arXiv:2301.01994v1 [math.FA] 5 Jan 2023

常返图与（强）可解图

DANIEL LENZ、Simon Puchert 和 Marcel Schmidt

Abstract. 我们提出了一种研究无限加权图常返性及非恒定调和函数存在性的新方法。该方法基于内在度量下度量边界子集的容量。其主要工具是此类边界中的极集与路径零测集之间的联系。这种联系依赖于适当发散的有限能量函数。

1. Introduction

无限加权图（有时称为网络）上的位势理论研究其诱导的图能量泛函及其导出量（例如调和函数、随机游走、电阻、拉普拉斯算子等）。正如 Yamasaki 在开创性著作中所指出的， [27, 16, 28], 所谓的无限路径零测集在这一理论中发挥着重要作用。关于 Yamasaki 的研究（及其后续发展）的全面介绍，请参阅该书 [22]。

研究加权图位势理论的另一种方法是借助狄利克雷型。图能量诱导出一种狄利克雷型，进而引出集合容量的概念。在这种表述中，容量为零的集合（即所谓的极集）是理解狄利克雷型性质的关键。与图上的情形不同，对于一般的狄利克雷型，路径的概念可能毫无意义。相反，对于许多应用而言，将内在度量作为几何输入已被证明十分有效，参见例如 [23, 24, 25, 3, 10]。

本文沿着内在度量这一思路展开。我们的主要观察揭示了图的某些度量边界中的极集与路径零测集之间的联系，参见定理 3.6。这为以路径零测集表述的经典结果提供了新的视角，并使我们能够证明新的定理。本文着重讨论其对常返性以及有限能量非恒定调和函数存在性的推论：

我们证明了常返性的一种新刻画，它以存在具有有限球的内在度量为依据，见定理 4.2。进而，这为 Yamasaki 提出的经典常返性刻画提供了一种替代证明，见推论 4.3；此外，我们还从度量边界为极集的角度刻画了常返性，见推论 4.4 和定理 4.5。

随后，我们转而研究非恒定调和函数的存在性问题。同样，我们借助边界上的容量来处理这一问题。具体而言，我们引入强可解性的概念，它本质上是 [2] 中所研究的可解性概念的一个不依赖路径、以容量为基础的版本。我们证明，强可解的暂态图存在有限能量的非恒定调和函数，见推论 5.8 和推论 5.9。由于强可解性强于可解性（这是前文提到的主要观察的推论），我们还证明，有界几何的局部有限平面图——可解图的主要实例类别——甚至是强可解的。由此，我们得以重新得到 [2] 中的一项主要结果：有界几何的暂态局部有限平面图存在有限能量的非恒定调和函数。值得注意的是，近期已有研究对平面图的调和函数空间给出了更精确的描述，见 [1, 5, 9], ；这些结果超出了我们理论的讨论范围。平面图具有有界几何且强可解的另一推论是，它们绝不可能可典范紧化，见定理 6.4。后一类图由 [6] 引入并加以研究。

我们的结果表明，常返性理论中的两个基本问题——常返性的刻画和非恒定调和函数的存在性——可以自然地通过（适当的）度量边界的容量来理解：常返意味着度量边界在零容量的意义下可忽略；而非恒定调和函数的存在，则由这类边界结构具有一定丰富性所蕴含，也就是说，整个边界具有正容量，且该容量并未集中于单个点。

由于我们的方法不依赖路径，而只依赖内在度量，因此不像经典情形中有时那样受限于局部有限图。此外，这些方法还可以适配到更一般的狄利克雷空间，甚至适用于非线性能量。我们将在后续研究中探讨这两个方向。

本文部分内容基于 Simon Puchert 的硕士论文。

致谢：谨此感谢德国研究联合会提供的部分资助，尤其是其“无穷远处的几何”优先计划的资助。

2. Preliminaries

本节将介绍全文中使用的记号和对象。对于 $a, b \in \mathbb{R}$，我们令 $a \wedge b = \min\{a, b\}$ 和 $a \vee b = \max\{a, b\}$。此外，$a_+ = a \vee 0$ 和 $a_- = (-a)_+$。我们将此记号逐点推广到实值函数。

2.1. 图与狄利克雷能量。

我们对图的研究基于狄利克雷能量这一解析工具。

图 $G = (X, b)$ 由一个非空可数集 X 及一个对称的边权函数 $b\colon X \times X \to [0, \infty)$ 构成，其中 X 的元素称为节点或顶点，并满足以下条件：边权 b 在对角线上为零，即对所有 $x \in X$， $b(x, x) = 0$，且加权顶点度

$$\deg(x) := \sum_{y \in X} b(x, y)$$

对所有 $x \in X$ 都必须是有限的。如果加权顶点度有上界，我们就说该图具有有界几何。如果函数 b 只取 $\{0, 1\}$ 中的值，则称图 (X, b) 为组合图。

如果 $b(x, y) > 0$，则称两个顶点 $x, y \in X$ 由边 (x, y) 连接。在这种情况下，我们记作 $x \sim y$。注意，由于 b 是对称的，当且仅当 $y \sim x$ 时，有 $x \sim y$。G 的所有（有向）边的集合记为

$$E := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}.$$

如果对所有 $x \in X$，其邻点集合 $\{y \in X \mid x \sim y\}$ 都是有限的，我们就称图为局部有限图。如果每个顶点的邻点集合的基数都被某个统一常数所界定，则称局部有限图为有界度图。

G 中的一条路径是由节点构成的（有限或无限）序列（$x_1, x_2, \ldots$），满足 $x_i \sim x_{i+1}$，其中 $i = 1, 2, \ldots$。如果存在一条有限路径（$x = x_1, \ldots, x_n = y$），我们就称两点 $x, y \in X$相连。这在顶点集上定义了一个等价关系，由此得到的等价类称为连通分支。从现在起，我们通常默认图 G 是连通的，而不再特别说明。这并非实质性限制，因为本文中的所有讨论都可以归结到连通分支上。

我们赋予 X 离散拓扑，并用 $C(X)$ 表示 X 上的所有实值函数（X上的连续函数），用 $C_c(X)$ 表示 X 上的有限支撑实值函数（紧支撑连续函数）。任意函数 $m\colon X \to (0, \infty)$ 都在 X 的所有子集上诱导出一个全支撑拉东测度，其定义如下：

$$m(A) := \sum_{x \in A} m(x), \quad A \subseteq X.$$

在下文中，我们不再区分这类测度与严格正函数，而是统称它们为 X 上的测度。

每个加权图 $G = (X, b)$ 都对应一个二次型Q：$C(X) \to [0, \infty]$，它将狄利克雷能量赋给任意函数 f：$X \to \mathbb{R}$

$$Q(f) := \frac{1}{2} \sum_{x, y \in X} b(x, y) |f(x) - f(y)|^2.$$

有限能量函数空间为

$$\mathfrak{D}(G) := \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid Q(f) < \infty\},$$

在该空间上， Q通过极化可视为一个双线性形式，即

$$Q(f,g) = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in X} b(x,y)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)).$$

这里我们滥用记号，使得对于每个 $f \in \mathfrak{D}(G)$，都有 $Q(f) = Q(f,f)$。

形式 Q 具有以下基本的半连续性性质，这是法图引理的直接推论。

命题 2.1（ Q的半连续性）。设 (X,b) 是一个图。设 (f_n) 定义在 X 上的函数序列，逐点收敛到函数f。那么，

$$Q(f) \le \liminf_{n\to\infty} Q(f_n),$$

其中允许取值为 ∞ 。

若对所有 $s,t \in \mathbb{R}$ 都有 $|C(s) - C(t)| \le |s-t|$，则称映射 C: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为压缩映射。狄利克雷能量具有一项重要性质：压缩映射会使其减小。具体而言，下面的命题可由定义直接推出。

命题 2.2（基本压缩性质）。设 (X,b) 是一个图。对于所有 $f \in \mathfrak{D}(G)$ 以及所有压缩映射 C: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ，我们有$C \circ f \in \mathfrak{D}(G)$，并且

$$Q(C\circ f) \le Q(f).$$

注。以下两类有用的压缩映射将在后文中用到：对于 $a,b \in \mathbb{R}$，我们定义钳位函数 $C_{[a,b]}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ，其定义为

$$C_{[a,b]}(x) := (x \wedge b) \vee a$$

对于 $c \in \mathbb{R}$ ，我们定义切片函数 S_c: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ，其定义为

$$S_c(x) := (x-c)_+ \wedge 1.$$

对于 $o \in X$ ，我们定义（伪）范数 $\|\cdot\|_o$: $\mathfrak{D}(G) \to [0,\infty)$，其定义为

$$\|f\|_o := \sqrt{Q(f) + |f(o)|^2}.$$

我们将紧支撑函数空间$C_c(X)$ 关于 $\|\cdot\|_o$ 的闭包记为 $\mathfrak{D}_0(G)$。下面这个众所周知的引理表明， $\|\cdot\|_o$ 确实是一个范数，并且空间 $\mathfrak{D}_0(G)$ 不依赖于 $o \in X$ 的选取，参见例如 [19, 命题 1.6]。其证明依赖于 G 的连通性，而本文中我们始终假设这一点成立（见上文）。

引理 2.3. 设 $G = (X,b)$ 是一个图，且设 $o \in X$。

(a) $\|\cdot\|_o$ 是一个范数，且 $(\mathfrak{D}(G)\ \|\cdot\|_o)$ 是一个巴拿赫空间。

(b) 关于 $\|\cdot\|_o$ 的 $f_n \to f$ 意味着 $f_n \to f$ 逐点成立。

(c) 对于 $o' \in X$，范数 $\|\cdot\|_o$ 和 $\|\cdot\|_{o'}$ 等价。

测度 m on X 诱导出的希尔伯特空间

$$\ell^2(X,m) = \{f \in C(X) \mid \sum_{x\in X} m(x)|f(x)|^2 < \infty\}$$

其内积为

$$\langle f,g\rangle_m = \sum_{x\in X} m(x)f(x)g(x)$$

以及相应的范数 $\|\cdot\|_m$。我们将相应的一阶索об列夫空间记为 $H^1(G, m) := \ell^2(X,m) \cap \mathfrak{D}(G)$。配备内积

$$\langle f,g\rangle_{Q,m} := \langle f,g\rangle_m + Q(f,g)$$

它是一个希尔伯特空间。我们将其对应的范数记为 $\|\cdot\|_{Q,m}$。关于该空间完备性的证明，请参见 [19, 第 1 节。3], 其中将 $H^1(G,m)$ 的完备性讨论为狄利克雷型 $Q^{(N)}$（沿用该处的记号）的闭性。

2.2. 内在度量。本节将介绍与我们的讨论相关的（伪）度量，并讨论其性质。

若对所有 $x,y,z \in X$，$\sigma\colon X\times X \to [0,\infty)$ 都满足三角不等式，即满足

$$\sigma(x,y) \le \sigma(x,z) + \sigma(z,y).$$

对于 $r \ge 0$ 和 $x \in X$，我们将以 x为中心、半径为 r的相应球记作

$$B_r^\sigma(x) := \{y \in X \mid \sigma(x,y) \le r\}.$$

对于 $x \in X$，非空子集 $U \subseteq X$ 到 σ_U 的距离定义为

$$\sigma_U(x) := \sigma(x,U) := \inf_{y\in U} \sigma(x,y)$$

而 U 相对于 σ 的直径为

$$\mathrm{diam}_\sigma(U) := \sup_{x,y\in U} \sigma(x,y).$$

若函数 f 定义在 X 上，且存在一个 $C>0$ 使得对所有 $x,y\in X$，都有 $|f(x) - f(y)| \le C\sigma(x,y)$，则称其为关于伪度量 σ 的利普希茨函数。此时也称 f 为 C-利普希茨函数。关于 σ 的所有利普希茨函数组成的集合记作 $\mathrm{Lip}_\sigma(X)$。

