$\vec{C}$ 序贯优化数群

Zile Hui，51174500096@stu.ecnu.edu.cn

摘要。我们定义**C**序列优化数，其中**C**是一个*k+1*元组向量。我们证明，第一类无符号斯特林数是(0,1)序列优化数。第一类斯特林数的许多成果都可以转化为**C**序列优化数的性质。我们给出了一些示例，例如递推公式以及**C**序列优化数的一个实例。我们还推广了一些性质，例如它们的一个上界。

关键词：C 序列优化数、第一类斯特林数、*k*-维序列优化数、上界。

1 引言

斯特林数由苏格兰数学家詹姆斯·斯特林在其著名论著中提出，随后众多作者以各种形式重新发现了它们[Bla16][Sti30]。第一类斯特林数记作s(n,m)，已在大量研究中得到探讨，并具有多种性质[Bla16]。递推公式是定义第一类无符号斯特林数的基本方法之一。迄今尚无已知的第一类无符号斯特林数闭式表达式，许多作者对其渐近公式进行了研究[Wil93][Tem93][AD17]。**C**序列优化数基于优化集定义。我们给出**C**序列优化数的一些性质，其中一些是**C**取(0,1)时斯特林数的基本性质。我们主要参考一篇文章中的定义和证明[Hui22]。

2 序列优化数

我们在定义 2.1 中引入优化集，并在定义 2.2 中定义**C** 序列优化数。然后，我们给出**C**序列优化数的一个非闭式表达式、一个递推公式、一些性质及其应用。在本章末尾，我们给出序列优化数的一个上界，以及由该上界推导出的一些结果。

定义 2.1。设 $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \dots, x_k)$、$\boldsymbol{y}(y_1, y_2, \dots, y_k)$ 为 k维向量，$\boldsymbol{R}(R_1, R_2, \dots, R_k)$ 为 k维关系向量。若对于所有 $i = 1,2, \dots, k$，$(x_i, y_i) \in \boldsymbol{R_i}$，则称 x 通过 R 与 y 相关，记为 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in$R。设 U 为向量集合，R 为关系向量，且 $A \subseteq U$。若对于 $\forall \boldsymbol{u} \in U, \exists \boldsymbol{a} \in A$ 可推出 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}$，则称 A 是 U 关于 R 的主化集。若 B 是 U 关于 R 的主化集，且 $|B|$ 是所有主化集的基数中的最小值，则称 B 是 U 关于 R 的优化集，记为 $B \overset{o\boldsymbol{R}}{\subseteq} U$，并称 $|B|$ 为 U 关于 R 的权重，记为$W_{o\boldsymbol{R}}(U)$。

我们可以在许多现有研究中找到类似的优化集选择策略[Mou79][Xue00][ARY21][Hui22]。可以证明，在算法的迭代过程中，该策略能够纳入所有可能的最优项，并排除不可能的最优项 [Hui22]。

定义 2.2. 设 $\boldsymbol{a_1}(1, a_{11}, a_{12}, \dots\ a_{1k})$、$\boldsymbol{a_2}(2, a_{21}, a_{22}, \dots\ a_{2k})$、…、$\boldsymbol{a_n}(n, a_{n1}, a_{n2}, \dots\ a_{nk})$ 为 n 个 k+*1* 维向量，$\boldsymbol{R}(R_1, R_2, \dots, R_k)$ 和 $=(<, <, \dots, <)$ 为 k 维关系向量，C=$(c_0, c_1, c_2, \dots, c_k)$、$U = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}\}$ 以及 $S \subseteq U$。对于所有 j = 0、1、…、k，$c_j \in \{0,1\}$。对于所有 i =1、2、…、n 和 j = 1、2、…、k，$\boldsymbol{b_{ij}} = (i, a_{ij})$、$U_j = \{\boldsymbol{b_{1j}}, \boldsymbol{b_{2j}}, \dots, \boldsymbol{b_{nj}}\}$，$a_{1j}$、$a_{2j}$、… a_{nj} 分别为 1、2、…、n，

分别。S_j 是由 $(<, R_j)$ 确定的 U_j 的优化集。对于某个 i 以及所有 $j=1$、2、…、k，$\boldsymbol{b_{ij}} \in S_j$ 的总数为 1；如果 $c_l = 1$，则 $\boldsymbol{a_i} \in S$，否则 $\boldsymbol{a_i} \notin S$，$S$ 被称为 U 关于 R 的 C 顺序优化集，记为 $S^{\boldsymbol{OR}}_{,\subseteq}\boldsymbol{C}_U$。$|S|$ 被称为 U 关于 R 的序贯优化权，记为 $W_{\boldsymbol{OR}}$: $\boldsymbol{c}(U)$。$W_{\boldsymbol{OR}}$、$\boldsymbol{c}(U) = m$ 的方式数称为 C 顺序优化数，记为 $O_{\boldsymbol{C}}(n, m)$。

在定义 2.2 中，$\boldsymbol{C} = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_k)$。我们定义 $\boldsymbol{B}_j = (b_{j,0}, b_{j,1}, b_{j,2}, \dots, b_{j,k})$、$\boldsymbol{C}' = (1,1, \dots, 1) - \boldsymbol{C}$和 $F_j(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}_j \cdot \boldsymbol{C}^T$，其中 $b_{j,p} = C_k^p \underline{\quad} (j-1)^p, p = 0,1, \dots, k$ 和 $j = 2,3, \dots, n$。本文中，我们定义 $\prod_{j=m+1}^{m} F_j\ \boldsymbol{C} = 1$ ( ) 和 $\sum_{p=m+1}^{m} f\ p = 0$ ( )，以简化表达式，其中 $f(p)$ 是 p 的函数。我们给出关于 $F_j(\boldsymbol{C})$ 的一些性质。

(a). 如果 $2 \le j_1 \le j_2 \le n$,

$$F_{j_2}(\boldsymbol{C}) \le F_{j_1}(\boldsymbol{C}) \tag{1}$$

证明。如果 $2 \le j_1 \le j_2 \le n$,

$$\frac{b_{j_2,p}}{b_{j_1,p}} = \frac{(j_1-1)^p}{(j_2-1)^p} \le 1$$
$$b_{j_2,p} \le b_{j_1,p}$$
$$F_{j_2}(\boldsymbol{C}) \le F_{j_1}(\boldsymbol{C})$$

(b).

