时间编码次奈奎斯特模数转换器的硬件原型

Hila Naaman，*IEEE* 学生会员，Nimrod Glazer *IEEE* 会员，Moshe Namer，Daniel Bilik，Shlomi Savariego 和 Yonina C. Eldar，*IEEE* 会士

arXiv:2301.02012v1 [eess.SP] 5 Jan 2023

摘要—**模数转换器是数字信号处理的关键组成部分。在这一框架中，经典采样器由全局时钟控制。在高采样率下，时钟成本高且功耗大，从而增加了模数转换器的成本和能耗。因此，理想的做法是使用无时钟模数转换器，以尽可能低的采样率进行采样。积分发放时间编码机（IF-TEM）是一种基于时间、功耗高效的异步设计，不与全局时钟同步。有限创新率（FRI）信号广泛存在于各种应用中，其自由度低于信号的奈奎斯特率，因此可建立亚奈奎斯特采样信号模型。本文提出了一种功耗高效的 IF-TEM 模数转换器架构，并展示了亚奈奎斯特采样和 FRI 信号恢复。我们利用 IF-TEM 在硬件中实现了首个基于时间的亚奈奎斯特采样器。我们提出了一种可行的方法，用于从 IF-TEM 数据中准确估计 FRI 参数。所提出的硬件和重建方法能够以最高 -25 dB 的误差恢复 FRI 参数，同时以约为奈奎斯特率十分之一的速率运行，为低功耗模数转换器架构铺平了道路。**

索引词—**类脑计算、模数转换（ADC）、基于时间采样的硬件、积分发放式时间编码机（IF-TEM）、亚奈奎斯特采样、有限创新率（FRI）信号。**

I. 引言

模数转换器（ADCs）是电子硬件组件，可实现信号的数字处理，以及计算机与物理世界之间的通信 [1], [2]。传统模数转换器，也称为同步模数转换器，由全局时钟控制，其运行速率满足奈奎斯特率要求。对于频率不高于 $1/2W$ 的信号，必须每隔 W秒采集一次样本 [3]。然而，同步模数转换器存在若干局限，因此可能不适用于某些应用。其中一个局限是持续运行的时钟信号会导致功耗较高，这在电池供电设备等能量受限系统中可能是一个显著的缺点 [4]。另一个局限是需要稳定且精确的时钟信号；随着高速系统中采样率的提高，生成这种时钟信号会变得更具挑战性，尤其是在存在噪声或易受干扰的环境中 [5]–[7]。同步模数转换器还需要复杂的时钟电路，这增加了设计和实现的复杂性 [8], [9]。因此，需要创新的模数转换器来解决这些局限，同时降低功耗和采样率。

积分发放式时间编码机（IF-TEM）是一种异步、节能的事件驱动采样器，是传统模数转换器的有前景的替代方案 [8], [10]–[13]。这种架构无需全局时钟，因此IF-TEM采样器能耗较低。此外，与传统的基于幅度的模数转换器相比，时间编码机采用极其简单、完全由模拟电路实现、低功耗且体积小巧的编码器 [10],[14]–[16]。IF-TEM对输入信号进行积分，然后将积分结果与阈值进行比较；一旦达到阈值，就记录相应的时间点[17]–[22]。IF-TEM采样器已应用于超宽带（UWB）通信 [23], 、遥感 [24], [25], 、心脏活动监测 [26], [27], 、事件相机（也称为神经形态相机） [28]–[31], 以及脉冲神经网络（SNN）解释等其他应用，从而加深了人们对如何利用神经形态硬件并替代高能耗模数转换器的认识 [32]。

在 [17], 中，研究表明，若 IF-TEM 的平均采样率高于信号的奈奎斯特采样率，则可完美重建由 IF-TEM 采样的带限信号。通过要求带宽与时间实例间隔成反比，原始信号的重建与使用不规则幅度样本采样的带限信号的重建非常相似。在 [33], 中，研究表明，当 IF-TEM 的平均采样率低于奈奎斯特率时，以较高概率仍可重建频谱稀疏信号。所提出的 TEM 会受到与频率相关的量化噪声影响，这种影响在高频输入信号下最为显著。时间编码信号的重建已推广至移不变空间中的信号 [34], 以及有限创新率（FRI）信号 [21], [22], [35], [36]。

FRI 信号的特点是自由度数量较少，因此可以进行亚奈奎斯特采样 [1], [37]。鉴于这类信号广泛应用于众多科学领域，例如雷达 [38], [39], 、超声 [40]–[42],、时域光学相干断层成像（TDOCT） [43],和激光雷达（LIDAR） [44],, FRI 信号的采样与恢复，尤其是借助 IF-TEM 的方法，备受关注[22], [35], [45], [46]。大多数关于 FRI 采样的文献都着重于利用信号结构降低模数转换器的采样率，却忽略了模数转换器的其他方面，例如其耗电的时钟 [37], [40], [47], [48]。我们探讨

所有作者均来自以色列魏茨曼科学研究所数学与计算机科学学院。电子邮箱：hila.naaman@weizmann.ac.il。本研究的部分内容曾在2022年7月举行的信息论国际研讨会（ISIT）上报告。本研究部分由欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号：101000967-ERC-CoDeS）、以色列科学基金会（资助编号：0100101）以及QuantERA资助项目C'MON-QSENS提供支持。

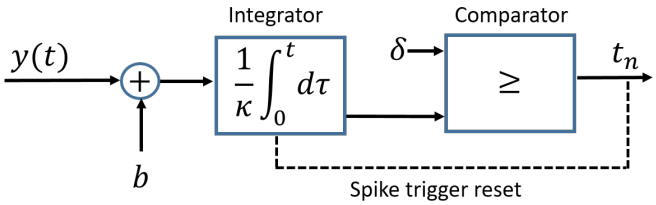


图 1. 带尖峰触发复位的时间编码器。输入信号加上偏置 b，经 κ 缩放后进行积分。达到阈值 δ 时记录一个时间点，随后积分器的值复位。

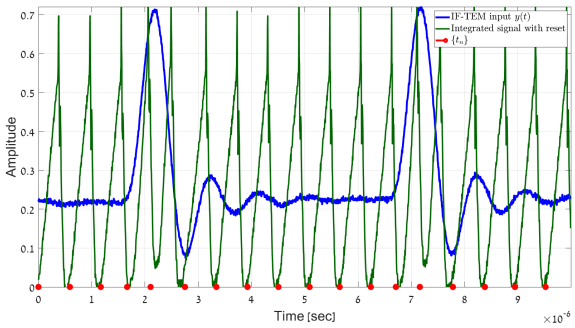


图 2. 我们的 IF-TEM 硬件采样：IF-TEM 输入信号 $y(t)$（蓝色）、积分器输出（绿色）以及 IF-TEM 输出时间实例（红色）。

如何利用节能的异步积分器-触发事件计时器采样器，解决同步模数转换器的功耗问题。

对 FRI 信号进行基于时间的采样，可以采用与传统 FRI 采样技术类似的方法，例如基于核的采样 [21], [22], [35], [36], [46], [49]。 [22] 的作者为使用 IF-TEM 对 FRI 信号进行采样与恢复提供了理论保证，并提出了一种在噪声存在时比现有技术更鲁棒的采样方法。我们的工作介绍了一种低功耗的积分器-触发事件计时器模数转换器硬件，基于 [22] 中的方法实现亚奈奎斯特采样和 FRI 信号恢复。我们使用了时间点扰动最高达 $35ms$ 的硬件测量数据。抖动时间点建模为 $t'_n = t_n + \epsilon_n$，其中 t_n 是理想时间点；我们将抖动噪声建模为独立同分布、均匀分布的 $\epsilon_n \overset{\text{独立同分布}}{\sim} \mathcal{U}[-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}]$。基于这些假设以及硬件测得的时间点，噪声水平 σ 似乎在 15-70 ms 之间波动。由于现有重建技术无法处理如此大的扰动，我们对 [22] 的方法进行修改，以增强其在存在较大时序噪声时的鲁棒性。

我们的贡献有两方面：首先，提出一种稳健的亚奈奎斯特采样与重建技术；然后，介绍一种针对有限创新率信号的亚奈奎斯特 TEM 采样硬件实现。在使用 IF-TEM 获取时间信息之前，与 [22]，类似，先用采样核对信号进行预滤波，以消除信号的零阶频率分量，从而实现稳健恢复。我们的重建方法依赖于采样核选择，并引入新的前向模型，以改进从含噪硬件数据中的恢复。与我们先前的结果[16], 相比，本文给出了一个更简单、直接的恢复保证证明，该证明基于使用测量值的部分和，因此能实现更稳定的重建。我们证明，在存在噪声时，所提出的重建技术优于 [22]中的方法。随后，我们介绍有限速率创新信号触发事件计时器硬件原型，可用于低功耗飞行时间应用。硬件组件的设计可适应范围广泛的有限速率创新信号频率。硬件的两个主要组件是积分器和复位功能。只要输入信号为正，积分器电容就必须在线性域内工作，并持续充电或增加。此外，IF-TEM 的阈值处理需要一种快速复位的方式。通过在复位功能中加入微分器和场效应晶体管，即可实现这一点。

我们通过若干有限创新率信号展示该系统的能力。在 IF-TEM 系统之前，采用带通滤波器作为采样核。该滤波器去除不必要的信号信息，并实现亚奈奎斯特采样。所设计的硬件对滤波信号进行采样，得到一系列时间点。记录时间点或其差值的一种方法是使用示波器。为估计 FRI 参数，我们使用所提出的算法计算傅里叶系数，随后利用湮灭滤波器技术估计这些参数。我们证明，使用亚奈奎斯特样本即可估计 FRI 参数；这些样本的采样率约为创新率的 10 倍，显著低于信号的奈奎斯特率。

本文其余部分安排如下。在第II节中，我们将阐述使用 IF-TEM 对 FRI 信号进行采样和恢复的问题，并讨论一些背景结果。在第 III节中，我们提出鲁棒重建算法及仿真结果。在第 IV节中，我们论证所需的硬件规格，并讨论电路挑战，随后详细介绍模拟电路板的设计工作规格。第 V节展示 IF-TEM 亚奈奎斯特采样与重建的硬件实验结果。最后，我们在第 VI节总结全文。

II. 初步结果与问题表述

本节将回顾时间编码和 FRI 领域中一些已有的研究成果，随后给出利用 IF-TEM采样器进行 FRI 采样与重建的理论问题表述。

A. 时间编码机

我们考虑一种 IF-TEM，其工作原理与 [22]（见图1）中相同。IF-TEM 的输入是一个有界信号 $y(t)$，输出是一系列脉冲或时间点。IF-TEM 由正实数 b， κ和 δ参数化。将偏置 b 加到一个 c有界信号 $y(t)$ 上，使得 $|y(t)| \leq c < b < \infty$，然后对其总和进行积分并按 $\frac{1}{\kappa}$ 缩放。当所得信号达到阈值 δ时，记录时间点 t_n，并且

