arXiv:2301.02015v1 [math.PR] 5 Jan 2023

定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上的奇异线性随机场的尺度转变：谱方法

Donatas Surgailis

2023年1月6日

立陶宛维尔纽斯 03225，Naugarduko 24，维尔纽斯大学数学与信息学学院

摘要

我们研究线性随机场 X 在 $\mathbb{Z}^2$ 上的部分和极限，其谱密度 $f(\boldsymbol{x})$ 当 $\boldsymbol{x} \to (0,0)$ 时趋于 ∞，0，或趋于两者（沿不同子序列）。上述行为分别称为（谱）长程依赖、负依赖和长程负依赖，并假设 $f(\boldsymbol{x})$ 在原点附近具有各向异性幂律形式。部分和取自矩形区域，这些矩形的边长分别按 λ 和 λ^γ 增长，其中 $\gamma > 0$ 为任意固定值。我们证明，对于上述 X，无论 $\gamma > 0$ 取何值，部分和或缩放极限都存在，并在某个 $\gamma = \gamma_0 > 0$ 处呈现尺度转变；此外，“不平衡”的缩放极限（$\gamma \neq \gamma_0$）是赫斯特参数取值来自 $[0,1]$ 的分数布朗片。本文将 [24, 19, 28] 推广至上述谱依赖条件和/或更一般的赫斯特参数取值。

关键词：线性随机场，高斯随机场，谱密度，长程依赖，负相关，长程负依赖，双曲依赖，自相似性，各向异性标度，标度转变，分数布朗曲面，

1 引言

具有有限二阶矩且协方差为 $r(\boldsymbol{t}) = \mathrm{Cov}(X(\boldsymbol{0}), X(\boldsymbol{t}))$ 的平稳随机场 (RF) $X = \{X(\boldsymbol{t}); \boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^d\}$，若满足以下条件，则称为：(i) 长程依赖 (LRD)，若 $\sum_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^d} |r(\boldsymbol{t})| = \infty$；(ii) 短程依赖 (SRD)，若 $\sum_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^d} |r(\boldsymbol{t})| < \infty$，$\sum_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^d} r(\boldsymbol{t}) \neq 0$；(iii) 负依赖 (ND)，若 $\sum_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^d} |r(\boldsymbol{t})| < \infty$，$\sum_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^d} r(\boldsymbol{t}) = 0$（对于以连续参数为索引的随机场，上述概念的定义类似，只需将求和替换为在 $\mathbb{R}^d$ 上的积分）。尽管上述分类并不完全令人满意，但它对极限定理很重要，参见 [13, 16, 28]。关于随机场的 LRD、SRD 和 ND，还有一些基于谱或移动平均系数、但与上述定义并不等价的定义。下文将上述基于协方差或移动平均的刻画称为空间域 性质，以区别于文献中使用的频域（谱）刻画。这类频域概念的一种非常一般的形式，假设谱密度 $f(\boldsymbol{u})$ $\boldsymbol{u} \in \Pi^d := [-\pi, \pi]^d$ 存在，且在原点以外有界：

原点，并且满足：(i') $\lim_{\boldsymbol{u}\to\mathbf{0}} f(\boldsymbol{u}) = \infty$（长程依赖谱）；(ii') $\lim_{\boldsymbol{u}\to\mathbf{0}} f(\boldsymbol{u}) > 0$（短程依赖谱）；(iii') $\lim_{\boldsymbol{u}\to\mathbf{0}} f(\boldsymbol{u}) = 0$（负依赖谱）。此外，在情形 (i') 和 (iii') 中，通常还会额外假设谱密度按 $\boldsymbol{u} \to 0$ [13, 22, 25] 正则变化。显然，在维度 $d \geq 2$ 中，一个函数可以沿某一方向正则地增至 ∞，同时沿另一方向趋于零。(i')-(iii') 并未体现这种行为，因此需要引入一个新概念 (iv') $0 = \liminf_{\boldsymbol{u}\to\mathbf{0}} f(\boldsymbol{u}) < \limsup_{\boldsymbol{u}\to\mathbf{0}} f(\boldsymbol{u}) = \infty$，我们称之为长程负依赖谱（长程负依赖谱）。性质 (i')、(iii') 和 (iv') 可统称为奇异行为，其奇异性局限于原点，包括极限为无穷大和/或零的情形。

本文研究了一类具有长程依赖/负依赖/长程负依赖谱性质的平稳线性随机场 X 在 $\mathbb{Z}^2$ 上的各向异性部分和极限。部分和

$$S_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x}) := \sum_{\boldsymbol{t}\in K_{[\lambda x_1,\lambda^\gamma x_2]}} X(\boldsymbol{t}), \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \tag{1.1}$$

取自矩形 $K_{[\lambda x_1,\lambda^\gamma x_2]} := \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^2 :\ 1 \leq t_1 \leq \lambda x_1,\ 1 \leq t_2 \leq \lambda^\gamma x_2\} \subset \mathbb{Z}^2$ 其边长随$O(\lambda)$和 $O(\lambda^\gamma)$增长，其中 $\lambda \to \infty$，且 $\gamma > 0$固定。我们主要研究各向异性标度极限

$$d^{-1}_{\lambda,\gamma} S_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{\text{fdd}} V_\gamma(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+, \quad \lambda \to \infty, \tag{1.2}$$

其中$d_{\lambda,\gamma} \to \infty$ 是归一化因子。 [24, 23, 18, 19, 4, 20, 28] 及其他研究证明，对于一大类随机场，在任意 $\gamma > 0$下，式（1.2）中的非平凡缩放极限 $V_\gamma(\boldsymbol{x})$均存在。此外，极限族$\{V_\gamma; \gamma > 0\}$ 可能会在某个（非随机）点 $\gamma = \gamma_0 > 0$发生一种称为尺度转变的三分现象，这意味着 $V_\gamma = V_\pm$ $(\gamma \lessgtr \gamma_0)$与 γ 无关且彼此不同；见定义1。对于线性随机场，这些研究可概括为：一大类定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上的随机场在式（1.2）中呈现两种极限行为：（I）对任意 $\gamma > 0$， V_γ 都是标准布朗片$B_{1/2,1/2}$；或（II）存在某个$\gamma_0 > 0$ 使尺度转变发生，此时所有非平衡极限 $V_\gamma, \gamma \neq \gamma_0$ 都是分数布朗片（FBS）B_{H_1,H_2}，其赫斯特参数为（H_1, H_2） $= (H_1^+, H_2^+)$ $(\gamma > \gamma_0)$ $= (H_1^-, H_2^-)$ $(\gamma < \gamma_0)$, (H_1^+, H_2^+) $\neq (H_1^-, H_2^-)$。在短程依赖条件下，行为（I）相当典型，参见 [6, 7, 23] 及其中的参考文献。行为（II）则更有意思，且已在长程依赖和负依赖条件下于 [24, 28]中得到确立。然而，这些结果未涵盖长程负依赖奇异性以及参数的某些特定（边界）取值。

本文扩展了 [24, 19, 28] 以及其他一些关于谱长程依赖、负依赖和长程非依赖条件下线性随机场 II 型行为的研究 X。与 [19, 28] 及其他论文中的“时域”方法相比，本文采用的谱方法似乎更高效、更简单；此外，它也可用于求得非高斯情形下缩放极限的协方差结构。假设 X 具有移动平均（MA）表示

$$X(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^2} a(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s})\varepsilon(\boldsymbol{s}), \qquad \boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^2, \tag{1.3}$$