对于图 $G=(X,b)$，若伪度量 σ 满足以下条件，则称其关于测度 m 是内蕴的：对所有 $x\in X$，

$$\frac{1}{2}\sum_{y\in X} b(x,y)\sigma(x,y)^2 \le m(x).$$

我们用 $\mathfrak{M}(G)$ 表示关于某个有限测度为内蕴的伪度量集合。显然，伪度量 σ 属于 $\mathfrak{M}(G)$ 当且仅当

$$\sum_{x,y\in X} b(x,y)\sigma(x,y)^2 < \infty$$

成立。

注（内在度量的背景）。内在度量长期以来一直是流形谱几何以及更一般的强局部狄利克雷空间中的有用工具，参见例如 Sturm 的开创性工作 [23, 24]。对于一般的狄利克雷空间（包括图），[3] 中提出了一种系统的方法。[3] 中的一个关键点是拉德马赫型定理。在图的背景下，该定理指出，伪度量 σ 是内蕴的，当且仅当对于所有相对于 σ 的 1-利普希茨函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$，都有 $|\nabla f|^2 \leq 1$。这里，对于 $f \in C(X)$ 和 $x \in X$，量

$$|\nabla f|^2(x) := \frac{1}{2m(x)} \sum_{y\in X} b(x,y)(f(x)-f(y))^2$$

可以解释为 f 在 x 处的离散梯度范数的平方（相对于测度 m）。对于测度为 m 且缩放度 $\deg/m$ 一致有界的图，组合度量是内在度量（相差一个常数因子）。对于度数无界的图，情况则不再如此。对于这类图，在各种问题中，内在度量（而非组合度量）已被证明是恰当的度量，参见例如综述 [10]。本文也可视为一个典型案例。

有限狄利克雷能量函数与相对于有限测度的内在伪度量之间存在密切联系。这些联系将与下文的一些定理有关。

引理 2.4（从 $\mathfrak{M}(G)$ 到 $\mathfrak{D}(G)$）。设 $G = (X, b)$ 是一个图。设 σ 是相对于有限测度 m 的内在伪度量。设 U 是 X 的一个子集。那么，以下陈述成立：

(a) 任意关于 σ 为 C-Lipschitz 且在 U 上为常数的函数 f 都满足

$$Q(f) \leq C^2 \min\{m(X), 2m(X \setminus U)\}.$$

(b) 不等式

$$Q(\sigma_U) \leq \min\{m(X), 2m(X \setminus U)\}$$

成立，特别地，σ_U 属于 $\mathfrak{D}(G)$。

(c) 不等式

$$Q(f) \leq C^2 m(X)$$

对于任意关于 σ 的 C-利普希茨函数 f 都成立。特别地，任意关于 σ 的利普希茨函数都属于 $\mathfrak{D}(G)$。

证明。显然，(b) 和 (c) 都是 (a) 的直接推论。因此，我们只需证明 (a)。只需考虑 $C = 1$ 的情形，因为对于一般的 $C > 0$，函数 $g = \frac{1}{C} f$ 是关于 Q 的 1-利普希茨函数，$g = \frac{1}{C^2} Q(f)$。因此，设 f 是一个在 U 上取零值的 1-利普希茨函数。由估计可轻易得到上界 $Q(f) \leq m(X)$

$$Q(f) = \frac{1}{2} \sum_{x,y} b(x,y)(f(x) - f(y))^2 \leq \sum_{x \in X} \left(\frac{1}{2} \sum_{y \in X} b(x,y)\sigma(x,y)^2 \right)$$

以及 σ 关于 m 是内蕴的这一事实。另一个估计可如下证明：利用

- $f(x) - f(y) = 0$ for all $x, y \in U$ and
- $|f(x) - f(y)| \leq \sigma(x,y)$ for all $x, y \in X$

我们推得

$$\begin{aligned}
Q(f) &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in X} b(x,y)(f(x) - f(y))^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in X^2 \setminus U^2} b(x,y)(f(x) - f(y))^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in X^2 \setminus U^2} b(x,y)\sigma(x,y)^2 \\
&= \sum_{y \in X \setminus U} \left(\frac{1}{2} \sum_{x \in X} b(x,y)\sigma(x,y)^2 \right) + \sum_{x \in X \setminus U} \left(\frac{1}{2} \sum_{y \in U} b(x,y)\sigma(x,y)^2 \right) \\
&\leq 2m(X \setminus U).
\end{aligned}$$

□

注。显然，如果 m 不是有限测度，前一个引理给出的估计仍然显然成立。

引理 2.5（从 $\mathfrak{D}(G)$ 到 $\mathfrak{M}(G)$）。设 $G = (X, b)$ 是一个图。那么，对于任意有限能量函数 f，函数

$$\sigma_f \colon X \times X \to [0, \infty), \quad \sigma_f(x,y) := |f(x) - f(y)|$$

是关于有限测度 m_f 的内在伪度量，该测度定义为

$$m_f(x) = \frac{1}{2} \sum_{y \in X} b(x,y)\sigma_f(x,y)^2.$$

函数 f 关于 σ_f 和 $m_f(X) = Q(f)$ 是 1-利普希茨的。

证明。 [6, 命题 3.11] 中已证明这一点。 □

根据前面的引理，任意有限能量的 f 都伴有一个伪度量 σ_f，它相对于某个有限测度是内蕴的。一般来说，这个 σ_f 并不是度量（因为 f 在不同点处的取值不一定彼此不同）。不过，正如下一个命题所示，通过任意小的扰动即可轻松实现这一点。

命题 2.6（小扰动）。设 $G = (X, b)$是一个图。

(a) 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $s_x > 0$、 $x \in X$，使得任何满足以下条件的函数g: $X \to \mathbb{R}$， $g(x) \in (-s_x, s_x)$ 对所有 $x \in X$ 都成立，均满足 $Q(g) < \varepsilon$.(b) 对于任意 $f \in \mathfrak{D}(G)$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，存在函数 $f_\varepsilon \in \mathfrak{D}(G)$，使得 $f_\varepsilon(x) \neq f_\varepsilon(y)$ 对所有 x、 $y \in X$ （满足 $x \neq y$ ）都成立，且

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon \text{ and } |Q(f - f_\varepsilon)| < \varepsilon.$$

证明。(a)：我们用 1_x 表示 $x \in X$ 的示性函数。于是$Q(1_x) = \deg(x) < \infty$。对于 $x \in X$，我们取满足以下条件的 $s_x > 0$：

$$\sum_{x \in X} s_x Q(1_x)^{1/2} < \sqrt{\varepsilon}.$$

取 X 的有限子集序列 (F_n)，使得 $F_n \subseteq F_{n+1}$ 且$X = \bigcup_n F_n$。那么，任何满足 $g(x) \in (-s_x, s_x)$ 的 g： $X \to \mathbb{R}$，都是函数 $g_n := \sum_{x \in F_n} g(x) 1_x$ 的逐点极限。 Q 的逐点下半连续性与柯西-施瓦茨不等式共同推出

$$\begin{aligned} Q(g) \leq \liminf_{n \to \infty} Q(g_n) &\leq \liminf_{n \to \infty} \sum_{x,y \in F_n} |g(x)||g(y)| Q(1_x)^{1/2} Q(1_y)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{x \in X} s_x Q(1_x)^{1/2} \right)^2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

(b)：这由(a)可得。给定 $\varepsilon > 0$，并根据(a)选择 s_x、 $x \in X$。不失一般性，我们可以假设 $s_x < \frac{\varepsilon}{2}$。现在给定实数 u_x、 $x \in X$，使得对于任意 $x \neq y$， $u_x - u_y$ 都是无理数。于是，对于任意 $x \in X$，我们可以选择一个 $t_x \in (-s_x$、 $s_x)$，使得 $f(x) - u_x - t_x$ 是有理数。然后， f_ε，其中

$$f_\varepsilon(x) = f(x) - t_x$$

对所有 $x \in X$，均满足 $\sup_x |f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \sup_x s_x < \varepsilon$，以及 $Q(f - f_\varepsilon) < \varepsilon$。此外， f_ε 的值两两不同，因为对于$x \neq y$，我们有

$$(f(x) - t_x) - (f(y) - t_y) = (u_x - u_y) + (f(x) - u_x - t_x) - (f(y) - u_y - t_y)$$

不能为零（因为它是一个无理数与一个有理数之和。）□

有一类特殊的伪度量对我们尤其有用，接下来将介绍它们。给定对称函数 w： $X \times X \to [0, \infty)$，以及 G 中的一条（可能无限的）路径 $\gamma = (x_1, x_2, \ldots)$，我们定义 γ 关于 w 的长度为

$$L_w(\gamma) := \sum_i w(x_i, x_{i+1}) \in [0, \infty].$$

由于我们始终假设连通性成立，因此这会在 X 上诱导出路径伪度量 d_w，其定义为

$$d_w(x,y) = \inf\{L_w(\gamma) \mid \gamma \text{ a path from } x \text{ to } y\}.$$

若对于某个对称函数 w，有 $\sigma = d_w$，则称 σ 是 X 上的路径伪度量。若对所有 $(x, y) \in E$，都有 $w(x,y) > 0$，则称对称函数 $w\colon X \times X \to [0,\infty)$ 为边权。

若对所有 $x \in X$，对称函数 w 满足以下条件，则称其相对于图$G = (X, b)$ 和测度 m 是适配的：

$$\frac{1}{2}\sum_{y\in X} b(x,y)w(x,y)^2 \le m(x).$$

以下引理概述了路径伪度量的一些基本性质。

引理 2.7（路径伪度量）。设 $G = (X, b)$ 是一个图，且设w：$X \times X \to [0,\infty)$ 是一个对称函数。若 $x \sim y$，则 d_w 是满足 $d_w(x,y) \le w(x,y)$ 的伪度量。此外，以下性质成立。

(a) 若 w 是伪度量，则 $d_w \ge w$。特别地，对于所有满足 $x \sim y$ 的 $x, y \in X$，都有 $d_w(x,y) = w(x,y)$。(b) 若 w 相对于测度 m 是适配的，则 d_w 相对于测度 m 是内蕴的。(c) 对于 $\sigma = d_w$，等式 $d_\sigma = \sigma$ 成立。

证明。平凡路径（x，y）是定义 d_w 时所取下确界的路径之一。由于 L_w（x，y）$= w$（x，y），不等式d_w（x，y）$\le w$（x，y）立即成立。

（a）：给定一条路径 $\gamma =$（$x = x_1$，...，$x_n = y$），反复应用三角不等式 w（x_1，x_{k+1}）$\le w$（x_1，x_k）$+ w$（x_k，x_{k+1}），可得

$$w(x,y) \le \sum_{i=1}^{n-1} w(x_i, x_{i+1}) = L_w(\gamma).$$

（b）：这是对所有满足 $x \sim y$的 x、$y \in X$ 而言不等式 d_w（x，y）$\le$ w（x，y）的直接推论。

（c）：由于 $\sigma = d_w$ 是伪度量，（a）给出 $\sigma \le d_\sigma$；并且对于满足 $x \sim y$的 x、$y \in X$，甚至有 σ（x，y）$= d_\sigma$（x，y）。任取 x、$y \in X$，设给定一条路径 $\gamma =$（$x = x_1$，...，$x_n = y$）。然后，利用我们已经证明的结论和三角不等式进行简短计算，可得

$$L_w(\gamma) = \sum_{j=1}^{n-1} w(x_j, x_{j+1}) \ge \sum_{j=1}^{n-1} \sigma(x_j, x_{j+1}) = \sum_{j=1}^{n} d_\sigma(x_j, x_{j+1}) \ge d_\sigma(x,y).$$

对所有 γ 取下确界，我们得到 $\sigma(x,y) \ge d_\sigma(x,y)$。 □

注意到以下结论：若 f 是图 (X, b) 上的有限能量函数，则 σ_f（定义于

引理 2.5）是关于 m_f 的内在伪度量。现在，我们也可以将 σ_f 视为对称函数（适配于 m_f）。这会诱导出路径伪度量 $d_f := d_{\sigma_f}$。由前述引理可立即得到以下结论。

推论 2.8. 设 $G = (X, b)$ 是一个图，并设 $f \in \mathfrak{D}(G)$。那么，$d_f = d_{\sigma_f}$ 是关于 m_f 的内在度量，并且

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

对所有满足 $x, y \in X$ 和 $b(x, y) > 0$ 的情形均成立。

证明. 根据前述引理，我们有 $d_f = d_{\sigma_f} \leq \sigma_f$，以及对所有满足 $x, y \in X$ 和 $b(x, y) > 0$ 的情形，$d_f(x, y) = \sigma_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$。□

~注. 给定一个图 $G = (X, b)$。在对称函数 w 的集合 $X \times X \to [0, \infty)$ 上定义 Q，如下：

$$\widetilde{Q}(w) := \frac{1}{2} \sum_{x,y} b(x, y) w(x, y)^2 \in [0, \infty].$$

~那么，我们的部分考量可以用 Q 来理解。鉴于此或许有所启发，我们在本注中简要讨论一下：对于对称 w：$X \times X \to [0, \infty)$，我们定义

$$m_w \colon X \to [0, \infty], \quad m_w(x) = \frac{1}{2} \sum_{y \in X} b(x, y) w(x, y)^2$$