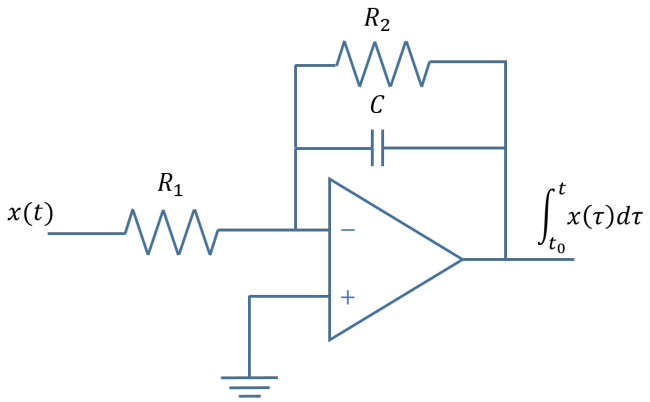


图 3. 硬件积分器电路。我们的硬件实现由一个运算放大器、一个电容器 C 和电阻器R_1 以及 R_2组成。

积分器被重置。重复 IF-TEM 过程以记录后续时间点，即如果记录了时间点 t_n，则下一个时间点 t_{n+1} 满足

$$\frac{1}{\kappa}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (y(s)+b)\,ds = \delta. \tag{1}$$

图 2 展示了使用真实数据的 IF-TEM 硬件实现的运算输出。积分器常数 κ 由积分器硬件电路确定，如图 3所示。时间编码 $\{t_n, n\in\mathbb{Z}\}$构成了模拟信号的离散表示 $y(t)$，目标是从中重建 $y(t)$。通常，重建使用另一组离散表示 $\{y_n, n\in\mathbb{Z}\}$ 定义为

$$y_n \triangleq \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(s)\,ds = -b(t_{n+1}-t_n)+\kappa\delta. \tag{2}$$

测量值 $\{y_n, n\in\mathbb{Z}\}$ 由时间编码 $\{t_n, n\in\mathbb{Z}\}$和 IF-TEM 参数 $\{b,\kappa,\delta\}$推导得到。利用（2）以及 $|y(t)|\le c$这一事实，可以证明，对于任意两个连续的时间时刻 [18], [50]:

$$\frac{\kappa\delta}{b+c} \le t_{n+1}-t_n \le \frac{\kappa\delta}{b-c}. \tag{3}$$

B. FRI 信号恢复

考虑形式如下的 FRI 信号

$$x(t)=\sum_{\ell=1}^{L} a_\ell h(t-\tau_\ell), \tag{4}$$

其中，FRI 参数 $\{(a_\ell,\ \tau_\ell)|\tau_\ell\in(0,\ T],\ a_\ell\in\mathbb{R}\}_{\ell=1}^{L}$是未知的幅度和延迟。我们假设脉冲 $h(t)\in L^2(\mathbb{R})$，且 FRI 脉冲的数量 L 已知。由于使用 IF-TEM 测量值恢复非周期 FRI 信号的分析与恢复周期 FRI 信号的分析相似 [22], ，因此本文将重点讨论恢复 T-周期 FRI 信号的情形。

考虑一个 T 周期的 FRI 信号，它由原型脉冲 $h(t)\in$的多个延迟版本线性组合而成

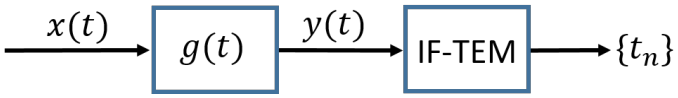


图 4. IF-TEM 采样设置：连续时间信号 $x(t)$ 通过采样核 $g(t)$ 进行滤波，然后使用 IF-TEM 进行采样，以生成时间点 $\{t_n\}$。

$L^2(\mathbb{R})$，其形式为

$$x(t)=\sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{\ell=1}^{L} a_\ell h(t-\tau_\ell-pT), \tag{5}$$

其中，FRI 参数 $\{(a_\ell,\ \tau_\ell)|\tau_\ell\in(0,\ T],\ a_\ell\in\mathbb{R}\}_{\ell=1}^{L}$对应于未知的幅度和延迟。 $x(t)$ 的创新率为 $\frac{2L}{T}$，因此， $2L$ 个测量值足以实现完美恢复 [1], [37]。

由于 $x(t)$ 是 T-周期的，因此它具有傅里叶级数表示

$$x(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{x}[k]e^{jk\omega_0 t}, \tag{6}$$

其中 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$。傅里叶级数系数（FSCs）定义为

$$\hat{x}[k]=\frac{1}{T}\hat{h}(k\omega_0)\sum_{\ell=1}^{L} a_\ell e^{-jk\omega_0\tau_\ell}, \tag{7}$$

ˆ其中 $\mathcal{K}$ 是一组整数， $h(\omega)$ 是 $h(t)$ 的连续时间傅里叶变换 [1]。假设对于 $k\in\mathcal{K}$， $h(k\omega_0)\neq 0$。

文献 [37]，表明，可以使用谱分析方法（例如湮灭滤波器（AF）[1]），根据 $2L$ 个傅里叶级数系数样本 ˆ $x[k]$ 唯一计算出参数 $\{a_\ell,\tau_\ell\}_{\ell=1}^{L}$。因此，FRI 信号重建可归结为根据信号测量值唯一确定所需数量的傅里叶级数系数这一问题。

C. 核与亚奈奎斯特采样

FRI采样架构的一个关键组件是采样核。从硬件实现的角度来看，通常更倾向于采用具有紧支撑的采样核。我们针对有限创新率信号，研究采用紧支撑正弦和核（SoS）的 IF-TEM采样与恢复。考虑由下式生成的 SoS 核

$$\hat{g}(\omega)=\sum_{k\in\mathcal{K}} \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-k\right). \tag{8}$$

基于 [22]，中介绍的稳健采样核，并为保持滤波器响应和输出的实值特性，我们选择 $\mathcal{K}$ 作为

$$\mathcal{K}=\{-K,\cdots,-1,1,\cdots,K\},\quad \text{where}\quad K\ge 2L. \tag{9}$$

采样核的鲁棒性源于选择了关于零对称但不包含零的支撑集 $\mathcal{K}$。滤波信号 $y(t)=(x*g)(t)$ 表示为

$$y(t)=\sum_{k\in\mathcal{K}} \hat{x}[k]\hat{g}(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k\in\mathcal{K}} \hat{x}[k]e^{jk\omega_0 t}. \tag{10}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} e^{-jK\omega_0 t_2}-e^{-jK\omega_0 t_1} & \cdots & e^{-j\omega_0 t_2}-e^{-j\omega_0 t_1} & e^{j\omega_0 t_2}-e^{j\omega_0 t_1} & \cdots & e^{jK\omega_0 t_2}-e^{jK\omega_0 t_1} \\ e^{-jK\omega_0 t_3}-e^{-jK\omega_0 t_2} & \cdots & e^{-j\omega_0 t_3}-e^{-j\omega_0 t_2} & e^{j\omega_0 t_3}-e^{j\omega_0 t_2} & \cdots & e^{jK\omega_0 t_3}-e^{jK\omega_0 t_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-jK\omega_0 t_N}-e^{-jK\omega_0 t_{N-1}} & \cdots & e^{-j\omega_0 t_N}-e^{-j\omega_0 t_{N-1}} & e^{j\omega_0 t_N}-e^{j\omega_0 t_{N-1}} & \cdots & e^{jK\omega_0 t_N}-e^{jK\omega_0 t_{N-1}} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

在这种情况下，前向模型（即 y_n 与所需傅里叶级数系数之间的关系）为

$$y_n=\sum_{k\in\mathcal{K}}\frac{\hat{x}[k]}{jk\omega_0}\left(e^{jk\omega_0 t_{n+1}}-e^{jk\omega_0 t_n}\right). \quad (11)$$

文献 [22], 证明了，当 $y(t)$ 满足有界条件$\max\{a_\ell|a_\ell\in\mathbb{R}\}_{\ell=1}^{L}<\infty$ 且脉冲 $h(t)$ 绝对可积时。

为了从（11）中提取傅里叶级数系数，令$\mathbf{y}=[\int_{t_1}^{t_2} y\ t\ dt\ \int_{t_2}^{t_3} y\ t\ dt\ \cdots\ \int_{t_{N-1}}^{t_N} y\ t\ dt]^\top$ N (), (), , (), 其中是区间 T内时刻的数量。测量值$\mathbf{y}$ 和傅里叶级数系数

$$\hat{\mathbf{x}}=\left[-\frac{\hat{x}[-K]}{jK\omega_0},\cdots,-\frac{\hat{x}[-1]}{j\omega_0},\frac{\hat{x}[1]}{j\omega_0},\cdots,\frac{\hat{x}[K]}{jK\omega_0}\right]^\top \quad (13)$$

之间的关系为

$$\mathbf{y}=\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}, \quad (14)$$

其中$\mathbf{B}$ 由（12）给出。文献 [22], 证明了矩阵$\mathbf{B}$ 满列秩且唯一左可逆。因此，傅里叶系数向量可计算为

$$\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{B}^\dagger\mathbf{y}, \quad (15)$$

其中 $\mathbf{B}^\dagger$ 表示摩尔-彭若斯逆。当 $N\geq 4L+2$ 和 $|\mathcal{K}|\geq 2L$时， [22] 可实现完美重建，概括如下定理:

定理 1 （第 III.D 节 [22]）。设 $x(t)$ 为如下形式的 T-周期 *FRI* 信号

$$x(t)=\sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{\ell=1}^{L}a_\ell h(t-\tau_\ell-pT),$$

其中脉冲 $h(t)\in L^2(\mathbb{R})$ 以及 *FRI* 脉冲的数量L 均为已知。考虑图*4*所示的采样机制。令采样核 $g(t)$ 满足

$$\hat{g}(k\omega_0)=\begin{cases}1 & \text{if } k\in\mathcal{K}=\{-K,\cdots,-1,1,\cdots,K\},\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}$$

且 最大值$_t$ $|(h*g)(t)|<\infty$。滤波信号 $y(t)=(x*g)(t)$。假设 *IF-TEM* 参数 $\{b,\kappa,\delta\}$ 的选取满足 $b>c$ 其中 $c=$ 最大值$_t$ $|y(t)|$，并且

$$\frac{b-c}{\kappa\delta}\geq\frac{2K+2}{T}. \quad (16)$$

则当满足以下条件时，可根据 *IF-TEM* 输出完美恢复参数 $\{a_\ell,\tau_\ell\}_{\ell=1}^{L}$：
1） $K\geq 2L$ 为非网格时。2） $K\geq L$ 为网格上时。