具有标准化独立同分布创新 $\{\varepsilon(\boldsymbol{s});\ \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^2\}$，$\mathrm{E}\varepsilon(\boldsymbol{s}) = 0$，$\mathrm{E}\varepsilon(\boldsymbol{s})^2 = 1$ 以及确定性系数$a(\boldsymbol{t})$ $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^2$. 后者系数满足条件 $\sum_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^2} a(\boldsymbol{t})^2 < \infty$，这是(1.3)收敛的必要条件；但本文中关于(1.2)各种行为的其他所有条件均针对 X的谱密度

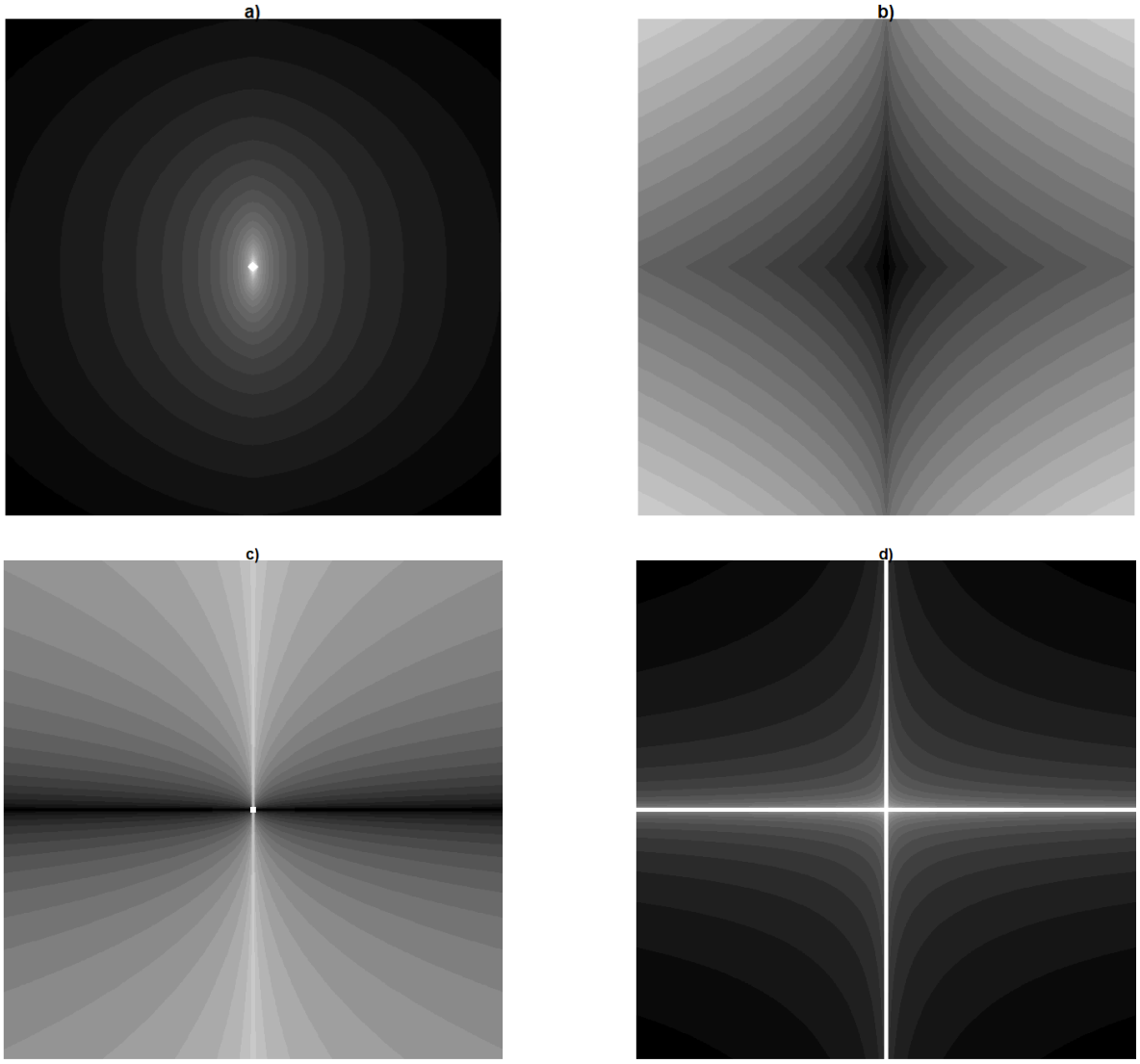

图 1. 长程依赖、负依赖、长程非依赖及“双曲依赖”条件下谱密度的等高线图。a) $f(\boldsymbol{x}) = \rho_2^{-1}(\boldsymbol{x})$, $\upsilon_1 = 0.8$, $\upsilon_2 = 1.2$; b) $f(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})$ $\upsilon_1 = 0.5$, $\upsilon_2 = 1$; c) $f(\boldsymbol{x}) = \rho^{-1}(\boldsymbol{x})|x_2/\rho(\boldsymbol{x})^{1/\upsilon_2}|^{0.5}$, $\upsilon_1 = 0.5$, $\upsilon_2 = 1$; d) $f(\boldsymbol{x}) = |x_1|^{-0.2}|x_2|^{-.5}$

写作 $f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^2|\widehat{a}(\boldsymbol{x})|^2$, $\widehat{a}(\boldsymbol{x}) := (2\pi)^{-2}\sum_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{x}}a(\boldsymbol{t})$ $\boldsymbol{x} \in \Pi^2$ MA系数的傅里叶变换的平方。为确定(1.2)中极限高斯随机场的协方差结构，基本假设是 $f(\boldsymbol{x})$呈幂函数形式

$$\rho(\boldsymbol{x}) := |x_1|^{\upsilon_1} + |x_2|^{\upsilon_2}, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.4}$$

在原点处，其中 $\upsilon_i > 0$, $i = 1, 2$ 是给定参数，或者更准确地说，

$$f(\boldsymbol{x}) \sim L(\boldsymbol{x})/\rho(\boldsymbol{x}) \quad (\text{‘spectrum LRD’}) \quad \text{and} \quad f(\boldsymbol{x}) \sim L(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}) \quad (\text{‘spectrum ND’}), \tag{1.5}$$

其中 $L(\boldsymbol{x})$ 是满足某些有界性条件的“角函数”。显然，只要 $L(\boldsymbol{x})$ 有下界，关系式 (1.5) 中的第一个关系就意味着长程依赖谱，而关系式 (1.5) 中的第二个关系

意味着负依赖谱，只要 $L(\boldsymbol{x})$ 有上界。上述将 $\rho(\boldsymbol{x})$ 选作“径向函数”的方式相当灵活：我们也可以采用 (1.4) 的其他形式，例如

$$\rho_p(\boldsymbol{x}) := (|x_1|^{p\upsilon_1} + |x_2|^{p\upsilon_2})^{1/p}, \quad p > 0, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.6}$$

同样也可用来代替 (1.4)，因为将 $\rho(\boldsymbol{x})$ 改为 $\rho_p(\boldsymbol{x})$ 等同于改变角函数，而这不会影响极限结果。如果违反了关于 $L(\boldsymbol{x})$ 的有界性条件，则可能出现长程与非衰减谱；例如，当 $x_i \to 0$ 时，若 $L(\boldsymbol{x})$ 按指数为 $\mu_i > 0$ 的 $|x_i|^{\mu_i}$ 递减，就会出现这种情况（见 (1.5) 中的第一个关系式）。我们表明，在这种情况下，(1.2) 中的极限可能存在，同时还会出现尺度转变，且极限高斯随机场取决于参数 υ_i，μ_i，$i = 1, 2$。我们还考虑谱密度渐近地分解为幂函数乘积 $|x_i|^{-\upsilon_i}$，$i = 1, 2$ 的情形。这种奇异形式（见 [24, 6] 中的研究，在本文中称为双曲依赖）会根据 υ_i 的符号产生长程依赖谱、负依赖谱或长程与非衰减谱，但会导致截然不同的极限结果（不存在尺度转变）。图1展示了本文研究的不同类型的奇异谱密度。我们还预计，尽管极限随机场的描述会更复杂，我们的结果仍可推广到 d 维格点上的随机场，其中 $d \geq 3$ 可以是任意值；参见 [4, 27]。

