BN07, Cap14,Mik17, BBM11, Cha13）。度量图 Γ 的树冈纳度定义为：从 Γ 的任意热带修改到任意度量树的所有热带态射的次数的最小值。任意亏格为 g 的度量图的树冈纳度至多为 $\left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil + 1$（见定理 1，DV19）。其证明完全是组合性的，并提供了一种显式方法，可在亏格为 g 的度量图上构造次数为$\left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil + 1$且秩为 1 的除子。本文关注构造一个次数为（$\left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil + 1$）的热带态射，该态射从 Γ的热带修改映到度量树，其中 Γ的亏格为 g，树冈纳度为 $\left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil + 1$。对此类方法的兴趣可追溯至（Bak08, 备注 3.13）。在这方面，我们的有限贡献是研究 $g = 3$ 且 Γ 不是超椭圆的情形；也就是说，给定一个树冈纳度为 3 的非超椭圆亏格 3 度量图 Γ，我们构造一个热带修改 Γ'、一棵度量树 T以及一个次数 3 的热带态射ϕ：$\Gamma' \to T$（问题 1）。我们强调，与 DV19 中的方法相比，我们的构造更为直接：我们不再构造具有特定次数和秩的除子，而是直接显式构造从度量图的热带修改到度量树的热带态射。

问题 1. 设 Γ 是一个列数为 3 且非超椭圆的亏格 3 度量图。构造 Γ 的一个热带修改 Γ'、一个度量树 T 以及一个热带态射 $\varphi\colon\ \Gamma' \to T$，其次数为 3。

2 预备知识

2.1 度量图。

图 G 由以下数据定义：一个称为顶点集的集合 V、一个称为边集的集合 E，以及一个映射 $\partial\colon E \to P(V)$，使得对于任意 $e \in E$，都有 $|\partial(e)| = 1$ 或 $|\partial(e)| = 2$，其中 $P(V)$ 是 V 的幂集。我们记作 $G = (V, E, \partial)$。V（分别为 E）的元素称为 G 的顶点（分别为边）。如果一条边 $e \in E$ 满足 $|\partial(e)| = 1$，则称其为环。如果存在 v_1、$v_2 \in V$，使得对于所有 $i = 1$、2、.....、n，均有 $\partial(e_i) = \{v_i, v_j\}$，则称两条或更多条边 e_1、e_2、.....、$e_n \in E$ 为重边。若 V 和 E 都是有限集，则称图 G 为有限图。G 上的长度映射是指任意函数 $l\colon E \to (0, +\infty)$。本文中，除非另有说明，图总是假定为有限图，并允许存在重边。

设 $G = (V, E, \partial)$ 是一个图。图 G 中的一条路径是边的序列 $(e_1, e_2 \ldots, e_{n-1})$，并且存在顶点序列 $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$，使得对于 $i = 1$=1, 2, $\ldots, n-1$，有 $\partial(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$。若 $w = (e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ 是 G 中的一条路径，其顶点序列为 $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$，则称 w 是一条从 v_1 到 v_n 的路径。若图 G 中任意两个顶点 v_1 和 v_2 之间都存在一条从 v_1 到 v_2 的路径，则称图 G 是连通的。设 $e \in E$，其中 $\partial(e) = \{v, w\}$。将边 $e \in E$ 在 $\partial(e) = \{v, w\}$ 处分割为边 e_1, e_2，得到图 $G' = (V', E', \partial')$，其中 $V' = V \cup \{z\}$，$E' = (E \setminus \{e\}) \cup \{e_1, e_2\}$，且 ∂' 由 $\partial'|_{E\setminus\{e\}} = \partial$ 和 $\partial'(e_1) = \{v, z\}, \partial'(e_2) = \{z, w\}$ 给出。

令 $G = (V, E, \partial)$ 为一个无环的连通图。在 G 上的一个定向是一个映射 $\vec{\partial}\colon E \to V \times V$，使得若我们写作 $\vec{\partial}(e) = (v_1, v_2)$，则有 $\partial(e) = \{v_1, v_2\}$。注意，在 G 上给定一个定向 $\vec{\partial}$，等价于给定一个映射 $(\partial_0, \partial_1)\colon E \to V \times V$，其中 $\partial_0, \partial_1\colon E \to V$ 是端点映射。

在 G 上固定一个定向 $(\partial_0, \partial_1)\colon E \to V \times V$，并在 G 上选取一个长度映射 l。令 (X, d) 为实度量空间 $[0, l(e)]$（$e \in E$）的不交并，即集合

$$X = \bigsqcup_{e\in E} [0, l(e)] := \bigcup_{e\in E} [0, l(e)] \times \{e\}$$

以及由下式给出的度量 $d\colon X \times X \to [0, \infty]$

$$d((x_1, e_1), (x_2, e_2)) = \begin{cases} |x_1 - x_2|, & \text{if } e_1 = e_2 \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

考虑定义在 X 上的关系 $\sim_1$：若存在一个顶点 $v \in V$使得 $x, y \in \{(0, e) \in X \mid \partial_0(e) = v\} \cup \{(l(e)\ e) \in X \mid \partial_1(e) = v\}$，则 $x \sim_1 y$；并令 $\sim$为由 $\sim_1$ 生成的 X 上的等价关系，即 $x \sim y$ 当且仅当 $x = y$，或者存在一个有限子集 $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subset X$，使得 $x = z_1, z_n = y$且$z_i \sim_1 z_{i+1}$，其中 $i = 1$=2, . . ., $n-1$。令 $X := X/_\sim$为 X的商空间

$\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$关于等价关系 $\sim$ 以及 d： $X \times X \to [0,\infty)$定义为

$$\bar{d}(\bar{x},\bar{y}) := \inf \sum_{i=1}^{k} d(x_i, y_i)$$

其中下确界取遍所有 $k \in \mathbb{N}$ 以及满足 $x_1 \in \bar{x}$、$x_{i+1} \sim y_i$（对于 $i = 1$、2、.....、$k-1$）和 $y_k \in \bar{y}$ 的 X 中的序列（x_1、y_1、x_2、.....、x_k、y_k）。于是，

$\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$ $

引理 2.2 设 Γ 为度量图，$\mathcal{E}$ 为 Γ 的本质顶点集，且 S 为 Γ 的有限非空子集。那么，集合 S 是 Γ 的顶点集，当且仅当 $\mathcal{E} \subseteq S$。

证明。设 $\emptyset \neq S$ 是 Γ 中的一个顶点集。那么，S 诱导出 Γ 的一个模型 (G, l)，其中 $S = V(G)$，因此

$$\Gamma \setminus S = \Gamma \setminus V(G) \equiv \bigsqcup_{e \in E(G)} (0, l(e)).$$

若 $\mathcal{E} \cap (\Gamma \setminus S) \neq \emptyset$，则存在 $x \in \mathcal{E}$ 和一条边 $e \in E(G)$，使得 $x \in \text{int}(e)$，这与 x 是本质顶点相矛盾。因此，$\mathcal{E} \cap (\Gamma \setminus S) = \emptyset$ 且 $\mathcal{E} \subseteq S$。现在，假设 $\mathcal{E} \subseteq S$。若 $\mathcal{E} = \emptyset$，则 Γ 与一个圆等距，因此，Γ 的任意非空有限子集都是一个顶点集。设 $\mathcal{E} \neq \emptyset$。令 (G, l) 为 Γ 的一个模型，并令 V, E 分别为 G 的顶点集和边集。那么，集合 $V = \bigcup_{e \in E} \partial(e)$ 是 Γ 的一个顶点集，其中 $\partial(e)$ 是 $e \subset \Gamma$ 的边界集。由于 $\mathcal{E}$ 是本质顶点集，且 V 是一个顶点集，根据上文所证可得 $\mathcal{E} \subseteq V$。现在，若 $\mathcal{E} = V$，则 $\mathcal{E}$ 是一个顶点集。假设 $\mathcal{E} \subsetneq V$。我们知道集合 $V \setminus \mathcal{E}$ 总是有限的。若它是单元素集，即 $V \setminus \mathcal{E} = \{x_1\}$，则存在唯一的边 $e_1, f_1 \in E, e_1 \neq f_1$，使得 x_1 是 e_1 和 f_1 的一个公共端点。于是，我们得到

$$\begin{aligned} \Gamma \setminus \mathcal{E} = (\Gamma \setminus V) \cup \{x_1\} &\equiv \bigsqcup_{e \in E} (0, l(e)) \cup \{x_1\} \\ &\equiv \bigsqcup_{\substack{e \in E \\ e \neq e_1, f_1}} (0, l(e)) \sqcup (0, l(e_1) + l(f_1)) \end{aligned}$$

这意味着 $\mathcal{E}$ 是一个顶点集。若 $V \setminus \mathcal{E} = \{x_1, x_2\}$，则存在唯一的边 e_i、$f_i \in E$，满足 $e_i \neq f_i$，使得对于 $i = 1$，x_i 是 e_i 和 f_i 的公共端点，其中 $i = 1$ 为 2。当 e_1 和 e_2 中的一个等于 f_1 和 f_2 中的一个时，不妨设 $f_1 = e_2$，我们有

$$\Gamma \setminus \mathcal{E} \equiv \bigsqcup_{\substack{e \in E \\ e \neq e_1, e_2, f_2}} (0, l(e)) \sqcup (0, l(e_1) + l(e_2) + l(f_2)).$$

若 e_1 和 e_2 均不同于 f_1 和 f_2，则

$$\Gamma \setminus \mathcal{E} \equiv \bigsqcup_{\substack{e \in E \\ e \neq e_1, e_2, f_1, f_2}} (0, l(e)) \sqcup (0, l(e_1) + l(e_2)) \sqcup (0, l(f_1) + l(f_2))$$

因此，$\mathcal{E}$ 是一个顶点集。类似地，我们可以得到：如果 $V \setminus \mathcal{E} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，那么 $\mathcal{E}$ 也是一个顶点集。因此，$\Gamma \setminus \mathcal{E}$ 等距于有限个开实区间的不交并。由于 $\Gamma \setminus S \subset \Gamma \setminus \mathcal{E}$，我们有 $\Gamma \setminus S$ 也等距于有限个开区间的不交并，因此 S 是一个顶点集。 □