实际应用中，我们的 IF-TEM 硬件电路会向信号引入噪声，导致时间发生时刻 t_n 受到扰动。因此，在使用上述算法从硬件测量值中重建数据时，出现了不稳定恢复现象（更多详情请参见第三节）。因此，需要一种对噪声具有更强鲁棒性的重建策略。

D. 问题表述

考虑一个形式如（5）所示的 T 周期 FRI 信号，以及如图 4 所示的采样机制。信号 $x(t)$ 经过（8）中定义的采样核 $g(t)$，所得信号 $y(t)$ 使用 IF-TEM 进行采样。时间编码$\{t_n\}_{n=1}^{N}$ 和幅度测量值 $\{y_n\}_{n=1}^{N}$ 均对应于 $y(t)=(x*g)(t)$ 的离散表示。换言之， $\{t_n\}$对 FRI 信号的信息进行了编码。由于我们的目标是设计鲁棒的硬件，因此需要根据 IF-TEM 触发时刻准确估计 FRI 参数 $\{a_\ell,\tau_\ell\}_{\ell=1}^{L}$。为此，除了硬件实现之外，还需要一种鲁棒的恢复算法。在下一节中，我们首先介绍我们的鲁棒恢复机制：在无噪声情况下，仅需在区间 T 内包含 $4L+2$ 个脉冲，即可从 IF-TEM 观测中完美恢复傅里叶级数系数 $\{\hat{x}[k]\}_{k\in\mathcal{K}}$。随后，我们说明该方法在存在噪声时的抗干扰能力，并证明其性能优于 [22] 中提出的方法。在第四节中，我们将讨论硬件原型实现。

III. 基于 IF-TEM 的 FRI 信号鲁棒亚奈奎斯特采样与重建

IF-TEM电路会在信号中引入噪声，从而扰动时间点 $\{t_n\}$。即使不存在噪声，时间点也只能以有限精度确定。建模后的抖动时间点表示为

$$t_n'=t_n+\epsilon_n, \quad (17)$$

其中 t_n 为理想时间点，而 $\epsilon_n\overset{\text{iid}}{\sim}\mathcal{U}[-\frac{\sigma}{2},\frac{\sigma}{2}]$ 为噪声抖动。我们在硬件上进行的实验表明，噪声水平 σ 在 $15-70\ ms$之间波动。由于 [22] 中提出的从 IF-TEM 测量值重建 FRI 信号的方法在使用硬件数据时导致恢复结果不一致，因此下文将介绍一种抗噪重建方法。

我们比较所提出的恢复方法与 [22]所述的重构方法在测量时间点受到扰动时的表现。两种方法都采用了缺少零频的采样核。 [22]提出的重构方法使用了（11）中定义的前向方程，而我们的新算法基于下文（20）中给出的替代表述。

A. 稳健重建

本节介绍一种确定 FRI 信号傅里叶系数的方法，该方法更加稳健，并能改善恢复。 [22], 中所述并在上一节讨论的恢复方法，基于利用（**15**）计算 FRI 信号 $x(t)$ 的傅里叶级数系数$\hat{x}$。在存在噪声的情况下，这会导致测量值 y_n 以及矩阵**B** 受到扰动；矩阵 B 分别在（11）和（12）中定义。在这种情况下，计算傅里叶级数系数时，矩阵**B**的稳定性会影响结果，其稳定性由矩阵的条件数衡量。接下来我们将证明，利用 y_n的部分求和，可以像定理 1 一样实现完美恢复。在有噪声的情况下，所得方法更加稳健。如下文所示，采用 y_n的部分求和后，我们得到一个类似于（15）的恢复问题，但用（**23**）中定义的矩阵A替代**B**。该矩阵的条件数优于**B**。

为了直观理解其中的原因，我们将证明，对于每个 $k \in \mathcal{K}$，对测量值进行部分求和，可以使**A** 中每个元素的噪声相较于**B**中对应元素减少一半。以下引理总结了这一结果。

引理 1. 设 $[\mathbf{B}]_{nk} = e^{jk\omega_0 t_{n+1}} - e^{jk\omega_0 t_n}$ 为矩阵**B**的元素，其中 $n = 1, \cdots, N-1$, $k \in \mathcal{K}$。设 $[\mathbf{A}]_{nk} = e^{jk\omega_0 t_{n+1}}$ 为矩阵**A**的元素，其中 $n = 1, \cdots, N-1$, $k \in \mathcal{K} \cup \{0\}$。抖动时间点建模为$t'_n = t_n + \epsilon_n$，其中 t_n 为理想时间点，抖动噪声建模为 $\epsilon_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{U}[-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}]$，且服从独立同分布的均匀分布。对于每个 t'_n 和 $k \in \mathcal{K}$,

$$var\left([\mathbf{B}]_{nk}\right) = 2var\left([\mathbf{A}]_{nk}\right), \tag{18}$$

其中 *var* 为方差。

证明。 利用 $t'_n = t_n + \epsilon_n$ 这一事实，并使用式（23）， （12）可得:

$$\begin{aligned} \text{var}\left([\mathbf{B}]_{nk}\right) &= \text{var}\left(e^{jk\omega_0(t_{n+1}+\epsilon_{n+1})} - e^{jk\omega_0(t_n+\epsilon_n)}\right) \\ &= |e^{jk\omega_0 t_{n+1}}|^2 \,\text{var}\left(e^{jk\omega_0\epsilon_{n+1}}\right) \\ &+ |e^{jk\omega_0 t_n}|^2 \,\text{var}\left(e^{jk\omega_0\epsilon_n}\right) \\ &= 2\text{var}\left(e^{jk\omega_0\epsilon_n}\right) = 2\text{var}\left([\mathbf{A}]_{nk}\right), \end{aligned} \tag{19}$$

由此证明了该引理。 □

直观地说，通过部分求和， $[\mathbf{A}]_{nk}$ 中每个元素的噪声都比 $[\mathbf{B}]_{nk}$中对应元素的噪声更小。因此，矩阵**A** 的条件数优于**B**。这是因为矩阵的条件数衡量矩阵元素受到微小扰动时的敏感程度，条件数越小，矩阵对这类扰动就越不敏感。因此，通过部分求和降低**A** 各元素中的噪声，可以改善其条件数。

在下一步中，我们利用 y_n 的部分求和，给出使用 IF-TEM 完美恢复有限创新率信号的保证。我们不再通过前向模型（11）和（ $\mathcal{K}$ 9）中的关系，从 y_n 恢复傅里叶级数系数（FSCs），该关系定义了在 y_n 与傅里叶级数系数（FSCs）$\hat{x}[k]$之间，我们提出一种基于 z_n的替代模型。这些是测量值 y_n 的部分和，定义如下

$$z_n = \sum_{i=1}^{n-1} y_i = \sum_{k\in\mathcal{K}} \frac{\hat{x}[k]}{jk\omega_0}\left(e^{jk\omega_0 t_n} - e^{jk\omega_0 t_1}\right), \tag{20}$$

其中 $n = 2, \cdots, N$。注意，式（20）可写为

$$z_n = \sum_{k\in\mathcal{K}} \frac{\hat{x}[k]}{jk\omega_0} e^{jk\omega_0 t_n} + c, \tag{21}$$

其中

$$c = -\sum_{k\in\mathcal{K}} \frac{\hat{x}[k]}{jk\omega_0} e^{jk\omega_0 t_1}. \tag{22}$$

令$\mathbf{z} = [z_2, \cdots, z_N]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{N-1}$为部分和向量，$\hat{\mathbf{z}} = \left[-\frac{\hat{x}[-K]}{jK\omega_0}, \cdots, -\frac{\hat{x}[-1]}{j\omega_0}, c, \frac{\hat{x}[1]}{j\omega_0}, \cdots, \frac{\hat{x}[K]}{jK\omega_0}\right]^\top \in \mathbb{C}^{(2K+1)}$为傅里叶级数系数向量，其中 c位于第零个位置；令$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(N-1)\times(2K+1)}$ 为定义如下的矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^{-jK\omega_0 t_2} & \cdots 1 \cdots & e^{jK\omega_0 t_2} \\ e^{-jK\omega_0 t_3} & \cdots 1 \cdots & e^{jK\omega_0 t_3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-jK\omega_0 t_N} & \cdots 1 \cdots & e^{jK\omega_0 t_N} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

那么，(21)可表示为如下矩阵形式:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{24}$$

由于时刻集合 $\{t_n\}_{n=2}^N$ 中的元素互不相同，且**A** 是范德蒙德矩阵，因此只要$N - 1 \geq 2K + 1$成立，它就具有满列秩。这意味着矩阵**A** 的列线性无关。因此，我们可以通过以下方式精确恢复傅里叶级数系数向量$\hat{\mathbf{z}}$

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{z}, \tag{25}$$

其中$\mathbf{A}^\dagger$ 表示**A**的摩尔-彭若斯逆。一旦得到$\hat{\mathbf{z}}$，即可唯一确定傅里叶级数系数 $\hat{x}[k]$ 。使用

$$\hat{z}[k] = \begin{cases} \frac{\hat{x}[k]}{j\omega_0 k}, & \text{if } k \in \mathcal{K}, \\ -\sum_{k'\in\mathcal{K}} \left(\frac{\hat{x}[k']}{jk'\omega_0}\right) e^{jk'\omega_0 t_1} & \text{if } k = 0. \end{cases} \tag{26}$$

傅里叶级数系数向量$\hat{\mathbf{z}}$ 与傅里叶级数系数向量$\hat{\mathbf{x}}$ 之间的关系为:

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{z}[-K], \cdots, \hat{z}[-1], \hat{z}[1], \cdots, \hat{z}[K]]^\top \in \mathbb{C}^{2K}. \tag{27}$$

通过选取$\hat{\mathbf{z}}$中恰当的元素，即可利用该方程得到$\hat{\mathbf{x}}$ 。$\hat{\mathbf{z}}$是由测量值的部分和得到的向量。请注意，所得向量$\hat{\mathbf{x}}$的维度为 $2K$，这意味着它仅包含正、负频率对应的傅里叶级数系数。

利用向量$\hat{\mathbf{z}}$ 和（27），傅里叶级数系数向量 $\hat{\mathbf{x}}$ 可被唯一确定。这表明，在不含零频率的修正核设置中，如果满足$\hat{x}[k]$ ，则可根据时间编码唯一确定傅里叶级数系数集合 $N - 1 \geq 2K + 1$。该条件意味着，在区间$2K + 2$ 内至少应有 T个触发时刻。对于 IF-TEM，最小触发速率为 $\frac{b-c}{\kappa\delta}$ （如 [22]所示）。