$$\prod_{j=2}^{n} F_j(\boldsymbol{C}) \le n^k \tag{2}$$

证明。

$$\begin{aligned}\prod_{j=2}^{n} F_j(\boldsymbol{C}) &\le \prod_{j=2}^{n} F_j([1,1, \dots, 1]^T) \\ &= \prod_{j=2}^{n} \sum_{p=0}^{k} b_{j,p} \\ &= \prod_{j=2}^{n} \sum_{p=0}^{k} C_k^p \frac{1}{(j-1)^p} \\ &= \prod_{j=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{j-1}\right)^k \\ &= n^k\end{aligned}$$

(c). 如果 $c_0 = 1$,

$$F_j(\boldsymbol{C}) \ge 1 \tag{3}$$

证明。

$$F_j(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}^T \ge c_0 b_{j,0} = 1$$

定理 2.1. 对所有 k、$n \in N^+$ 和 $m \in N$,

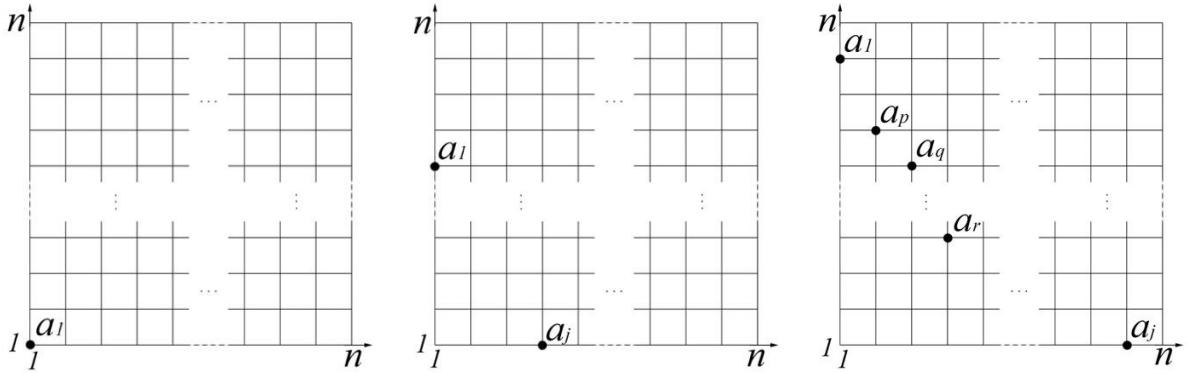
$$O_{\boldsymbol{C}}(n, m + c_k - 1) = \begin{cases} (n-1)!^k \sum \left(\prod_{i=1}^{m-1} F_{j_i}(\boldsymbol{C}) \prod_{i=1}^{n-m} F_{j'_i}(\boldsymbol{C}')\right), & 1 \le m \le n \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

其中，j_1、j_2、⋯、j_{m-1} 都是由集合 $\{2,3, \dots, n\}$ 中的 m-1 个元素组成的组合，而 $\{j'_1$、j'_2、⋯、$j'_{n-m}\} = \{2,3, \dots, n\} - \{j_1$、$j_2$、⋯、$j_{m-1}\}$。

定理 2.1 的证明。在定义 2.2 的情形下， $\boldsymbol{C}=(c_0、\ c_1、\ c_2、\ \ldots、\ c_k)$ 和 $S^{\boldsymbol{OR}}$、$\subseteq^{\boldsymbol{C}}U$。 $g(S)$ 表示当 S 为由特定元素组成的集合时的方案数。

首先，我们讨论 $\boldsymbol{C}=(0,1)$ 的情况。我们可以得到 S 是优化集。

对于 $m=1$， $\boldsymbol{a_2}\sim\boldsymbol{a_n}$ 的位置数量为 $(n-1)!$，如图 1 所示。a。因此 $O_{(0,1)}(n,1)=(n-1)!$。



(a)　　(b)　　(c)

图 1：优化集的三种方式。

对于 $m=2,3,\ldots,n,|U|=n$ 和 $S_1=\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_p},\boldsymbol{a_q},\ldots,\boldsymbol{a_r},\boldsymbol{a_j}\}$，我们使用数学归纳法证明 $g(S_1)=(n-1)!\,(p-1)(q-1)\ldots(r-1)(j-1)$。基础步骤：我们证明 $g(S_2)=(n-1)!\,j-1$，其中 $S_2=\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_j}\}$。如图 1.b 所示，$a_{11}=i, a_{j1}=1$，其中 $i=2,3,\ldots,n,3,\ldots,j=2$ 和 n。首先，放置行 $2\sim(i-1)$，位置数量为 $(n-j)!\,(n-i-j+2)!$。其次，放置行 $(i+1)\sim n$，位置数量为 $(n-i)!$。总数量为 $(n-i)!(n-j)!\,(n-i-j+2\,!$。

)

$$
\begin{aligned}
g(S_2) &= \sum_{i=2}^{n+2-j}\frac{(n-i)!\,(n-j)!}{(n-i-j+2)!}\\
&= \frac{(n-j)!}{j-1}\sum_{i=2}^{n+2-j}\frac{(n-i)!\,[(n-i+1)-(n-i-j+2)]}{(n-i-j+2)!}\\
&= \frac{(n-j)!}{j-1}\sum_{i=2}^{n+2-j}\left[\frac{(n-i+1)!}{(n-i-j+2)!}-\frac{(n-i)!\,(n-i-j+2)}{(n-i-j+2)!}\right]
\end{aligned}
$$

在括号中，当 $i=n+2-j$ 时，减号右边等于 0。带有 $i=t$ 的减号右边等于带有 $i=t+1$ 的减号左边，其中 $t=2,3,\ldots,n+1-j$。因此，

$$
\begin{aligned}
g(S_2) &= \frac{(n-j)!}{j-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-j)!}\\
&= \frac{(n-1)!}{j-1}
\end{aligned}
$$

归纳步骤：假设 $g(S_3) = (n-1)!\,(p-1)(q-1)\cdot\ldots\cdot(r-1)$，其中 $S_3 = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_p}, \boldsymbol{a_q}, \ldots, \boldsymbol{a_r}\}$。接下来，我们证明 $g(S_1) = (n-1)!\,(p-1)(q-1)\cdot\ldots\cdot(r-1)(j-1)$，其中 $S_1 = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_p}, \boldsymbol{a_q}, \ldots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_j}\}$ 且 $1 < p < q < r < j \le n$。在图1.c中，$a_{r1} = i, a_{j1} = 1$，其中 $i = 2,3, \ldots, n-1, j = 3,4, \ldots, n$ 和 $i + j \le n + 2$。首先，放置行2~$(i-1)$，位置数为 $(n-j)!\,(n-i-j+2)!$。我们移除所有包含行 1~$(i-1)$ 中各点的行和列。在图的其余部分，$|U'| = n - i + 1, S_3' = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_p}, \boldsymbol{a_q}, \ldots, \boldsymbol{a_r}\}$，排列方式数为 $(n-i)!\,(p-1)(q-1)\cdot\ldots\cdot(r-1)$。因此，

$$g(S_1) = \sum_{i=2}^{n+2-j} \frac{(n-i)!\,(n-j)!}{(p-1)(q-1)\cdot\ldots\cdot(r-1)(n-i-j+2)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)(q-1)\cdot\ldots\cdot(r-1)(j-1)}$$

因此，对于 $\boldsymbol{C}$ =(0,1) ，将 S_3 改为 S_1，方法是加上 $\boldsymbol{a_j}$，这样我们就可以得到 $g(S_1) = \frac{1}{j-1} g(S_3)$，其中 $j = 2,3, \ldots, n$.