如果一个度量图等距于一个圆，则称其为度量环。如果Γ 不是度量环，那么 $\mathcal{E} \neq \emptyset$ 是 Γ的一个顶点集。由本质顶点集 $\mathcal{E}$ 诱导的模型（$G_{\mathcal{E}}$，$l_{\mathcal{E}}$）称为 Γ 的本质模型。根据引理 2.1，本质模型（$G_{\mathcal{E}}$，$l_{\mathcal{E}}$）是极小的，即 Γ 的任何其他模型都可以通过对 $G_{\mathcal{E}}$进行一系列边细分得到。因此，所有模型都是本质模型的细化。此外，这意味着点 $x \in \Gamma$ 的价是一个定义良好的概念；对于 S 为Γ 的顶点集且 $x \in S$的情形，其价定义为 x 在 G_S 中的价。点 $x \in \Gamma$ 的价记作 val(x)。

2.2 调和映射与热带态射。

定义 2.3 设 Γ_1 和 Γ_2 为度量图，分别具有无环模型 (G_1, l_1) 和 (G_2, l_2)，其中 $E(G_1) = \{e_1\}$ 且 $E(G_2) = \{e_2\}$。若映射$\varphi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ 存在等距映射 $\rho_1: \Gamma_1 \to [0, l_1(e_1)]$ 和$\rho_2: \Gamma_2 \to [0, l_2(e_2)]$，使得映射 $\rho_2 \circ \varphi \circ \rho_1^{-1}: [0, l_1(e_1)] \to [0, l_2(e_2)]$ 是仿射线性映射，则称其为线性的。

定义2.4 设 Γ_1 和 Γ_2 为两个度量图。若连续映射 $\varphi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ 存在 Γ_1 和 Γ_2 的无环模型 (G_1, l_1) 和 (G_2, l_2)，使得对任意边 $e_1 \in E(G_1)$，都存在一条边 $e_2 \in E(G_2)$，满足 $\varphi(e_1) \subseteq e_2$，且 $\varphi|_{e_1}: e_1 \to e_2$ 是线性映射，则称该映射为分段线性映射。

设 $\varphi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ 是度量图之间的分段线性映射，$v \in \Gamma_1$ 和 $w := \varphi(v)$。设 (G_1, l_1)（分别地，(G_2, l_2)）是 Γ_1（分别地，Γ_2）的无环模型，使得对于所有 $e_1 \in E(G_1)$，都存在 $e_2 \in E(G_2)$，使得 $\varphi(e_1) \subseteq e_2$,$\varphi|_{e_1}: e_1 \to e_2$ 是线性映射，并假设 $v \in V(G_1)$ 且 $w \in V(G_2)$。固定 w 处的一个方向 $\vec{w}$（即，以 w 为起点、方向与一条从 w 发出的路径一致的“单位向量”），并设 $e_2 \in E(G_2)$，使得 w 是 e_2 的一个端点，且 e_2 位于方向 $\vec{w}$ 上。设 $\{e_{v1}, e_{v2}, \ldots, e_{vr}\} \subseteq E(G_1)$ 为从 v 发出的边集。不失一般性，假设

$$\{e_{v1}, e_{v2}, \ldots, e_{vs}\} = \{e_{vj} \mid \varphi(e_{vj}) \subseteq e_2,\ j = 1, 2, \ldots, r\}$$

对于某个 s 使得 $0 \leqslant s \leqslant r$。那么，$\varphi|_{e_{vj}}$：由于模型 (G_1, l_1) 和 (G_2, l_2) 的选取，$e_{vj} \to e$ 对于$j = 1$、2、.....、s 是一个线性映射。记$m_{\varphi,\vec{w}}(v)$ 为这些线性映射 $\varphi|_{e_{vj}}$、$j = 1$、2、.....、s 的斜率之和。即，

$$m_{\varphi,\vec{w}}(v) = \sum_{j=1}^{s} \text{slope } (\rho \circ \varphi \circ \rho_{vj}^{-1})$$

其中 $\rho: e_2 \to [0, l_2(e_2)]$ 和 $\rho_{vj}: e_{vj} \to [0, l_1(e_{vj})]$ 是选定的等距映射，其唯一参数化为 $\rho(w) = \rho_{vj}(v) = 0$，对应于 $i = 1, 2, \ldots, s$，即将 $e_2, e_{vj}, j = 1, 2, \ldots, s$ 的初始端点映射到 0。线性映射 $\varphi|_{e_{vj}}, j = 1, 2, \ldots, s$ 及其和 $m_{\varphi,\ \vec{w}}(v)$ 的斜率定义与此类模型 (G_1, l_1) 和 (G_2, l_2) 的选取无关。

定义 2.5 若连续映射 $\varphi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ 是度量图之间的调和映射，则它是分段线性的，具有整数斜率，并满足调和性条件：对于任意点 $v \in \Gamma$ 以及从 w 出发的任意两个方向 $\vec{w_1}, \vec{w_2}$：$= \varphi(v)$，均有 $m_{\varphi,\ \vec{w_1}}(v) = m_{\varphi,\ \vec{w_2}}(v)$。

设 $\varphi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ 是调和映射，且 $v \in \Gamma$。那么，对于从 $\varphi(v)$ 发出的任意两个方向 $\vec{w_1}$、$\vec{w_2}$，$m_\varphi(v) := m_{\varphi,\ \vec{w_1}}(v) = m_{\varphi,\ \vec{w_2}}(v)$ 称为 φ 在 v 处的局部次数。非恒定调和映射 $\varphi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ 的次数定义为 φ 在 φ 下任意一点 $w \in \Gamma'$ 的原像处所有局部次数之和，即

$$\deg \varphi := \sum_{v \in \Gamma, \varphi(v) = w} m_\varphi(w)$$

对任意 $w \in \Gamma'$，φ 的次数与 w 的选择无关。（见第2.4节，Kag18）。

定义 2.6 若度量图之间的非恒定调和映射 $\varphi\colon \Gamma \to \Gamma'$ 沿线性边的斜率均非零，且满足以下不等式，则称其为度量图之间的热带态射

$$(k-2) \geqslant m_\varphi(v) \cdot (l-2)$$

该不等式对所有点 $v \in \Gamma$ 均成立，其中 k 是 v 的价，l 是 $w := \varphi(v)$ 的价。上述不等式称为黎曼–赫尔维茨条件。

2.3 树冈纳度。

设 Γ 为度量图，T 为度量树，并设 $v \in \Gamma$、$w \in T$ 为满足 $\mathrm{val}(w) = 1$ 的两个点。记 Γ' 为 $\Gamma \sqcup T$ 关于等价关系 $\sim$ 所得的商空间，该等价关系将 v 与 w 等同。度量空间 Γ' 是一个度量图，我们称 Γ' 是通过将度量树 T 嫁接到点 $v \in \Gamma$ 上得到的。本文允许对将度量树嫁接到度量图上的点这一操作进行逆操作，并称之为从度量图上的一个点删除度量树。

定义 2.7 度量图 Γ 的热带修改是另一个度量图 Γ'，它是通过将有限棵度量树嫁接到 Γ的若干点上，或从这些点删除度量树而得到的。

给定 Γ 的一个热带修改 Γ'，以及度量图之间的一个热带态射 $\varphi\colon \Gamma' \to T$，则分别存在 Γ'（相应地，T）的一个热带修改 Γ''（相应地，T'），以及一个热带态射 $\varphi'\colon \Gamma'' \to T'$，它扩展了 φ，且次数与 φ 相同（CD18）。下述定义是本文的关键定义。

定义 2.8 度量图 Γ的树冈纳度记作 $\mathrm{tgon}(\Gamma)$，定义为从 Γ 的任意热带修改到任意度量树的所有热带态射的次数中的最小值。

为研究度量图的树冈纳度和热带态射，我们考虑度量图在热带修改下的等价关系，称为热带等价。热带等价的度量图称为热带等价的。

首先，我们回顾图中收缩边和删除边的概念。设 $G=(V,E,\partial)$ 是一个图，且 $e\in E$ 满足 $\partial(e)=\{v,w\}$。将边 $e\in E$ 处的 G 收缩，得到图 $G_1=(V_1,E_1,\partial_1)$，其中 $V_1:=V/\sim$，其中 $\sim$ 将 v 与 w 识别，$E_1:=E\setminus\{e\}$，并且 $\partial_1:E_1\to P(V_1)$ 定义如下：对于满足 $\partial(e')=\{v',w'\}$ 的 $e'\in E_1$，我们定义 $\partial_1(e')=\{p(v')\ p(w')\}$，其中 $p:V\to V_1$ 是商映射。删除边 $e\in E$ 后得到图$G':=(V,E\setminus\{e\},\partial|_{E\setminus\{e\}})$。

接下来，我们采用 DV19] 提出的悬挂边概念。注意，我们将单点图（不含边的图）视为树。

定义 2.9 设 G 为一个连通图。若删除 e 后得到的图有两个连通分支，且其中一个是树，则称边 $e\in E(G)$ 为悬挂边。

设 Γ 为一个度量图，其模型为 (G,l)。假设 $g(\Gamma)\geq 2$。记˜为通过依次收缩 G的悬挂边得到的图，˜˜˜˜并令 l 为定义在 G 上的长度映射，它是˜ ˜ l E G Γ 在 ( ) 上的限制。令 为 (˜ G l ˜ Γ ,) 的实现所对应的度量图。那么，该度量图是 Γ的一个热带修改。注意，˜依构造， Γ 满足以下˜性质： Γ 是与 Γ 热带等价的唯一度量图，其本质模型 $(\mathcal{E},l_{\mathcal{E}})$ 的价数至少为 3，即每个顶点的价数至少为 3。