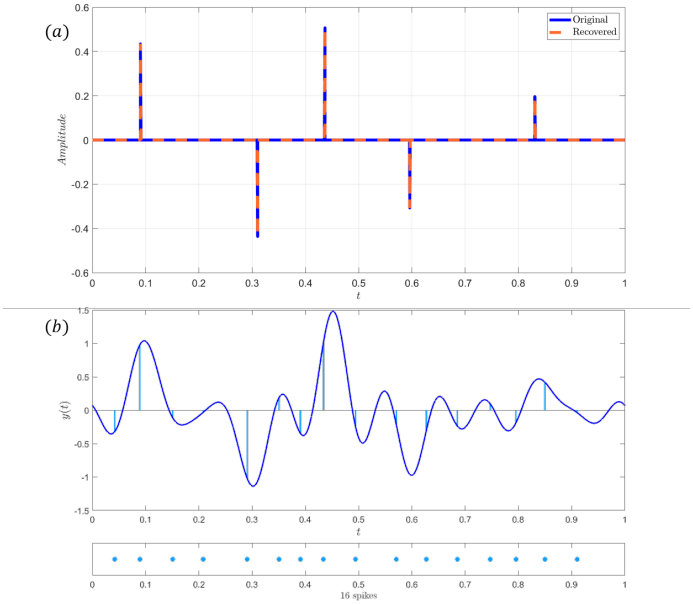


图5. 使用修正采样核从 IF-TEM 测量值完美重建 FRI 信号。(a)： $L = 5$ 的输入信号及其重建结果。(b)：滤波信号 $y(t)$ 和时刻 t_n。

因此，为实现唯一恢复，IF-TEM 参数必须满足不等式 $\frac{b-c}{\kappa\delta} \geq \frac{2K+2}{T}$ （详见 [22]）。——

算法：根据 IF-TEM 触发时刻计算 FRI 参数的重建算法见算法 1。与 [22], 中介绍的技术相比，在无噪声时，我们的方法所需的傅里叶级数系数数量相同。然而，在存在噪声的情况下（现实硬件中通常如此），对于相同数量的测量值，所提方法产生的误差更低。

算法1 重建周期为 T 的 FRI 信号。

输入： 周期 T 内的 $N \geq 2K+2$ 个脉冲时刻 $\{t_n\}_{n=1}^{N}$。

令 $n \leftarrow 1$
当 $n \leq N-1$ **时执行**
  计算 $y_n = -b(t_{n+1} - t_n) + \kappa\delta$
  计算 $z_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} y_i$
  $n := n+1$。
结束循环
计算向量 $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{z}$，其中 $\mathbf{A}$ 定义于（23）
计算傅里叶系数向量 $\hat{\mathbf{x}}$ 从 $\hat{\mathbf{z}}$ 使用 (27)
使用 $\{(a_\ell, \tau_\ell)\}_{\ell=1}^{L}$ 进行估计 $_1$ 采用谱分析方法用于 $K \geq 2L$。

输出： $\{(a_\ell, \tau_\ell)\}_{\ell=1}^{L}$。

B. 数值评估

本节通过仿真提供数值证据，以验证算法1的有效性。随后，我们展示所提出的重建技术能够改善正向变换的条件性，从而显著提升重建效果，这是实现精确恢复所必需的。

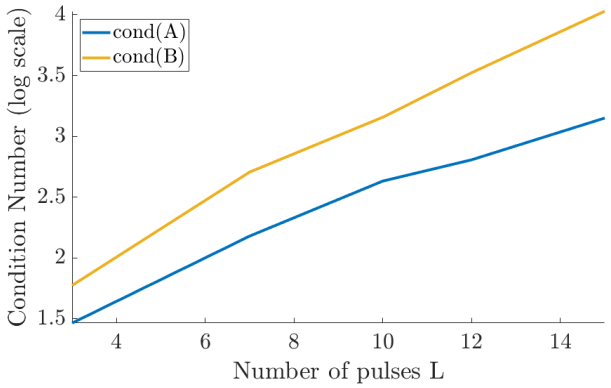


图 6. 矩阵 A 和 B 的平均条件数随 FRI 脉冲数 L 的变化。

利用真实硬件。为验证定理 1，我们将 $h(t)$ 视为时间周期为 $T = 1$ 秒的狄拉克冲激，并令 $L = 5$。幅度在范围 $[-1, 1]$ 内随机选取。时间延迟在 (0,1) 之间随机选取，使其位于分辨率为 0.05 的网格上。输入信号 $x(t)$ 使用 SoS采样核进行滤波，其中 $K = -K$、$\cdots -1$、1、$\cdots$、K，且 $K = L$。滤波输出 $y(t)$ 使用 IF-TEM采样器进行采样，其中 IF-TEM 参数的选取满足不等式 (16)。在这一具体情况下，IF-TEM采样器在一个周期内产生了 16 个触发时刻，如图 5(b) 所示。如图 5(a) 所示，通过使用不含零频率的核，我们实现了 FRI 信号的完美恢复。

由于 IF-TEM电路会向信号中引入噪声，从而扰动时间点 $\{t_n\}$，因此我们考虑抖动后的时间点： $t'_n = t_n + \epsilon_n$，其定义见（17）。我们将所提出的恢复方法与 [22]所述的重建算法进行比较，考察测量时间点受到扰动时的情况。两种方法都采用了不含零频的采样核。尽管 [22] 提出的重建方法使用了（11）中定义的正向方法，但我们的方法采用了（20）中定义的另一种正向方法。

使用前向算子或矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ （见（14）和（24）），可通过前文讨论的各种方法恢复傅里叶级数系数。矩阵 $\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$ 是测量时间点和采样核的函数。在图 6中，比较了具有相同数量$4L+2$个受扰动触发时刻的矩阵的条件数，并将其表示为 FRI 信号数量 L的函数。为此，生成了 5000 组随机单调序列 $\{t_n \in [0, T)\}_{n=1}^{N}$。如图6所示，矩阵 $\mathbf{A}$ 的条件数小于矩阵$\mathbf{B}$的条件数。这表明，我们的重建算法提高了稳定性和抗噪能力。

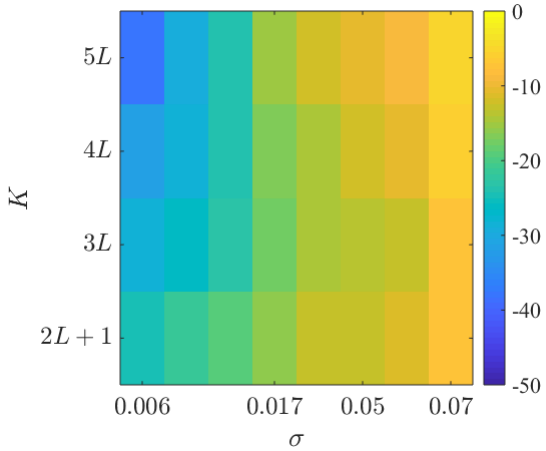
我们评估并比较所提出算法在时延估计性能方面的相对均方误差（MSE），以衡量其

由 [22], 其中均方误差定义为

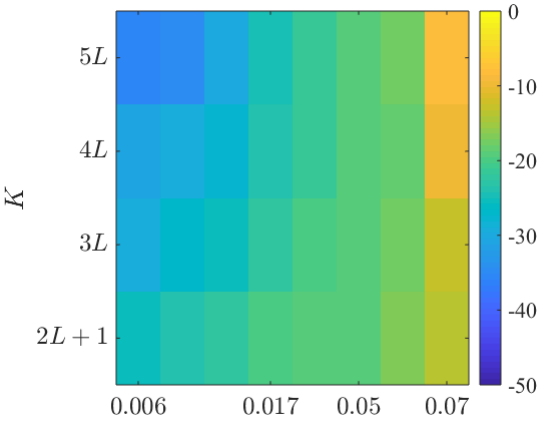
$$\text{MSE} = 10\log\left(\sum_{\ell=1}^{L}(\tau_\ell - \hat{\tau}_\ell)^2\right), \tag{28}$$

且 $\hat{\tau}_\ell$ 是估计的时间延迟。具体而言，我们考虑如式 (5) 所示的信号 $x(t)$，其周期为 $T = 1$ 秒，由 $L = 3$ 个脉冲组成，其中 $h(t)$ 是三阶三次 B 样条。非网格时间延迟 $\{\tau_\ell\}_{\ell=1}^3$ 和幅度 $\{a_\ell\}_{\ell=1}^3$ 分别在区间 $(0, T]$ 和 $[1, 5]$，内随机生成。IF-TEM 参数为 $\kappa = 1$、$b = 2.5c$，其中 $c = \max_t |y(t)|$，并选择 δ 以满足式 (16)。我们采用 $\mathcal{K} = \{-K, \cdots, -1, 1 \cdots, K\}$ 的 sinc函数和核来计算傅里叶系数 $\hat{x}[k]$。时间点 $\{t_n\}$ 按照 $t'_n = t_n + \epsilon_n$ 进行扰动，其中 t_n 是实际的时间编码，ϵ_n 是在 $[-\sigma/2, \sigma/2]$ 上均匀分布的随机变量。我们使用结合 Cadzow 去噪的湮灭滤波器，在存在噪声的情况下估计时间延迟。由于 Cadzow 去噪需要超过 $2L$ 个连续的傅里叶级数系数样本，因此我们考虑 $K \geq 2L + 1$，同时排除零值。基于所提出的恢复方法，其中 $0 \notin \mathcal{K}$ 估计 $\{\hat{x}[k]\}_{k=-K}^{-1}$ 和 $\{\hat{x}[k]\}_{k=1}^{K}$，我们分别对这两个序列独立应用 Cadzow 去噪，然后应用分块湮灭 [51]以联合确定时间延迟。

不同傅里叶级数系数数量和扰动水平下时延估计的均方误差如图所示。7。我们使用 500 组相互独立的噪声和 FRI 信号实现来计算每个均方误差值。图7 (a) 和 (b) 展示了 [22] 和算法1在采样核中不含零时的均方误差，其中 $K = 2L + 1$ 最大为 $5L$。比较这些方法可以发现，性能最多提升了10 dB。由于时间编码中的扰动也等同于量化噪声，因此均方误差较低表明，与 [22]相比，我们所提方法能够以更低的比特数运行。



(a) 不采用零点方法 [22]



(b) 不采用零点算法1

图7. 对比 [22]与算法1在时间编码受到扰动时对非网格时间延迟的处理：与[22]相比，我们的方法误差更低。

IV. 模拟电路板与硬件挑战

本节将介绍我们的 FRI-TEM 硬件原型的规格。

A. *FRI-TEM* 模拟电路板

我们首先讨论 FRI-TEM 硬件实现的关键组件，以及各种电路设计考量。如图 9 和 10所示，模拟电路板由三个依次连接的阶段组成：FRI 信号生成、带通滤波和 IF-TEM采样器。