接下来，对于 $k > 1$，我们讨论 $g(S_1)$ 和 $g(S_3)$ 之间的关系。在 $\boldsymbol{a_1}$~$\boldsymbol{a_n}$ 中，令维度 *1,* $\{1, 2, \ldots n\}$ 和维度 w+1, $\{a_{1w}, a_{2w}, \ldots, a_{nw}\}$ 构成 k 组 n 个 *2* 维向量 $(1, a_{1w}), (2, a_{2w}), \ldots (n, a_{nw})$，以及 $U^w = \{(1, a_{1w}), (2, a_{2w}), \ldots (n, a_{nw})\}$，其中 $w = 1,2, \ldots, k$。令 $S^w \boldsymbol{OR} (0,1) \subseteq U^w$ ，我们可以得到：当 $\boldsymbol{C} = (0,1)$ 时，S^w 与 $g(S^w)$ 之间的关系和 S 与 $g(S)$ 之间的关系相同。

我们定义 $S_{3,0} = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_p}, \boldsymbol{a_q}, \ldots, \boldsymbol{a_r}\}$，总共有 0 (j, a_{jw}) 个 S_{3,w_0}。在 k+1 维向量中，要通过加上 $\boldsymbol{a_j}$ 将 $S_{3,0}$ 改为 S_1，若 $c_l = 1$，则需要通过加上 (j, a_{jw}) 将 l S_{3,w_0} 改为 S_1^w。若 $c_l = 0$，则通过加上 (j, a_{jw}) 将 l S_{3,w_0} 改为 S_1^w，从而将 $S_{3,0}$ 改为 S_3。我们可以得到

$$g(S_1) = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}^T g(S_{3,0})$$
$$g(S_3) = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C'}^T g(S_{3,0})$$

and

$$g(S_1) = \frac{\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}^T}{\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C'}^T} g(S_3) = \frac{F_j(\boldsymbol{C})}{F_j(\boldsymbol{C'})} g(S_3)$$

我们还可以得到 $\boldsymbol{a_1}$，总共有 S^w。因此，

(a). 若 $c_k = 1$,

$$O_{\boldsymbol{C}}(n,m) = \begin{cases} (n-1)!^k \sum \prod_{i=1}^{n-1} F_{j'_i}(\boldsymbol{C'}), & m = 1 \\ (n-1)!^k \sum (\prod_{i=1}^{m-1} F_{j_i}(\boldsymbol{C}) \prod_{i=1}^{n-m} F_{j'_i}(\boldsymbol{C'})), & 2 \le m \le n-1 \\ (n-1)!^k \sum \prod_{i=1}^{n-1} F_{j_i}(\boldsymbol{C}), & m = n \\ 0, & m = 0 \text{ or } m > n \end{cases}$$

其中，j_1、j_2、…、j_{m-1} 都是由集合 $\{2,3, \ldots, n\}$ 中的 $m-1$ 个元素组成的组合，并且 $\{j'_1$、j'_2、…、$j'_{n-m}\} = \{2,3, \ldots, n\} - \{j_1$、$j_2$、…、$j_{m-1}\}$。（b）。如果 $c_k = 0$,

$$O_{\boldsymbol{C}}(n,m)=\begin{cases}(n-1)!^k\sum\prod_{i=1}^{n-1}F_{j'_i}(\boldsymbol{C}'), & m=0\\ (n-1)!^k\sum(\prod_{i=1}^{m}F_{j_i}(\boldsymbol{C})\prod_{i=1}^{n-m-1}F_{j'_i}(\boldsymbol{C}')), & 1\le m\le n-2\\ (n-1)!^k\sum\prod_{i=1}^{n-1}F_{j_i}(\boldsymbol{C}), & m=n-1\\ 0, & m=-1\text{ or }m>n-1\end{cases}$$

其中，j_1、j_2、…、j_m都是由集合 $\{2,3,\dots,n\}$ 中的 m 个元素组成的组合，并且 $\{j'_1、j'_2、\cdots、j'_{n-m-1}\}=\{2,3,\dots,n\}-\{j_1、j_2、\cdots、j_m\}$。

对所有 k、$n\in N^+$ 和$m\in N$，求和 u,

$$O_{\boldsymbol{C}}(n,m+c_k-1)=\begin{cases}(n-1)!^k\sum(\prod_{i=1}^{m-1}F_{j_i}(\boldsymbol{C})\prod_{i=1}^{n-m}F_{j'_i}(\boldsymbol{C}')), & 1\le m\le n\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

其中，j_1、j_2、…、j_{m-1} 都是由集合 $\{2,3,\dots,n\}$ 中的 $m-1$ 个元素组成的组合，且 $\{j'_1,j'_2,\cdots,j'_{n-m}\}=\{2,3,\dots,n\}-\{j_1,j_2,\cdots,j_{m-1}\}$。

定理 2.2. 对所有 k、$n\in N^+$ 和 $m\ge c_k-1$，C 顺序优化数的递推公式为

$$O_{\boldsymbol{C}}(n+1,m+1)=n^kF_{n+1}(\boldsymbol{C})O_{\boldsymbol{C}}(n,m)+n^kF_{n+1}(\boldsymbol{C}')O_{\boldsymbol{C}}(n,m+1)$$

边界条件为

$$O_{\boldsymbol{c}}(n,m)=\begin{cases}0, & m=c_k-1\ or\ m>c_k-1+n\\ 1, & m=c_k,n=1\end{cases}$$

定理 2.2 的证明。根据定义 2.2，对于 $c_k=1$，我们将 $O_k(n+1,m+1)$ 所表示的方案数分为两部分：包含 $\boldsymbol{a_{n+1}}$ 的方案和不包含 $\boldsymbol{a_{n+1}}$ 的方案，其中 $m=$ 2 3 $n-1$ 且 $n>2$ 和 , , … , 。2 3 $n-1$