2.4 超椭圆度量图。

我们首先回顾度量图上除子的基本理论（Cha13], BN07]）。设 Γ 为一个度量图。由 Γ 上的点生成的自由阿贝尔群 Div(Γ) 的一个元素称为 Γ上的除子。如果

$$D=\sum_{v\in\Gamma}D(v)\cdot v$$

是 Γ中的一个除子，则定义 D 的次数为

$$\deg(D):=\sum_{x\in\Gamma}D(v)\in\mathbb{Z}$$

用 $\mathrm{Div}^0(\Gamma)$ 表示次数为 0 的除子子群。函数 $f:\Gamma\to\mathbb{R}$若连续，且沿其线性区间具有整数斜率，则称为 Γ 上的有理函数。我们用 Rat(Γ) 表示 Γ上的有理函数集合。对于 $f\in$ Rat(Γ) 以及 Γ中的一点 v，出射

v 处 f 的斜率之和记作 $\mathrm{ord}_v(f)$。除 Γ中有限多个点外，该和均为 0，因此，

$$\mathrm{div}(f) := \sum_{v\in\Gamma} \mathrm{ord}_v(f)$$

是 Γ 上的一个除子。 Γ 上的主除子集合定义为 $\mathrm{Prin}(\Gamma) := \{\mathrm{div}(f) \mid f \in \mathrm{Rat}(\Gamma)\}$。注意，$\mathrm{Prin}(\Gamma)$ 是 $\mathrm{Div}^0(\Gamma)$ 的一个子群。若两个除子D 和 D' 线性等价，则记作 $D \sim D'$，当且仅当 $D - D' \in \mathrm{Prin}(\Gamma)$。若除子 $D = \sum_{v\in\Gamma} D(v) \cdot v \in \mathrm{Div}(\Gamma)$ 有效，则记作 $D \geqslant 0$，当且仅当 $D(v) \geqslant 0$ 对所有 $v \in \Gamma$成立。用 $\mathrm{Div}^k_+(\Gamma)$ 表示次数为 k 的所有有效除子的集合。对于除子 $D \in \mathrm{Div}(\Gamma)$，完全线性系 $|D|$定义为 $|D| := \{D' \in \mathrm{Div}(\Gamma) \mid D' \geqslant 0, D' \sim D\}$.。除子$D$ 的秩定义为：若 $|D| = \emptyset$，则为 -1；并且

$$\max\left\{k \in \mathbb{Z} \mid \forall D' \in \mathrm{Div}^k_+(\Gamma) \text{ we have } |D - D'| \neq \emptyset\right\}$$

如果 $|D| \neq \emptyset$。除子 D 的秩简记为 $r(D)$。文献中存在超椭圆度量图的概念。例如，在 Cha13]，中，如果存在一个除子$D \in \mathrm{Div}(\Gamma)$，使得 $\deg(D) = 2$ 且 $r(D) = 1$，则称度量图 Γ 为超椭圆图。本文从热带态射及其树冈纳度的角度给出超椭圆度量图的定义，这一定义不同于 Cha13] 中给出的定义。

定义 2.10 如果存在一个从 Γ 到度量树的热带态射，其次数为 $\mathrm{tgon}(\Gamma)$，则称度量图 Γ 为超椭圆图。

本文的目标之一是研究树冈纳度为 3 的亏格 3 非超椭圆度量图 Γ 。注意，若按照 Kawaguchi-Yamaki（KY15]）的定义， Γ 是超椭圆的，这并不意味着按照我们的定义， Γ 是超椭圆的。例如，图 25 中的度量图 Γ 按照 Kawaguchi-Yamaki 的定义是超椭圆的，但按照我们的定义则不是。这是因为由唯一的超椭圆对合 ι （定理 3.5，KY15]）得到的调和映射不满足黎曼–赫尔维茨条件。

3 热带态射的构造

本文的主要结果是对下述问题 1 给出了一种构造性解法。在此之前，我们先给出以下引理，它将有助于构造热带态射。

引理 3.1 设 $\Gamma=(G,l)$、 $T=(H,m)$ 是两个度量图，其中 H 不含重边，且 ψ：$V(G)\to V(H)$ 是一个顶点集上的映射。假设对于任意作为某条非环边 $e\in E(G)$ 端点的 $v,w\in V(G)$，都有 $\psi(v)=\psi(w)$，或者 $\psi(v)$ 和 $\psi(w)$ 是某条边 $e'\in H$ 的端点。那么，存在唯一的连续映射 $\varphi:\Gamma\to T$，使得 $\varphi|_{V(G)}=\psi$，且 φ 在 G 中的每条边 e 上都是线性的。

证明。若 $e\in E(G)$ 是一条端点为 v,w 的边，且 $\psi(v)=\psi(w)$，则取 $\varphi_e:e\to T$ 为 e 上的常值映射，其像为 $\psi(v)=\psi(w)$。若 $e\in E(G)$ 是一条端点为 v,w 的边，且 $\psi(v)$ 和 $\psi(w)$ 是某条边 $e'\in H$ 的端点，则取 $\varphi_e:e\to e'$ 为斜率为 $m(e')/l(e)$ 的线性映射。现在，取 $\varphi:\Gamma\to T$ 为唯一的连续映射，使得对于所有边 $e\in E(G)$，都有 $\varphi|_e=\varphi_e$。 □

问题 1. 设 Γ 是一个树冈纳度为 3 且非超椭圆的亏格 3 度量图。构造 Γ 的一个热带修改 Γ'、一个度量树 T，以及一个次数为 3 的热带态射 φ: $\Gamma'\to T$。

问题 1 的解答。考虑树冈纳度为 3 的非超椭圆亏格 3 度量图，按热带等价分类。亏格 3 度量图有一个完整列表（按热带等价分类）（图4，Cin15]），亏格 3 超椭圆度量图也有一个完整列表（图2中未标记顶点的亏格 3 热带双曲曲线，Cha13]）。请注意，后一列表中有一个超椭圆度量图，即图 25 中的那个图，但它按我们的定义并非超椭圆。基于此，现在只需对那些热带等价的度量图 Γ 进行构造，其本质模型（G,l）的价数至少为 3。它们见图 1、5、7、9，.....、25。我们根据本质模型（G,l）所含桥的数量，将构造分为四种情形（桥是指在连通图中，删除后会增加其连通分支数量的边）。

情形 1。若度量图 Γ 没有桥，则 Γ 是图 1、5、7、9、11 或 13 所示的度量图之一。

情形 1 的解。

情形 1.1。考虑度量图 Γ，其本质模型 (G,l) 如图 1 所示，其中图 $G=(V,E,\partial)$ 由 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,$E=\{e_1,e_2,\dots,e_6\}$ 给出，而 $\partial(e_1)=\{v_1,v_2\}$, $\partial(e_2)=\{v_1,v_3\}$, $\partial(e_3)=\{v_4,v_1\}$,$\partial(e_5)=\{v_2,v_3\}$，以及 $\partial(e_6)=\{v_2,v_4\}$。$E$ 上的长度映射 l 定义为赋予 $e_1\mapsto a, e_2\mapsto b, e_3\mapsto c, e_4\mapsto d, e_5\mapsto e$ 和 $e_6\mapsto f$，其中 a,b,c,d,e 和 f 均为正实数。

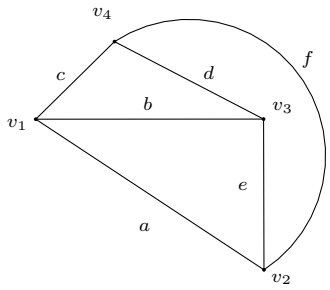


图1. Γ的本质模型（G, l）

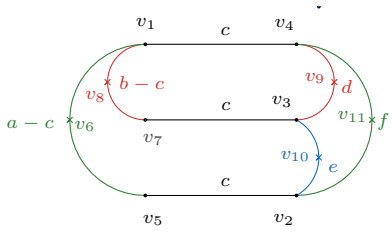
任取一个顶点，例如 $v_1 \in V(G)$，不失一般性地假设 $c \leqslant b \leqslant a$。只需考虑以下三种子情形：(A)$c < b \leqslant a$、(B) $c = b < a$ 和 (C) $c = b = a$。我们分别给出各子情形的构造如下。

情形 1.1.A. 令（G_1, l_1）为 Γ 的另一个模型，如图1.1所示，其中图 $G_1 =$ （V_1, E_1, ∂_1）是通过将边 $e_i \in E$ 细分为e_i', e_i'', e_i'''（$i = 1, 2$），并将 $e_j \in E$细分为 e_j', e_j''（$j = 4$, 5, 6）得到的，其定向如下：

$\partial_1(e_1') = \{v_1, v_6\}$	$\partial_1(e_1'') = \{v_6, v_4\}$	$\partial_1(e_1''') = \{v_5, v_2\}$
$\partial_1(e_2'') = \{v_8, v_7\}$	$\partial_1(e_2''') = \{v_7, v_3\}$	$\partial_1(e_4') = \{v_4, v_9\}$
$\partial_1(e_4'') = \{v_9, v_3\}$	$\partial_1(e_5') = \{v_2, v_{10}\}$	$\partial_1(e_5'') = \{v_3, v_{10}\}$
$\partial_1(e_2') = \{v_1, v_8\}$	$\partial_1(e_6'') = \{v_4, v_{11}\}$	$\partial_1(e_6') = \{v_2, v_{11}\}$

以及长度映射 l_1，其在 $E \setminus \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\}$ 上等于 l，而在 $\{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\}$ 上等于

$$l_1(e_1') = l_1(e_1'') = (a-c)/2 \qquad l_1(e_4') = l_1(e_4'') = d/2$$
$$l_1(e_2') = l_1(e_2'') = (b-c)/2 \qquad l_1(e_5') = l_1(e_5'') = e/2$$
$$l_1(e_6') = l_1(e_1''') = l_1(e_2''') = c \qquad l_1(e_6'') = f/2.$$



$\Gamma' = (G', l')$

φ

w_{10}

w_8 w_{11}

w_6

w_1 w_0

$T = (T', t')$

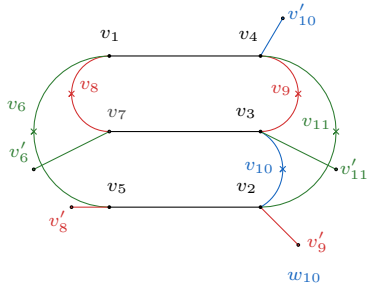
w_9

图1.1。 Γ的模型（G_1, l_1）

设 Γ' 为图 1.2 中带模型 (G', l') 的 Γ 的热带修改，其中图 G' 由其顶点集 $V(G') = V_1 \cup \{v_6', v_8', v_9', v_{10}', v_{11}'\}$ 和边集 $E(G') = E_1 \cup \{v_2v_9', v_3v_{11}', v_4v_{10}', v_5v_8', v_7v_6'\}$ 给出。l' 在 G' 上的长度映射定义为：在 E_1 上为 $l' = l_1$，且

$$l'(v_2v_9') = \frac{d}{2} \qquad l'(v_5v_8') = \frac{b-c}{2}$$
$$l'(v_3v_{11}') = \frac{f}{2} \qquad l'(v_7v_6') = \frac{a-c}{2}.$$
$$l'(v_4v_{10}') = \frac{e}{2}$$