FRI 信号发生器采用模拟方法，具有数字噪声低的特点，并能够准确模拟雷达和超声等现实应用场景[52]。信号生成过程涉及多个协同工作的组件，用于生成和处理信号。信号发生器的一种可能配置是使用示波器、分路器、模拟延迟发生器和无源射频（RF）合路器。示波器生成一个 FRI 脉冲（10−500纳秒宽），该脉冲经过分路器传输。分路器接收脉冲，并将其发送至延迟发生器和合路器（见图 9）。延迟发生器由光纤电缆、光电二极管编码器和光电二极管探测器组成。使用光电二极管编码器对信号进行编码，是延迟发生器的初始步骤。随后，信号经过光纤线路，从而产生至少 $4\mu s$ 的延迟。采用光纤延迟实现的意义源于其众所周知的优势，例如引入低数字噪声，从而能够更准确地模拟实际应用。为了对延迟后的输入信号进行解码，使用光电二极管探测器将信号转换为与原始 FRI 输入脉冲频率相同的模拟信号。在图 9 中，例如，FRI 信号$x(t)$(5) 由两个相隔相对延迟 $4\mu s$ 的 20MHz 脉冲组成。合路器的输出 $x(t)$随后被作为输入发送至采样核。

该滤波器也称为采样核，用于去除信号的零阶频率分量，如图 8所示。例如，如果信号频率为 10 Hz，则零阶频率分量的幅度为 −30dB。采样核本质上是一个带通滤波器（BPF），其位置对于

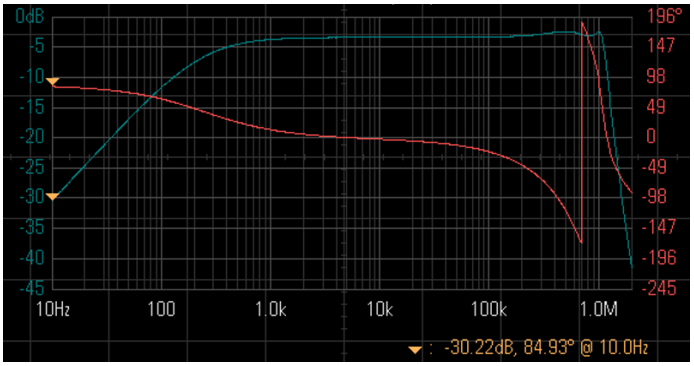


图 8. 1 MHz 滤波器的波德图。采样核去除了零频。幅度（蓝色）和相位（红色）绘制在对数频率刻度上。

使用 IF-TEM 对 FRI 信号进行亚奈奎斯特采样和重建（见第 III节）。为了在无噪声环境下的短时间段内（例如 $T = 10\mu s$）准确恢复并分析 FRI 信号的两个脉冲，所需的最低理论采样率为0.4MHz [1], [37]。为促进这一快速采样和重建过程，选用了1MHz 滤波器。此处采用八阶 1MHz 带通滤波器，在能量消耗与重建性能之间实现了适当的折衷。

滤波器的输出，$y(t)$ (10)，随后传输至 IF-TEM 采样器。IF-TEM电路的框图如图 10 所示，IF-TEM 电路的具体元件列表见表 I。IF-TEM 采样器的原型如图 11 所示。

IF-TEM 的主要组件包括偏置 b、积分器、比较器、微分器和复位功能。为确保有足够的样本用于重建，我们应确保 δ 阈值达到的次数至少与所需样本数相同。将偏置 b 加到输入 $y(t)$ 后，积分器得到的信号始终为非负。在这种情况下，对非负信号进行积分会得到正值函数，且总能达到阈值。对于含有 L 个脉冲的 FRI 信号 $x(t)$，可以证明，采样器输入的滤波信号 $y(t)$ 满足 [22]

$$|y(t)| \leq c = L\, a_{\max}\, \|g\|_\infty \|h\|_1, \tag{29}$$

其中，g 和 h 分别是已知的滤波器和脉冲形状。因此，偏置 $b > c$实际上是一个恒定的直流电压，可通过电位器手动调节。电位器是一种通过旋钮调节电路电阻的器件。调节电阻后，用户便能将偏置值微调至所需水平。为确保IF-TEM系统正常工作，务必谨慎选择合适的偏置值。

积分器的输出被送至比较器，比较器会将积分器电压与预设阈值 δ进行比较。该阈值是一个恒定的直流电压，在我们的硬件中通过一个可手动调节的电位器实现。比较器负责将积分器产生的电压与预先设定的阈值进行比较。当积分器电压达到或超过阈值时，比较器的输出会发生变化。如果比较器的输入低于阈值，它将输出逻辑值“0”；如果输入高于阈值，则输出“1”。换言之，当积分器电压达到阈值时，比较器会产生一串逻辑值“1”。比较器输出信号的这一变化表明阈值已达到，并触发 IF-TEM 流程的下一阶段。

比较器的输出会传送至微分器，微分器产生一个短脉冲，以激活快速复位功能。此功能负责捕获时间点 t_n。复位功能由放大器和场效应晶体管（FET）组成，两者协同工作，可快速、彻底地释放积分器电容中的电荷。具体而言，FET充当开关，由微分器产生的脉冲控制，其决定FET处于激活状态的时长，从而使积分器电容得以完全放电。FET有三个端子：源极、栅极和漏极。向栅极端子施加“1”电压后，FET能够改变漏极与源极之间的电导率，从而调节电流。这会使积分器电容快速、完全放电。

表I 硬件组件列表

器件	参考型号	制造商
缓冲器	AD899	Mini-Circuits
积分器	LT1364	Analog Devices
比较器	TLV3201	德州仪器
微分器	LT1364	Analog Devices

B. 电路挑战

要实现 IF-TEM电路，需要使用按照（2）运行的积分器。具体而言，只要输入信号为正，积分器电容就必须在线性域内工作，并持续充电或上升。此外，IF-TEM阈值处理需要快速的复位机制。因此，我们的目标是开发一种积分器和复位功能，使积分器的电容在线性区内工作，并能快速、彻底地放电。实现 IF-TEM 硬件的主要挑战在于设计并实现这样的 IF-TEM 积分器电容，同时无需修改电路即可支持范围广泛的输入 FRI 信号。通过在复位功能中使用微分器和场效应晶体管，可以针对多种 FRI 信号实现电容的完全放电和快速放电。接下来，我们将展示硬件结果，并将其与定理 1中的理论结果进行比较。

V. 硬件实验

为评估所提出系统的开发潜力和可行性，我们对该系统进行了实验，

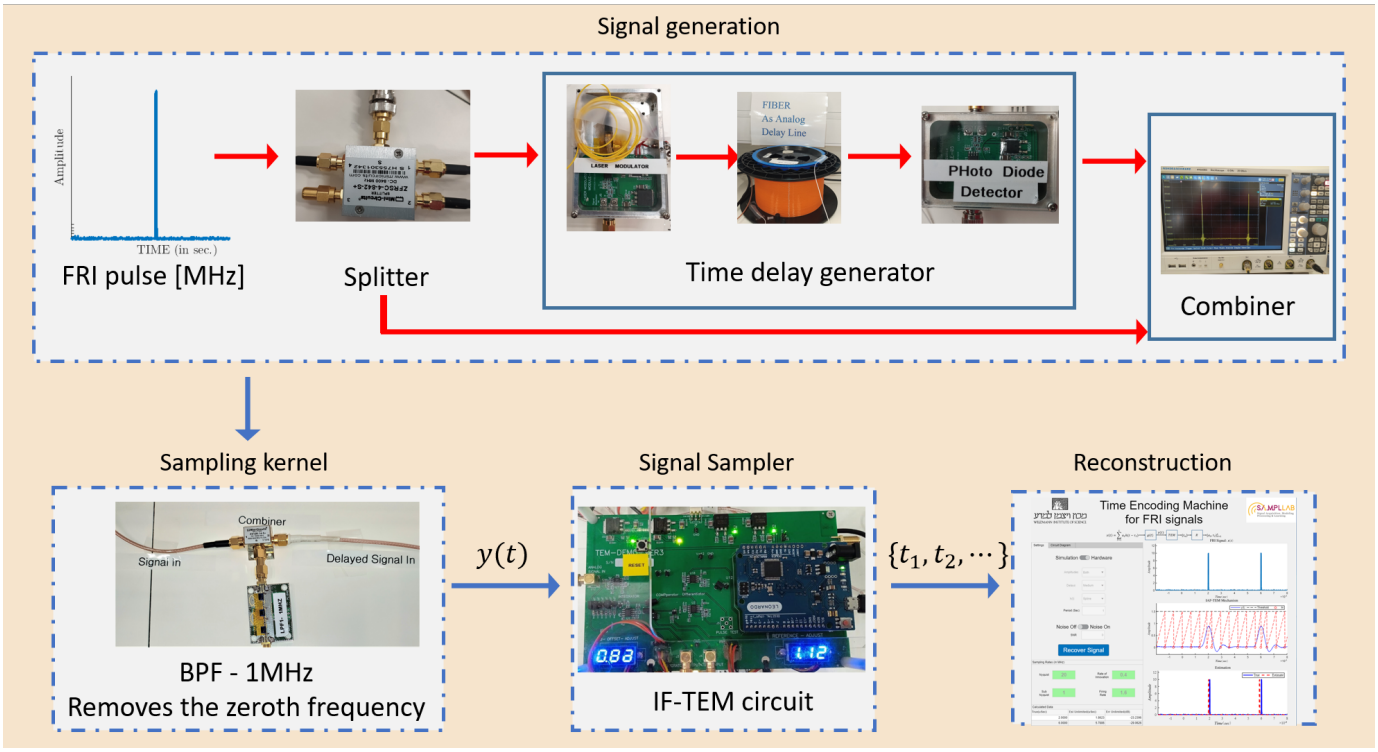


图9。有限速率创新信号触发事件计时器硬件原型包含一个信号发生器、一个采样核和一个IF-TEM采样器。信号发生器由一条至少为 $4\mu s$的延迟路径组成，该路径由一段末端连接光电二极管探测器的调制光纤构成。随后，合路器将发生器输出的原始信号（单个或多个）与延迟路径的信号合并，生成FRI 信号。生成的信号经过一个 $1MHz$ 带通滤波器，以去除零频率。最后，IF-TEM采样器板对所得信号进行采样。根据算法1，恢复FRI 信号。