本文其余部分安排如下。第2节给出关于 $f(\boldsymbol{x})$ 的严格假设，以及后文将用到的一些预备事实。第3至第5节在相应的长程依赖、负依赖、长程非依赖和双曲依赖前提下，给出主要结果定理1、2、3和4。

记号。本文中，$\mathrm{fdd}\longrightarrow$、$\mathrm{fdd}=$ 和 $\mathrm{fdd}\neq$ 分别表示有限维分布的弱收敛、相等和不等。 C 表示一个通用的正数常数，它在不同位置可以取不同的值，其具体取值并不重要。 $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$ $\mathbb{R}_0^2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\Pi := [-\pi, \pi]$, $|\boldsymbol{x}| := |x_1| + |x_2|$, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{1} := (1, 1)$, $\mathbf{0} := (0, 0)$。$\mathbb{I}(A)$ 表示集合 A 的示性函数。

2 预备知识与假设

定义1。 [24, 23, 19] 我们称平稳随机场 $X = \{X(\boldsymbol{t}); \boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^2\}$ 具有尺度转变，如果对于任意 $\gamma > 0$，式 (1.2) 中的非平凡极限都存在，并且存在一个 $\gamma_0 > 0$ 使得

$$V_\gamma \overset{\mathrm{fdd}}{=} V_+ \ (\gamma > \gamma_0), \qquad V_\gamma \overset{\mathrm{fdd}}{=} V_- \ (0 < \gamma < \gamma_0), \qquad V_+ \overset{\mathrm{fdd}}{\neq} aV_- \ (\forall\, a > 0). \tag{2.1}$$

在这种情况下，随机场 $V_\pm$ 将称为不平衡 极限，而 RF V_0 将称为 X的平衡良好 极限。

[7] 中的定义1的一个较弱版本要求，对于 γ_0的一个小邻域内的 $\gamma > \gamma_0$ 和 $\gamma < \gamma_0$， V_γ 与 γ 相互独立。存在一些随机场，在上述较弱意义下于多个（可能无限多个）点 $\gamma > 0$ [18, 7]处具有尺度转变。然而，对于本文讨论的随机场，定义1已足够。

回顾一下，平稳零均值随机场 $X = \{X(\boldsymbol{t}); \boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^2\}$ 的协方差函数是其谱密度的傅里叶变换，即 $r(\boldsymbol{t}) := \mathrm{E}X(\mathbf{0})X(\boldsymbol{t}) = \int_{\Pi^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^2$。因此，协方差函数

（1.1）中的归一化部分和随机场可写为

$$R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \;:=\; d_{\lambda,\gamma}^{-2}\mathrm{E}S_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x})S_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{y}) \;=\; d_{\lambda,\gamma}^{-2}\int_{\Pi^2}\prod_{i=1}^{2}D_{[\lambda^{\gamma_i}x_i]}(u_i)\overline{D_{[\lambda^{\gamma_i}y_i]}(u_i)}f(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}_+^2, \tag{2.2}$$

其中 $(\gamma_1,\gamma_2):=(1,\gamma)$，且 $D_n(u):=\sum_{t=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)u})/(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})$ $u\in\Pi$（实值函数$D_n(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)u/2}$为狄利克雷核）。

命题1。设 X 是 (1.3) 中的线性随机场，其谱密度为 f，且 $S_{\lambda,\gamma}$ 是 (1.1)中的部分和随机场，$\gamma>0$。假设

$$R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \;\to\; R_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\quad \lambda\to\infty\quad(\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}_+^2) \tag{2.3}$$

and

$$|g_\lambda|_\infty:=\sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^2}\Big|\sum_{\boldsymbol{t}\in K_{[\lambda x_1,\lambda^\gamma x_2]}}a(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{u})\Big|=o(d_{\lambda,\gamma}),\qquad \lambda\to\infty. \tag{2.4}$$

则 (1.2) 成立，其中 V_γ 是定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的零均值高斯随机场，$\mathrm{E}V_\gamma(\boldsymbol{x})=0$，其协方差为 $\mathrm{E}V_\gamma(\boldsymbol{x})V_\gamma(\boldsymbol{y})=R_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}_+^2$。

证明。(1.2)中的有限维收敛等价于一维收敛 $\mathcal{S}_{\lambda,\gamma}:=d_\lambda^{-1},_\gamma\sum_{j=1}^{m}\theta_j\ S_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x}_j)\ \mathrm{d}\longrightarrow\ \sum_{j=1}^{m}\theta_jV_\gamma(\boldsymbol{x}_j)\ =:\ \mathcal{V}_\gamma$ 对任意 $\theta_j\in\mathbb{R},\boldsymbol{x}_j\in\mathbb{R}_+^2,j=1,\cdots,m,m\geq1$ 均成立。由 (2.3) 得 $\mathrm{E}(\mathcal{S}_{\lambda,\gamma})^2\to\sum_j^m,_{j'=1}\theta_j\theta_{j'}R_\gamma(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_{j'})\ =:\ \mathcal{R}_\gamma\geq0$。令 $\mathcal{R}_\gamma>0$，则 $\mathcal{S}_{\lambda,\gamma}=d_\lambda^{-1},_\gamma\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^2}g_\lambda(\boldsymbol{u})\varepsilon(\boldsymbol{u})$ 是由独立同分布随机变量构成的标准化加权线性型，其权重为 $g_\lambda(\boldsymbol{u}):=\sum_{j=1}^{m}\theta_j\sum_{\boldsymbol{t}\in K_{[\lambda x_{1j},\lambda^\gamma x_{2j}]}}a(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{u})\ \boldsymbol{x}_j=(x_{1j},x_{2j})$。(2.4) 关系蕴含林德伯格条件，即对任意 $\tau>0$

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^2}g_\lambda^2(\boldsymbol{t})\mathrm{E}[\varepsilon(\boldsymbol{u})^2\mathbb{I}(|g_\lambda(\boldsymbol{u})\varepsilon(\boldsymbol{u})|>\tau d_{\lambda,\gamma})]=o(d_{\lambda,\gamma}^2),\qquad \lambda\to\infty \tag{2.5}$$

由于根据 (2.4) 和 $\mathrm{E}\varepsilon(0)^2<\infty$，$\mathrm{E}\varepsilon(\boldsymbol{u})^2\mathbb{I}(|g_\lambda(\boldsymbol{u})\varepsilon(\boldsymbol{u})|>\tau d_{\lambda,\gamma})\ \leq\mathrm{E}\varepsilon(\boldsymbol{u})^2\mathbb{I}\big(|\varepsilon(\boldsymbol{u})|>\tau d_{\lambda,\gamma}/|g_\lambda|_\infty\big)\to0$。因此，$\mathcal{S}_{\lambda,\gamma}\,\mathrm{d}\longrightarrow\ N(0,\mathcal{R}_\gamma)$，换言之，$(d_\lambda^{-1},_\gamma S_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x}_j);\ j=1,\cdots,m)$ 的分布在 $\mathbb{R}^m$ 上趋于均值为零、协方差矩阵为 $(R_\gamma(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_{j'}))_{j,j=1,\cdots,m}$ 的高斯分布，从而证明了该命题。 □