$Curve$



$\Gamma' = (G', l')$

φ

$T = (T', t')$

图 1.2。Γ'的模型（G', l'）

令 T为图1.3中的度量树，其模型为（T', t'），其中树T'的顶点集 $V(T')$ $= \{w_0, w_1, w_6, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}\}$和边集 $E(T')$ $= \{w_0w_1, w_0w_9, w_0w_{10}, w_0w_{11}, w_1w_6, w_1w_8\}$分别给出，而长度映射$t'$ 在 T 上的定义为

$$t'(w_0w_9) = \frac{d}{2} \qquad t'(w_0w_1) = c$$
$$t'(w_0w_{10}) = \frac{e}{2} \qquad t'(w_1w_8) = \frac{b-c}{2}$$
$$t'(w_0w_{11}) = \frac{f}{2} \qquad t'(w_1w_6) = \frac{a-c}{2}.$$

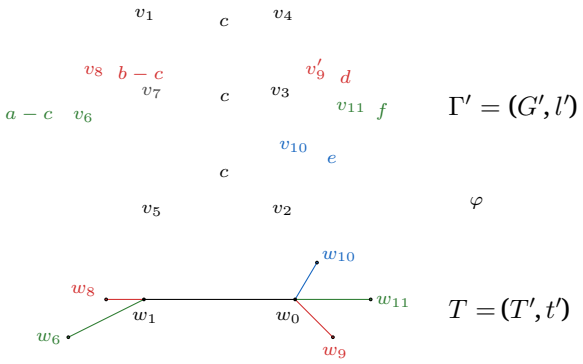


图1.3. T的模型(T', t')

令 $\psi\colon V(G') \to V(T)$ 为顶点集上的映射，定义为 $v_2, v_3, v_4 \mapsto w_0$, v_1, v_7, $v_5 \mapsto w_1$，且对于 $i = 6$，8，9，10，11，有 $v_i, v_i' \mapsto w_i$。那么，映射 ψ满足引理 3.1 中的条件，因此存在唯一的连续映射 $\varphi\colon \Gamma' \to T$，使得 $\varphi|_{V(G')} = \psi$，且 φ 在每条边 $e' \in E(G')$ 上均为线性映射，其斜率为 $t'(e)/l'(e')$，其中 $e = \varphi(e') \in E(T)$ 的端点为 $\psi(v)$ 和 $\psi(w)$。映射 φ 见图 2。根据构造，模型 (G', l') 和 (T', t') 满足定义2.4中的条件，因此，φ 是一个分段线性函数。根据我们对长度映射 t', l'的选择，$\varphi|e'$ 在所有边 e'上的斜率均为 1。因此，φ 沿其线性边具有非零整数斜率。接下来需要证明映射 φ 在每个点 $v \in \Gamma'$处满足 (i) 调和性条件和 (ii) 黎曼-赫尔维茨条件。

(i) 假设 $v \in \Gamma'$ 是一个顶点，记作 $v = v_1 \in V(G')$。那么，对于 $\varphi(v)$处的所有方向 $\vec{w}$，都有$m_{\varphi,\vec{w}}(v_1) = 1$。以类似的方式，我们检查其他每个顶点处的调和性条件；由于顶点集是有限的，这一检查过程会终止。当 v 不是顶点时，设 $v \in$ 属于某条边$e \in E(G')$的内部e，则 $\varphi(v)$属于内部e'，其中 $e' = \varphi(e)$。通过分别添加 v 和 w，得到 Γ' 和 T 上的新顶点集。由于$\mathrm{val}(\varphi(v)) = 2$，$\varphi(v)$处只有两个方向 $\vec{w}_1$ 和 $\vec{w}_2$。φ 在 v 处沿方向 $\vec{w}_1$ 的斜率，与同一线性映射 $\varphi|_e$ 在 $\varphi(v)$处沿方向 $\vec{w}_2$ 的斜率相等，即$m_{\varphi,\vec{w}_1}(v) = m_{\varphi,\vec{w}_2}(v)$，因此我们得到 φ 是一个调和映射。其次数为3，因为对于固定的 $w \in T$，设为 w_1，φ 的次数由下式给出

$$\begin{aligned}\deg(\varphi) &= \sum_{v \in \Gamma', \varphi(v) = w_1} m_\varphi(v) \\ &= m_\varphi(v_1) + m_\varphi(v_7) + m_\varphi(v_5) \\ &= 3.\end{aligned}$$

(ii) 假设 $v \in \Gamma'$ 是一个顶点，记作 $v = v_8 \in V(G')$。那么，$m_\varphi(v_8) = 2$，$\mathrm{val}(v_8) = 2$，且 $\mathrm{val}(\varphi(v_8)) = 1$。因此，

$$(\mathrm{val}(v_8) - 2) - m_\varphi(v_8) \cdot \big(\mathrm{val}\ (\varphi(v_8)) - 2\big) = 2 > 0.$$

同样，我们检查可知，黎曼–赫尔维茨条件在其他每个顶点处也成立。现在，假设 v 不是顶点。考虑

通过分别添加 v 和w，得到 Γ' 和 T 上的新顶点集（与 (i) 部分类似）。于是，我们有 $\mathrm{val}(v) = \mathrm{val}(\varphi(v)) = 2$，因此黎曼–赫尔维茨条件成立。

由 (i) 和 (ii)，我们得到映射 $\varphi\colon \Gamma' \to T$ 是一个次数为 3 的度量图热带态射，因此，情形 1.1.A 的解已完成。

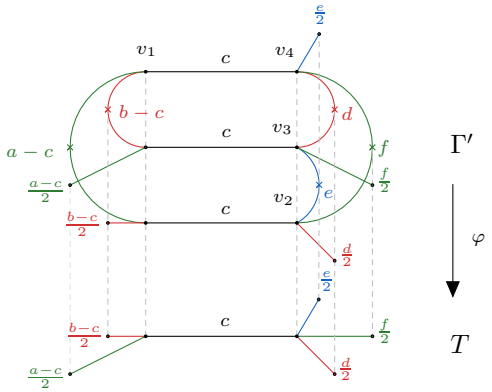


图 2. 热带态射 $\varphi\colon \Gamma' \to T$

备注 3.1 设 $\varphi\colon \Gamma' \to T$ 是一个非常值的分段线性映射，且具有非零整数斜率（如情形 1.1.A 中所示），其中分别取 Γ'、T 的模型 (G', l')、(T', t')，使其满足定义2.4中的条件。为了证明 φ 在 Γ' 上满足调和性和黎曼–赫尔维茨条件，只需检查这些条件在顶点处是否成立。这是由上文的 (i) 和 (ii) 得出的。

情形 1.1.B. 令Γ_1' 为 Γ 的热带修改，其模型为（G_1'，l_1'），其中图 G_1' 是通过收缩图 1.2 中 G'的边 v_1v_8、v_8v_7和 v_5v_8'得到的。令 T_1为度量树，其模型为（T_1'，t_1'），其中树 T_1'是通过收缩图 1.3 中 T'的边 w_1w_8得到的。接下来，令ψ_1： V（G_1'）$\to V$（T_1）为顶点集上的映射，该映射由 v_2、v_3、$v_4 \mapsto w_0$、v_1、$v_5 \mapsto w_1$以及 v_i、$v_i' \mapsto w_i$对应于 $i = 6$、9、10、11给出。该映射 ψ满足引理 3.1 中的条件，因此存在唯一的连续映射 φ_1： $\Gamma_1' \to T_1$，如图3所示，使得$\varphi_1|_{V(G_1')} = \psi_1$，并且 φ_1在每条边$e' \in E$（G_1'）上都是线性的，斜率为 t_1'（e）$/l_1'$（e'），其中 $e = \varphi_1$（e'）$\in E$（T_1），端点为ψ_1（v）和 ψ_1（w）。按照 (i) 和 (ii) 中的推理可知， φ_1 是次数 3 的热带映射，因此情形 1.1.B 的解得证。

Curve

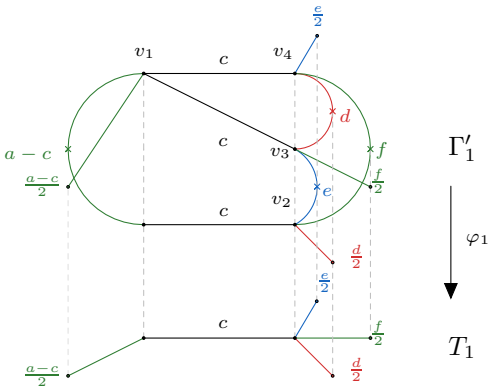


图3。热带映射 φ_1： $\Gamma_1' \to T_1$

Curve

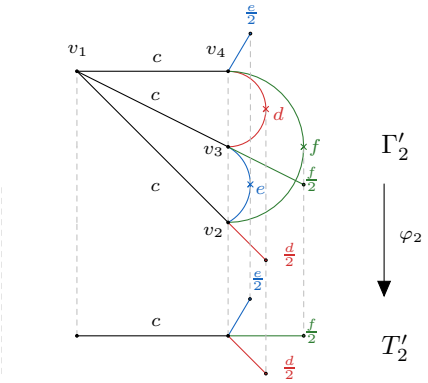


图4。热带映射 φ_2： $\Gamma_2' \to T_2$

情形 1.1.C. 令 Γ_2' 为 Γ 的热带修改，其模型为（G_2'， l_2'），其中 G_2' 是按照图 1.2 所示，通过收缩图 G' 的边 v_1v_6、 v_6v_5、 v_7v_6'、 v_1v_8、 v_8v_7 和v_5v_8' 得到的。令 T_2 为度量树，其模型为（T_2'， t_2'），其中树 T_2'是按照图 1.3 所示，通过收缩树 T' 的边 w_1w_6和w_1w_8得到的。接下来，令 ψ_2： V（G_2'） $\to V$（T_2）为顶点集上的映射，该映射由 v_2、 v_3、 $v_4 \mapsto w_0$、 $v_1 \mapsto w_1$ 以及 v_i、 $v_i' \mapsto w_i$ 对应于$i = 9$、10、11给出。函数 ψ_2 满足引理 3.1 中的条件，因此存在唯一的连续映射 φ_2： $\Gamma_2' \to T_2$，如图4所示，使得$\varphi_2|_{V(G_2')} = \psi_2$，并且 φ_2 在每条边 $e' \in E$（G_2'）上都是线性的，斜率为 t_2'（e）/l_2'（e'），