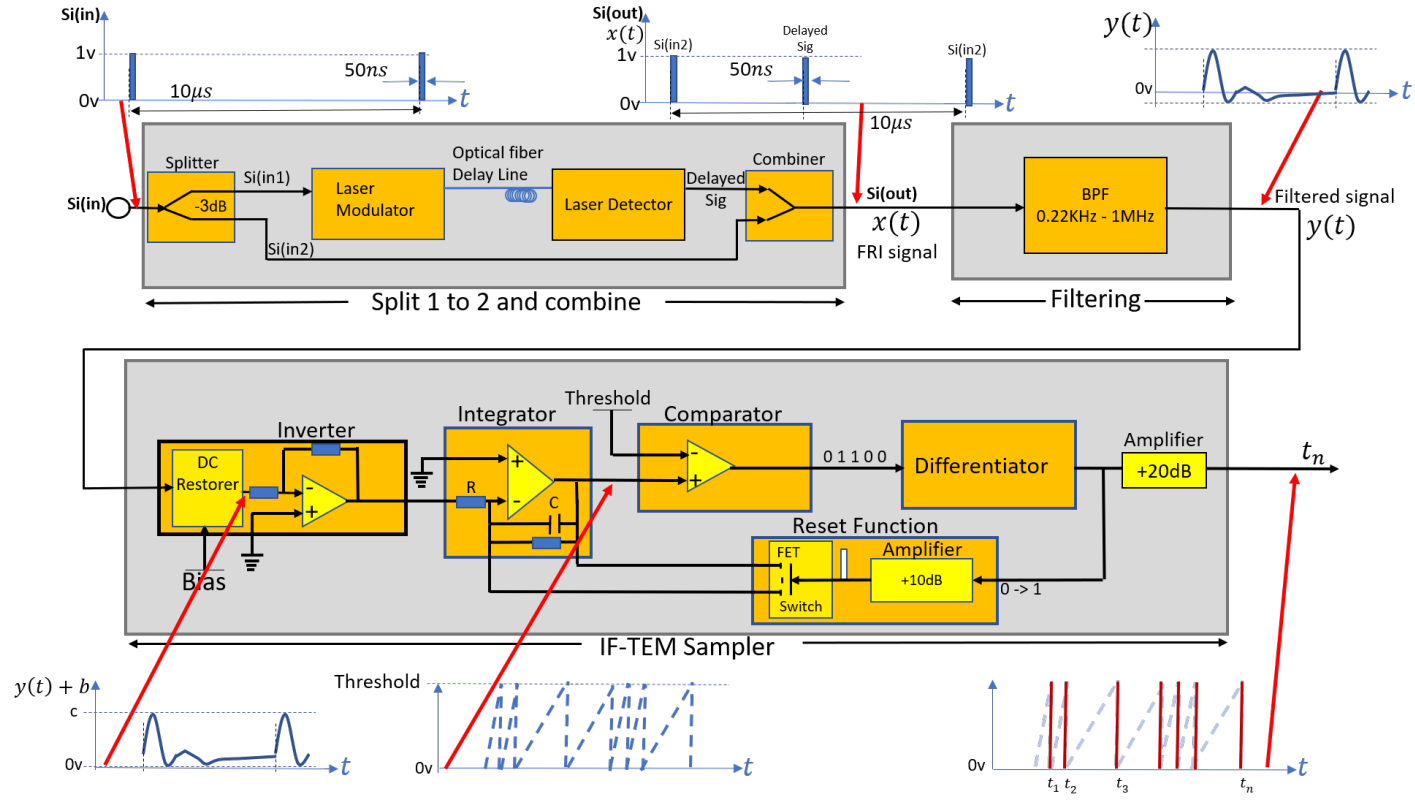


图10。模拟电路板框图。

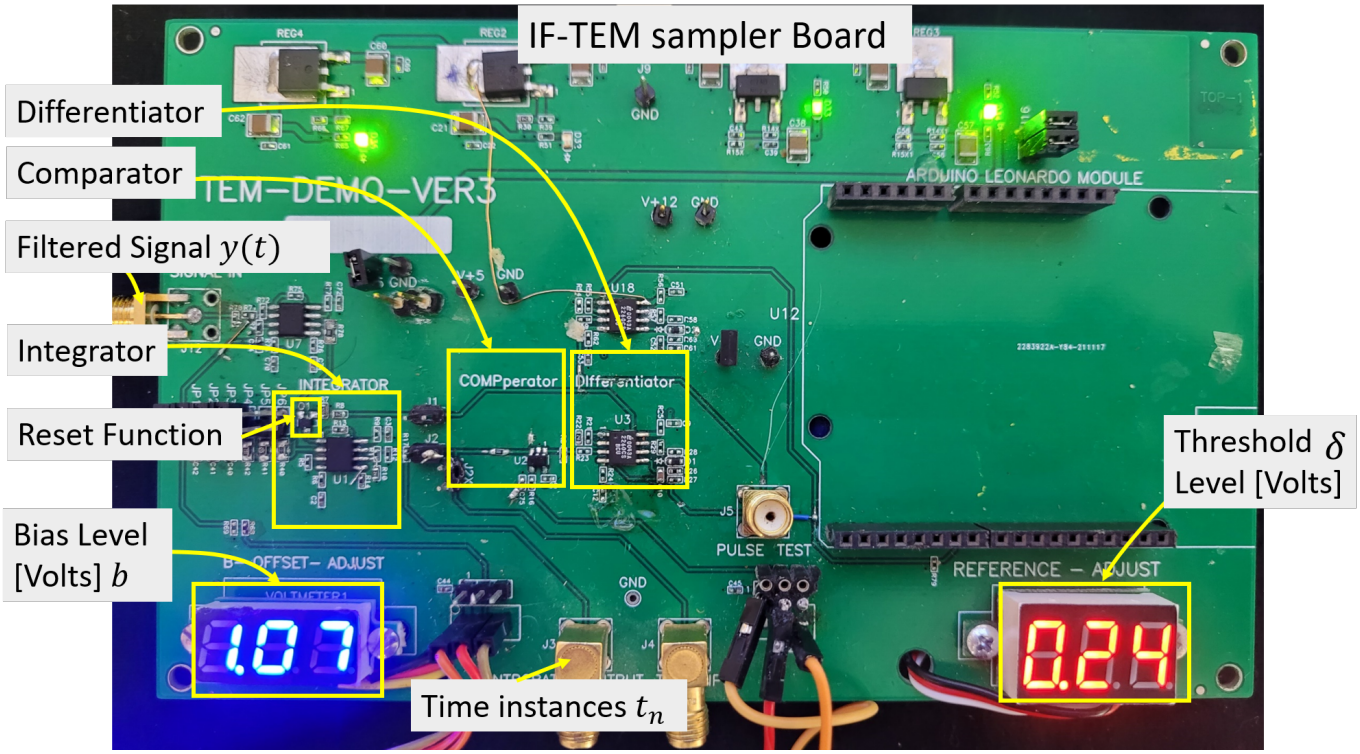


图11. IF-TEM 硬件板。

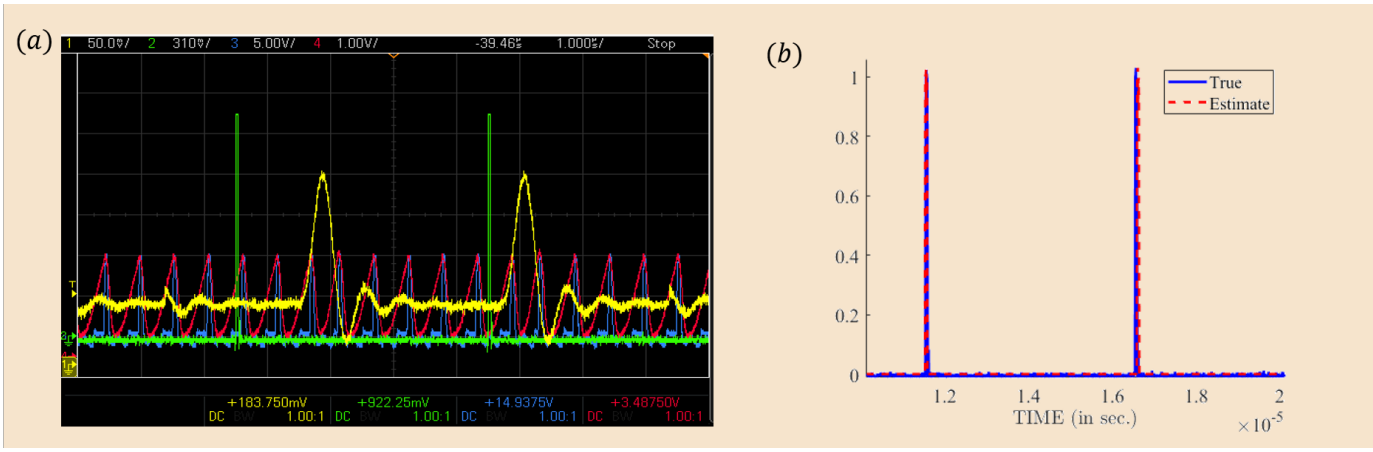


图12. (a) FRI 输入信号 $x(t)$（绿色）、BPF 输出 $y(t)$（黄色）以及 IF-TEM 输出，得到19个样本（蓝色）。(b) 使用 IF-TEM 硬件进行采样和重建：输入信号 $x(t)$（蓝色）及其重建信号（红色）。

我们构建的 FRI-TEM硬件系统。如图12(a)所示，我们考虑一个 FRI 输入信号，记为 $x(t)$，由两个宽度为 100 ns、相互之间具有时间延迟5μs的脉冲组成。第II-C节 中提到的采样核用于这些实验。IF-TEM电路的参数设置为 $\kappa = 3 \cdot 10^{-8}$，偏置为 $b = 3V$，阈值为 $\delta = 1.5V$。该输入信号所使用的具体时间延迟和幅度均为任意选取，IF-TEM 参数则根据（16）中规定的约束进行选择。如图12(a)所示，滤波信号 $y(t)$ 被传输至 IF-TEM采样器，产生了19个时间点 t_n，从而得到1.9 MHz的触发速率，是4.75 创新率的 1 倍和奈奎斯特率的 10.5 倍。需要注意的是，非网格重建至少需要 $4L + 2 = 10$ 个时间点。图 12(b) 展示了原始输入信号与估计信号的对比。这表明，即使在采样率比奈奎斯特率低 10 倍的情况下，仍能稳健地估计 FRI 系统的参数。

在图13（a）、图14（a）和图 15（a）中，我们展示了 $L = 3$、5 条件下的有限创新率信号采样与重建，其中 $h(t)$ 表示狄拉克冲激和脉冲序列。FRI 信号以绿色曲线表示，滤波信号 $y(t)$ 以黄色显示，而 IF-TEM采样器产生的时间点 t_n 以蓝色显示。在这些图中，