令 $\upsilon_i>0,i=1,2,\Upsilon:=\frac{1}{\upsilon_1}+\frac{1}{\upsilon_2}$ 和 $\rho(\boldsymbol{x})$ $\rho_p(\boldsymbol{x})$ 如 (1.4)、(1.6) 中所定义。注意到以下初等不等式：对于任意 $p>0$，存在常数 $0<C_1\leq C_2<\infty$ 使得

$$C_-\rho(\boldsymbol{x})\leq\rho_p(\boldsymbol{x})\leq C_+\rho(\boldsymbol{x}),\qquad(\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2). \tag{2.6}$$

我们还利用了这一事实： [19] 对于任意 $\delta>0,w>0$

$$\int_{|\boldsymbol{x}|<\delta}\rho(\boldsymbol{x})^{-w}\mathrm{d}\boldsymbol{x}<\infty\iff w<\Upsilon,\qquad\int_{|\boldsymbol{x}|>\delta}\rho(\boldsymbol{x})^{-w}\mathrm{d}\boldsymbol{x}<\infty\iff w>\Upsilon. \tag{2.7}$$

按照 [20], ，我们称可测函数 $L:\mathbb{R}_0^2\to\mathbb{R}$ 为广义不变 函数，若函数$\boldsymbol{x}\mapsto L(\lambda^{1/\upsilon_1}x_1,\ \lambda^{1/\upsilon_2}x_2)$不依赖于 $\lambda>0$。每个广义不变函数 L 都可以表示为

$$L(\boldsymbol{x})=\tilde{L}(x_1/\rho(\boldsymbol{x})^{1/\upsilon_1},x_2/\rho(\boldsymbol{x})^{1/\upsilon_2}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_0^2, \tag{2.8}$$

其中， $\tilde{L}$ 是 L 在 $\mathcal{S}_1 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_0^2 : \rho(\boldsymbol{x}) = 1\}$上的限制。

假设 (F)$_{\mathrm{LRD}}$ 谱密度 f 满足

$$f(\boldsymbol{x}) \;=\; \rho(\boldsymbol{x})^{-1} L(\boldsymbol{x})\big(1 + o(1)\big), \quad |\boldsymbol{x}| \to 0, \tag{2.9}$$

其中 $\rho(\boldsymbol{x})$ 如 (1.4) 所示， $\Upsilon > 1$ 且 $L(\boldsymbol{x}) = L(-\boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_0^2$ 是严格正的连续广义不变函数。此外， f 在 $\{\boldsymbol{x} \in \Pi^2$ 上有界： $|\boldsymbol{x}| > \delta\}$，对任意 $\delta > 0$ 均成立。

假设 (F)$_{\mathrm{LRND},\ i}$ $(i = 1,\ 2)$ 谱密度 f 满足假设 (F)$_{\mathrm{LRD}}$ ，但将 $L(\boldsymbol{x})$ 的严格正性替换为

$$\tilde{L}(\boldsymbol{x}) = \ell_i |x_i|^{\mu_i}(1 + o(1)) \qquad (x_i \to 0,\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_1) \tag{2.10}$$

对某个 $\mu_i > 0$， $\ell_i > 0$。

假设 (F)$_{\mathrm{ND}}$ 谱密度 $f(\boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{x} \in \Pi^2$ 是一个有界连续函数，满足

$$f(\boldsymbol{x}) \;=\; \rho(\boldsymbol{x}) L(\boldsymbol{x})\big(1 + o(1)\big), \quad |\boldsymbol{x}| \to 0, \quad \text{where} \tag{2.11}$$

其中 $\rho(\boldsymbol{x})$ 如 (1.4) 所示，且 $L(\boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_0^2$ 如 (2.9) 所示。

对于 (2.9)、(2.11) 中的广义齐次函数 $\rho(\boldsymbol{x})^{-1} L(\boldsymbol{x})$ $\rho(\boldsymbol{x}) L(\boldsymbol{x})$，我们关联如下高斯随机场$V_{0,\ 1/\rho}$， $V_{0,\ \rho}$

$$V_{0,1/\rho}(\boldsymbol{x}) := \textstyle\int_{\mathbb{R}^2} \prod_{j=1}^2 \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}u_j x_j}}{\mathrm{i}u_j} \sqrt{L(\boldsymbol{u})/\rho(\boldsymbol{u})}\, Z(\mathrm{d}\boldsymbol{u}), \quad V_{0,\rho}(\boldsymbol{x}) := \textstyle\int_{\mathbb{R}^2} \prod_{j=1}^2 \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}u_j x_j}}{\mathrm{i}u_j} \sqrt{L(\boldsymbol{u})\rho(\boldsymbol{u})}\, Z(\mathrm{d}\boldsymbol{u}), \tag{2.12}$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^2$，其中 $\{Z(\mathrm{d}\boldsymbol{u})\}$ 是零均值复值高斯噪声，且 $\mathrm{E}|Z(\mathrm{d}\boldsymbol{u})|^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{u}$。$V_{0,\ 1/\rho}$， $V_{0,\ \rho}$ 的存在性将在以下各节中证明。

定义2。 设 $V = \{V(\boldsymbol{x});\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^2\}$ 为一个随机场，且 $\gamma > 0$， $H \geq 0$， $H_i \geq 0$， $i = 1,\ 2$。若满足以下条件，则称 (i) V 为 $(\gamma,\ H)$-自相似 (SS)：

$$\{V(\lambda x_1, \lambda^\gamma x_2); \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^2\} \overset{\mathrm{fdd}}{=} \{\lambda^H V(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^2\}, \qquad \forall \lambda > 0. \tag{2.13}$$

(ii) V 为 (H_1, H_2)-多重自相似 (MSS)

$$\{V(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2); \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^2\} \overset{\mathrm{fdd}}{=} \{\lambda_1^{H_1} \lambda_2^{H_2} V(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^2\}, \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0. \tag{2.14}$$

(γ, H)-自相似性是算子自相似性的一种特殊情形，该性质由 [2] 引入，对应于标度 $\boldsymbol{x} \to \lambda^E \boldsymbol{x}$ ，其中对角矩阵为 $E = \mathrm{diag}(1, \gamma)$。特别地，$(1, H)$-自相似性与 $\mathbb{R}_+^2$ [25] 上随机场的通常 H-自相似性相同。(H_1, H_2)-多重自相似性由 [12] 引入。它蕴含具有任意 $\gamma > 0$ 和 $H = H_1 + \gamma H_2$ 的 (γ, H)-自相似性。在温和的附加假设下，(1.2) 中的缩放极限 V_γ^X 是 (γ, H)-自相似随机场，且归一化 $d_{\lambda,\gamma}$ 在无穷远处以指数 H [23] 正则变动。

定义 3.（标准）分数布朗片 （FBS）$B_{H_1,H_2}=\{B_{H_1,H_2}(\boldsymbol{x});\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_+^2\}$ 具有 $(H_1,H_2)\in[0,1]^2$ ，定义为均值为零、协方差函数为 $\mathrm{E}B_{H_1,H_2}(\boldsymbol{x})B_{H_1,H_2}(\boldsymbol{y})=\prod_{i=1}^2 r_{H_i}(x_i,y_i)$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}_+^2$ 的高斯过程，其中 $x,y\in\mathbb{R}_+$，

$$r_H(x,y) := \frac{1}{2}\begin{cases} x^{2H}+y^{2H}-|x-y|^{2H}, & 0<H\le 1,\\ 2, & H=0,x=y,\\ 1, & H=0,x\neq y. \end{cases} \tag{2.15}$$