其中 $e = \varphi_2(e') \in E(T_2)$，端点为 $\psi_2(v)$和 $\psi_2(w)$。按照 (i) 和 (ii) 中的推理，我们得出 φ_2 是一个次数 3 的热带映射，因此情形 1.1.C 的解法完成。

情形 1.2。考虑图 5 中具有本质模型 (G, l) 的度量图 Γ 。图 G 由其顶点集 $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$和边集 $E(G) = \{v_1v_2, v_3v_4, e_1, e_2, e_3, e_4\}$给出，其中 e_1, e_2（分别为 e_3, e_4）是端点为 v_1, v_4（分别为 v_2, v_3）的两条边。长度映射 $l\colon E(G) \to (0, \infty)$ 的定义为赋值 $v_1v_2 \mapsto a, v_3v_4 \mapsto b, e_1 \mapsto c, e_2 \mapsto d, e_3 \mapsto e$ 和 $e_4 \mapsto f$，其中 a, b, c, d, e和 f 是满足 $a < b$的正实数。注意，若$a = b$，则 Γ 是一个超椭圆度量图。

$Curve$

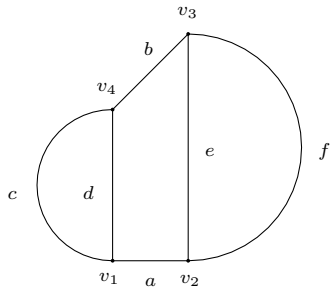


图 5. Γ 的本质模型 (G, l)

设 (G_1, l_1) 是 Γ 的另一个模型，如图 5.1 所示。图 G_1 由 G 通过细分以下边得到：将 $v_3v_4 \in E(G)$ 细分为 v_3v_6, v_6v_5, v_5v_4；将 $e_1 \in E(G)$ 细分为 v_1v_7, v_7v_4；将 $e_2 \in E(G)$ 细分为 v_1v_8, v_8v_4；将 $e_3 \in E(G)$ 细分为 v_2v_9, v_9v_3；以及将 $e_4 \in E(G)$ 细分为 $v_2v_{10}, v_{10}v_3$，使得

$$
\begin{aligned}
l_1(v_3v_6) = l_1(v_6v_5) &= \frac{b-a}{2} & l_1(v_4v_5) &= a \\
l_1(v_1v_7) = l_1(v_7v_4) &= \frac{c}{2} & l_1(v_2v_9) = l_1(v_9v_3) &= \frac{e}{2} \\
l_1(v_1v_8) = l_1(v_8v_4) &= \frac{d}{2} & l_1(v_2v_{10}) = l_1(v_{10}v_3) &= \frac{f}{2}.
\end{aligned}
$$

Curve

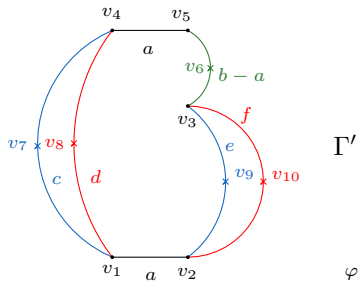


图 5.1。 $\Gamma_{\frac{e}{2}}$ 的模型 $(G_1, {}^{b-a}l_1)$

a $\quad$ $\frac{f}{2}$ $\quad$ T

$\frac{d}{2}$ $\quad$ $\frac{e}{2}$

设 Γ' 是 Γ 的热带修改，其模型为 (G', l')，如图 5.2 所示，其中图 G' 的顶点集为 $V(G') = V(G_1) \cup \{v_6', v_7', \ldots, v_{11}'\}$，边集为 $E(G') = \{v_2v_6', v_3v_{11}', v_{11}'v_7', v_{11}'v_8', v_5v_9', v_5v_{10}'\} \cup E(G_1)$。$G'$ 上的长度映射 l' 由 $E(G_1)$ 上的 $l' = l_1$ 给出，并且

$$l'(v_1v_7) = l'(v_7v_4) = l'(v_{11}v_7') = \frac{c}{2} \quad l'(v_5v_{10}') = l'(v_2v_{10}) = l'(v_{10}, v_3) = \frac{f}{2}$$
$$l'(v_{11}v_8') = l'(v_1v_8) = l'(v_8v_4) = \frac{d}{2} \qquad l'(v_2v_6') = l'(v_3v_6) = l'(v_6v_5) = \frac{b-a}{2}$$
$$l'(v_5v_9') = l'(v_2v_9) = l'(v_9, v_3) = \frac{e}{2} \qquad l'(v_1v_2) = l'(v_4v_5) = l'(v_3v_{11}) = a.$$

Curve

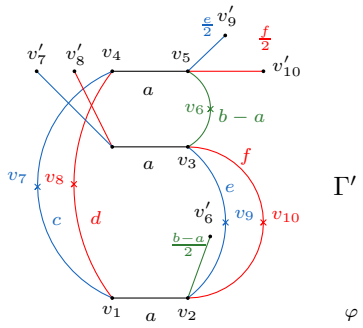


图 5.2。 $\Gamma'_{\frac{e}{2}}$ 的模型 $(G', {}^{b-a}l')$

a $\quad$ $\frac{f}{2}$ $\quad$ T

$\frac{d}{2}$ $\quad$ $\frac{e}{2}$

取 T 为图 5.3 中模型为 (T', t') 的度量树，其中树 T' 的顶点集 $V(T') = \{w_1, w_2, w_6, w_7, \ldots, w_{10}\}$ 和边集 $E(T') = \{w_1w_2, w_1w_7, w_1w_8, w_2w_6, w_2w_9, w_2w_{10}\}$ 给定。T' 上的长度映射 t'

定义为

$$t'(w_2w_1) = a \qquad t'(w_1w_8) = \frac{d}{2}$$
$$t'(w_2w_6) = \frac{b-a}{2} \qquad t'(w_2w_9) = \frac{e}{2}$$
$$t'(w_1w_7) = \frac{c}{2} \qquad t'(w_2w_{10}) = \frac{f}{2}.$$

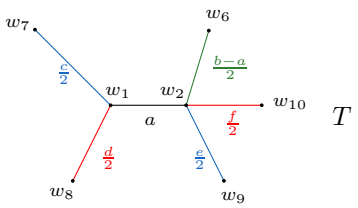
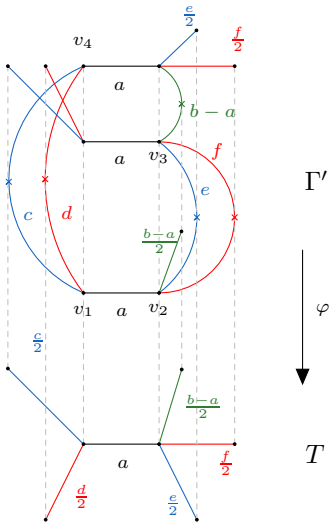


图 5.3。 T的模型（T'， t'）

令 ψ： $V(G')\to V(T)$ 为顶点集上的映射，定义为 $v_1, v_4, v'_{11}\mapsto w_1$， $v_2, v_3, v_5\mapsto w_2$，且对 $i=6$，8，9，10，11，有 $v_i, v'_i\mapsto w_i$。函数 ψ满足引理 3.1 中的条件，因此存在唯一的连续映射 φ： $\Gamma'\to T$，如图6所示，使得 $\varphi|_{V(G')}=\psi$，且 φ在每条边 $e'\in E(G')$ 上均为斜率为 $t'(e)/l'(e')$ 的线性映射，其中 $e=\varphi(e')\in E(T)$ 的端点为 $\psi(v)$ 和 $\psi(w)$。热带态射 φ： $\Gamma'\to T$ 的次数为 3，主要是因为 (i) 和 (ii) 中的推理。

注 3.2 其余度量图的热带态射构造与情形 1.1.A 中度量图的构造类似。为避免繁琐的文字说明，下面我们将仅使用图示来给出一个模型、一个热带修改、一个度量树和一个热带态射的构造。标有小写 $\times$ 的顶点是边的“中点”，也就是说，将一条边 e 细分为 e_1 和 e_2 时， e_1 和 e_2 的长度都等于边 e 长度的一半。

Curve



Curve

图6。热带态射 φ： $\Gamma' \to T$

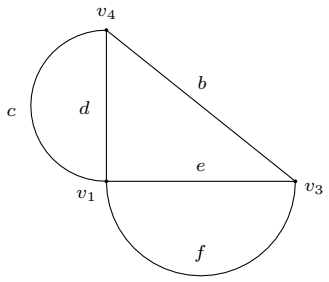


图7。 Γ_1的本质模型（G， l）

情形1.3。考虑度量图 Γ_1 ，其本质模型（G， l）见图7，其中 b、c、d、e 和 f 为正实数。通过细分（G， l）得到的模型（G_1， l_1）如图 7.1 所示。热带修改Γ_1'以及带有模型（G_1'， l_1'）和（T_1'， t_1'）的度量树 T_1 分别见图 7.2 和图 7.3。次数 3 的热带态射 φ_1： $\Gamma_1' \to T_1$ 的构造见图8。

Curve

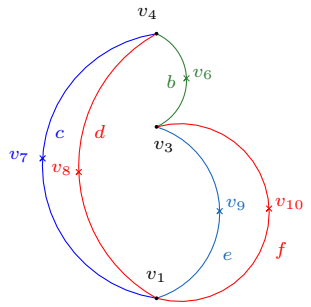


图 7.1。 Γ_1 的模型 (G_1, l_1)

Curve

Curve

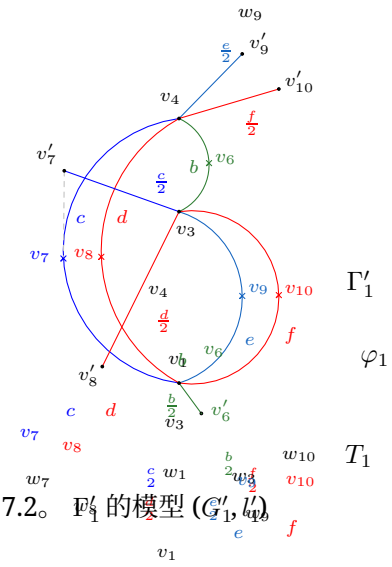


图 7.2。 Γ'_1 的模型 (G'_1, l'_1)