首先，考虑由 $\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\dots,\boldsymbol{a_n}\}$ 中的 $\boldsymbol{a_{n+1}}$ 和 m 个向量构成的方式。设 j_m 为 $n+1,j_1,j_2,\cdots,j_{m-1}$，它们是集合 $\{2,3,\dots,n\}$ 中由 *m-1* 个元素组成的所有组合，以及 $\{j'_1,j'_2,\cdots,j'_{n-m}\}=\{2,3,\dots,n\}-\{j_1,j_2,\cdots,j_{m-1}\}$。

$$\begin{aligned}n!^k\sum(\prod_{i=1}^{m}F_{j_i}(\boldsymbol{C})\prod_{i=1}^{n-m}F_{j'_i}(\boldsymbol{C}'))&=n!^k\,F_{n+1}(\boldsymbol{C})\sum(\prod_{i=1}^{m-1}F_{j_i}(\boldsymbol{C})\prod_{i=1}^{n-m}F_{j'_i}(\boldsymbol{C}'))\\&=n^kF_{n+1}(\boldsymbol{C})(n-1)!^k\sum(\prod_{i=1}^{m-1}F_{j_i}(\boldsymbol{C})\prod_{i=1}^{n-m}F_{j'_i}(\boldsymbol{C}'))\\&=n^kF_{n+1}(\boldsymbol{C})O_{\boldsymbol{C}}(n,m)\end{aligned}$$

然后，不含 $\boldsymbol{a_{n+1}}$ 且从 $\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\dots,\boldsymbol{a_n}\}$ 中取 m 个向量的方法。令 j'_{n-m} 为 $n+1$、j_1、j_2、…、j_m，它们是集合 $\{2,3,\dots,n\}$ 中由 m 个元素组成的所有组合，而 $\{j'_1,\ j'_2,\ \cdots,\ j'_{n-m-1}\}=\{2,3,\dots,n\}-\{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_m\}$。

$$n!^k\sum(\prod_{i=1}^{m}F_{j_i}(\boldsymbol{C})\prod_{i=1}^{n-m}F_{j'_i}(\boldsymbol{C}'))=n!^k\,F_{n+1}(\boldsymbol{C}')\sum(\prod_{i=1}^{m}F_{j_i}(\boldsymbol{C})\prod_{i=1}^{n-m-1}F_{j'_i}(\boldsymbol{C}'))$$

$$= n^k F_{n+1}(\boldsymbol{C}')(n-1)!^k \sum (\prod_{i=1}^{m} F_{j_i}(\boldsymbol{C}) \prod_{i=1}^{n-m-1} F_{j'_i}(\boldsymbol{C}'))$$

$$= n^k F_{n+1}(\boldsymbol{C}') O_{\boldsymbol{C}}(n, m+1)$$

总而言之，

$$O_{\boldsymbol{C}}(n+1, m+1) = n^k F_{n+1}(\boldsymbol{C}) O_{\boldsymbol{C}}(n, m) + n^k F_{n+1}(\boldsymbol{C}') O_{\boldsymbol{C}}(n, m+1)$$

根据定理 2.1，我们可以得到边界条件。

$$O_{\boldsymbol{c}}(n, m) = \begin{cases} 0, & m = c_k - 1 \; or \; m > c_k - 1 + n \\ 1, & m = c_k, n = 1 \end{cases}$$

对于 $c_k = 0$ $k \; n \in$，我们也可以做同样的事情。我们可以证明递推公式对所有 N^+，以及 $m \geq c_k - 1$ 都成立。

下面我们给出 **C** 序列优化数的一些性质和应用，并在本文中证明其中一部分。

引理 2.1 对于 $c_k - 1 \leq m \leq n + c_k$,

$$O_{\boldsymbol{C}}(n, m) = O_{\boldsymbol{C}'}(n, n - m)$$

对于 $0 \leq m \leq n + 1$,

$$O_{\boldsymbol{C}}(n, m + c_k - 1) = 0 = O_{\boldsymbol{C}'}(n, n + 1 - m + {c'}_k - 1).$$

引理 2.1 的证明。 对于 $1 \leq t \leq n$,

$$O_{\boldsymbol{C}}(n, t + c_k - 1) = (n-1)!^k \sum (\prod_{i=1}^{t-1} F_{j_i}(\boldsymbol{C}) \prod_{i=1}^{n-t} F_{j'_i}(\boldsymbol{C}'))$$

$$= (n-1)!^k \sum (\prod_{i=1}^{n-t+1-1} F_{j'_i}(\boldsymbol{C}') \prod_{i=1}^{n-(n-t+1)} F_{j_i}(\boldsymbol{C}))$$

$$= O_{\boldsymbol{C}'}(n, n - t + 1 + {c'}_k - 1)$$

$$= O_{\boldsymbol{C}'}(n, n - t + {c'}_k)$$

对于 $t = 0$ 和 $t = n + 1$,

$$O_{\boldsymbol{C}}(n, t + c_k - 1) = 0 = O_{\boldsymbol{C}'}(n, n + 1 - t + {c'}_k - 1)$$

令 $m = t + c_k - 1$,

$$O_{\boldsymbol{C}}(n, m) = O_{\boldsymbol{C}'}(n, n - m)$$

其中 $c_k - 1 \leq m \leq n + c_k$。

引理 2.2。

$$\sum_{m=0}^{n} O_{\boldsymbol{C}}(n, m) = n!^k$$

引理 2.3。对于 $\boldsymbol{C} = (0,1)$，$O_{\boldsymbol{C}}(n, m) = s_u(n, m)$，其中 $s_u(n, m)$ 是第一类无符号斯特林数。

引理 2.4。令 $\boldsymbol{C} = (0,1,1, \ldots, 1)$ 为一个 k+*1*-元组向量，$O_{\boldsymbol{C}}(n, m) = O_k(n, m)$，其中 $O_k(n, m)$ 是 k 维序列优化数 *[惠22]*。

引理 2.5. 对于所有 k、 $n \in N^+$，我们定义 $x_{\boldsymbol{C}}^{1\uparrow} = x$,

$$x_{\boldsymbol{C}}^{n\uparrow} = x[F_2(\boldsymbol{C})x + F_2(\boldsymbol{C}')][2^k F_3(\boldsymbol{C})x + 2^k F_3(\boldsymbol{C}')] \cdots [(n-1)^k F_n(\boldsymbol{C})x + (n-1)^k F_n(\boldsymbol{C}')]$$