通常，FBS 定义在 $(H_1,H_2)\in(0,1]^2$ 甚至 $(H_1,H_2)\in(0,1)^2$，见 [1]。FBS 向 $H_1\wedge H_2=0$ 的推广由 [28] 引入。(2.15) 表明，将 FBS B_{H_1,H_2} 限制在水平线或垂直线上，所得结果与分数布朗运动（FBM）$B_H=\{B_H(x)$ 一致；$x\in\mathbb{R}_+\}$ 其协方差函数为 $r_H(x,y)$，相应的赫斯特参数为 $H=H_i\in[0,1],i=1,2$。注意 $r_0(x,y)=\lim_{H\downarrow 0} r_H(x,y)$。FBM B_0 是零阶自相似的极端奇异（不可测）过程，见 [25, 第256–257]页。它可表示为 $B_0\overset{\mathrm{fdd}}{=}\{\frac{1}{\sqrt{2}}(W(x)-W(0));x\in\mathbb{R}_+\}$，其中 $W(x),x\in[0,\infty)$ 是一族（不可数个）相互独立的 $N(0,1)$ 随机变量。上述 B_0 不同于 [10, 第 2985] 页定义的、具有 $H=0$ 的“正则化”FBM。具有 $H_1\wedge H_2=0$ 的 FBS B_{H_1,H_2} 及其 α-稳定推广，出现在随机场的极限定理中 [28, 21]。我们还回顾具有 $(H_1,H_2)\in(0,1)^2$ 的 FBS 的谱表示：

$$B_{H_1,H_2}(\boldsymbol{x}) = \kappa^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}\prod_{j=1}^2\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_ju_j}}{\mathrm{i}u_j|u_j|^{H_j-\frac{1}{2}}}Z(\mathrm{d}\boldsymbol{u}) \tag{2.16}$$

其中

$$\kappa^2 := \int_{\mathbb{R}^2}\prod_{j=1}^2\frac{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_j}|^2}{|u_j|^{2H_j+1}}\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \prod_{j=1}^2\frac{\pi}{H_j\Gamma(2H_j)\sin(H_j\pi)} \tag{2.17}$$

且 $Z(\mathrm{d}\boldsymbol{u})$ 是与式 (2.12) 中相同的高斯白噪声；参见 [1]。对于 $H_1\vee H_2=1$，FBS 是形如 $B_{1,H_2}(\boldsymbol{x})=x_1B_{H_2}(x_2)$ $(0<H_2<1)$，$B_{H_1,1}(\boldsymbol{x})=x_2B_{H_1}(x_1)$ $(0<H_1<1)$ $B_{1,1}(\boldsymbol{x})=x_1x_2Z$ 的线随机场，其中 B_H 是分数布朗运动，且 $Z\sim N(0,1)$。对于 $H_1\wedge H_2=0$，FBS 可通过相互独立的分数布朗运动或不可数个相互独立的高斯变量族来构造有限维分布 [28]。

3 长程依赖

定义

$$\begin{aligned} H_1^+ &:= \frac{1}{2}(1+(\upsilon_1\wedge 1)),\quad H_2^+:=\frac{1}{2}(1+\upsilon_2-\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1\vee 1}),\\ H_1^- &:= \frac{1}{2}(1+\upsilon_1-\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2\vee 1}),\quad H_2^-:=\frac{1}{2}(1+(\upsilon_2\wedge 1)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

注意，对于 $\upsilon_1\ge 1$，$H_1^+=1$；对于 $\upsilon_1\le 1$，$H_2^+=1/2$。H_i^-，$i=1,2$ 也满足类似关系。

定理 1. 设 X *in* (1.1) 是定义在 $\mathbb{Z}^2$ *in* (1.3) 上的平稳线性随机场，其谱密度为 f，且满足假设 $(F)_{LRD}$。那么：

• (1.2) 中的缩放极限对任意 $\gamma>0$ 均存在，并满足(2.1)，其中 $\gamma_0=\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$；非平衡极限为

$$V_+ := \kappa_+\begin{cases}B_{H_1^+,1/2} & \upsilon_1\le 1,\\ B_{1,H_2^+}, & \upsilon_1\ge 1,\end{cases}\qquad V_- := \kappa_-\begin{cases}B_{1/2,H_2^-} & \upsilon_2\le 1,\\ B_{H_1^-,1}, & \upsilon_2\ge 1,\end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $H_i^{\pm}, i=1,2$ 与(3.1) 中相同，而(3.2) 中的常数 $\kappa_\pm>0$ 定义于(3.13)、(3.14) 中（或者可以利用对称性从这些表达式确定）。

• 平衡极限 $V_0=V_{0,\ 1/\rho}$ 由(2.12)给出。

• (1.2) 中的归一化由 $d_{\lambda,\ \gamma}:=\lambda^{H(\gamma)}(\log_+\lambda)^{1/2}$ 给出，若 $\gamma>\gamma_0$ 且 $\upsilon_1=1$，或 $\gamma<\gamma_0$ 且$\upsilon_2=1$; 其余情形下则由 $d_{\lambda,\ \gamma}:=\lambda^{H(\gamma)}$ 给出。其中，$H(\gamma)$ 是(1、γ) 作为权重，对右侧(3.2)中分数布朗运动的赫斯特指数作加权线性组合所得，即:

$$H(\gamma)=\begin{cases}H_1^+ +\gamma H_2^+, & \gamma\ge\gamma_0,\\ H_1^- +\gamma H_2^-, & \gamma\le\gamma_0.\end{cases} \tag{3.3}$$

• 该随机场 X 在 γ_0处呈现尺度转变。

证明。简单界 $\big|\sum_{\boldsymbol{t}\in K_{[\lambda x_1,\lambda^\gamma x_2]}}a(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{u})\big|\le C\lambda^{(1+\gamma)/2}\big(\sum_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^2}a(\boldsymbol{t})^2\big)^{1/2}\le C\lambda^{(1+\gamma)/2}$ 将判据 (2.4) 化为 $H(\gamma)>(1+\gamma)/2$。由 (3.3) 可得此结论，因为 $H_i^{\pm}\ge 1/2,\ i=1,2$。因此，对于 (1.2)，只需证明 (2.3) 中协方差函数的收敛。除 $\upsilon_1=1$ 或 $\upsilon_2=1$这两种情形外，该关系实质上已在[24] 中得到证明。以下证明仅讨论这两种情形。注意，由不同表达式给出的 (3.2)、(3.3) 中的定义，在 $\upsilon_i=1,\ i=1,2$ 和/或 $\gamma=\gamma_0$ 时是一致的。由对称性，只需讨论情形 $\upsilon_1=1$，并分别考察 $\gamma>\gamma_0$，$\gamma<\gamma_0$，和 $\gamma=\gamma_0$ 时 (2.3) 中的极限。不失一般性，设 $\lambda>1$。

情形 $\gamma>\gamma_0=1/\upsilon_2\,(\upsilon_1=1)$。在这种情形下，$V_+=\kappa_+B_{1,\ 1/2}$ 且 $d_{\lambda,\ \gamma}^2=\lambda^{2+\gamma}\log\lambda$，根据 (3.2)。在 (2.2) 的积分中，作变量代换：$u_1\to u_1/\lambda^{\gamma\upsilon_2}$，$u_2\to u_2/\lambda^\gamma$ 并注意到

$$\begin{aligned}&\lambda^{-1}D_{[\lambda x_1]}(u_1/\lambda^{\gamma\upsilon_2})\to x_1,\qquad \lambda^{-\gamma}D_{[\lambda^\gamma x_2]}(u_2/\lambda^\gamma)\to\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2u_2}}{-\mathrm{i}u_2},\\ &f_\lambda(\boldsymbol{u}):=\lambda^{-\gamma\upsilon_2}f(u_1/\lambda^{\gamma\upsilon_2},u_2/\lambda^\gamma)\to L(\boldsymbol{u})/\rho(\boldsymbol{u})=:f_0(\boldsymbol{u})\end{aligned} \tag{3.4}$$