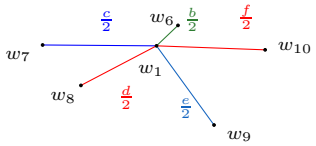


图 7.3。 T_1 的模型 (T'_1, t'_1)

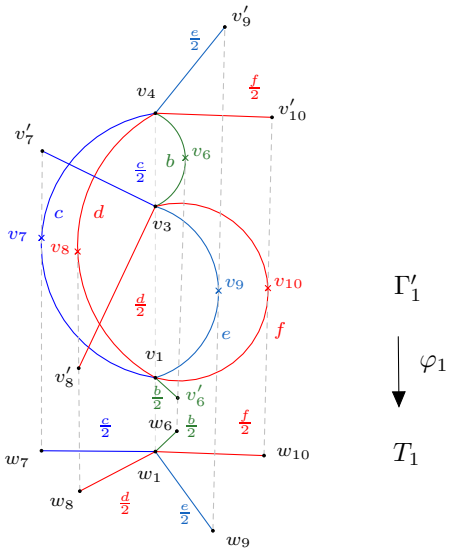


图8。热带态射 $\varphi_1 :\ \Gamma_1' \to T_1$

情形 1.4。考虑度量图 Γ_2，其本质模型如图 9 所示，其中 a、b、c、d 和 e 均为满足 $b > a$ 的正实数。注意，若 $a = b$，则 Γ_2 是一个超椭圆度量图。通过细分 (G, l) 得到的模型 (G_1, l_1) 如图 9.1 所示。

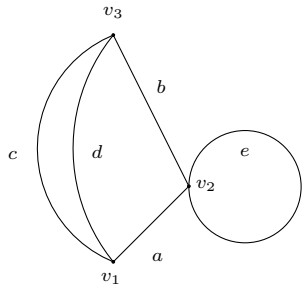


图 9。 Γ_2 的本质模型 (G, l)

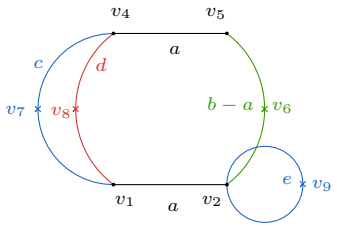


图 9.1。 Γ_2的模型（G_1, l_1）

热带修改 Γ_2'、度量树 T_2 及其模型（G_2', l_2'）、（T_2', t_2'）分别见图 9.2、图 9.3。

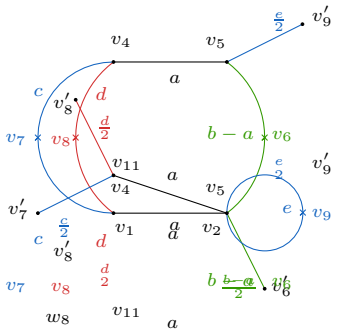


图 9.2。 Γ_2'的模型（G_2', l_2'）

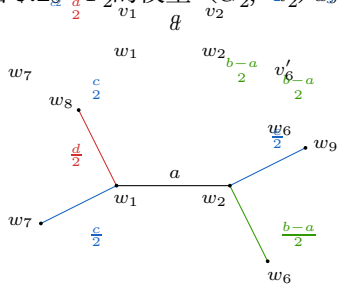


图 9.3。 T_2 的模型 (T_2', t_2')

次数 3 的热带态射 φ_2： $\Gamma_2' \to T_2$ 的构造如图 10 所示。

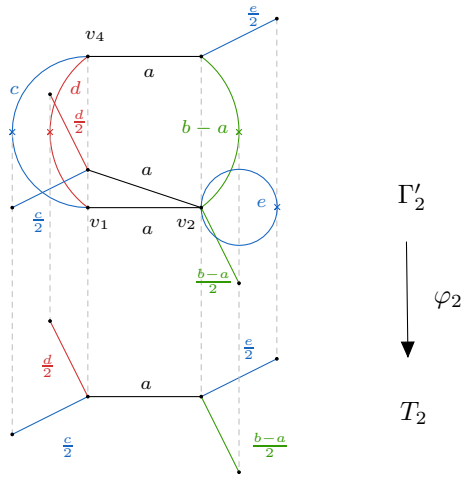


图 10. 热带态射 $\varphi_2 : \Gamma_2' \to T_2$

情形 1.5. 考虑图 11 中具有本质模型 (G, l) 的度量图 Γ_3，其中 a、b、c 和 e 是满足 $b > a$ 的正实数。注意，若 $a = b$，则 Γ_2 是超椭圆度量图。通过细分 (G, l) 得到的模型 (G_1, l_1) 如图 11.1 所示。热带修改 Γ_3'，以及具有模型 (G_3', l_3')、(T_3', t_3') 的度量树 T_3，分别如图 11.2、11.3 所示。次数 3 的热带态射 $\varphi_3 : \Gamma_3' \to T_3$ 的构造如图 12 所示。

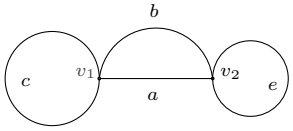


图 11. Γ_3 的本质模型 (G, l)

Curve

Curve

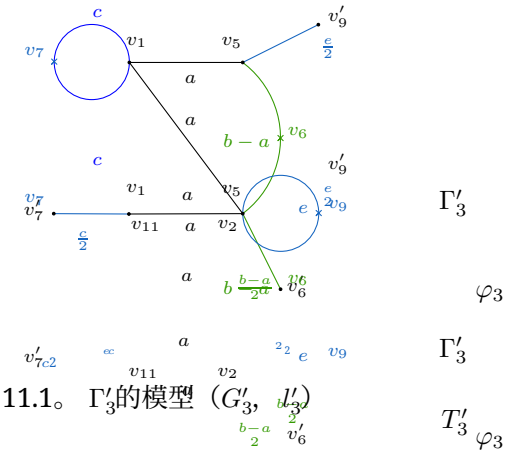


图 11.1。 Γ_3'的模型（G_3', l_3'）

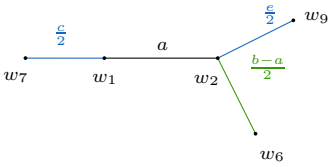


图 11.2。 T_3的模型（T_3', t_3'）

Curve

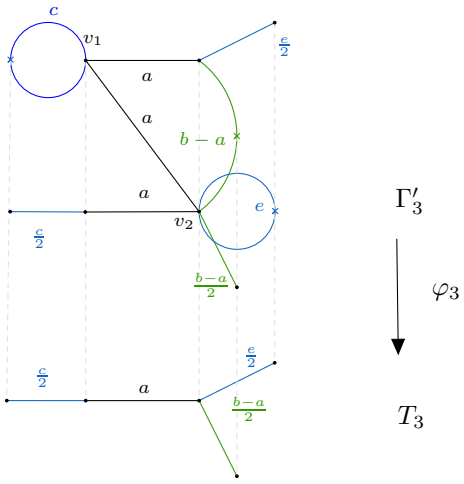


图 12。热带态射 φ_3： $\Gamma_3' \to T_3$

情形 1.6。考虑图 Γ_4 ，其本质模型 (G,l) 如图13所示，其中 b、c、d 和 e 均为正实数。将 (G,l) 细分后得到的模型 (G_1,l_1) 如图13.1所示。热带修改 Γ_4'、度量树 T_4 及其模型 (G_4',l_4')、(T_4',t_4') 分别如图13.2和图13.3所示。次数 3 的热带态射 $\varphi_4:\Gamma_4'\to T_4$ 的构造如图14所示。

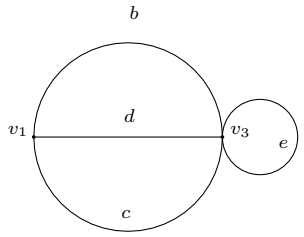
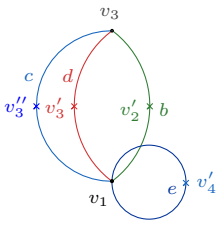
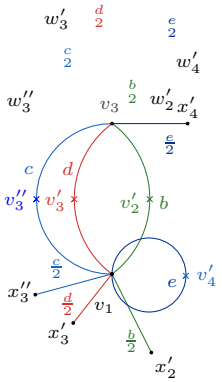


图13。 Γ_4 的本质模型 (G,l)



Γ_4'

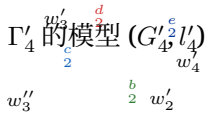
图13.1。 Γ_4 的模型 (G_1,l_1)



T_4

Γ_4'

图13.2。 Γ_4' 的模型 (G_4',l_4')



T_4

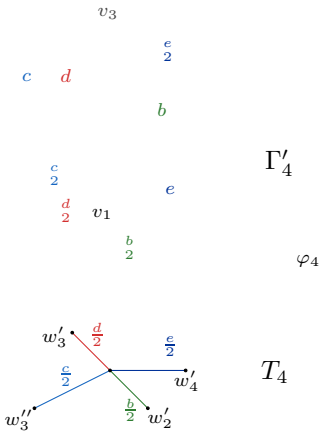


图13.3。 T_4的模型（T'_4， t'_4）

Curve

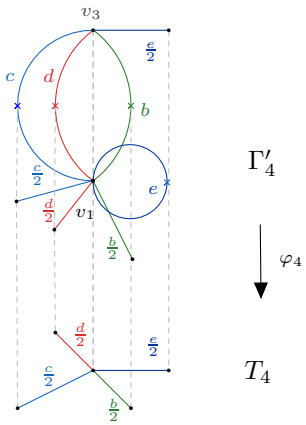


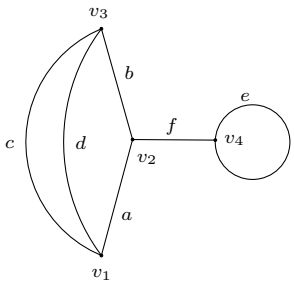
图14。热带态射 φ_4： $\Gamma'_4 \to T_4$

情形2。如果度量图 Γ 有1条桥，那么 Γ 是图15、17或19所示的度量图之一。

情形2的解。

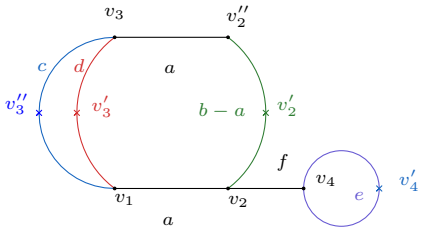
情形2.1。考虑图15中具有本质模型（G， l）的度量图 Γ ，其中 a、 b、 c、 d、 e和 f是满足 $b > a$的正实数。注意，如果 $a = b$，那么 Γ 是一个超椭圆度量图。通过细分（G， l）得到的模型（G_1， l_1）如图15.1所示。热带修改 Γ'、具有模型（G'， l'）的度量树 T以及（T'， t'）分别见图15.2和15.3。次数为3的热带态射 φ： $\Gamma' \to T$的构造如图16所示。