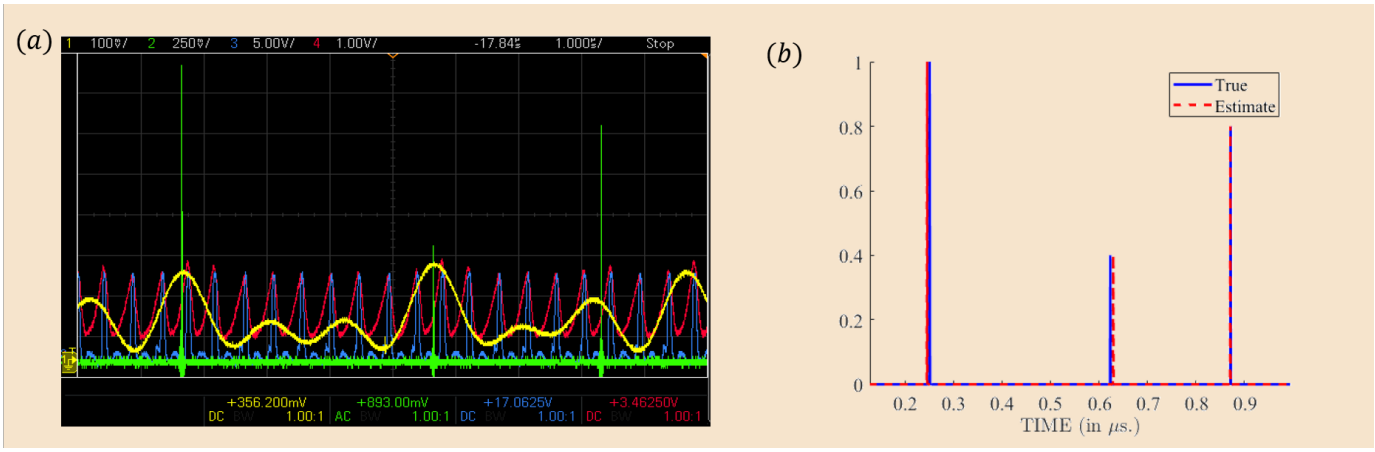


图 13. (a). FRI 输入信号 $x(t)$（绿色）、带通滤波器输出 $y(t)$（黄色），以及产生 19 个样本的 IF-TEM 输出（蓝色）。(b). 使用 IF-TEM 硬件进行采样和重建：输入信号 $x(t)$（蓝色）及其重建信号（红色）。

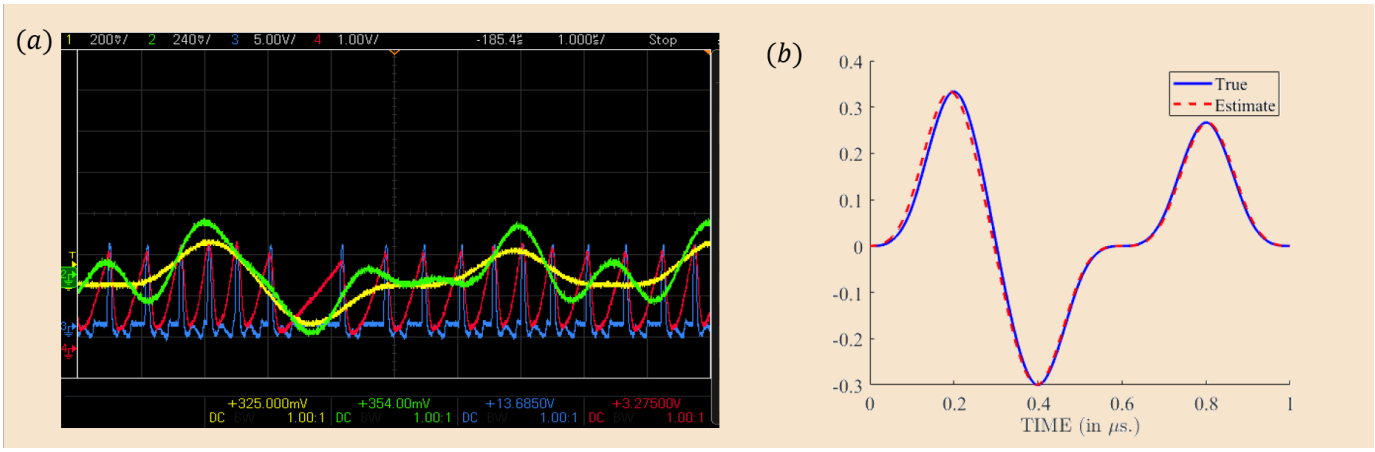


图 14. (a). FRI 输入信号 $x(t)$（黄色）、带通滤波器输出 $y(t)$（绿色），以及产生 21 个样本的 IF-TEM 输出（蓝色）。(b). 使用 IF-TEM 硬件进行采样和重建：输入信号 $x(t)$（蓝色）及其重建信号（红色）。

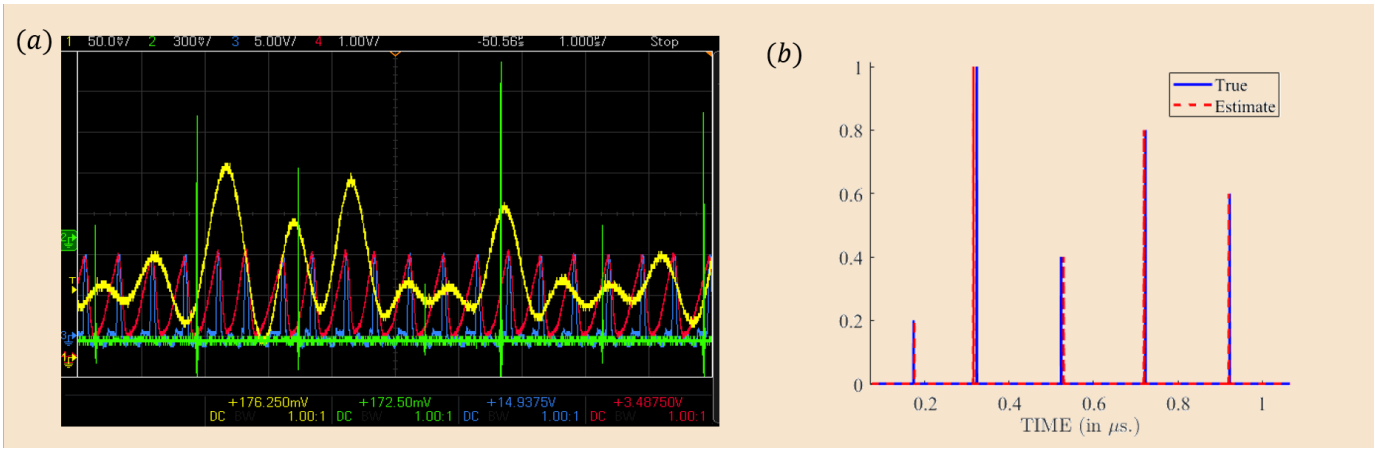


图 15. (a). FRI 输入信号 $x(t)$（绿色）、带通滤波器输出 $y(t)$（黄色），以及产生 22 个样本的 IF-TEM 输出（蓝色）。(b). 使用 IF-TEM 硬件进行采样和重建：输入信号 $x(t)$（蓝色）及其重建信号（红色）。

产生的时间点数量分别为 19、21 和 22，对应的触发频率为 1.9 MHz、2.1 MHz 和 2.2 MHz，均介于奈奎斯特率的 9.5 至 10.5 倍之间。重建后的有限创新率信号如图 13（b）所示，14(b)，以及 15(b)。时间延迟估计的最大误差为 -25 dB。这些结果表明，我们提出的采样与重建方法适用于雷达和超声成像应用。

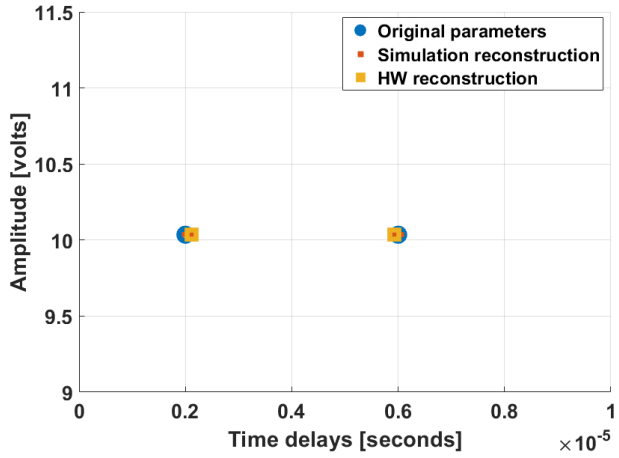


图 16. 基于硬件测量值的重建结果与仿真结果的比较。

图 16 展示了对含有两个脉冲的 FRI 信号，其幅度和时间延迟的硬件测量重建结果与仿真结果之间的比较。通过将硬件测量得到的结果与仿真结果进行比较，评估所提出的硬件原型和重建方法的性能。评估包括计算硬件和仿真所得重建信号之间的误差，以及比较估计的 FRI 参数。此比较有助于了解该硬件与重建方法的准确性和可靠性。时间延迟估计误差为 -25 dB，这一结果与使用 $L = 3.5$ 脉冲时的发现一致。

VI. 结论

本文研究了使用 IF-TEM采样器恢复 FRI 信号的问题。为此，我们介绍了一种次奈奎斯特 IF-TEM 模数转换器的硬件原型，并开发了一种稳健的重建方法，以准确提取 FRI 参数。我们介绍的硬件原型是一种异步、节能的模数转换器，采用次奈奎斯特框架估计 FRI 参数，因此能够以远低于奈奎斯特率的速率运行。我们已证明，所提出的硬件和重建方法能够在以约低于奈奎斯特率 10 倍的速率运行时，将重建误差控制在 -25 dB 以内。这些结果表明，所提出的硬件原型和重建方法能够有效且高效地准确恢复 FRI 信号，可用于雷达和超声成像等各种应用。与传统模数转换器相比，所提出的原型具有异步和节能的特点，因此在电池供电设备等能量受限系统中可能尤其具有吸引力，因为这些因素在此类系统中至关重要。

在本研究中，我们研究了使用 IF-TEM采样器恢复有限创新率信号的问题。为应对这一挑战，我们提出了一种次奈奎斯特 IF-TEM 模数转换器的硬件原型，并开发了一种稳健重建方法，以准确提取 FRI 参数。我们介绍的硬件原型是一种异步、节能的模数转换器，采用次奈奎斯特框架估计 FRI 参数，使其能够以显著低于奈奎斯特率的速率运行。实验证明，我们提出的硬件和重建方法能够在约为奈奎斯特率十分之一的运行速率下提取 FRI 参数，重建误差最高可达 -25 dB。这些结果表明，所提出的硬件原型和重建方法能够有效且高效地准确恢复有限创新率信号，并可能适用于雷达和超声成像等各种应用。与传统模数转换器相比，所提出的原型具有异步和节能特性，因此可能特别适合用于能量受限系统，例如电池供电设备；在这些应用中，这些因素是重要的考量。