对任意 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}_0^2$，当 $\lambda\to\infty$ 时逐点成立，这是由于 $\gamma>\gamma_0$。此外，(2.9) 意味着

$$|f_\lambda(\boldsymbol{u})-f_0(\boldsymbol{u})|\le\frac{1}{|u_1|+|u_2|^{\upsilon_2}}\delta\big(\frac{u_1}{\lambda^{\gamma\upsilon_2}},\frac{u_2}{\lambda^\gamma}\big), \tag{3.5}$$

其中 $\delta(\boldsymbol{u})$ 是一个有界函数，并且当 $\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{0}$ 时趋于 0。因此，$R_{\lambda,\ \gamma}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^2R_{\lambda}^{(i)},_{\gamma}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$，其中 $R_{\lambda}^{(i)},_{\gamma}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\underline{:=}\ {}^1\log\lambda\int_{\lambda^{\gamma\upsilon_2}\Pi\times\lambda^\gamma\Pi}G_\lambda^{(i)}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u},\ i=1,2$，其中

$$\begin{aligned}G_\lambda^{(1)}(\boldsymbol{u}) &:= \frac{D_{[\lambda x_1]}(u_1/\lambda^{\gamma\upsilon_2})\overline{D_{[\lambda y_1]}(u_1/\lambda^{\gamma\upsilon_2})}}{\lambda^2}\cdot\frac{D_{[\lambda^\gamma x_2]}(u_2/\lambda^\gamma)\overline{D_{[\lambda^\gamma y_2]}(u_2/\lambda^\gamma)}}{\lambda^{2\gamma}}\cdot f_0(\boldsymbol{u})\\ &\to x_1y_1\cdot\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2u_2})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_2u_2})}{|u_2|^2}\cdot f_0(\boldsymbol{u})=:G(\boldsymbol{u}),\end{aligned} \tag{3.6}$$

并且 $G_\lambda^{(2)}(\boldsymbol{u})$ 的定义类似，只需将 $f_0(\boldsymbol{u})$ 替换为 $f_\lambda(\boldsymbol{u}) - f_0(\boldsymbol{u})$。

我们来证明 $R_\lambda^{(2)},_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to 0$。由初等界 $|D_n(x)| \le Cn/(1+n|x|)$ $x \in \Pi$ 和 (3.5)，可得

$$\begin{aligned} |R_{\lambda,\gamma}^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| &\le \frac{C}{\log\lambda}\int_{\lambda^{\gamma\upsilon_2}\Pi\times\lambda^\gamma\Pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{(1+u_2^2)(|u_1|+|u_2|^{\upsilon_2})}\delta\big(\frac{u_1}{\lambda^{\gamma\upsilon_2}},\frac{u_2}{\lambda^\gamma}\big) \\ &= \frac{C}{\log\lambda}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}u_2}{1+u_2^2}\int_{|u_1|\le\lambda^{\gamma\upsilon_2}/|u_2|^{\upsilon_2}}\frac{\mathrm{d}u_1}{|u_1|+1}\delta\big(\frac{u_1|u_2|^{\upsilon_2}}{\lambda^{\gamma\upsilon_2}},\frac{u_2}{\lambda^\gamma}\big). \end{aligned} \tag{3.7}$$

将 (3.7) 右侧的积分区域分成三部分，分别对应于 $\{\frac{|u_2|}{\lambda^\gamma} \ge \epsilon\}$, $\{\frac{|u_2|}{\lambda^\gamma} < \epsilon, |u_1| (\frac{|u_2|}{\lambda^\gamma})^{\upsilon_2} < \epsilon\}$, 以及 $\{\frac{|u_2|}{\lambda^\gamma} < \epsilon, |u_1| (\frac{|u_2|}{\lambda^\gamma})^{\upsilon_2} \ge \epsilon\}$, T_1, T_2 和 T_3, 记为 $|R_\lambda^{(2)},_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le C(\log\lambda)^{-1}\sum_{i=1}^3\int_{T_i}\ldots =: (\log\lambda)^{-1}\sum_{i=1}^3 R_{i\circ}$ 在 T_1 上，(3.7) 中的内层积分有界于 $C\log(1/\epsilon)^{\upsilon_2}$，由此得到 $R_1 \to 0$ ($\lambda\to\infty, \forall\epsilon>0$)。接下来，由性质 $\delta(\boldsymbol{u}) \to 0$，对于任意 $\delta' > 0$，存在 $\epsilon > 0$ 使得 $R_2 \le \delta'(\log\lambda)^{-1}\int_{\mathbb{R}}(1+u_2^2)^{-1}\log(\lambda^\gamma/|u_2|)^{\upsilon_2}\mathrm{d}u_2 \le C\delta'$ 随 $\epsilon\to 0$ 趋于零，且该收敛关于 $\lambda \ge 2$ 一致。最后，对于任意固定的 $\epsilon > 0$，$R_3 \le C(\log\lambda)^{-1}\int_{\mathbb{R}}(1+u_2^2)^{-1}\big\{\log(\lambda^\gamma/|u_2|)^{\upsilon_2} - \log\epsilon(\lambda^\gamma/|u_2|)^{\upsilon_2}\big\} = O(1/\log\lambda) \to 0$ 当 $\lambda\to\infty$ 时成立，从而完成了 $R_\lambda^{(2)},_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to 0$ 的证明。

接下来，我们证明以下极限

$$\lim_{\lambda\to\infty} R_{\lambda,\gamma}^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \lim_{\lambda\to\infty}\tilde{R}_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \kappa_+^2\mathrm{E}[B_{1,1/2}(\boldsymbol{x})B_{1,1/2}(\boldsymbol{y})] = \kappa_+^2 x_1y_1(x_2\wedge y_2) \tag{3.8}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &:= \frac{1}{\log\lambda}\int_{\lambda^{\gamma\upsilon_2}\Pi\times\lambda^\gamma\Pi} G(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u} \\ &= x_1y_1\int_{|u_2|\le\lambda^{\gamma\upsilon_2}\pi}\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2u_2})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_2u_2})}{|u_2|^2}\mathrm{d}u_2 \times \frac{1}{\log\lambda}\int_{|u_1|\le\lambda^{\gamma\upsilon_2}\pi} f_0(\boldsymbol{u})\mathrm{d}u_1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

考虑 (3.8) 中的第二个极限。根据定义，$f_0(\boldsymbol{u}) = L\big(\frac{u_1}{|u_1|+|u_2|^{\upsilon_2}}, \underbrace{\frac{u_2}{(|u_1|+|u_2|^{\upsilon_2})^{1/\upsilon_2}}}_{u_2\ne 0}\big)(|u_1|+|u_2|^{\upsilon_2})^{-1}$ 当 $|u_1|\to\infty$ 时，其行为类似于 $L(1,0)|u_1|^{-1}$；事实上，对于任意 $u_2 \ne 0$

$$|u_2|^{\upsilon_2}(|u_1|+1)f_0(u_1|u_2|^{\upsilon_2},u_2) = L\Big(\frac{u_1+1}{|u_1|+1},\frac{\mathrm{sgn}(u_2)}{|u_1|+1}\Big) \to L(1,0), \qquad |u_1|\to\infty \tag{3.10}$$