其中 $n \geq 2$ 和 $O_{\boldsymbol{C}}^{u}(n, m) = O_{\boldsymbol{C}}(n, m + c_k - 1)$。因此，我们可以得到

$$x_{\boldsymbol{C}}^{n\uparrow} = \sum_{m=0}^{n} O_{\boldsymbol{C}}^{u}(n,m)\, x^m$$

零点为 $x = 0$ 和 $x = -^{F_m(\boldsymbol{C}\prime)}{}_{F_m(\boldsymbol{C})}$，其中 $m =$ 2,3, , … , n。我们称 $O_{\boldsymbol{C}}^{u}(n,m)$ 为无符号的 $\boldsymbol{C}$ 序列优化数。

对于所有 $k, n \in N^+$，我们定义 $x_{\boldsymbol{C}}^{1\downarrow} = x$,

$$x_{\boldsymbol{C}}^{n\downarrow} = x[F_2(\boldsymbol{C})x - F_2(\boldsymbol{C}')][2^k F_3(\boldsymbol{C})x - 2^k F_3(\boldsymbol{C}')]\cdots[(n-1)^k F_n(\boldsymbol{C})x - (n-1)^k F_n(\boldsymbol{C}')]$$

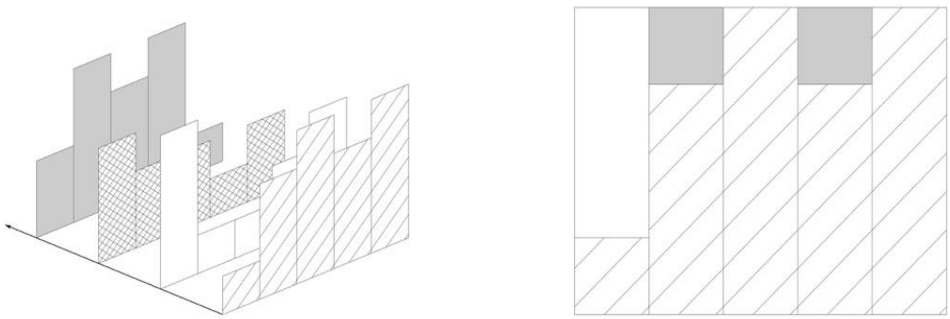
where $n \geq 2$ *and* $O_{\boldsymbol{C}}^{s}(n,m) = (-1)^{n+m} O_{\boldsymbol{C}}(n, m + c_k - 1)$. *Then, we can get*

$$x_{\boldsymbol{C}}^{n\downarrow} = \sum_{m=0}^{n} O_{\boldsymbol{C}}^{s}(n,m)\, x^m$$

零点为 $x = 0$ 和 $x = ^{F_m(\boldsymbol{C}\prime)}{}_{F_m(\boldsymbol{C})}$，其中 $m =$ 2,3, … , n。我们称 $O_{\boldsymbol{C}}^{s}(n,m)$ 为有符号的 $\boldsymbol{C}$ 序列优化数。

实例 2.1。C=$(c_0, c_1, c_2, \dots, c_k)$。有 n 块板，其排列顺序固定。每块板涂上一种颜色，并分成 k 块较小的板。对于所有 $i = 1,2, \dots, k$，每块板的第 i 块小板组成一组，其高度依次为 1,2, … , n 。在 $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_k\}$ 中，$c_{p_1}, c_{p_2}, \dots, c_{p_q}$ 都是 等于 1 的元素。沿箭头方向，能看到 m 种颜色 p_1 或 p_2 或……或 p_q 次的方式数为 $O_{\boldsymbol{C}}(n,m)$。

我们称之为k维颜色板问题。示例如图 2.a 所示，可见颜色的数量如图 2.b 所示。



(*a*) (*b*)

图 2：一个k维颜色板问题的示例。

实例 2.1 的证明。沿箭头方向将板标记为第 i 块板。将同一颜色的较小板的高度从左到右依次标记为 h$_{i1}$、h$_{i2}$、…、h$_{ik}$。令 $\boldsymbol{R} = (>, >, \dots, >)$ 为 k 维关系向量，$\boldsymbol{h_i} = (i, \text{h}_{i1}, \text{h}_{i2}, \dots \text{h}_{ik})$，且 $a_{ij} = n + 1 - \text{h}_{ij}$，其中 $i = 1,2, \dots, n$ 和 $j = 1,2, \dots, k$。当 $\boldsymbol{C} = (0,1)$ 时，如图 3 所示，沿视线方向可得到与图1.c 中相同的优化集。当 $k \geq 1$ 时，第 j 种颜色出现 l 次，这意味着按照定理 2.1 的证明，通过加上 (j, a_{jw})，将 $l\ S_3,^{w}{}_0$ 改为 S_1^w。第一种颜色出现 k 次，且定理 2.1 的证明中所有 S^w 都是 $\boldsymbol{a_1}$。因此，我们可以得出结论：m 种颜色分别出现 p_1 次或 p_2 次或……或 p_q 次的方式数为 $O_{\boldsymbol{C}}(n,m)$。

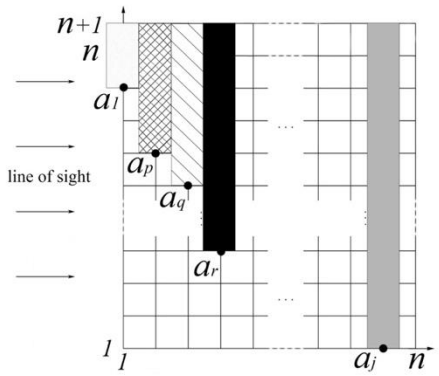


图 3：较小的颜色板组与优化集之间的关系。

上述**C** 维序列优化数的性质，是**C**为 (0,1) 时第一类斯特林数的基本性质。由于第一类斯特林数已得到广泛研究，并取得了大量成果，其中许多成果可以转化为**C**维序列优化数的性质，并由此获得许多有价值的结果。

以下**C**维序列优化数的性质，可由k-维序列优化数的性质 [Hui22] 推广。定理2.3给出了**C**维序列优化数的一个上界。定理 2.4 和引理 2.6 表明，**C**维序列优化数几乎集中在某个特定区间内。定理 2.5 给出了上界与其自身之比的上界比率。