以及 $m_w(X) := \sum_{x \in X} m_w(x)$。最后，对于 f：$X \to \mathbb{R}$，定义对称函数 σ_f：$X \times X \to [0, \infty)$，满足 $\sigma_f(x, y) := |f(x) - f(y)|$。于是有以下结论：

~(a) 设 w 是对称权。则 $Q(w) = m_w(X)$，其中允许取~值 ∞。若 w 实际上是伪度量，则成立 $Q(d_w) =\sim Q(w)$。(b) 设 σ 是 X 上的伪度量。当且仅当 σ 属于 $\mathfrak{M}(G)$ 时，m_σ 是有限测度。若 m_σ 是有限测度，则它是使 σ 成为内在度量的最小测度。~(c) 对于 f：$X \to \mathbb{R}$，等式 $Q(f) = Q(\sigma_f)$ 成立，其中允许取值∞。此外，f 属于 $\mathfrak{D}(G)$ 当且仅当 σ_f 属于 $\mathfrak{M}(G)$。(d) 函数 f：$X \to \mathbb{R}$ 关于伪~度量 σ 是 1-利普希茨函数，当且仅当 $\sigma_f \leq \sigma$ 成立。在这种情况下，$Q(f) \leq Q(\sigma_f)$ 有效。

如前所述，我们认为图 (X, b) 的底层空间 X 配备了离散拓扑。因此，与离散拓扑相容的度量对我们尤为重要。下面的引理保证了在 $\mathfrak{M}(G)$ 中存在这样的度量。

引理 2.9. 设 $G = (X, b)$ 是一个图。那么， $\mathfrak{M}(G)$ 中存在一个诱导离散拓扑的度量。

证明。设 $\mathbb{N} \to X, n \mapsto x_n$ 是 X 的一个枚举。我们定义

$$f\colon X \to (0,\infty), \quad f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2^n \deg(x_n)}},$$

and

$$\sigma\colon X \times X \to [0,\infty), \quad \sigma(x,y) = \begin{cases} \max\{f(x), f(y)\} & \text{for } x \neq y \\ 0 & \text{else} \end{cases}.$$

容易验证， σ 是一个度量（甚至是超度量）。由 $\sigma(x,y)^2 \leq f(x)^2 + f(y)^2,$ ，结合 b 的对称性和富比尼定理，可得

$$\begin{aligned} \sum_{x\in X} b(x,y)\sigma(x,y)^2 &\leq \sum_{x,y\in X} b(x,y)(f(x)^2 + f(y)^2) \\ &= 2\sum_{x,y\in X} b(x,y) f(x)^2 \\ &= 2\sum_{x\in X} \deg(x) f(x)^2. \end{aligned}$$

现在，根据 f 的定义可得

$$2\sum_{x\in X} \deg(x) f(x)^2 \leq 2$$

由此可知， σ 是关于某个有限测度的内在度量。

度量 σ 诱导离散拓扑，因为任意点到 $x \in X$ 的距离均以下界 $f(x) > 0$ 为界。□

2.3. 图的边界。如引言中所述，图的完备化与边界将与我们的研究密切相关。这里我们介绍相应的概念。

设 X 是一个可数集。设 σ 是 X 上的一个伪度量。关于 σ 的 X 的完备化定义为 X 中 σ-柯西序列的等价类集合；如果满足以下条件，则称两个这样的序列 (a_n) 和 (b_n) 等价:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(a_n, b_n) = 0.$$

这个集合记作 $\overline{X}^\sigma$ ，其中包含顶点集 X 的一个商集，其元素是常值序列的等价类。显然， σ 可以扩展为 X 上的一个伪度量；为稍微滥用记号起见，这个扩展也记作 σ。随后，边界定义为

$$\partial_\sigma X = \overline{X}^\sigma \setminus (X/\simeq),$$

其中，当 $\sigma(x,y) = 0$ 时，$x \simeq y$。若边界为空，则称图关于某个伪度量是度量完备的。显然，若 σ 是度量，则 $\overline{X}^{\sigma}$ 包含 X 的一个副本，该副本是稠密的，并且我们的度量完备性定义与通常的定义一致（即任何柯西序列都收敛）。

还有其他与我们相关的完备性概念。设 $G = (X, b)$ 是一个图，w 是边权。若每条无限路径相对于 w 的长度都为无限，则称伪度量空间 (X, d_w) 为测地完备。为后续内容，我们回顾以下刻画测地完备性的离散霍普夫-里诺类型定理，参见 [8, 定理 A.1]；有关进一步的推广，也请参见 [13]。

定理 2.10（霍普夫-里诺类型定理）。设 $G = (X, b)$ 是一个局部有限图，w 是边权。那么 d_w 是在 X 上诱导离散拓扑的度量。此外，以下断言等价：

(i) (X, d_w) 是一个完备度量空间。(ii) (X, d_w) 是测地完备的。(iii) 每个距离球都是有限的。(iv) 每个有界闭集都是紧的。

图的边界不仅可以来自度量完备化，也可以来自紧化。事实上，只要对图所依托的集合X 进行适当扩充，就能得到图的边界。本节最后简要讨论这一方面。设 X 是一个可数集。设Y 是一个拓扑豪斯多夫空间。若 X 在拓扑空间 Y 中稠密嵌入，我们称之为稠密嵌入，即 Y 包含 X的一个副本，Y 在 X 上的拓扑限制是离散拓扑，并且 X 在Y中稠密。显然，只要 X 稠密嵌入 Y，Y 就必定可分。若 X 稠密嵌入 Y，我们将 X在 Y 中的边界 $\partial_Y X$ 定义为

$$\partial_Y X := Y \setminus X.$$

X 中任意有限子集在 Y中的补集都是 Y 中的开集（因为任何有限集都是紧集，因而根据豪斯多夫性必定是闭集）。因此，这样的补集都是 $\partial_Y X$的开邻域。特别地，h 在 X 上具有有限支撑的任意函数，都可以（通过延拓为零）延拓为 Y上的连续函数。

显然，只要 σ 是 X 上的一个诱导离散拓扑的度量，X 就稠密嵌入于$\overline{X}^{\sigma}$ 中。这正是我们上文讨论的内容。于是，

$$\partial_\sigma X = \partial_{\overline{X}^{\sigma}} X$$

成立。

如果 X 在一个紧的 Y中稠密嵌入，那么 Y称为 X的紧化。在这种情况下，∂X 的开邻域恰好由以下集合给出

X 中有限集的补集（因为 $\partial_Y X$ 的任意开邻域的补集都必须是闭集，因此也是 X的紧子集）。一个具体例子是一点紧化。它由集合 $Y = X \cup \{\mathrm{pt}\}$给出，其中 pt 是任意添加的点；该集合配备的拓扑由 Y 的所有子集构成，这些子集要么是 X 的子集，要么补集为有限集。在这种情况下，$\partial_Y X$ 的边界就是 pt。

3. Capacity of sets in the boundary and infinite paths

本节将引入容量，并研究相对于内在度量的边界中集合的容量。

设 $G = (X, b)$ 为一个图，且 $m\colon X \to (0, \infty)$ 为一个测度。子集 $U \subseteq X$ 的容量定义为

$$\mathrm{cap}_m(U) := \inf\{\|f\|_{Q,m}^2 \mid f \in H^1(G, m) \text{ with } f \geq 1 \text{ on } U\},$$

约定若上述定义中的集合为空，则 $\mathrm{cap}_m(U) = \infty$。利用基本压缩性质，我们可以在此定义中假设 $0 \leq f \leq 1$，因为 $(f \wedge 1)_+$ 满足与 f 相同的约束，但与 f 相比，其 $\|\cdot\|_{Q,\, m}$-范数更小。

每当 X 在 Y 中稠密嵌入时，我们就可以通过令以下表达式成立，将容量扩展到 Y 的子集:

$$\mathrm{cap}_m(A) := \inf\{\mathrm{cap}_m(O \cap X) \mid O \text{ open in } Y \text{ with } A \subseteq O\}.$$

由于根据假设，$A \subseteq X$ 的每个子集在 Y中都是开集（因为 Y 的拓扑在 X上诱导离散拓扑），因此 X 上的两种容量定义是相容的。特别是，只要度量 σ 在 X上诱导离散拓扑，这一定义也适用于完备化$\overline{X}^{\sigma}$。

容量是 Y幂集上的外测度，且对所有 $A \subseteq X$，都有 $m(A) \leq \mathrm{cap}_m(A)$，并且 $\mathrm{cap}_m(Y) \leq m(X)$，参见例如 [4, 定理 2.1.1 和定理 A.1.2]。

接下来，我们讨论如何用有限能量函数的极限来刻画边界子集容量为零的情形。

定义 3.1（下极限）。设 X 是一个可数集，σ 是 X 上的一个度量，它诱导离散拓扑，并设 $f\colon X \to \mathbb{R}$。对于$A \subseteq \overline{X}^{\sigma}$，$f$ 在 A 处相对于 σ 的下极限定义为

$$\text{下极限}_{x \to A}\ f(x) := \text{上确界}\{\text{下确界}\{f(x) \mid x \in U \cap X\} \mid U \text{在} \overline{X}^{\sigma} \text{中开，且 } A \subseteq U\}.$$

此外，我们将无穷远处的下极限定义为

$$\liminf_{x \to \infty} f(x) := \sup\{\inf\{f(x) \mid x \in X \setminus F\} \mid F \subseteq X \text{ finite}\}.$$

注。对我们而言，lim inf 等于 ∞ 的情形以及紧 $\overline{X}^{\sigma}$ 的情形尤为相关。在此背景下，我们注意到以下几点。(a) $\liminf_{x \to A} f(x) = \infty$ 当且仅当对于 X 中每个满足 $\sigma(x_n, A) \to 0,\ n \to \infty$ 的序列 (x_n)，$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$。

(b) $\liminf_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 当且仅当对于任意收敛到 X 的一点紧化中的 pt 的序列 (x_n)，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$。事实上，这很容易表明，$\liminf_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 当且仅当对于任意收敛到某个 $y \in \partial_Y X$ 的序列 (x_n)，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$，其中 Y 是 X 的一种紧化。
(c) 若 σ 在 X 上诱导离散拓扑，且 (X,σ) 相对紧，则 $\overline{X}^\sigma$ 中 $\partial_\sigma X$ 的每个开邻域 U 都具有如下形式：$U = X \setminus F$，其中 $F \subseteq X$ 为某个有限集。因此，在这种情况下

$$\liminf_{x\to\infty} f(x) = \liminf_{x\to\partial_\sigma X} f(x).$$

从这个意义上说，无穷远处的下极限就是 X 的度量紧化边界处的下极限。

以下意义下，$\liminf_{x\to\infty}$ 支配 $\liminf_{x\to\partial_\sigma X}$。

命题 3.2. 设 X 为可数集。设给定 $f\colon X \to \mathbb{R}$。那么，

$$\liminf_{x\to\partial_\sigma X} f(x) \geq \liminf_{x\to\infty} f(x)$$

对于 X 上诱导离散拓扑的任意度量 σ。

证明。$\overline{X}^\sigma$ 中的任何有限集 F 都是紧的，因此是闭集。因此，对于 X 中的任意有限集 F，集合 $\overline{X}^\sigma \setminus F$ 是 $\partial_\sigma X$ 的一个开邻域。我们得到

$$\begin{aligned}\liminf_{x\to\partial_\sigma X} f(x) &= \sup\{\inf\{f(x) \mid x \in U \cap X\} \mid U \text{ open with } \partial_\sigma X \subseteq U\}\\ &\geq \sup\{\inf\{f(x) \mid x \in X \setminus F \cap X\} \mid F \subseteq X \text{ finite}\}\\ &\geq \liminf_{x\to\infty} f(x).\end{aligned}$$

□

借助下极限，我们可以刻画边界中的零容量集。

引理 3.3（边界中零容量集的刻画）。设 $G = (X,b)$ 是一个无限图，且 σ 是 G 上诱导离散拓扑的度量。此外，设 $A \subseteq \partial_\sigma X$。以下断言等价：

(i) 对于 X 上的一个有限测度 m，有 $\mathrm{cap}_m(A) = 0$。
(ii) 对于 X 上的所有有限测度 m，有 $\mathrm{cap}_m(A) = 0$。 (iii) 存在 $f \in \mathfrak{D}(G)$，使得 $\liminf_{x\to A} f(x) = \infty$.