根据定理中关于 $L(\cdot)$ 的条件。(3.9) 右侧的最后一项可改写为两项之和：第一项为 $L_{(1,0)\log\lambda}\int_{|u_1|\le(\lambda^\gamma/|u_2|)^{\upsilon_2}\pi}(|u_1|+1)^{-1}\mathrm{d}u_1 \to 2L(1,0)\gamma\upsilon_2$ ($\forall u_2\ne 0$)，第二项为

$$\frac{1}{\log\lambda}\int_{|u_1|\le(\lambda^\gamma/|u_2|)^{\upsilon_2}\pi}\frac{\mathrm{d}u_1}{|u_1|+1}\Big(L\big(\frac{u_1+1}{|u_1|+1},\frac{\mathrm{sgn}(u_2)}{|u_1|+1}\big) - L(1,0)\Big) \to 0 \qquad (\forall\, u_2\ne 0) \tag{3.11}$$

鉴于 (3.10) 以及 $L(\cdot)$ 的有界性。第二个极限 (3.8) 的证明可由 (3.9)–(3.11)、利用界 $(\log\lambda)^{-1}\big|\int_{|u_1|\le\lambda^{\gamma\upsilon_2\pi}} g_+(\boldsymbol{u})\mathrm{d}u_1\big| \le C(\log\lambda)^{-1}\int_{|u_1|\le\lambda^{\gamma\upsilon_2\pi}}(|u_1|+|u_2|^{\upsilon_2})^{-1}\mathrm{d}u_1 \le C(1+|\log(|u_2|)|)$ 的控制收敛定理，以及 $(1+|\log(|u_2|)|)(1+u_2^2)^{-1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的可积性得到。

仍需证明 $R_\lambda^{(1)},_\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \tilde{R}_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to 0$。不失一般性，取 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{1}$，并令 $R_\lambda^{(1)},_\gamma(\boldsymbol{1},\boldsymbol{1}) - R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{1},\boldsymbol{1}) =: R'_{\lambda,\gamma\circ}$ 于是

$$\begin{aligned} |R'_{\lambda,\gamma}| &\le \frac{1}{\log\lambda}\int_{\lambda^{\gamma\upsilon_2}\Pi\times\lambda^\gamma\Pi}\Big|\frac{|D_{[\lambda]}(u_1/\lambda^{\gamma\upsilon_2})D_{[\lambda^\gamma]}(u_2/\lambda^\gamma)|^2}{\lambda^{2+2\gamma}} - \frac{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_2}|^2}{u_2^2}\Big|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{|u_1|+|u_2|^{\upsilon_2}} \\ &= \frac{1}{\log\lambda}\int_{\lambda^{\gamma\upsilon_2}\Pi\times\lambda^\gamma\Pi}\frac{\delta_\lambda(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{(1+u_2^2)(|u_1|+|u_2|^{\upsilon_2})} = o(1) \end{aligned} \tag{3.12}$$

因为在最后一个积分中，$\delta_\lambda(\boldsymbol{u})\to 0$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 一致成立，参见 (4.6)；且将 (3.12) 右端的 $\delta_\lambda(\boldsymbol{u})$ 替换为 1 后，有界。至此，(3.8) 的证明完成，其中

$$\kappa_+^2 := 2L(1,0)\gamma\upsilon_2\int_{\mathbb{R}}|(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})/u|^2\mathrm{d}u \;=\; 4\pi L(1,0)\gamma\upsilon_2 \tag{3.13}$$

并在 $\gamma>\gamma_0$ 时完成了 (2.3) 的证明。

情形 $\gamma<\gamma_0=1/\upsilon_2(\upsilon_1=1)$。有三个子情形：(a) $\upsilon_2<1$，(b) $\upsilon_2>1$，以及 (c) $\upsilon_2=1$。相应地，$V_-=\kappa_-B_{1/2,}$ 在子情形 (a) 中为 $_{H_2^-}$，在子情形 (b) 中为 $V_-=\kappa_-B_{H_1^-,\,1}$，在子情形 (c) 中为 $V_-=\kappa_-B_{1/2,\,1}$。子情形 (a) 和 (b) 不涉及对数归一化，在 [24, Thm.3.1]中已基本处理。子情形 (c) 与上述情形 $\gamma>\gamma_0^X$，$\upsilon_1=1$ 对称，只需交换 $(x_1,\ \upsilon_1)$ 和 $(x_2,\ \upsilon_2)$，因为后面的讨论适用于任意 $\upsilon_2>0$，包括 $\upsilon_2=1$。

情形 $\gamma=\gamma_0=1/\upsilon_2(\upsilon_1=1)$。在此情形下，$V_0=V_{0,\ 1/\rho}$ 由 (2.12) 给出，稍作修改即可由 [24] 得出结果，从而完成定理 1 的证明。□

注1。 $\upsilon_1\neq 1$ 在 (3.2) 中的渐近常数的平方为

$$\kappa_+^2 \;=\; \begin{cases} L(1,0)\int_{\mathbb{R}^2}\prod_{j=1}^2\left|(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_j})/u_j\right|^2|u_1|^{-\upsilon_1}\mathrm{d}\boldsymbol{u}, & \upsilon_1<1,\\ \int_{\mathbb{R}^2}\left|(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_2})/u_2\right|^2L(\boldsymbol{u})\rho(\boldsymbol{u})^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{u}, & \upsilon_1>1, \end{cases} \tag{3.14}$$

（κ_-^2 对称地定义，只需将 $u_1,\ u_2,\ \upsilon_1,\ \upsilon_2$ 与 $u_2,\ u_1,\ \upsilon_2,\ \upsilon_1$ 互换）。对于 $\upsilon_1<1$，(3.14) 中的积分可显式计算为 $\kappa_+^2=L(1,\ 0)(2\pi)^2/\Gamma(2+\upsilon_1)\sin((1+\upsilon_1)\pi/2)$，见 (2.17)。

4 负相关

本节介绍满足假设 $(\mathrm{F})_{\mathrm{ND}}$ 的线性随机场在 (1.2) 中的各向异性标度极限。定义

$$H_1^+ := \frac{1}{2}(1-(\upsilon_1\wedge 1)),\qquad H_2^- := \frac{1}{2}(1-(\upsilon_2\wedge 1)),\qquad \gamma_0 := \frac{\upsilon_1\wedge 1}{\upsilon_2\wedge 1}. \tag{4.1}$$

注意 $H_1^+,H_2^-\in[0,1/2)$ 和 $H_1^+=0$ (分别地，$H_2^-=0$) 等价于 $\upsilon_1\geq 1$ (分别地，$\upsilon_2\geq 1$)。我们还设定 $H_2^+=H_1^-:=1/2$。

定理 2. 设 X *in* (1.1) 是定义在 $\mathbb{Z}^2$ *in* (1.3) 上的平稳线性随机场，其谱密度为 f 且满足假设 $(F)_{ND}$。则：

- (1.2) 中的缩放极限对任意 $\gamma>0$ 均存在，并满足带有 γ_0, $H_i^{\pm}$*in* (4.1) 的(2.1)，而非平衡极限由下式给出

$$V_+ \;:=\; \kappa_+B_{H_1^+,1/2},\qquad V_- \;:=\; \kappa_-B_{1/2,H_2^-}. \tag{4.2}$$

渐近常数 $\kappa_\pm>0$ 见 (4.9)、(4.14)、(4.19)、(4.21) 和 $(??)$ （或者可由这些表达式利用对称性确定）。

- 平衡极限为

$$V_0 \;:=\; \begin{cases} V_{0,\rho}, & H_1^+ \wedge H_2^- > 0, \\ \kappa_+ B_{H_1^+,1/2} + \kappa_- B_{1/2,H_2^-}, & H_1^+ \wedge H_2^- = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