定理2.3。 对于所有 k、 $n \in N^+$ 和 $m \in N$，我们定义

$$O_{\boldsymbol{C}max}(n, m + c_k - 1) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!^k}{(m-1)!}(\boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}^T)^{m-1} \prod_{i=1}^{n-m} F_{i+1}(\boldsymbol{C}'), & 1 \le m \le n \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{H}_n = (h_0, h_1, \dots, h_k)$ 且 $h_p = C_k^p \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^p} = \sum C_k^p \; {}_{j-1}^{1}()_{j=2}^{n} \; \overline{\quad}_p = \sum b_{j,} \; {}_{j=2}^{n} \; {}_p$。我们可以得到 $O_{\boldsymbol{C}max}(n, m + c_k - 1) \ge O_{\boldsymbol{C}}(n, m + c_k - 1)$。

我们可以得到下面的公式。

$$\boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}^T = \sum_{p=1}^{k} h_p c_p = \sum_{p=1}^{k} \sum_{j=2}^{n} b_{j,p}\, c_p = \sum_{j=2}^{n} \sum_{p=1}^{k} b_{j,p}\, c_p = \sum_{j=2}^{n} F_j(\boldsymbol{C}) \tag{4}$$

定理2.3的证明。我们利用定理 2.2 来证明。首先，我们证明边界条件。对于所有的 $k, n \in N^+$,

$$O_{\boldsymbol{C}max}(n, \mathrm{m} + c_k - 1) = \begin{cases} (n-1)!^k \prod_{i=1}^{n-1} F_{i+1}(\boldsymbol{C}'), & m = 1 \\ 0, & m = 0 \; or \; m > n \end{cases}$$

因此，边界条件满足 $O_{\boldsymbol{C}max}(n, m + c_k - 1) \ge O_{\boldsymbol{C}}(n, m + c_k - 1)$。

然后，我们通过数学归纳法证明 $2 \le m \le n$ 的不等式。

基础步骤：对于 $n = 2$，根据公式 (2),

$$O_{\boldsymbol{C}max}(2, 2 + c_k - 1) = \boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{C}^T = F_2(\boldsymbol{C}) = O_{\boldsymbol{C}}(2, 2 + c_k - 1) \qquad formula\ (4)$$

因此，对于 $n=2, O_{\boldsymbol{C}max}(n, m+c_k-1) \geq O_{\boldsymbol{C}}(n, m+c_k-1)$。

归纳步骤：对于 $n \geq 2$ 和 $2 \leq m \leq n$，我们假设 $O_{\boldsymbol{C}max}(n, m+c_k-1) \geq O_{\boldsymbol{C}}(n, m+c_k-1)$。– –

Then, we prove $O_{\boldsymbol{C}max}(n+1, m+c_k \quad 1) \geq O_{\boldsymbol{C}}(n+1, m+c_k \quad 1)$.

$$O_{\boldsymbol{C}max}(n+1, \mathrm{m}+c_k-1) = \frac{n!^k}{(m-1)!}(\boldsymbol{H}_{n+1} \cdot \boldsymbol{C}^T)^{m-1} \prod_{i=1}^{n+1-\mathrm{m}} F_{i+1}(\boldsymbol{C}')$$

$$= \frac{n!^k}{(m-1)!}[\boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}^T + F_{n+1}(\boldsymbol{C})]^{m-1} \prod_{i=1}^{n+1-\mathrm{m}} F_{i+1}(\boldsymbol{C}') \qquad formula\ (4)$$

$$\geq \frac{n!^k}{(m-1)!} C_{m-1}^0 (\boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}^T)^{m-1} \prod_{i=1}^{n+1-\mathrm{m}} F_{i+1}(\boldsymbol{C}') + \frac{n!^k}{(m-1)!} C_{m-1}^1 F_{n+1}(\boldsymbol{C})(\boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}^T)^{m-2} \prod_{i=1}^{n+1-\mathrm{m}} F_{i+1}(\boldsymbol{C}')$$

$$= \frac{n^k(n-1)!^k}{(m-1)!}(\boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}^T)^{m-1} \prod_{i=1}^{n+1-\mathrm{m}} F_{i+1}(\boldsymbol{C}') + \frac{n^k(n-1)!^k}{(m-2)!} F_{n+1}(\boldsymbol{C})(\boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}^T)^{m-2} \prod_{i=1}^{n+1-\mathrm{m}} F_{i+1}(\boldsymbol{C}')$$

$$= F_{n+2-\mathrm{m}}(\boldsymbol{C}') \frac{n^k(n-1)!^k}{(m-1)!}(\boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}^T)^{m-1} \prod_{i=1}^{n-\mathrm{m}} F_{i+1}(\boldsymbol{C}') + \frac{n^k(n-1)!^k}{(m-2)!} F_{n+1}(\boldsymbol{C})(\boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}^T)^{m-2} \prod_{i=1}^{n+1-\mathrm{m}} F_{i+1}(\boldsymbol{C}')$$

$$\geq F_{n+1}(\boldsymbol{C}') \frac{n^k(n-1)!^k}{(m-1)!}(\boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}^T)^{m-1} \prod_{i=1}^{n-\mathrm{m}} F_{i+1}(\boldsymbol{C}') + \frac{n^k(n-1)!^k}{(m-2)!} F_{n+1}(\boldsymbol{C})(\boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}^T)^{m-2} \prod_{i=1}^{n+1-\mathrm{m}} F_{i+1}(\boldsymbol{C}') \qquad formula\ (1)$$

$$= n^k F_{n+1}(\boldsymbol{C}') O_{\boldsymbol{C}max}(n, m+c_k-1) + n^k F_{n+1}(\boldsymbol{C}) O_{\boldsymbol{C}max}(n, m-1+c_k-1)$$

$$\geq n^k F_{n+1}(\boldsymbol{C}') O_{\boldsymbol{C}}(n, m+c_k-1) + n^k F_{n+1}(\boldsymbol{C}) O_{\boldsymbol{C}}(n, m-1+c_k-1)$$

$$= O_{\boldsymbol{C}}(n+1, \mathrm{m}+c_k-1)$$

W e 可以得到相同的 t ng 或 1 f $m = n +$ $n \in$ $m \in$ $c_{max}\ n\ m + c_k -$ 1 T f ll k N^+ d N O (。