证明。(i) $\Rightarrow$ (iii)：命题 $\mathrm{cap}_m(A) = 0$ 蕴含存在开集序列 $U_n \supseteq A$ 和函数 $f_n \geq 1_{U_n}$，满足

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{Q,m} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{Q(f_n) + \|f_n\|_m^2} = 0.$$

通过取一个子序列，不妨假设

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{Q,m} < \infty.$$

这意味着级数 $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$在希尔伯特空间$H^1(G,m)$中收敛。特别地， $f \in \mathfrak{D}(G)$。根据 f_n 的选择，我们在集合 $\bigcap_{n=1}^{N} U_n$上有$f \geq N$；这是一个包含 A的开集。这证明 $\liminf_{x\to A} f(x)$ 至少为 N。由于这对所有$N \in \mathbb{N}$都成立，上确界必定为无穷大。

(iii) $\Rightarrow$ (ii)：令 $f \in \mathfrak{D}(G)$ 满足 (iii)。不失一般性，假设 $f \geq 0$；否则可以将 f 替换为 $|f|$，根据定理 2.2，后者也具有有限能量。我们将 f 分成以下几部分

$$f_n := (f-n)_+ \wedge 1.$$

首先，我们注意到 $0 \leq f_n \leq 1$ 和 $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ 逐点成立。此外，定理 2.2 给出 $f_n \in \mathfrak{D}(G)$；又由于 m 有限且 f_n有界，因此有 $f_n \in H^1(G,m)$。因为 $\liminf_{x\to A} f(x) = \infty$，对每个 $n \in \mathbb{N}_0$，都存在一个开集 $U_n \supseteq A$，使得 $f \geq n$ 在$U_n \cap X$上成立。根据构造，对于 $x \in X$，不等式 $f(x) \geq n+1$意味着$f_n(x) = 1$。结合这些观察，我们得出 $f_n \geq 1_{X\cap U_{n+1}}$.

总之，这表明函数 f_n 可用于定义 A 的容量，并且

$$\mathrm{cap}_m(A) \leq \|f_n\|_{Q,m}.$$

我们证明$\|f_n\|_{Q,\,m} \to 0$，因为 $n \to \infty$.

容易验证，对于 $n \neq m$ 和 x， $y \in X$，乘积 $(f_m(x) - f_m(y))(f_n(x) - f_n(y))$ 总是非负的，因此

$$Q(f_n, f_m) = \frac{1}{2} \sum_{x,y\in X} b(x,y)(f_m(x) - f_m(y))(f_n(x) - f_n(y)) \geq 0.$$

回顾一下，对于 $N \in \mathbb{N}$，我们定义了 $C_{[0,N]} f = f_+ \wedge N$。利用命题 2.2、$f_n$ 的定义以及前面的观察，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} Q(f_n) &\leq \sum_{n=0}^{N-1} Q(f_n) + \sum_{\substack{0\leq m,n\leq N-1\\ m\neq n}} Q(f_m, f_n) \\ &= Q\left(\sum_{n=0}^{N-1} f_n\right) = Q(C_{[0,N]} f) \leq Q(f).\end{aligned}$$

由于 N 是任意的，且 $Q(f) < \infty$，我们得到 $\lim_{n\to\infty} Q(f_n) = 0$。由勒贝格控制收敛定理可知，收敛 $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_m = 0$。由此得到 $\lim^{n\to\infty} \|f_n\|_{Q,\,m} = 0$，因此 $\mathrm{cap}_m(A) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)：显然。 □

注。(a) 该引理表明，具有零容量这一性质并不取决于有限测度的选择。事实上，我们甚至不需要假设 m 严格为正。若我们只假设对于某个 $o \in X$ 有 $m(o) > 0$，则空间 $H^1(X,m)$ 连续嵌入到 $(\mathfrak{D}(G)$ $\|\cdot\|_o)$ 中，并且证明可以在空间 $(\mathfrak{D}(G)$ $\|\cdot\|_o)$ 中进行。在 $H^1(G,m)$ 中处理的优点在于，它与关于 m 的内在度量相关。

(b) 在蕴含关系 (iii) $\Rightarrow$ (ii) 的证明中使用的不等式可以推广为更一般的形式。设 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 是一个有限能量函数，且 $C_1, C_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是两个单调递增的 1-Lipschitz 函数。那么

$$Q(C_1 \circ f + C_2 \circ f) \geq Q(C_1 \circ f) + Q(C_2 \circ f).$$

在上述证明中，这一观察被应用于单调递增压缩映射 $S_n, n \in \mathbb{N}_0$，其中 $S_n(x) = (x-n)_+ \wedge 1$.

前述结果也可以理解为：零容量集$A \subseteq \partial_\sigma X$ 与任何有限集之间的距离为无穷大。更具体地说，有如下结论。

推论 3.4（边界中的零容量集具有无限距离）。设 $G = (X,b)$ 是一个无限图，σ 是 G 上诱导离散拓扑的度量。此外，设 $A \subseteq \partial_\sigma X$。那么，$\partial_\sigma A$ 具有零容量（相对于任意有限测度），当且仅当存在一个内蕴度量 $\varrho \in \mathfrak{M}(G)$，使得对于 X 中任意有限 F 以及任意 $r > 0$，都存在 A 的一个开邻域 U，满足

$$\varrho(U \cap X, F) := \inf\{\varrho(z,x) \mid z \in U \cap X, x \in F\} \geq r.$$

证明。假设 A 的容量为零（相对于任意有限测度）。由前一个引理，存在一个 $f \in \mathfrak{D}(G)$，使得 $\liminf_{x\to A} f(x) = \infty$。不失一般性，我们可以假设对所有满足 $x \neq y$ 的 $x, y \in X$，都有 $f(x) \neq f(y)$（否则，我们可以根据命题 2.6 加上任意小的扰动）。于是，$\varrho := \sigma_f$ 是相对于某个有限测度的内在度量。由 $\liminf_{x\to A} f(x) = \infty$，度量 ϱ 具有所述性质。

现在假设存在一个相对于有限测度 m 的内在度量 ϱ，且它具有所述性质。给定任意有限集 F。那么，存在 A 的一个开邻域 U，使得 $\varrho(U \cap X, F) \geq 1$。因此，$g_F := \varrho_F \wedge 1$ 满足 $0 \leq g_F \leq 1$，在 F 上等于 0，并在 U 上等于 1。因此，

$$\mathrm{cap}_m(A) \leq Q(g_F) + |g_F|_m^2 \leq Q(\varrho_F) + m(X \setminus F) \leq 3m(X \setminus F)$$

成立，其中最后一步用到了引理 2.4。由于这对任意的 F 都成立，我们推得 $\mathrm{cap}_m(A) = 0$。根据前一个引理，这意味着 A 的容量相对于任意有限测度都为零。□

注：将 ϱ 替换为 $d_\varrho \leq \varrho$，我们甚至可以令前一推论中的内蕴度量为路径度量。

注：引理 3.3 及其推论讨论了 X的度量完备化。不过，它们也可以直接推广到任意一个 Y 稠密嵌入其中的拓扑 Hausdorff 空间 X 。事实上，$\liminf_{x\to A}$ 的定义以及该引理和其推论的证明，都可以逐字照搬到这一更一般的情形中。这尤其意味着，这些讨论也适用于 X的紧化。

接下来，我们讨论度量边界中集合的容量与无限路径之间的关系。我们回顾图中无限路径集合的以下标准概念。

定义 3.5（路径零集）。图中无限路径的集合 Γ in $G=(X,b)$ 称为零测的，若存在边权 w 满足

$$\sum_{x,y\in X} b(x,y)w(x,y)^2 < \infty$$

使得对所有 $\gamma\in\Gamma$， $L_w(\gamma)=\infty$ 。

设 σ 是 X 上诱导离散拓扑的一个度量。对于$A\subseteq\partial_\sigma X$ ，我们用 $\Gamma_{A,\sigma}$ 表示至少有一个关于 σ 的聚点落在 A 中的无限路径集合。

借助我们对边界中零容量集合的刻画，我们得到边界中零容量集合与在该集合中具有聚点的路径集合之间的以下关系。

这是将我们的方法与通过路径零测集研究常返性的经典方法联系起来的关键观察。正如引言中所指出的，这一观察促使我们撰写了本文。

定理 3.6（容量与路径零测集）。设 $G=(X,b)$ 是一个无限图，且 σ 是关于有限测度 m 的内在度量，该测度诱导离散拓扑。设 $A\subseteq\partial_\sigma X$ 满足 $\mathrm{cap}_m(A)=0$。则 $\Gamma_{A,\sigma}$ 是零测的。

证明。根据前一个引理，存在 $f\in\mathfrak{D}(G)$，使得 $\liminf_{x\to A} f(x)=\infty$. 我们考虑函数 $w:\ X\times X\to\mathbb{R}$,$w(x,y)=|f(x)-f(y)|$。不失一般性，我们可以假设 $w(x,y)>0$，只要 (x,y) 是一条边即可（否则，在每个顶点处，如有必要，向 $f(x)$ 加上一个小量，见命题 2.6）。于是

$$\sum_{x,y\in X} b(x,y)w(x,y)^2 \le 2Q(f) < \infty.$$

设 $\gamma=(x_1,x_2,\ldots)$ 是一条在 A 中具有聚点的无限路径。我们得到

$$|f(x_n)-f(x_1)| \le \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_k)-f(x_{k+1})| \le L_w(\gamma).$$

由于 $\liminf_{x\to A} f(x)=\infty$，该不等式左边沿着某个适当的子序列发散，因此我们得到 $L_w(\gamma)=\infty$。因此，$\Gamma_{A,\sigma}$是零测的。□

由于一般图的度量边界处路径的行为复杂，反向命题似乎并不成立。不过，对于树，我们有如下关于路径度量的反向命题。回顾一下，(X, b) 是一棵树，当且仅当它没有非平凡的圈（满足 $x_1 \sim x_n$ 的单射路径 $(x_1, \ldots, x_n)$）。

命题 3.7. 设 $G = (X, b)$ 是一棵树，且 σ 是一种路径度量，它在 X 上诱导离散拓扑，并且相对于有限测度 m 是内蕴的。若对于 $A \subseteq \partial_\sigma X$，路径集合 $\Gamma_{A,\,\sigma}$ 是零测的，则 $\mathrm{cap}_m(A) = 0$。

证明. 设 w 是 $\Gamma_{A,\,\sigma}$ 的边权，如路径零测集的定义所述。固定 $o \in X$，并对于 $x \in X$，令 γ_x 为连接 o 和 x 的关于组合距离的唯一最短路径（唯一性由 (X, b) 是一棵树可得）。我们定义

$$f \colon X \to \mathbb{R}, \quad f(x) = L_w(\gamma_x).$$

由于 (X, b) 是一棵树，对于邻点 $x, y \in X$，有 $|f(x) - f(y)| = w(x, y)$，这表明 $f \in \mathfrak{D}(G)$。

设 (x_n) 是 X 中的一个序列，其极限在 $x \in A$ 中。我们构造一条单调路径 $\gamma = (y_1, y_2, \ldots)$（即 y_1 与 y_{n+1} 的组合距离大于或等于 y_1 与 y_n 的组合距离），该路径始于 o，使得 $y_n \to x$ 和

$$f(x_k) = f(y_{n_k}) + d_w(x_k, y_{n_k}) \geq f(y_{n_k})$$

对于一个合适的子序列 (y_{n_k})。γ的单调性以及 (X, b) 是一棵树这一事实意味着

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \geq \liminf_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = L_w(\gamma) = \infty.$$

γ的构造：我们将 o 视为图的根，并用 $|x|$ 表示 x 到 o的组合距离。若从 x 到 o 的所有路径都经过 y，则称 y 是 c 的祖先。由于 (X, b) 是一棵树，每个$A \subseteq X$ 都有唯一的最近公共祖先，即存在一个元素 $y \in X$ 满足：