Curve



Curve

图15. Γ的本质模型(G,l)

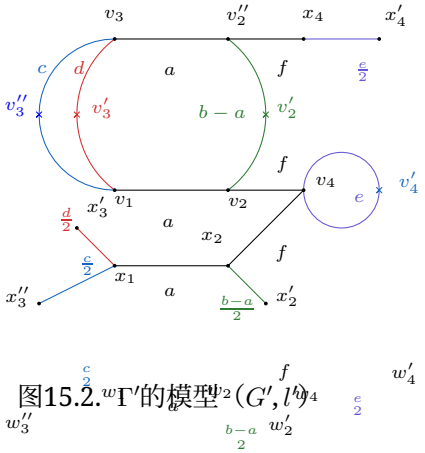


Γ'

φ

Curve

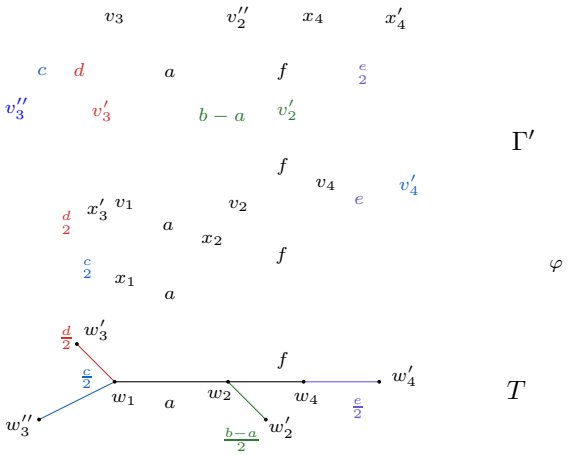
图15.1. $w\Gamma$的模型(G_1,l_1) T



Γ'

φ

图15.2. $w\Gamma'$的模型(G',l') T



Curve

图15.3。 T的模型（T', t'）

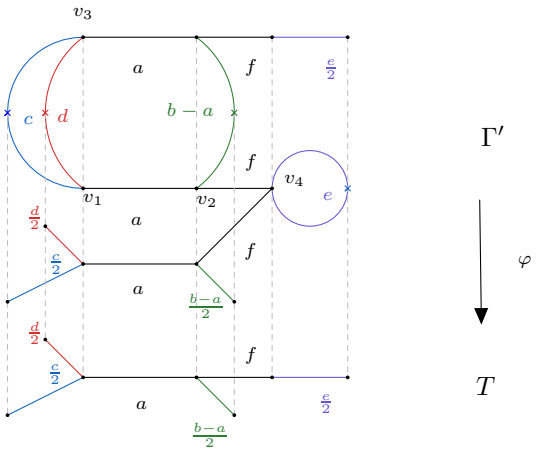


图16。热带态射 φ： $\Gamma' \to T$

情形2.2。考虑图17中具有本质模型（G, l）的度量图 Γ_1 ，其中 a、b、c、d 和 e 是满足 $b > a$ 的正实数。注意，若 $a = b$，则 Γ_2 是超椭圆度量图。通过细分（G, l）得到的模型（G_1, l_1）如图17.1所示。热带修改Γ_1'、具有模型（G_1', l_1'）的度量树 T_1，以及（T_1', t_1'）分别如图17.2、17.3所示。次数 3 的热带态射 φ: $\Gamma_1' \to T_1$ 的构造如图18所示。

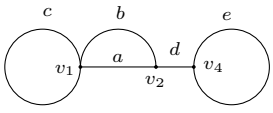
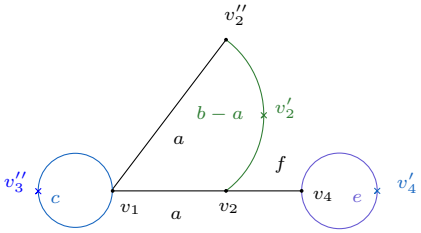


图17。 Γ_1的本质模型（G, l）

Curve

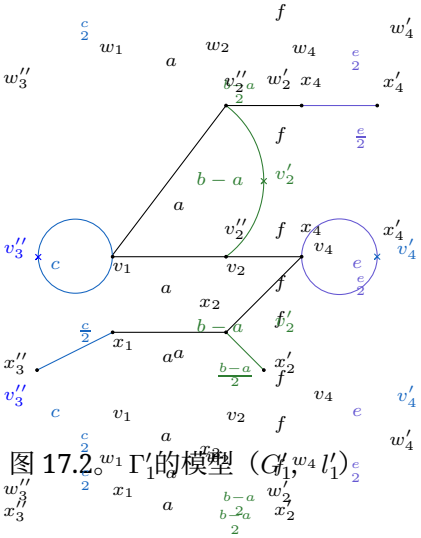


Γ_1'

Curve

x_3'' x_2'

图 17.1。 Γ_1的模型（G_1， l_1）



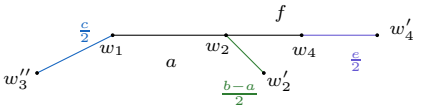
Γ_1'

T_1

Γ_1'

T_1

图 17.2。 Γ_1'的模型（G_1'， l_1'）



T_1

图 17.3。 T_1的模型（T_1'， t_1'）

Curve

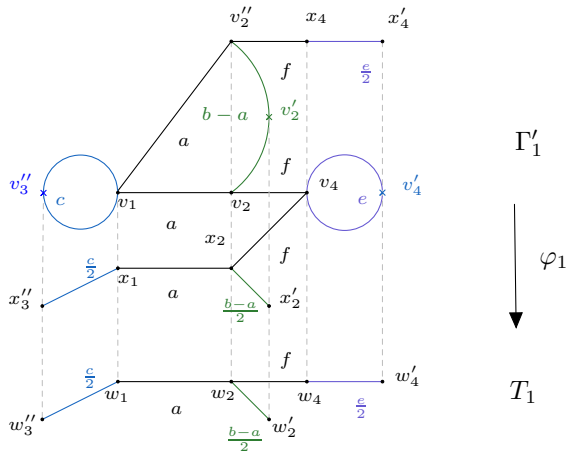


图18。热带态射 φ_1： $\Gamma_1 \to T_1$

情形 2.3。考虑图19中的度量图 Γ_2 及其本质模型，其中 a、b、c、d、e 和 f 均为正实数。通过细分(G, l)得到的模型(G_1, l_1)如图 19.1 所示。热带修改Γ_2'、带有模型(G_2', l_2')的度量树 T_2 以及(T_2', t_2')7分别如图19.2、19.3所示。次数 3 的热带态射 φ_2： $\Gamma_2' \to T_2$ 的构造如图20所示。

Curve

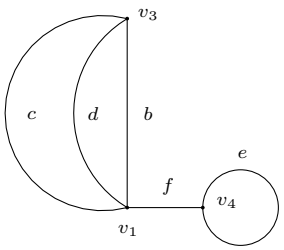
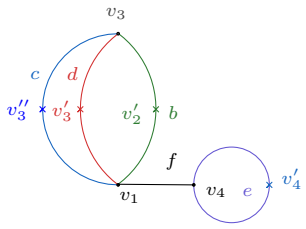


图19。 Γ_2的本质模型(G, l)

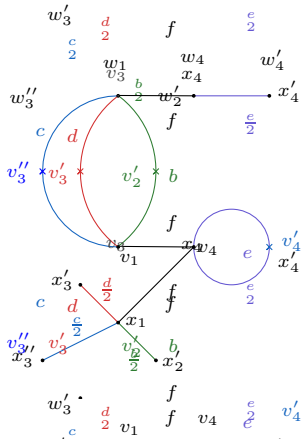
Curve



Γ_2'

图 19.1。Γ_2的模型（G_1, l_1）

Curve



T_2

Curve

Γ_2'

φ_2

T_2

图 19.2。Γ_2'的模型（G_2', l_2'）

Γ_2'

φ_2

T_2

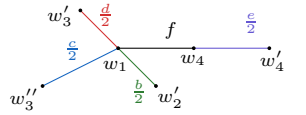


图 19.3。T_2的模型（T_2', l_2'）

Curve

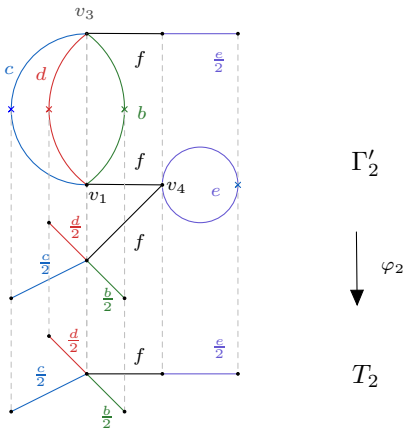


图 20. 热带态射 $\varphi_2 : \Gamma_2' \to T_2$

情形3. 若度量图 Γ 有 2 座桥，则 Γ 是图 21 或图 23 所示的度量图之一。

情形3的解。

情形3.1. 考虑本质模型为图 21 中的（G, l）的度量图 Γ ，其中 a、 b、 c、 d、 e和 f是满足 $b > a$的正实数。注意，若 $b = a$，则 Γ 是超椭圆度量图。通过细分（G, l）得到的模型（G_1, l_1）如图 21.1 所示。热带修改Γ'、模型为（G', l'）的度量树 T以及（T', t'）分别如图 21.2 和 21.3 所示。次数 3 的热带态射 $\varphi : \Gamma' \to T$ 的构造如图 22 所示。