总而言之，对于 a、an 和 ,) $\geq O_{\boldsymbol{C}}(\ , m+c_k-1)$。

定理 2.4. 对于所有 $n \geq 2, k \geq 1$ 和 $c_0 = 0, Pr\,[O_{\boldsymbol{C}}(n, m+c_k-1)] = {}^{O_{\boldsymbol{C}}}\!/_{(n,m+c_k-1)\ n!_k}$ ，设其为 $O_{\boldsymbol{C}}(n, m+c_k-1)$ 和 $M = \lceil ekc_1[log(n-1)\ +1] + e\frac{\pi^2}{6}\sum_{p=2}^{k} c_p C_k^p \rceil + M_1$ 的概率，其中 M_1 是正整数。我们可以得到

$$Pr\,[O_{\boldsymbol{C}}(n, m > M + c_k - 1)] \leq e^{-M_1}$$

定理 2.4 的证明。 令 $Pr\,[O_{\boldsymbol{C}max}(n, m+c_k-1)] = {}^{O_{\boldsymbol{C}max}}\!/_{(n,m+c_k-1\ )\ n!_k}$表示 **C** 个序列优化数的上界的概率。对于 $c_0 = 0$ 和 $1 \leq m \leq n-1$,

$$Pr\left[O_{kmax}(n,m+c_k)\right]=\frac{O_{kmax}(n,m+c_k)}{n^k}$$

$$=\frac{1}{n^k m!}(\boldsymbol{H}_n\cdot\boldsymbol{C}^T)^m\prod_{i=1}^{n-\mathrm{m}-1}F_{i+1}(\boldsymbol{C}')$$

$$\le\frac{1}{n^k m!}(\boldsymbol{H}_n\cdot\boldsymbol{C}^T)^m(n-m)^k \qquad formula\ (2)$$

$$\le\frac{1}{m!}(\boldsymbol{H}_n\cdot\boldsymbol{C}^T)^m$$

and

$$\frac{Pr\left[O_{\boldsymbol{C}max}(n,m+c_k)\right]}{Pr\left[O_{\boldsymbol{C}max}(n,m+c_k-1)\right]}=\frac{\boldsymbol{H}_n\cdot\boldsymbol{C}^T}{mF_{n-m+1}(\boldsymbol{C}')}$$

$$\le\frac{\boldsymbol{H}_n\cdot\boldsymbol{C}^T}{m} \qquad formula\ (3)$$

由于 $\mathrm{h}_p=\sum_{j=2}^{n}C_k^p\frac{1}{p^{(j-1)}}$，我们可以得到 $\mathrm{h}_0=n-1$、$\mathrm{h}_1=k\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j-1}\le k[log(n-1)+1]$，并且对于 $p\ge 2$，$\mathrm{h}_p\le C_k^p\sum_{(j-1)^2}^{n}\frac{1}{2}\le\frac{\pi^2}{6}C_k^p$。我们知道 $m!>\sqrt{2\pi m}(\frac{m}{e})^m$（斯特林近似）。

$$\frac{Pr\left[O_{\boldsymbol{C}max}(n,m+c_k)\right]}{Pr\left[O_{\boldsymbol{C}max}(n,m+c_k-1)\right]}\le\frac{c_1C_k^1[\log(n-1)+1]+\frac{\pi^2}{6}\sum_{p=2}^{k}c_pC_k^p}{m}$$

当 $m\ge\lceil ekc_1[log(n-1)+1]+e\frac{\pi^2}{6}\sum_{p=2}^{k}c_pC_k^p\rceil$ 时，

$$\frac{Pr\left[O_{\boldsymbol{C}max}(n,m+c_k)\right]}{Pr\left[O_{\boldsymbol{C}max}(n,m+c_k-1)\right]}\le\frac{1}{e}$$

and

$$Pr\left[O_{\boldsymbol{C}max}(n,m+c_k)\right]=\frac{1}{m!}(\boldsymbol{H}_n\cdot\boldsymbol{C}^T)^m$$

$$\le\frac{\{c_1C_k^1[\log(n-1)+1]+\frac{\pi^2}{6}\sum_{p=2}^{k}c_pC_k^p\}^m}{\sqrt{2\pi m}(\frac{m}{e})^m}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi m}}[\frac{ekc_1[log(n-1)+1]+e\frac{\pi^2}{6}\sum_{p=2}^{k}c_pC_k^p}{m}]^m$$

$$\le e^{-1}$$

当 $M=\lceil ekc_1[log(n-1)+1]+e\frac{\pi^2}{6}\sum_{p=2}^{k}c_pC_k^p\rceil+M_1$ 时，其中 M_1 是正整数。

$$Pr\left[O_{\boldsymbol{C}}(n,M+c_k-1)\right]\le e^{-M_1}$$

So,

$$Pr\,[O_{\boldsymbol{C}}(n, m > M + c_k - 1)] \le Pr\,[O_{\boldsymbol{C}max}(n, m > M + c_k - 1)]$$

$$= \sum_{i=M+1}^{n} Pr\,[O_{\boldsymbol{C}max}(n, i)]$$

$$\le e^{-M_1}$$

引理 2.6 若 $c_0 = 1$，则可得 $c'_0 = 0$ 和 $P\,r[O_{\boldsymbol{C}}(n, m > n - M + c_k)] = P\,r[O_{\boldsymbol{C}'}(n, m < M + c'_k - 1)] \le e^{-M_1}$，其中 $M = \lceil ekc'_1[log(n-1) + 1] + e\frac{\pi^2}{6}\sum_{p=2}^{c'_k} {}_pC_k^p \rceil + M_1$，且 M_1 是正整数。

引理 2.6 的证明。$c'_0 = 1 - c_0 = 0$。

$$P\,r[O_{\boldsymbol{C}'}(n, m < M + c'_k - 1)] \le e^{-M_1}$$

$P\,r[O_{\boldsymbol{C}}(n, m > n + 1 - M + c_k - 1)] = P\,r[O_{\boldsymbol{C}'}(n, m < M + c'_k - 1)] \le e^{-M_1}$其中 *Lemma* 2.1 $M = \lceil ekc'_1[log(n-1) + 1] + e\frac{\pi^2}{6}\sum_{p=2}^{c'_k} {}_pC_k^p \rceil + M_1$ 且 M_1 是正整数。

定理 2.5。对于所有的 $k \ge 1, n \ge 2$ 和$0 \le m \le n, O_{\boldsymbol{C}}(n, m) \le O_{\boldsymbol{C}'max}(n, n - m)$,

$$\frac{\sum_{m=0}^{n} O_{\boldsymbol{C}max}(n, m)}{\sum_{m=0}^{n} O_{\boldsymbol{C}}(n, m)} \le e^{\lambda}$$

and

$$\frac{\sum_{m=0}^{n} O_{\boldsymbol{C}'max}(n, m)}{\sum_{m=0}^{n} O_{\boldsymbol{C}}(n, m)} \le e^{\lambda'}$$