- y 是 A中每个元素的祖先。
- 对于每个满足 $|x| > |y|$ 的 $x \in X$，都存在一个 $a \in A$，使得x 不是 a的祖先。

我们令 z_n 为 $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$的最近公共祖先。由于 z_n 是 $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ 的祖先，因而也是 z_{n+1}的祖先，因此这个序列是单调的。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $N > n$，使得 $\{x_n, x_N\}$ 的最近公共祖先为 z_n（否则 z_n就不是最近公共祖先）。从 x_n 到 x_N 的每条路径都经过 z_n。由于 σ 是路径度量，这意味着

$$\sigma(x_n, x_N) = \sigma(x_n, z_n) + \sigma(z_n, x_N)$$

于是我们得到

$$\sigma(x_n, z_n) \le \sup\{\sigma(x_n, x_N) \mid N > n\}.$$

因此，(z_n) 也收敛到 x，但它未必是一条路径。我们通过插入从 z_n 到 z_{n+1} 的单调路径使其成为一条路径（这些路径存在，因为 y_n 是 y_{n+1} 的祖先）。利用 σ 是路径度量可知，任何位于 z_n 与 z_{n+1} 之间的此类附加点 z 都满足

$$\sigma(z_n, z_m) = \sigma(z_n, z) + \sigma(z, z_m) \ge \sigma(z_n, z).$$

因此，这样构造的单调路径 (y_n) 也收敛到 x。我们选取 n_k，使得 $y_{n_k} = z_k$。利用 z_k 是 x_k 的祖先，可得

$$f(x_k) = f(z_k) + L_w(\gamma_{x_k}) - L_w(\gamma_{z_k}) = f(y_{n_k}) + d_w(y_{n_k}, x_k).$$

□

注。在前面的证明中，我们使用了以下观察，这一观察利用了 (X, b) 是一棵树且 σ 是路径度量：对于每个 $x \in \partial_\sigma X$ 以及 X 中每个收敛到 x 的序列 (x_n)，都存在一条收敛到 x 的单调路径 (y_n)，使得任意 x_n 都有路径 (y_n) 上的一个元素作为其祖先。

4. Recurrence and intrinsic metrics

本节采用与第 3 节类似的技巧，从内在度量的角度给出常返性的新刻画，并研究常返性与边界容量为零之间的关系。此外，我们还为 Yamasaki 提出的经典常返性刻画提供另一种证明。有关常返性的背景知识，请参阅教材 [12, 26]。

“常返性”一词源于随机过程的视角。从这一视角看，图会导出一个马尔可夫过程，用来模拟粒子在 X 各点之间跳跃。常返性描述的是粒子一次又一次回到 X 任意一点的现象。在我们这里关注的解析描述中，这体现为各种形式的“远处发生的事情无关紧要”（即有限集之外发生的事情无关紧要）。随着讨论的展开，我们将看到其精确表述；这也是本节的主题。

定义 4.1（常返性）。如果常值函数 1 属于 $\mathfrak{D}_0(G)$，则称图 $G = (X, b)$ 为常返图。不具有常返性的图称为暂态图。

注。(a) 常返性的定义意味着存在一个由函数构成的序列 (f_n)，属于 $C_c(X)$，满足 $f_n \to 1$ 逐点收敛，且$Q(f_n) = Q(f_n - 1) \to 0, n \to \infty$。由于该 f_n 具有有限支撑，这可以看作一个例子，说明紧集之外的行为（在此例中即 f_n的支撑之外）变得无关紧要。

(b) 常返性等价于 $\mathfrak{D}_0(G) = \mathfrak{D}(G)$，也就是说，$C_c(X)$ 在范数 $\|\cdot\|_o$ 下于 $\mathfrak{D}(G)$ 中稠密，参见例如 [22, 定理 3.63]。(c) 对于非连通图，暂态性是比非常返更强的性质。由于本文中的所有图都假定为连通图，因此可以使用上述定义。关于常返性的更多背景知识，请参阅 [19]。

接下来，我们将常返性、容量消失以及度量球的有限性，与某些有限能量无界函数的存在联系起来。

定理 4.2（常返性的刻画）。设 $G = (X, b)$ 是一个无限图。以下条件等价：

(i) G 是常返的。(ii) 存在一个有限能量函数 $f \in \mathfrak{D}(G)$，满足

$$\liminf_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

(iii) 存在一个内在度量 $\sigma \in \mathfrak{M}(G)$，它在 X 上诱导离散拓扑，且相对于 σ 的距离球都是有限的。(iii)' 存在一个有限测度 m 和一个适配于它的边权 w，使得相对于 d_w 的距离球都是有限的。(iv) 对于 X 上的某个（每个）有限测度 m 和某个（每个） X 的紧化 Y，等式 $\mathrm{cap}_m(\partial_Y X) = 0$ 成立。(v) 某个（每个）有限测度具有以下性质：对于任意 $\varepsilon >$，都存在 X 中的一个有限集 F，使得 $\mathrm{cap}_m(X \setminus F) = 0$。

证明. (i) $\Rightarrow$ (iv)：令 m 为 X 上的任意有限测度，并令 Y为 X的一个紧化。由 (i)，存在 $C_c(X)$中的一个序列 (f_n)，使得 $f_n \to 1$ 逐点成立且 $Q(f_n) \to 0$。将 f_n 替换为 $(f_n \vee 0) \wedge 1$后，不失一般性地假设对每个 n， $0 \le f_n \le 1$ 成立。于是，$0 \le 1 - f_n \le 1$ 成立，并且在 f_n的有限支撑之外， $1 - f_n$ 等于 1。因此，

$$\mathrm{cap}_m(\partial_Y X) \le Q(1 - f_n) + |1 - f_n|_m^2$$

对每个 n均成立。只需证明右侧的两项都收敛到零。第一项满足 $Q(1 - f_n) = Q(f_n) \to 0, n \to \infty$。第二项满足 $|1 - f_n|_m^2 \to 0$, $n \to \infty$，这是由勒贝格控制收敛定理得到的（因为 $0 \le 1 - f_n \le 1$ 成立，且 $1 - f_n$ 逐点收敛到 0，而 m 是一个有限测度）。

(iv) $\Rightarrow$ (ii)：这可通过对引理 3.3 的 (i)$\Rightarrow$ (iii) 的证明作直接调整得到。

(ii) $\Rightarrow$(iii)：设 f 是满足 (ii) 的函数。根据命题 2.6，不失一般性地假设 f 的取值两两不同。对所有 $x, y \in X$，令 $\sigma(x, y) = \sigma_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$。由此得到一个关于有限测度内蕴的伪度量，见引理 2.4。事实上，由于 f 的取值

两两不同，它甚至是一个度量。其距离球为

$$B_r^\sigma(o) = \{x \in X \mid f(o) - r \le f(x) \le r + f(o)\}.$$

由于 $\liminf_{x\to\infty} f(x) = \infty$，它们是有限的。特别地，该度量诱导离散拓扑。

(iii) $\Rightarrow$ (i)：根据 (iii)，给定一个关于有限测度m 的内在度量 σ。因此， σ 诱导离散拓扑，且其距离球都是有限的。现在，令 F 为任意有限集。则 $\sigma_F := \sigma(\cdot, F)$ 满足

- $\sigma_F = 0$ 在 F上。
  在 $F_1 := \{x \in X$ 之外： $\sigma(F, x) < 1\}$，且 F_1 是有限的（因为 F 是有限集，并且相对于 σ 的距离球都是有限的）。

定义 $g_F := (1 - \sigma_F)_+$。那么， g_F 在 F 上等于 1（根据第一条要点），且其有限支撑包含于 F_1 中（根据第二条要点）。此外，由于 Q与压缩映射相容，且$Q(1) = 0$ 成立，由引理 2.4 可得估计

$$Q(g_F) \le Q(1 - \sigma_F) = Q(\sigma_F) \le 2m(X \setminus F).$$

因此，选取有限集的递增序列 (F_n)，使得 $\cup_n F_n = X$，我们得到一个 $C_c(X)$ 中的序列 $f_n := g_{F_n}$，它逐点收敛于 1，并且

$$Q(f_n) \le 2m(X \setminus F_n) \to 0, n \to \infty.$$

这证明了 (i)。

(iv) 与 (v) 的等价性显然。

(iii)' $\Rightarrow$ (iii)：由引理 2.7，度量 d_w 关于有限测度 m 是内蕴的。为证明它诱导离散拓扑，我们注意到， d_w-球的有限性意味着，对所有 $R > 0$ 和 $x \in X$，集合

$$\{y \in X \mid y \sim x \text{ with } w(x, y) < R\}$$

是有限的（否则， R 中心的球将包含无穷多个点）。这称为 w 的本质局部有限性；根据 [13, 引理 2.2]，它意味着 d_w 诱导离散拓扑。

(iii) $\Rightarrow$ (iii)'：我们取 $w := \sigma$。于是， w 适配于有限测度 m，而 d_σ 关于 m 是内蕴度量，且由引理 2.7 有 $\sigma \le d_\sigma$。特别地，关于 d_w 的球包含在相应的关于 σ 的球中，因此是有限的。□

注。（a）(i) 与 (iv) 之间的等价性可视为第三作者在其（未发表的）博士论文 [21] 中所发展的复返理论的一个特例。（b）显然，有限距离球的度量必然诱导离散拓扑。

（c）在 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 的证明中，我们看到，对于有限能量的 f，若 $\liminf_{x\to\infty} f(x) = \infty$，则内在（伪）度量 σ_f 具有有限距离球。对此有某种逆命题：设 σ 为一个度量，并对 $x \in X$ 定义函数 f_x，使得 $f_x(y) := \sigma(y, \{x\})$。那么，以某个 $x \in X$ 为中心的距离球有限，当且仅当以任意 $x \in X$ 为中心的距离球有限；而这又当且仅当 $\liminf_{y\to\infty} f_x(y) = \infty$ 对某个（所有）$x \in X$ 成立。

(d) (iii) $\Rightarrow$ (i) 的证明只用到了半径为 1 的球是有限集这一点。实际上，数字 1 并不重要。只需存在一个 $r > 0$，使得所有半径为 r 的球都是有限集。然而，如果 σ 是一个内在度量，且其所有半径为 r 的距离球都是有限集，那么对于 X 中任意一个满足 $F_n \subseteq F_{n+1}$ 和 $\cup F_n = X$ 的有限集序列 F_n，我们可以定义 $f := \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(F_n, \cdot)$。于是，$f$ 将定义良好，且 $\liminf_{x\to\infty} f(x) = \infty$（因为 r-球是有限集）。适当选择 F_n 后，f 将具有有限能量，而 $\sigma + \sigma_f$ 将是关于某个有限测度的内在度量，且其距离球均为有限集。

(e) 存在一个关于（有限）测度 m 的内在度量，且其距离球均为有限集，这会带来重要后果。特别是，正如 [8], 中所指出的，这意味着 $\ell^2(X, m)$ 上相应的图拉普拉斯算子（以及更一般的磁 Schr¨odinger 算子 [7, 20]）都是本质自伴的。令人有些意外的是，常返性意味着某个特定有限测度下的本质自伴性，因为一般而言，常返性严格弱于对所有有限测度都成立的本质自伴性。有关讨论请参阅综述 [20] 中定理 11.6.15 之后的内容。该综述包含前述定理的一个版本，该定理最初见于第二作者的硕士论文 [17]。

现在我们将推导前一个定理的一些推论。由此得到的第一个推论，是为 Yamasaki 的经典常返性判据 [28] 提供另一种证明。

推论 4.3（Yamasaki 判据）。设 $G = (X, b)$ 为一个局部有限图。那么，G 常返，当且仅当所有无限路径组成的集合是零测的。

证明。设 G 常返。根据定理 4.2，存在一个有限测度 m 和一个适配于 m 的权 w，使得内在路径度量 d_w 的距离球均为有限集。由于 w 适配于 m，我们有

$$\sum_{x,y} b(x, y)w(x, y)^2 \leq 2m(X) < \infty.$$

只需证明任意无限路径的长度 $L_w(\gamma)$ 为 ∞。我们分两种情况讨论：

情况 1：路径 γ 离开任意有限集。特别地，路径会离开任意有限半径的球（相对于 d_w）。因此，该路径的长度必为无限（因为该度量是路径度量）。

情形 2：路径 γ 始终停留在某个固定的有限集内。即便如此，它的长度也必定是无限的。

假设所有无限路径组成的集合是零测的，并令 w 为相应的边权。w 上的可和条件意味着

$$m_w(x) := \frac{1}{2}\sum_{y\in X} b(x,y)w(x,y)^2$$

是有限测度。我们考虑由 w诱导的路径度量 d_w 。引理 2.7 (a) 保证它相对于 m_w是内蕴的。因此，d_w 是相对于有限测度的内在度量。由于所有无限路径的长度都是无限的，定理 2.10 推出 d_w 具有有限距离球。由定理 4.2，这便意味着常返性。□