Curve

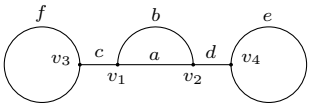


图21。 Γ 的本质模型（G， l）

Curve

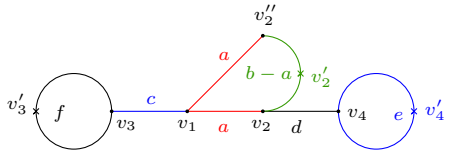


图 21.1。 Γ 的模型（G_1, x_1'）

Curve

Curve

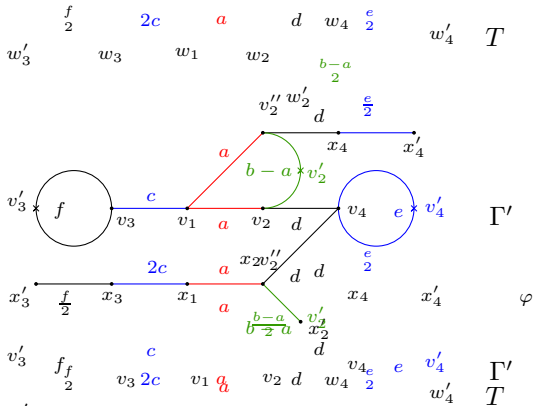


图 21.2。 Γ 的模型（G', t'）

图 21.3。 T 的模型（T', t'）

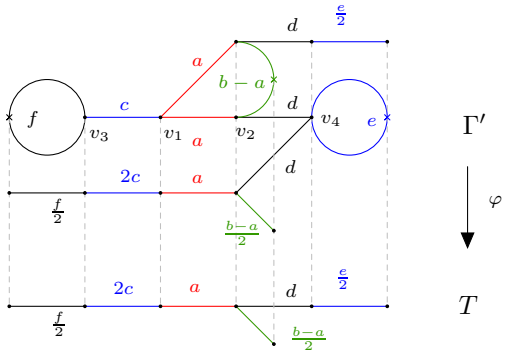


图 22. 热带态射 φ： $\Gamma' \to T$

情形 3.2. 考虑度量图 Γ_1，其本质模型（G，l）如图 23 所示，其中 a、b、c、d、e 和 f 为正实数。通过细分（G，l）得到的模型（G_1，l_1）如图 23.1 所示。热带修改 Γ_1' 以及具有模型（G_1'，l_1'）的度量树 T_1（T_1'，t_1'）分别见图 23.2 和图 23.3。次数 3 的热带态射 φ_1： $\Gamma_1' \to T_1$ 的构造如图 24 所示。

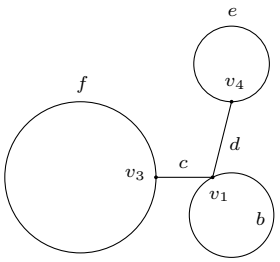
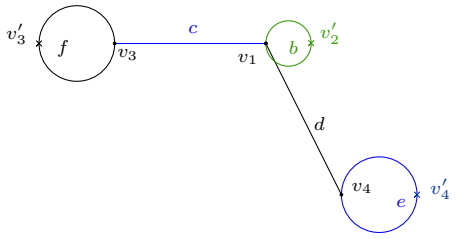


图 23. Γ_1 的本质模型（G，l）

Curve



Γ_1'

φ_1

图 23.1。 Γ_1 的模型 (G_1, t_1)

w_3' $\frac{f}{2}$ w_3 w_1 w_4 $\frac{e}{2}$ w_4' T_1

Curve

Curve

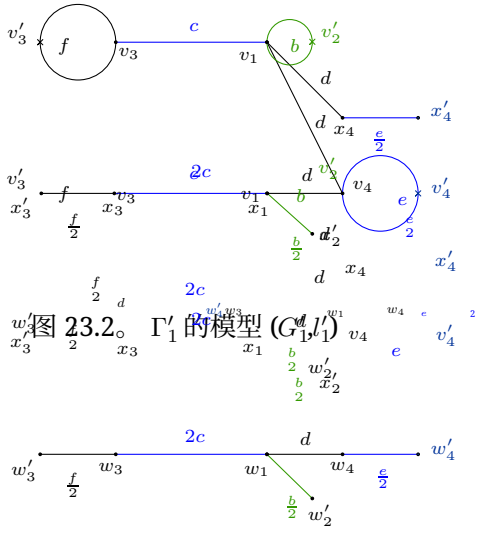


图 23.2。 Γ_1' 的模型 (G_1', t_1')

图 23.3。 T_1 的模型 (T_1', t_1')

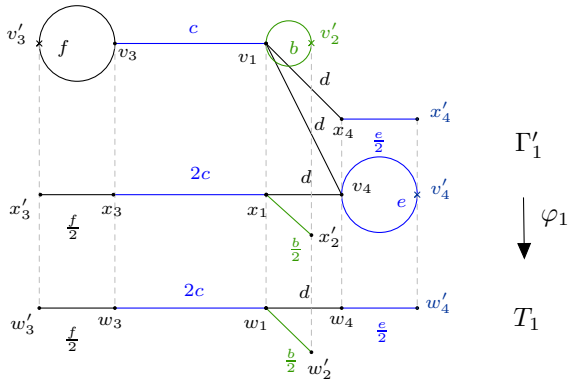


图 24. 热带态射 φ_1： $\Gamma_1' \to T_1$

情形 4. 若度量图 Γ 有 3 条桥，则 Γ 是图 25 所示的度量图。

情形 4 的解。

考虑图 25 中具有本质模型（G， l）的度量图 Γ，其中a、 b、 c、 d、 e和 f均为正实数。注意，度量图 Γ 在 Kawaguchi-Yamaki KY15] 的意义下是超椭圆的，即存在从 Γ 到某个度量树的调和映射，但它在我们的意义下并非超椭圆，因为由Γ 上的唯一超椭圆对合 ι （见定理 3.5，KY15]）导出的调和映射在我们的意义下不是热带态射，因为它不满足黎曼–赫尔维茨条件。通过细分（G, l）得到的模型（G_1， l_1）如图 25.1 所示。热带修改Γ'、具有模型（G'， l'）的度量树 T以及（T'， t'）分别如图 25.2、25.3 所示。次数 3 的热带态射 φ： $\Gamma' \to T$ 的构造见图 26。至此，我们完成了对问题 1 的构造性解答。

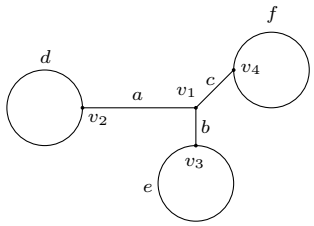


图 25。 Γ 的本质模型 (G, l)

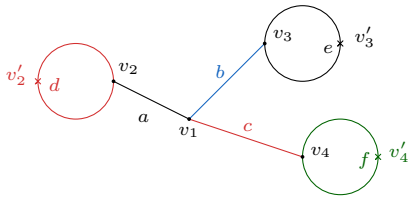


图 25.1。 Γ 的模型 $(G_1,\ l_1)$

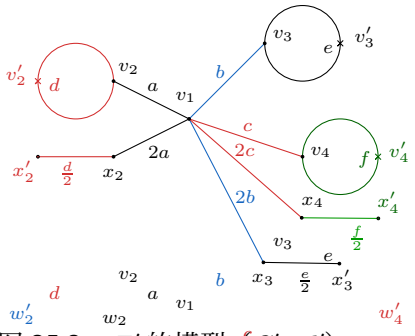


图 25.2。 Γ' 的模型 $(G',\ l')$

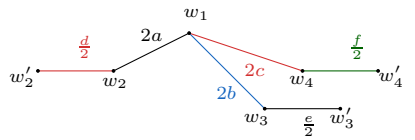


图 25.3。 T 的模型 $(T',\ t')$

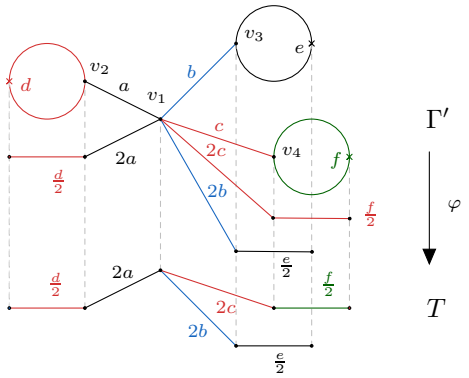


图 26. 热带态射 $\varphi\colon \Gamma' \to T$

参考文献

[KY15] Shu Kawaguchi 和 Kazuhiko Yamaki, *Rank of Divisors on Hyperelliptic Curves and Graphs Under Specialization*, 第 12 卷, 2015 年。[Cha13] Melody Chan, *Tropical hyperelliptic curves*, 第 37 卷, 2013 年。[BN07] Matthew Baker 和 Serguei Norine, *Riemann-Roch and Abel - Jacobi theory on afinite graph*, 第 215 卷, 2007 年。[Cap14] Lucia Caporaso, *Gonality of Algebraic Curves and Graphs*, 第 71 卷, 2014 年。[Mik17] Grigory Mikhalkin, *Tropical Geometry and Its Applications*, 2017 年。[BBM11] Benoˆıt Bertrand、Erwan Brugall´e 和 Grigory Mikhalkin, *Tropical Open Hurwitz Numbers*, 第 125 卷, 2011 年。[Bak08] Matthew Baker, *Specialization of linear systems from curves to graphs*, 第 2 卷, 2008 年。[BN09] Matthew Baker 和 Serguei Norine, *Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs*, 第 2009 卷, 2009 年。[CKK15] Gunther Cornelissen、Fumiharo Kato 和 Janne Kool, *A combinatorial Li-Yauinequality and rational points on curves*, 第 1-2 卷, 2015 年。[BN19] Matthew Baker 和 Serguei Norine, *Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs*, 第 2009 卷, 2019 年。[CD18] Filip Cools 和 Jan Draisma, *On Metric Graphs with Prescribed Gonality*, 第 156 卷, 2018 年。[DV19] Jan Draisma 和 Alejandro Vargas, *Catalan-many tropical morphisms to trees; PartI: Constructions*, *https://arxiv.org/abs/1909.12924*, 2019 年。[Cin15] Zubeyir Cinkir, *Admissible invariants of genus 3 curves*, Manuscripta math 148 (2015), 317-339。[Kag18] Yuki Kageyama, *Divisorial condition for the stable gonality of tropical curves*, *https://arxiv.org/abs/1801.07405*, 2018 年。