其中 $\lambda = c_0(n-1) + c_1k[log(n-1) + 1] + \frac{\pi^2}{6}\sum_{p=2}^{k} c_pC_k^p$ 且 $\lambda' = c'_0(n-1) + c'_1k[log(n-1) + 1] + \frac{\pi^2}{6}\sum_{p=2}^{c'_k} {}_pC_k^p$。特别地，对于$s_u(n, m) = O_{(0,1)}(n, m)$,

$$\frac{\sum_{m=0}^{n} s_{umax}(n, m)}{\sum_{m=0}^{n} s_u(n, m)} \le \frac{(n-1)}{n} e^{\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j-1} - log\,(n-1)} \le e^{\gamma}$$

其中 γ 是欧拉-马歇罗尼常数，且 $e^{\gamma} \le 1.7811$。

定理 2.5 的证明。

$$O_{\boldsymbol{C}}(n, m) = O_{\boldsymbol{C}'}(n, n - m) \le O_{\boldsymbol{C}'max}(n, n - m)$$ *Lemma* 2.2

Let

$$\lambda = \boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}^T$$

$$\le c_0(n-1) + c_1k[\log(n-1) + 1] + \frac{\pi^2}{6}\sum_{p=2}^{k} c_pC_k^p$$

and

$$\lambda' = \boldsymbol{H}_n \cdot \boldsymbol{C}'^T$$

$$\le c'_0(n-1) + c'_1k[\log(n-1) + 1] + \frac{\pi^2}{6}\sum_{p=2}^{k} c'_pC_k^p$$

那么,

$$\frac{\sum_{m=0}^{n} O_{\boldsymbol{C}max}(n,m)}{\sum_{m=0}^{n} O_{\boldsymbol{C}}(n,i)} = \frac{1}{n!^k}\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-1)!^k}{(m-1)!}(\boldsymbol{H}_n\cdot\boldsymbol{C}^T)^{m-1}\prod_{i=1}^{n-\mathrm{m}}F_{i+1}(\boldsymbol{C}')$$

$$\leq \frac{1}{n^k}\sum_{m=1}^{n}\frac{\lambda^{i-1}}{(m-1)!}(n-m+1)^k$$

$$\leq \sum_{m=1}^{n}\frac{\lambda^{i-1}}{(m-1)!}$$

$$\leq e^{\lambda} \qquad (Taylor\ \mathrm{theorem})$$

and

$$\frac{\sum_{m=0}^{n} O_{\boldsymbol{C}'max}(n,m)}{\sum_{m=0}^{n} O_{\boldsymbol{C}}(n,m)} = \frac{1}{n!^k}\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-1)!^k}{(m-1)!}(\boldsymbol{H}_n\cdot\boldsymbol{C}'^T)^{m-1}\prod_{i=1}^{n-\mathrm{m}}F_{i+1}(\boldsymbol{C})$$

$$\leq \frac{1}{n^k}\sum_{m=1}^{n}\frac{\lambda'^{i-1}}{(m-1)!}(n-m+1)^k$$

$$\leq \sum_{m=1}^{n}\frac{\lambda'^{i-1}}{(m-1)!}$$

$$\leq e^{\lambda'} \qquad (Taylor\ \mathrm{theorem})$$

特别地，对于 $s(n,m) = O_{01}(n,m)$,

$$\frac{\sum_{m=1}^{n} s_{umax}(n,m)}{\sum_{m=1}^{n} s_u(n,m)} = \frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(m-1)!}(\boldsymbol{H}_n\cdot\boldsymbol{C}^T)^{m-1}\prod_{i=1}^{n-\mathrm{m}}F_{i+1}(\boldsymbol{C}')$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\lambda^{i-1}}{(m-1)!}$$

$$\leq \frac{e^{\lambda}}{n} \qquad (Taylor\ \mathrm{theorem})$$

$$= \frac{1}{n}e^{\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j-1}}$$

Let

$$a_n = \frac{1}{n}e^{\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j-1}}$$

and

$$f(x) = \frac{x}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$$

其中 $n > 0$ 和 $x > 0$。

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} e^{\frac{1}{n}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2} e^{\frac{1}{x}} < 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

因此，$f(x)$> 1，$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ 和

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{m=1}^{n} s_{umax}(n,m)}{\sum_{m=1}^{n} s_u(n,m)} &\leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} e^{\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j-1}} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{(n-1)}{n} e^{\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j-1} - log\,(n-1)} \\ &= e^{\gamma} \end{aligned}$$

其中，γ 是欧拉-马歇罗尼常数，$e^{\gamma} \leq 1.7811$。

3 结论

在文章[Hui22], 中，第一类斯特林数的证明更为基础，由此发现了**C**序列优化数。我们简洁而粗略地处理了许多不等式，其中一些仍有很大的改进空间。对于*k+1*元向量**C**，存在2^k 种序列，其中一些具有特殊性质。

参考文献

[AD17] R. Arratia 和 S. DeSalvo。2017。通过泊松逼近，得出第一类和第二类斯特林数的完全有效误差界。《组合数学年刊》，21(1)，1-24。https://doi.org/10.1007/s00026-017-0339-z[ARY21] N. Alon、K. Rudow 和 L. Yariv。2021。随机博弈中的支配可解性（2021年5月）。http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3850992[Bla16] I. V. Blagouchine。2016。伽马函数对数的两个级数展开，涉及斯特林数，并且在与 π^{-1} 相关的某些参数下仅含有理系数。《数学分析与应用杂志》，第442卷（2016年10月），404-434。https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.04.032[Hui22] Z.Hui。序列优化数及关于边对称性和权重对称性的最短权重约束路径猜想（2022年6月）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.07052[Mou79] H. Moulin。1979。支配可解的投票方案。《计量经济学》，第47卷，第6期（1979年11月），1337-1351。https://doi.org/10.2307/1914004[Sti30] J. Stirling。1730。《微分方法，或无穷级数求和与插值论》。[Tem93] N. M. Temme。1993。斯特林数的渐近估计。《应用数学研究》，89(3)，233-243。https://doi.org/10.1002/sapm1993893233[Wil93] H. S. Wilf。1993。第一类斯特林数的渐近行为。《组合理论杂志》A辑 64，344-349。https://doi.org/10.1016/0097- 3165(93)90103-F[Xue00] G. Xue。2000。计算权重约束最短路径的原始-对偶算法

以及权重受限最小生成树。2000年 IEEE 国际性能、计算与通信会议论文集（2000年2月），271-277。http://dx.doi.org/10.1109/PCCC.2000.830328