注：证明常返图上所有路径组成的集合为零测时，我们并未用到局部有限性。

我们对常返性的刻画还有另一项推论：在常返情形下，度量完备化的所有边界的容量均为零。

推论 4.4. 设 $G = (X, b)$ 是一个常返的无限图。对于 X 上的任意有限测度 m，以及 X 上任何诱导离散拓扑的度量 σ，我们有

$$\mathrm{cap}_m(\partial_\sigma X) \;=\; 0.$$

证明. 这由前述定理的 (v) 立即得出，因为对于任意有限 F，$\partial_\sigma X$ 都包含在 $X \setminus F$ 中。□

在某些情况下，边界容量为零等价于常返性。为此，需要 σ 关于有限测度 m 是内蕴的，并且还需要一些几何数据。在下面的定理中，我们讨论两种满足这一条件的情形。

定理 4.5（容量判据）。设 $G = (X, b)$ 是一个图。设 σ 是一种诱导离散拓扑且关于有限测度 m 为内蕴的度量。那么，若 $\mathrm{cap}_m(\partial_\sigma X) = 0$，并且满足以下条件之一，则 G 是常返的：

(a) G 是局部有限的。(b) (X, σ) 是全有界的。

证明。(a)：根据定理 4.2，只需构造一个关于有限测度的内蕴度量 e，使其具有有限距离球，并在 X 上诱导离散拓扑。我们所构造的度量 e

是路径度量。由于 G 局部有限，它自动诱导离散拓扑。根据离散霍普夫-里诺定理（定理 2.10），距离球有限等价于 (X, e) 完备。根据引理 3.3，假设 $\mathrm{cap}_m(\partial_\sigma X) = 0$，可得一个函数 $f \in \mathfrak{D}(G)$，满足 $\liminf_{x\to\partial_\sigma X} f(x) = \infty$.。令$e := d_{\sigma+\sigma_f}$ 为由权 $\sigma + \sigma_f$诱导的路径度量，其中 $\sigma_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$。引理 2.5 表明，伪度量$\sigma_f$关于有限测度是内蕴的，因此 $\sigma+\sigma_f$关于有限测度也是内蕴的。由引理 2.7 可知，诱导的路径度量 e 关于有限测度也是内蕴的。

接下来要证明 (X, e) 的完备性。设 (x_n) 关于 e 是柯西序列。由引理 2.7 可得 $e \geq \sigma + \sigma_f \geq \sigma$，因此 (x_n) 也必定是关于 σ 的柯西序列。根据完备性，它有一个极限 $x \in \overline{X}^\sigma$。我们分两种情况证明 $x \in X$，并且 (x_n) 关于 e 也收敛到 x：

情况 1：$x \in \partial_\sigma X$：$\liminf_{y\to\partial_\sigma X} f(y) = \infty$ 导出 $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$，因此对每个 $m \in \mathbb{N}$

$$e(x_m, x_n) \geq \sigma_f(x_n, x_m) = |f(x_n) - f(x_m)|$$

在 n 中无界。特别地，这与 (x_n) 关于 e 是柯西序列这一假设矛盾。

情况 2：$x \in X$：由于 σ 在 X 上诱导离散拓扑，关于 σ 收敛到 X 中某个点意味着 (x_n) 最终必定为常值。因此，它关于 e 也收敛。

(b)：根据假设，$\overline{X}^\sigma$ 是紧的。因此，$\partial_\sigma X$ 容量消失意味着其常返性，见定理 4.2。□

注。(a) 本定理的 (a) 部分是对 [8, 定理 3], 的推广，该定理只讨论了某些路径度量。注意，对于有限底测度，本文献中讨论的等式 $D(Q) = D(Q^{\max})$ 等价于常返性，例如参见 [19, 定理 6.5]。

(b) (X, σ) 全有界这一条件意味着它可以等距嵌入到一个紧度量空间中。下文将考察赋有欧几里得度量的有界离散 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ 的例子。

(c) 对于一般图，前述定理是否成立仍是一个开放问题。

(d) 对于局部有限 $G = (X, b)$，我们建立了以下断言之间的等价性。

(i) G 是常返的。
(ii) 对于相对于有限测度的某个/所有内在度量 σ m 它们诱导离散拓扑，我们有

$$\mathrm{cap}_m(\partial_\sigma X) = 0.$$

(iii) 所有无限路径构成的集合是零测的。

考虑集合 $A = \partial_\sigma X$ 时，蕴含关系 (iii) $\Rightarrow$(ii) 可视为定理 3.6 的某种逆命题。

5. Resolvable graphs and harmonic functions

本节转而研究暂态图。根据上一节的结果，暂态性可由（适当）边界的容量为正来刻画。在这里，我们从另一个角度出发，根据超调和函数来刻画常返性与暂态性（其精确定义见下文）。具体而言，一个图是暂态的，当且仅当它存在有限能量的非恒定超调和函数（例如见 [12]）。一般来说，这些超调和函数并非调和函数。这促使我们关注那些存在有限能量的非恒定调和函数的（暂态）图。本节旨在推导一个基于容量的充分条件，以保证这类函数的存在。为此，我们引入图的强可解性，这一性质比 [2] 中介绍的可解性略强。我们证明，（大多数）暂态强可解图都存在调和函数。

定义 5.1（可解性）。若存在边权 w，使得图 $G = (X, b)$ 满足

$$\sum_{x,y\in X} b(x,y)w(x,y)^2 < \infty$$

对于每个点 $x \in \partial_{d_w} X$，相对于 d_w 收敛到 x 的路径集合都是零测的。在这种情况下，w 称为 G 的解析权。

前一个定义依赖于路径这一概念。现在我们旨在给出一个无路径的定义，以刻画本质上相同的概念。由此得到以下定义。

定义 5.2（强可解性）。若存在一个内蕴度量 σ，它相对于有限测度 m，并诱导离散拓扑，且对所有 $x \in \partial_\sigma X$ 都有 $\mathrm{cap}_m(\{x\}) = 0$，则称图 $G = (X, b)$ 强可解。在这种情况下，σ 称为 G 的可解度量。

命题 5.3。强可解图是可解的。

证明。设 σ 是 G 的可解度量，且它相对于有限测度 m 是内蕴的。由引理 2.7，由 σ 诱导的路径度量 d_σ 满足 $\sigma \le d_\sigma$。因此，存在一个连续映射 $\iota\colon \overline{X}^{d_\sigma} \to \overline{X}^{\sigma}$，它在 X 上延拓恒等映射。

设 $x \in \partial_{d_\sigma} X$。我们首先证明 $\iota(x) \in \partial_\sigma X$。假设并非如此，即 $\iota(x) \in X$。我们选取 X 中关于 d_σ 的一个序列 (x_n)，且 $x_n \to x$。由于 $x_n \to \iota(x)$ 关于 σ，并且 σ

诱导离散拓扑，(x_n) 必须最终为常数。因此，$x = \iota(x) \in X$，矛盾。

任何相对于 d_σ 收敛到 x 的路径，相对于 σ也会收敛到 $\iota(x)$。因此，所有这类路径的集合包含于$\Gamma_{\{\iota(x)\},\ \sigma}$之中；后者是相对于 σ以 $\iota(x)$ 为聚点的路径集合。因此，只需证明后一个集合是零测的。由于 $\iota(x) \in \partial_\sigma X$，根据假设，$\mathrm{cap}_m(\{\iota(x)\}) = 0$ 。定理 3.6 表明，$\Gamma_{\{\iota(x)\},\ \sigma}$ 是零测的。□

注。（a）强可解性将 [2] 中引入的几何可解性概念转化为一种位势理论概念。这有两方面的优点。借助强可解性，也可以处理非局部有限图，因为位势理论并不区分局部有限图和非局部有限图。这正是位势理论的一个优点。事实上，对于通常涉及无限路径的概念，非局部有限的情形会带来问题；例如，离散霍普夫–里诺定理 2.7 在非局部有限图上并不成立，参见 [8, 附录 A]中的讨论。此外，在更一般的、具有位势理论的空间中也可以使用强可解性，例如黎曼流形、分形或度量图。

(b) 正如定理 3.6 后所讨论的，我们认为，对所有 $x \in \partial_\sigma X$ ，$\mathrm{cap}_m(\{x\}) = 0$ 严格强于 $\Gamma_{\{x\},\ \sigma}$ 对所有 $x \in \partial_\sigma X$均为零测。因此，可解性似乎严格强于可解性（尽管我们还没有具体的例子）。然而，下文将看到，作为 [2],中可解图的主要例子，平面图也是强可解的。

定义 5.4（（超）调和函数）。设 $G = (X, b)$ 是一个图。若函数 $f\colon X \to \mathbb{C}$ 对所有 $x \in X$ 均满足

$$f(x) \geq \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \in X} b(x, y) f(y),$$

其中我们假设等式右侧的和绝对收敛。若 f 和 $-f$ 均为超调和函数，则称函数 f 为调和函数。我们用 $\mathfrak{H}(G)$ 表示调和函数空间。

这些函数的一个重要性质是，在暂态图上，有限能量函数可唯一表示为有限能量调和函数与 $\mathfrak{D}_0(G)$ 中函数的和，相关内容参见 [22] 中的定理 6.3。

定理5.5（Royden 分解）。设 $G = (X, b)$ 是一个暂态图。对于所有 $f \in \mathfrak{D}(G)$，存在唯一的 $f_0 \in \mathfrak{D}_0(G)$ 和唯一的调和 $f_h \in \mathfrak{D}(G)$，使得

$$f = f_0 + f_h$$

and

$$Q(f) = Q(f_0) + Q(f_h).$$

函数 f_h 是 $\mathfrak{D}(G)$ 中满足以下条件的唯一函数

$$Q(f_h) = \inf\{Q(f-g) \mid g \in \mathfrak{D}_0(G)\} = \inf\{Q(f-g) \mid g \in C_c(X)\}.$$

此外，若 f 有界，则 f_0 和 f_h 也有界。

引入可解性是为了证明在暂态局部有限可解图上存在非恒定调和函数。Benjamini 和 Schramm 的这一结果也适用于不一定局部有限的强可解图。在证明这一点之前，我们需要一个关于由利普希茨函数诱导的调和函数的结果。

设 $\sigma \in \mathfrak{M}$（G）相对于有限测度 m 是内蕴的，并进一步假设（X, b）是暂态的。利用 Royden 分解，我们定义映射

$$\Phi\colon \mathfrak{D}(G) \cap C_b(\overline{X}^{\sigma}) \to \mathfrak{D}(G) \cap \mathfrak{H}(G), \quad f \mapsto f_h.$$

由于 Royden 分解保持有界性，且 m 有限，我们甚至得到 Φ 将 H^1 映射到（G, m）。以下是本节的主要观察结果，我们将用它来构造许多有限能量的非恒定调和函数。

引理 5.6. 设（X, b）是一个图，σ 是相对于有限测度 m 的内在度量，该度量诱导离散拓扑，并且满足 $\mathrm{cap}_m(\partial_\sigma X) > 0$。此外，设

$$S = \{x \in \partial_\sigma X \mid \mathrm{cap}_m(U \cap \partial_\sigma X) > 0 \ \textit{all open}\ x \in U \subseteq \overline{X}^{\sigma}\}.$$

Then

$$\ker \Phi \subseteq \{f \in \mathfrak{D}(G) \cap C_b(\overline{X}^{\sigma}) \mid f|_S = 0\}.$$

特别地，如果 $\Phi(f)$ 是常数，那么 f 在 S 上是常数。

证明。设 $f \in \mathfrak{D}(G) \cap C_b(\overline{X}^{\sigma})$，其中 $f|_S \neq 0$。我们证明 $f_h = \Phi(f) \neq 0$。不失一般性，存在 $\varepsilon > 0$，使得对某个 $x \in S$，有 $f(x) \geq \varepsilon$。利用定理 5.5，我们选取实数集 $C_c(X)$ 中的一个序列 (g_n)，使得 $Q(f_h) = \inf_{n\geq 1} Q(f - g_n) = \lim_{n\to\infty} Q(f - g_n)$。如上所述，我们有 $f_h \in H^1(G, m)$。