参考文献

[1] Y. C. Eldar，《采样理论：超越带限系统》。剑桥大学出版社，2015年。[2] M. Unser，“香农之后的采样：50年”，《IEEE会议录》，第88卷，第4期，第569–587页，2000年。[3] H. Nyquist，“电报传输理论中的若干主题”，《美国电气工程师学会汇刊》，第47卷，第2期，第617–644页，1928年。[4] R. Piyare、A. L. Murphy、M. Magno 和 L. Benini，“按需LoRa：面向物联网的高能效、低延迟异步时分多址通信”，《传感器》，第18卷，第11期，第3718页，2018年。[5] I. Shake、H. Takara 和 S. Kawanishi，“使用高速异步采样简单测量眼图和误码率”，《光波技术期刊》，第22卷，第5期，第1296页，2004年。[6] R. Siddharth、Y. N. Kumar、M. Vasantha 和 E. Bonizzoni，“面向物联网传感器应用的低功耗电平交越模数转换器辅助电路”，载于《2018年IEEE国际电路与系统研讨会（IS-CAS）》，第1–5页，IEEE，2018年。[7] D. Kinniment 和 A. Yakovlev，“低功耗、低噪声微流水线闪速模数转换器”，《IEE电路、器件与系统会议录》，第146卷，第5期，第263–267页，1999年。[8] M. Rastogi、A. Singh Alvarado、J. G. Harris 和 J. C. Pr´ıncipe，“积分发放电路作为模数转换器替代方案”，载于《2011年IEEE国际电路与系统研讨会（ISCAS）》，第2421–2424页，IEEE，2011年。[9] F. Akopyan、R. Manohar 和 A. B. Apsel，“电平交越闪速异步模数转换器”，载于《第12届IEEE国际异步电路与系统研讨会（ASYNC’06）》，第11–页，IEEE，2006年。[10] A. S. Alvarado、M. Rastogi、J. G. Harris 和 J. C. Principe，“积分发放采样器：一种特殊的异步 σ-δ 调制器”，载于《2011年IEEE国际电路与系统研讨会（ISCAS）》，第2031–2034页，IEEE，2011年。[11] D. Ko´scielnik 和 M. Mi´skowicz，“基于电荷泵积分器的异步Σ-Δ模数转换器”，《模拟集成电路与信号处理》，第55卷，238，2008年3，223第。–页。[12] M. Miskowicz，“根据误差能量准则提高基于事件的采样效率”，《传感器》，第10卷，第3期，第2242–2261页，2010年。[13] N. Sayiner、H. V. Sorensen 和 T. R. Viswanathan，“一种用于模数转换的电平交越采样方案”，《IEEE《电路与系统汇刊II：模拟与数字信号处理》》，第43卷，第4期，第335–339页，1996年。[14] Y. Tsividis，“事件驱动数据采集与数字信号处理——教程”，《IEEE《电路与系统汇刊II：简报》》，第57卷，第8期，第577–581页，2010年。[15] M. Miskowicz，“通过事件触发采样减少通信量”，载于《基于事件的控制与信号处理》，第37–58页，CRC出版社，2015年。

[16] G. Carvalho、J. C. Ferreira 和 V. G. Tavares，“基于现场可编程门阵列的积分发放信号重建硬件架构”，载于2020年第35届电路与集成系统设计会议（DCIS），第1–6页，IEEE，2020年。[17] A. A. Lazar 和 L. T´oth，“时间编码带限信号的完美恢复与灵敏度分析”，IEEE电路与系统汇刊I：常规论文，第51卷，第10期，第2060–2073页，2004年。[18] A. A. Lazar，“带不应期的积分发放神经元的时间编码”，神经计算，第58卷，第53–58页，2004年。[19] K. Adam、A. Scholefield 和 M. Vetterli，“用于改善带限信号重建的多通道时间编码”，载于IEEE国际声学、语音与信号处理会议（ICASSP）会议录，第7963–7967页，IEEE，2019年。[20] K. Adam、A. Scholefield 和 M. Vetterli，“采用多通道时间编码的带限信号采样与重建”，IEEE信号处理汇刊，第68卷，第1105–1119页，2020年。[21] R. Alexandru 和 P. L. Dragotti，“从时间编码信息重建非带限信号类”，IEEE信号处理汇刊，第68卷，第747–763页，2019年。[22] H. Naaman、S. Mulleti 和 Y. C. Eldar，“FRI-TEM：有限创新率信号的时间编码采样”，IEEE信号处理汇刊，第70卷，第2267–2279页，2022年。[23] I. Maravic、M. Vetterli 和 K. Ramchandran，“亚奈奎斯特采样下的信道估计与同步及其在超宽带系统中的应用”，载于《2004年IEEE国际电路与系统研讨会（IEEE目录号04CH37512）》，第5卷，第V–V页，IEEE，2004年。[24] M. Davies、A. Wild、G. Orchard、Y. Sandamirskaya、G. A. F. Guerra、P. Joshi、P. Plank 和 S. R. Risbud，“借助Loihi推进神经形态计算：成果综述与展望”，IEEE会议录，第109卷，第5期，第911–934页，2021年。[25] O. Simeone、B. Rajendran、A. Gruning、E. S. Eleftheriou、M. Davies、S. Deneve 和 G.-B. Huang，“类脑计算的学习算法与信号处理 [客座编辑寄语],”，IEEE信号处理杂志，第36卷，第6期，第12–15页，2019年。[26] G. Nallathambi 和 J. C. Pr´ıncipe，“用于QRS检测的积分发放脉冲序列自动机”，IEEE生物医学工程汇刊，第61卷，第2期，第317–326页，2013年。[27] A. S. Alvarado、C. Lakshminarayan 和 J. C. Principe，“心搏的基于时间的压缩与分类”，IEEE生物医学工程汇刊，第59卷，第6期，第1641–1648页，2012年。[28] G. Gallego、T. Delbruck、G. Orchard、C. Bartolozzi、B. Taba、A. Censi、S. Leutenegger、A. Davison、J. Conradt、K. Daniilidis 等，“基于事件的视觉：综述”，arXiv预印本 arXiv:1904.08405，2019年。[29] R. Alexandru 和 P. L. Dragotti，“有限创新率多维信号的时间编码与解码”，载于《2021年第55届阿西洛马会议：信号、系统与计算机》，第842–846页，IEEE，2021年。[30] P. Lichtsteiner、C. Posch 和 T. Delbruck，“一种具有 128×128 120 dB 15μs延迟的异步时域对比度视觉传感器”，IEEE固态电路期刊，第43卷，第2期，第566–576页，2008年。[31] H. Rebecq、R. Ranftl、V. Koltun 和 D. Scaramuzza，“事件转视频：将现代计算机视觉引入事件相机”，载于IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议会议录，第3857–3866页，2019年。[32] K. Adam，“训练脉冲神经网络的时间编码方法”，载于《ICASSP 2022—2022年IEEE国际声学、语音与信号处理会议》，第5957–5961页，IEEE，2022年。[33] X. Kong、P. Petre、R. Matic、A. C. Gilbert 和 M. J. Strauss，“一种使用时间编码机的宽带信号模数信息转换器”，载于《2011年数字信号处理与信号处理教育会议（DSP/SPE）》，第414–419页，IEEE，2011年。[34] D. Gontier 和 M. Vetterli，“基于时序的采样：移位不变子空间上的时间编码机”，《应用与计算调和分析》，第36卷，第1期，第63–78页，2014年。[35] S. Rudresh、A. J. Kamath 和 C. S. Seelamantula，“ 有限创新率信号的基于时间的采样框架 ”，载于IEEE国际声学、语音与信号处理会议（ICASSP）会议录，第5585–5589页，IEEE，2020年。[36] M. Hilton、R. Alexandru 和 P. L. Dragotti，“使用双曲正割核进行时间编码”，载于《欧洲信号处理会议（EUSIPCO）》，第2304–2308页，IEEE，2021年。[37] M. Vetterli、P. Marziliano 和 T. Blu，“有限创新率信号的采样”，IEEE信号处理汇刊，第50卷，第6期，第1417–1428页，2002年。[38] O. Bar-Ilan 和 Y. C. Eldar，“通过多普勒聚焦实现亚奈奎斯特雷达”，IEEE信号处理汇刊，第62卷，第7期，第1796–1811页，2014年。

[39] W. U. Bajwa、K. Gedalyahu 和 Y. C. Eldar，“参数欠扩展线性系统的识别与超分辨率雷达”，*IEEE*信号处理汇刊，第59卷，第6期，第2548–2561页，2011年。[40] R. Tur、Y. C. Eldar 和 Z. Friedman，“脉冲流的创新率采样及其在超声成像中的应用”，*IEEE*信号处理汇刊，第59卷，第4期，第1827–1842页，2011年。[41] N. Wagner、Y. C. Eldar 和 Z. Friedman，“超声成像中的压缩波束形成”，*IEEE*信号处理汇刊，第60卷，第9期，第4643–4657页，2012年。[42] S. Mulleti、S. Nagesh、R. Langoju、A. Patil 和 C. S. Seelamantula，“使用有限创新率原理进行超声图像重建”，载于*IEEE*国际图像处理会议（*ICIP*），第1728–1732页，IEEE，2014年。[43] T. Blu、H. Bay 和 M. Unser，“一种用于光学相干断层扫描信号反卷积的新型高分辨率处理方法”，载于*IEEE*生物医学成像国际研讨会论文集，第777–780页，IEEE，2002年。[44] J. Castorena 和 C. D. Creusere，“以亚奈奎斯特速率对时间分辨全波形激光雷达信号进行采样”，*IEEE*地球科学与遥感汇刊，第53卷，第7期，第3791–3802页，2015年。[45] R. Alexandru 和 P. L. Dragotti，“非带限信号的基于时间的采样与重建”，载于*IEEE*声学、语音与信号处理国际会议（*ICASSP*）会议录，第7948–7952页，IEEE，2019年。[46] H. Naaman、S. Mulleti 和 Y. C. Eldar，“TEM的FRI采样的唯一性与鲁棒性”，载于*2022*年*IEEE*国际信息论研讨会（*ISIT*），第2631–2636页，IEEE，2022年。[47] P. L. Dragotti、M. Vetterli 和 T. Blu，“采样矩与有限创新率信号重建：香农遇见Strang–Fix”，*IEEE*信号处理汇刊，第55卷，第1757页，2007年，第5期，第1741页。[48] S. Mulleti 和 C. S. Seelamantula，“有限创新率采样核的Paley–Wiener刻画”，*IEEE*信号处理汇刊，第65卷，第22期，第5860–5872页，2017年。[49] H. Naaman、S. Mulleti、Y. C. Eldar 和 A. Cohen，“用于FRI和带限信号的基于时间的量化”，载于*2022*年第*30*届欧洲信号处理会议（*EUSIPCO*），IEEE，2022年。[50] A. A. Lazar 和 L. T´oth，“带限信号的时间编码与完美恢复”，载于*IEEE*声学、语音与信号处理国际会议（*ICASSP*）会议录，第6卷，第VI–709页，IEEE，2003年。[51] Y. Barbotin、A. Hormati、S. Rangan 和 M. Vetterli，“具有共同支撑的稀疏MIMO信道估计”，*IEEE*通信汇刊，第60卷，第12期，第3705–3716页，2012年。[52] I. Newberg、C. Gee、G. Thurmond 和 H. Yen，“用于雷达测试的长微波延迟光纤链路”，*IEEE*微波理论与技术汇刊，第38卷，第5期，第664–666页，1990年。