断言：序列 (g_n) 可以选取为满足 $f - g_n \to f_h$ in $H^1(G, m)$。

断言的证明。只需证明序列 (g_n) 可以选取为满足 $f - g_n \to f_h$ in $\ell^2(X, m)$。我们可以假设 $\|g_n\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$，否则我们可以写成

$$((f - g_n) \wedge \|f\|_\infty) \vee (-\|f\|_\infty) = f - h_n$$

配以适当的 $h_n \in C_c(X)$。这些满足 $\|h_n\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$，并且利用 Q 与压缩映射的相容性，还满足

$$Q(f_h) \leq Q(f - h_n) \leq Q(f - g_n).$$

现在假设选取 (g_n) 使其满足 $\|g_n\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$。Royden 分解表明 $Q(f_0 - g_n) \to 0$。此外，我们的假设 $\mathrm{cap}_m(\partial_\sigma X) > 0$ 意味着该图是暂态的，见推论 4.4。对于暂态图，关于 Q 在 $\mathfrak{D}_0(G)$ 上的收敛意味着逐点收敛，例如见 [11, 定理 B.2]。因此，我们得到 $f_0 - g_n \to 0$ 逐点收敛，这意味着 $f - g_n \to f_h$ 逐点收敛。由于函数 $f - g_n$ 一致有界于 $3\|f\|_\infty$，且 m 是有限测度，勒贝格控制收敛定理给出 $f - g_n \to f_h$ 在 $\ell^2(X, m)$ 中收敛，由此得证。

现在设 (g_n) 是如断言中所述的一个序列。由于 σ 诱导离散拓扑，可以通过在 $\partial_\sigma X$ 上令 $g_n = 0$，将紧支撑函数 g_n 连续延拓到 $\overline{X}^\sigma$。于是，$f - g_n$ 在 $\overline{X}^\sigma$ 上连续，并且在 $\partial_\sigma X$ 上满足 $f - g_n = f$。由 f 的连续性，存在 x 在 $\partial_\sigma X$ 中的一个相对开邻域 $U_x \subseteq \partial_\sigma X$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，在 U_x 上有 $f - g_n = f \geq \varepsilon/2$。利用 $x \in S$，我们得到 $\mathrm{cap}_m(U_x) > 0$。由 $f - g_n$ 的连续性，存在一个开集 $O_n \subseteq \overline{X}^\sigma$，满足 $U_x \subseteq O_n$，并且在 O_n 上有 $f - g_n \geq \varepsilon/4$，使得 $4(f-g_n)/\varepsilon \geq 1$ 在 $X \cap O_n$ 上成立。根据容量对边界子集的定义可得

$$\frac{16}{\varepsilon^2}\|f - g_n\|^2_{Q,m} \geq \mathrm{cap}_m(X \cap O_n) \geq \mathrm{cap}_m(U_x).$$

利用 $f - g_n \to f_h$ 在 $H^1(G, m)$ 中，我们得到

$$\|f_h\|^2_{Q,m} = \lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|^2_{Q,m} \geq \frac{\varepsilon^2}{16}\mathrm{cap}_m(U_x) > 0$$

并得到 $f_h \neq 0$。

对于“特别是”部分，假设 $\Phi(f)$ 是恒等于C的常数。由于常数函数的调和部分就是其本身，我们得到 $\Phi(f - C) = \Phi(f) - C = 0$。因此，我们先前证明的内容表明 $f = C$ 在 S上。□

注。本引理中的集合 S 是限制在 $\partial_\sigma X$的子集上的外测度 cap_m 的支撑。

假设 $\sigma \in \mathfrak{M}(G)$ 关于有限测度 m 是内蕴的。我们将关于 σ 的有界利普希茨函数集合记为 $\mathrm{Lip}_b(X) = \mathrm{Lip}_{b,\,\sigma}(X)$。若 $f \in \mathrm{Lip}_b(X)$，则引理 2.4 表明$f \in H^1(G, m)$（该引理蕴含 $f \in \mathfrak{D}(G)$，而f 的有界性可推出 $f \in \ell^2(X, m)$）。此外，f 可以唯一延拓为利普希茨函数 $\overline{X}^\sigma$，为稍微滥用记号，我们仍将其记为 f。因此，$\mathrm{Lip}_b(X) \subseteq \mathfrak{D}(G) \cap C(\overline{X}^\sigma)$。这一观察将在下一个定理的证明中用到。

定理 5.7. 设 (X, b) 是一个图，且 σ 是相对于有限测度 m 的内在度量，该测度诱导离散拓扑

使得 $\mathrm{cap}_m(\partial_\sigma X) > 0$。此外，设

$$S = \{x \in \partial_\sigma X \mid \mathrm{cap}_m(U \cap \partial_\sigma X) > 0 \ \textit{all open}\ x \in U \subseteq \overline{X}^\sigma\}.$$

于是 $\dim(\mathfrak{D}(G) \cap \mathfrak{H}(G)) \geq |S|$。特别地，若 $|S| \geq 2$，则该图存在一个有限能量的非恒定调和函数。

证明。不失一般性，我们可以假设 $|S| \geq 2$，否则结论显然成立，因为常函数属于 $\mathfrak{D}(G) \cap \mathfrak{H}(G)$。设 $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Lip}_b(X)$。前一个引理表明，若 $f_1|_S, \ldots, f_n|_S$ 线性无关，则 $\Phi(f_1) \ldots, \Phi(f_n)$ 在 $\mathfrak{D}(G) \cap \mathfrak{H}(G)$ 中线性无关。由此即可推出结论，因为 $\dim \mathrm{Lip}_b(X) \geq \dim \mathrm{Lip}_b(S) \geq |S|$（注意，$S$ 上的任意有界利普希茨函数都可以延拓为$\overline{X}^\sigma$上的有界利普希茨函数）。□

推论 5.8（非恒定调和函数的存在性）。设$G = (X, b)$是一个强可解图，且 σ 是一个相对于有限测度 m而言内蕴的可解度量。若 $\mathrm{cap}_m(\partial_\sigma X) > 0$，则有限能量有界调和函数空间是无限维的。

证明。令 S 为前述定理中引入的边界上容量的支撑。其补集为

$$\partial_\sigma X \backslash S = \{x \in \partial_\sigma X \mid \text{ ex. open } x \in U \subseteq \overline{X}^\sigma \text{ with } \mathrm{cap}_m(U \cap \partial_\sigma X) = 0\}.$$

由于$(\overline{X}^\sigma, \sigma)$是可分的，其拓扑有可数基。因此，$\mathrm{cap}_m$ 的 σ-次可加性给出 $\mathrm{cap}_m(\partial_\sigma X \setminus S) = 0$。再次利用容量的次可加性可得

$$\mathrm{cap}_m(S) = \mathrm{cap}_m(\partial_\sigma X) > 0.$$

根据我们的假设，S 中的每个点的容量均为 0。因此，S 必定不可数；否则，σ-次可加性将推出 $\mathrm{cap}_m(S) = 0$，这与我们此前的讨论相矛盾。有了这一点，结论便由前述定理得出。□

该定理是 [2, 定理 3.1] 的一个版本，适用于强可解但可能是非局部有限的图。我们不得不将 [2] 的暂态性假设替换为更强的条件 $\mathrm{cap}_m(\partial_\sigma X) > 0$。如定理 4.5 中所述，对于某些图类，暂态性蕴含这一条件。我们在下面的推论中列出这些情形。

推论 5.9. 设 $G = (X, b)$ 是一个暂态的强可解图，并且满足以下条件之一：

(a) G 是局部有限的。(b) σ 是一个可解度量，且 (X, σ) 是全有界的。
因此，有限能量的有界调和函数空间是无限维的。

证明。根据定理 4.5，这两个条件都意味着关于可解度量 σ 有 $\mathrm{cap}_m(\partial_\sigma X) > 0$。因此，结论由前一个推论得出。□

从势论度量边界上的函数（即度量边界上容量的支撑）构造调和函数，让人联想到求解狄利克雷问题。若图以及边界上的函数满足适当的附加条件，这一过程便可精确表述。

注（在 S 上为一致暂态图求解狄利克雷问题）。设 (X, b) 是一个具有 $\mathfrak{D}_0(G) \subseteq C_0(X)$ 的图，其中 $C_0(X)$ 表示 $C_c(X)$ 的一致闭包。具有这一性质的图称为一致暂态图。顾名思义，一致暂态图是暂态图；关于这一事实以及一致暂态性的更多背景，请参见 [11]。设 $\sigma \in \mathfrak{M}(G)$ 关于有限测度 m 是内蕴的，并令 S 表示上文讨论的边界上容量的支撑。那么，对于任意有界利普希茨函数$\varphi\colon S \to \mathbb{R}$，狄利克雷问题

$$\begin{cases} h \in \mathfrak{H}(G) \cap \mathfrak{D}(G) \\ h \in C_b\left(\overline{X}^\sigma\right) \text{ with } h|_S = \varphi \end{cases}$$

有唯一解。

唯一性：这直接由引理 5.6 得出。

存在性：有界利普希茨函数 $\varphi\colon S \to \mathbb{R}$ 可以延拓为有界利普希茨函数 $f\colon \overline{X}^\sigma \to \mathbb{R}$。考虑 Royden 分解 $f = f_0 + f_h$，其中 $f_0 \in \mathfrak{D}_0(G) \subseteq C_0(X)$ 且 $f_h \in \mathfrak{D}(G)$ 为调和函数。X 中任何收敛到$\partial_\sigma X$ 中某一点的序列最终都必须离开任意有限集。因此，通过令 $f_0 = 0$ 在 $\partial_\sigma X$上成立，可以将 f_0 延拓为$\overline{X}^\sigma$ 上的连续函数。这表明 $f_h = f - f_0$ 也有一个延拓到 $\overline{X}^\sigma$ 上的有界连续函数，且满足$f_h|_{\partial_\sigma X} = f|_{\partial_\sigma X}$。根据构造可得 $f_h|_S = \varphi$。

6. Planar and canonically compactifiable graphs

本节将证明，有界几何的圆堆积，以及由此可知的有界几何局部有限平面图，始终是强可解的。此外，我们证明典范可紧化图绝非强可解，从而表明有界几何的平面图绝不可能是典范可紧化的。

首先，我们回顾圆堆积及其接触图的概念。关于这些主题的详细背景知识，请参阅著作 [15]。

定义 6.1（圆堆积及其从属图）。圆堆积是一个集合 $X \neq \emptyset$ 以及两个映射 $r\colon X \to (0, \infty)$ 和 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^2$，使得闭圆族 $C_x = B_{r(x)}(\varphi(x))$、$x \in X$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中满足：只要 $x \neq y$，就有 $C_x^\circ \cap C_y^\circ = \emptyset$。如果 $\bigcup_{x \in X} C_x$

是一个有界集，则称其为有界。若 $b(x,y) > 0$ 蕴含 $C_x \cap C_y \neq \emptyset$，则称 X 上的边权 b 从属于该圆堆积。

注。在下文中，我们简记 $C_x, x \in X$，表示一个圆堆积。圆堆积 C_x, $x \in X$ 的接触图或神经复形，是定义在 X 上的组合图；当且仅当 $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ 时， $x \sim y$。因此， b 上的边权 X 从属于该圆堆积，当且仅当其诱导的离散图是接触图的子图。

以下是本节的主要观察结果。

定理 6.2. 设 $C_x, x \in X$ 是一个有界圆堆积，并假设 (X,b) 从属于该圆堆积且具有有界几何。那么 (X,b) 是强可解的。特别地，若 (X,b) 是暂态的，则它存在一个有限能量的非恒定调和函数。

证明. 令 $\Omega = \sup_{x\in X} \deg(x)$。由于 (X,b) 具有有界几何，因此 $\Omega < \infty$。如上所述，令 r, φ 表示诱导该圆堆积的映射。我们考虑定义在 X 上的度量 σ，其定义为 $\sigma(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$.。我们首先证明， σ 是关于某个诱导离散拓扑的有限测度的内在度量。

假设 $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ 对所有 $x \neq y$ 成立，则

$$\sigma(x,y) \geq r(x) + r(y) > r(x)$$

对所有 $y \neq x$都成立。因此， σ 诱导出离散拓扑。由于 b 从属于圆堆积，当 $x \sim y$时，我们也有 $C_x \cap C_y \neq \emptyset$。对于 $x \sim y$，这意味着 $\sigma(x,y) = r(x) + r(y)$。由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{x,y\in X} b(x,y)\sigma(x,y)^2 &\leq 2\sum_{x,y\in X} b(x,y)(r(x)^2 + r(y)^2)\\ &\leq 4\Omega\sum_{x\in X} r(x)^2\\ &\leq \frac{4\Omega}{\varpi}\lambda(A) < \infty,\end{aligned}$$

其中 $A = \bigcup_{x\in X} C_x$ 和 λ 为勒贝格测度。这表明 σ 相对于有限测度 m是内蕴的。

利用 φ 是等距映射这一点，我们将 (X,σ) 与 $\mathbb{R}^2$中的 $\varphi(X)$ 等同。特别地，相对于 σ 的边界就是欧几里得边界。给定 $w \in \partial X$，我们证明 $\mathrm{cap}_m(\{w\}) = 0$。对于 $r > 0$，我们考虑函数

$$f_r \colon X \to \mathbb{R}, \quad f_r(x) = \left(2 - \frac{|x-w|}{r}\right)_+ \wedge 1.$$

它在 $B_r(w)$ 上满足 $f_r = 1 \cap X$，并且在 $X \setminus B_{2r}(w)$ 上满足 $f_r = 0 \cap X$。此外，对于 $x \sim y$，我们有

$$|f_r(x) - f_r(y)|^2 \leq \frac{|x-y|^2}{r^2} = \frac{(r(x)+r(y))^2}{r^2}.$$

接下来，只要 $x \sim y$ 且 $x, y \in B_{2r}(w)$，我们就比较 $(r(x) + r(y))^2$ 与 $\lambda((C_x \cup C_y) \cap B_{2r}(w))$。边界点 w 不属于圆盘 C_x, C_y 的内部。这意味着 $r(x)\ r(y) \leq 2r$。利用这一观察以及 C_x, C_y 相切这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda((C_x \cup C_y) \cap B_{2r}(w)) &= \lambda(C_x \cap B_{2r}(w)) + \lambda(C_y \cap B_{2r}(w)) \\ &\geq C(r(x)^2 + r(y)^2)\end{aligned}$$

对于某个与 x、y 和 r 无关的常数 $C > 0$（对于最后一个不等式，我们只需估计具有给定参数的两个圆盘交集的面积）。结合这些估计，我们推得

$$\begin{aligned}Q(f_r) &\leq \frac{1}{2r^2} \sum_{x,y \in X} b(x,y)(r(x) + r(y))^2 \\ &\leq \frac{1}{Cr^2} \sum_{x,y \in X} b(x,y)\lambda((C_x \cup C_y) \cap B_{2r}(w)) \\ &\leq \frac{2\Omega}{Cr^2}\lambda(B_{2r}(w)) \\ &\leq \frac{8\pi\Omega}{C}.\end{aligned}$$

由于 m 有限，我们还有 $\|f_r\|_m \to 0$，当 $r \to 0+$ 时。结合这两个观察可知，(f_r) 在希尔伯特空间 $H^1(G, m)$ 中有界。利用巴拿赫-萨克斯定理，我们得到一个递减序列 $r_k \to 0$，使得

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_{r_k}$$

在 $H^1(G, m)$ 中收敛到某个 $g \in H^1(G, m)$。由于在 $H^1(G, m)$ 中收敛蕴含 $\ell^2(X, m)$-收敛，并且 $f_{r_k} \to 0$ 属于 $\ell^2(X, m)$，我们得到 $g = 0$。根据构造，我们还有 $g_n \geq 1$ 在 $B_{r_n}(w)$ 上成立，由此可得

$$\operatorname{cap}_m(\{w\}) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(Q(g_n) + \|g_n\|_m^2\right) = 0.$$

“特别是”这一部分由推论 5.9 以及以下观察得出：(X, σ) 是全有界的，因为它等距于实数集 $\mathbb{R}^2$ 的一个有界、因而全有界的子集。□

注。我们不在前述定理中假设局部有限性。如果 $\bigcup_{x \in X} C_x$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中不稠密，则可以去掉关于圆堆积有界性的假设。在这种情况下，只需对 $\bigcup_{x \in X} C_x$ 补集中的一个圆进行反演，即可得到一个具有同构接触图的有界圆堆积。更多细节还可参见下述推论的证明。

在下述推论中，如果一个加权图所诱导的组合图是平面的，我们就称该加权图为平面图（关于后者的精确定义，参见例如 [14,第 2 节1]）。

推论 6.3. 设 $G = (X, b)$ 是一个有界几何的局部有限平面图。那么 G是强可解的。特别地，如果G 是暂态的，那么 G 具有一个有限能量的非恒定调和函数。

证明. 根据 [15] 中的断言 4.3，任意局部有限图都同构于某个圆堆积的接触图。我们证明可以选取有界的圆堆积。由此，结论可由前述定理推出。

我们再添加一个点 o ，并添加一条从 o 到X 中某个点的边，使得所得图 (X', b') 仍然是平面图。根据 [15] 中的断言 4.3，图 (X', b') 同构于圆堆积 $C_x, x \in X'$ 的接触图。为了使这个圆堆积有界，我们以对应于新顶点 o的圆 C_o 为中心进行反演。我们将反演映射记作 ψ。由于反演将圆映射为圆， $\psi(C_x)$ $x \in X$ 是有界集合 C_o 内的一个圆堆积。根据构造，它的接触图就是 (X, b) 所对应的组合图。□

注. 在具有有界几何的暂态平面图上存在非平凡调和函数，是 [2]中的主要结果之一。随后，通过球堆积 [1] 或正方形铺砌 [5]的边界，人们给出了平面图上所有调和函数的更加明确的描述。关于一种统一的方法，参见 [9]。

近年来，典范可紧化图这一类图（定义见下文）受到了一定关注。我们之前的讨论使我们能够证明，具有有界几何的局部有限平面图绝不可能是典范可紧化的。

根据 [6] ，如果一个图 $G = （X， b）$ 满足 $\mathfrak{D}（G）\subseteq \ell^\infty（X）$ ，则称其为典范可紧化图（关于其他不同的等价刻画，也见 [18]）。例子包括具有 $n \geq 3$的 $\mathbb{Z}^n$ ，见 [11, 第 6], 节；以及满足以下条件的图（X， b）：

$$\sum_{x,y\in X} \frac{1}{b(x, y)} < \infty,$$

见 [6, 例4. 6]。注意，后一个条件意味着非常大的顶点度数。我们注意到如下事实。

定理 6.4. 无限的典范可紧化图不可强可解。特别地，具有有界几何的局部有限无限平面图不可典范紧化。

证明。设 (X, b) 是一个无限的可典范紧化图，且 m 是定义在 X 上的有限测度。可典范紧化性给出

$H^1(G,m) \subseteq \ell^\infty(X)$。闭图定理蕴含存在 $C > 0$ 使得

$$\|f\|_\infty^2 \leq C(Q(f) + \|f\|_m^2)$$

对所有 $f \in H^1(G,m)$ 均成立。这意味着，对于任意满足以下条件的 $\emptyset \neq U \subseteq X$，都有 $\mathrm{cap}_m(U) \geq 1/C$：任意度量边界中的点，其容量至少为 $1/C$。

。还需证明，对于任意关于 m 的内蕴度量 σ，若其诱导离散拓扑，则空间 (X,σ) 不完备（因此至少有一个边界点）。根据 [18](X, b) 可典范紧化，且 σ 是关于有限测度的内蕴度量，可知 (X,σ) 全有界。因此，$\overline{X}^\sigma$ 是紧的。但 (X,σ) 并不紧，因为它是带有离散拓扑的无限集。这证明了 $\partial_\sigma X = \overline{X}^\sigma \setminus X \neq \emptyset$。

“特别是”部分由前一个推论得出。 □

References

[1] Omer Angel、Martin T. Barlow、Ori Gurel-Gurevich 和 Asaf Nachmias。《通过圆堆积研究平面图的边界》。Ann. Probab.，44(3):1956–1984，2016。[2] Itai Benjamini 和 Oded Schramm。《通过圆堆积研究平面图和近似平面图及流形上的调和函数》。Invent. math.，126:565–587，1996。[3] Rupert L. Frank、Daniel Lenz 和 Daniel Wingert。《非局部对称狄利克雷型的内在度量及其在谱理论中的应用》。J. Funct. Anal.，266(8):4765–4808，2014。[4] Masatoshi Fukushima、Yoichi Oshima 和 Masayoshi Takeda。《狄利克雷型与对称马尔可夫过程》，德格鲁伊特数学研究丛书第19卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，增订版，2011。[5] Agelos Georgakopoulos。《图的正方形铺砌边界与泊松边界重合》。Invent. Math.，203(3):773–821，2016。[6] Agelos Georgakopoulos、Sebastian Haeseler、Matthias Keller、Daniel Lenz 和 Rados law K. Wojciechowski。《有限测度的图》。J. Math. Pures Appl. (9)，103(5):1093–1131，2015。[7] Batu G¨uneysu、Matthias Keller 和 Marcel Schmidt。《图上磁性薛定谔算子的费曼-卡茨-伊藤公式》。Probab. Theory Related Fields，165(1-2):365–399，2016。[8] Xueping Huang、Matthias Keller、Jun Masamune 和 Rados law K. Wojciechowski。《关于加权图上拉普拉斯算子的自伴扩张》。J. Funct. Anal.，265(8):1556–1578，2013。[9] Tom Hutchcroft 和 Yuval Peres。《平面图的边界：统一方法》。Electron. J. Probab.，22:论文编号100，20页，2017。[10] Matthias Keller。《图上的内在度量：综述》。载于《网络的数学技术》，施普林格数学与统计学论文集第128卷，第81–119页。施普林格，查姆，2015。[11]Matthias Keller、Daniel Lenz、Marcel Schmidt 和 Rados law K. Wojciechowski。《关于一致暂态图的注记》。Rev. Mat. Iberoam.，33(3):831–860，2017。[12] Matthias Keller、Daniel Lenz 和 Rados law K. Wojciechowski。《图与离散狄利克雷空间》，数学基础原理丛书第358卷。

数学科学 /数学科学基本原理/。施普林格，查姆， [2021]©2021。[13] Matthias Keller 和 Florentin M¨unch。《一条新的离散霍普夫-里诺定理》。Discrete Math.，342(9):2751–2757，2019。[14] Bojan Mohar 和 Carsten Thomassen。《曲面上的图》。约翰·霍普金斯数学科学研究丛书。约翰·霍普金斯大学出版社，马里兰州巴尔的摩，2001。[15] Asaf Nachmias。《平面映射、随机游走与圆堆积》，数学讲义第2243卷´。施普林格，查姆，2020。圣弗卢尔概率暑期学校第48届（2018），圣弗卢尔概率暑期学校。 [圣弗卢尔概率暑期学校]。[16] Tadashi Nakamura 和 Maretsugu Yamasaki。《无限网络的广义极值长度》。Hiroshima Math. J.，6(1):95–111，1976。[17] Simon Puchert。《可解图与调和函数》，2019。[18] Simon Puchert。《通过内在度量和代数性质刻画典范可紧化图》。Arch. Math. (Basel)，116(5):541–549，2021。[19] Marcel Schmidt。《离散空间上狄利克雷型的全局性质》。Dissertationes Math.，522:43，2017。[20] Marcel Schmidt。《离散（磁性）薛定谔算子自伴实现的存在性与唯一性》。载于《图与流形上的分析与几何》，伦敦数学学会讲义丛书第461卷，第250–327页。剑桥大学出版社，剑桥，2020。[21]Marcel Schmidt。《能量型》。博士论文，arXiv:1703.04883，耶拿弗里德里希·席勒大学，2017。[22] Paolo M. Soardi。《无限网络上的位势理论》，数学讲义第1590卷。施普林格出版社，柏林，1994。[23] Karl-Theodor Sturm。《局部狄利克雷空间上的分析 I：常返性、保守性与 L^p-刘维尔性质》。J. Reine Angew. Math.，456:173–196，1994。[24] Karl-Theodor Sturm。《局部狄利克雷空间上的分析 II：抛物型方程基本解的高斯上界》。Osaka J. Math.，32(2):275–312，1995。[25] Karl-Theodor Sturm。《局部狄利克雷空间上的分析 III：抛物型哈纳克不等式》。J. Math. Pures Appl. (9)，75(3):273–297，1996。[26] Wolfgang Woess。《无限图与群上的随机游走》，剑桥数学丛书第138卷。剑桥大学出版社，剑桥，2000。[27] Maretsugu Yamasaki。《无限网络上的极值问题》。Hiroshima Math. J.，5(2):223–250，1975。[28] Maretsugu Yamasaki。《抛物型与双曲型无限网络》。Hiroshima Math. J.，7(1):135–146，1977。

D. Lenz, Institut für Mathematik,
Friedrich-Schiller-UniversitätJena, 07743 Jena, Germany电子邮箱地址:
daniel.lenz@uni-jena.deS. Puchert, Institut für Mathematik,
Friedrich-Schiller-UniversitätJena, 07743 Jena, Germany电子邮箱地址:
simon.puchert@uni-jena.deM. Schmidt, Mathematisches Institut,
Universität Leipzig, 04109Leipzig, Germany电子邮箱地址:
marcel.schmidt@math.uni-leipzig.de