其中 $B_{H_1^+,1/2}$ 和 $B_{1/2,H_2^-}$ 相互独立，且 $V_{0,\rho}$ 定义于 (2.12)。

- (1.2) 中的归一化为 $d_{\lambda,\gamma} := \lambda^{H(\gamma)}(\log_+ \lambda)^{1/2}$，适用于情形 $\gamma \geq \gamma_0$、$H_1^+ = 0$ 或 $\gamma \leq \gamma_0$、$H_2^- = 0$；其余情形则为 $d_{\lambda,\gamma} := \lambda^{H(\gamma)}$，其中

$$H(\gamma) \;:=\; \begin{cases} H_1^+ + (\gamma/2), & \gamma \geq \gamma_0, \\ (1/2) + \gamma H_2^-, & \gamma \leq \gamma_0. \end{cases} \tag{4.4}$$

- 该随机场 X 在 γ_0处发生尺度转变。

证明。与定理 1 的证明类似，我们验证 (2.4) 中的渐近高斯性判据，从而将证明归结为 (2.3) 中协方差函数的收敛。关系 $f(\boldsymbol{u}) = (2\pi)^2|\widehat{a}(\boldsymbol{u})|^2$ 以及关于 f 的假设意味着 $|\widehat{a}(\boldsymbol{u})| \leq C$ 有界。因此，取 $(\gamma_1,\gamma_2) := (1,\gamma)$，可得 $\sup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^2}\left|\sum_{\boldsymbol{t}\in K_{[\lambda x_1,\lambda^\gamma x_2]}} a(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s})\right| \leq \int_{\Pi^2}\prod_{i=1}^2\left|D_{[\lambda^{\gamma_i}x_i]}(u_i)\right||\widehat{a}(\boldsymbol{u})|\mathrm{d}\boldsymbol{u} \leq C\int_{\Pi^2}\prod_{i=1}^2\left|D_{[\lambda^{\gamma_i}x_i]}(u_i)\right|\mathrm{d}\boldsymbol{u} \leq C(\log\lambda)^2$，因此 (2.4) 成立，因为 (4.4) 中的 $H(\gamma)$ 满足 $H(\gamma) > 0$。

随后对 (2.3) 的证明根据 $\upsilon_i \neq 1,\ i = 1,2,$ 还是 $\upsilon_i = 1$ ($\exists i = 1,2$) 分为第一部分和第二部分。接着，每部分又分成若干情形和子情形，分别加以处理。第二部分涉及归一化中的对数因子，处理起来更为微妙。

第一部分。情形 $\upsilon_1 \vee \upsilon_2 < 1,\ \gamma_0 = \upsilon_1/\upsilon_2$。那么 $H_1^+ = (1-\upsilon_1)/2 \in (0,1/2)$ $H_2^- = (1-\upsilon_2)/2 \in (0,1/2)$。通过变量替换：$u_1 \to u_1/\lambda,\ u_2 \to u_2/\lambda^\gamma$我们将 (2.2) 改写为 $R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_{\lambda\Pi\times\lambda^\gamma\Pi} G_\lambda(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ 其中

$$\begin{aligned} G_\lambda(\boldsymbol{u}) &:= \frac{D_{[\lambda x_1]}(u_1/\lambda)\overline{D_{[\lambda y_1]}(u_1/\lambda)}}{\lambda^2}\cdot\frac{D_{[\lambda^\gamma x_2]}(u_2/\lambda^\gamma)\overline{D_{[\lambda^\gamma y_2]}(u_2/\lambda^\gamma)}}{\lambda^{2\gamma}}\cdot f_\lambda(\boldsymbol{u}), \\ f_\lambda(\boldsymbol{u}) &:= f(u_1/\lambda, u_2/\lambda^\gamma)/\lambda^{2H(\gamma)-1-\gamma}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

由 (2.9) 以及 (4.4) 中 $H(\gamma)$ 的定义，

$$\lambda^{-1}D_{[\lambda x_1]}(u_1/\lambda) \to \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1u_1}}{-\mathrm{i}u_1}, \qquad \lambda^{-\gamma}D_{[\lambda^\gamma x_2]}(u_2/\lambda^\gamma) \to \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2u_2}}{-\mathrm{i}u_2}, \tag{4.6}$$

$$f_\lambda(\boldsymbol{u}) \to g_\gamma(\boldsymbol{u}) \;:=\; \begin{cases} f_0(\boldsymbol{u}), & \gamma = \gamma_0, \\ f_0(u_1,0), & \gamma > \gamma_0, \\ f_0(0,u_2), & \gamma < \gamma_0, \end{cases}$$

对任意 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_0^2$，逐点成立，其中 $f_0(\boldsymbol{u}) := L(\boldsymbol{u})\rho(\boldsymbol{u})$，见 (2.11)。特别地，$f_0(u_1,0) = |u_1|^{-\upsilon_1}L(1,0)$,$f_0(0,u_2) = |u_2|^{-\upsilon_2}L(0,1)$ $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}_0^2$，因为 $L(1,0) = L(-1,0)$ $L(0,1) = L(0,-1)$。我们还看到

由 (2.16)、(2.12) 可知，适当选取 $\kappa_\pm$ 后，极限随机场的协方差函数可写为 $\mathrm{E}V_\gamma(\boldsymbol{x})V_\gamma(\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^2} G(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$，其中

$$G(\boldsymbol{u}) := \prod_{j=1}^{2} \big(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_j u_j}}{\mathrm{i}u_j}\big)\big(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_j u_j}}{-\mathrm{i}u_j}\big) g_\gamma(\boldsymbol{u}) \tag{4.7}$$

是 (4.6) 中相应极限函数的乘积，并且根据 (4.6)，$G_\lambda(\boldsymbol{u}) \to G(\boldsymbol{u})$ $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_0^2$。在所有三种情形 $\gamma > \gamma_0$、$\gamma < \gamma_0$ 和 $\gamma = \gamma_0$ 下，$\int_{\mathbb{R}^2} G_\lambda(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u} \to \int_{\mathbb{R}^2} G(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ 的证明现在可利用控制收敛定理 (DCT)，结合以下界得到

$$|\lambda^{-1} D_{[\lambda x]}(\tfrac{u}{\lambda})| \le Cx(1+|([\lambda x]/\lambda)u|) \le C/(1+|u|), \qquad |u| < \lambda\pi,$$

对任意固定的 $x \in \mathbb{R}$、$x \neq 0$，这意味着

$$|G_\lambda(\boldsymbol{u})| \;\le\; C\prod_{i=1}^{2}(1+u_i^2)^{-1} \times \begin{cases} \rho(\boldsymbol{u}), & \gamma = \gamma_0, \\ \rho(u_1,0), & \gamma > \gamma_0, \\ \rho(0,u_2), & \gamma < \gamma_0. \end{cases} \tag{4.8}$$

因此，(4.8) 的右端记为 $\bar{G}(\boldsymbol{u})$，是可积的：$\int_{\mathbb{R}^2} \bar{G}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u} < \infty$。(4.2) 中的渐近常数 $\kappa_\pm$ 由 $\int_{\mathbb{R}^2} |G(\boldsymbol{u})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{u} = 1/\kappa_+^2(\gamma > \gamma_0) = 1/\kappa_-^2(\gamma < \gamma_0)$ 确定，其中 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{1}$ 取 (4.7) 中的值，其形式与 (3.14) 类似；特别地，

$$\kappa_+^2 \;:=\; L(1,0)\int_{\mathbb{R}^2} |u_1|^{\upsilon_1} \prod_{j=1}^{2} |(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_j})/u_j|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{u}. \tag{4.9}$$

情形 $\upsilon_1 < 1 < \upsilon_2, \gamma_0 = \upsilon_1$。

子情形 $\gamma > \upsilon_1$。我们使用修改后的˜ ˜论证，沿用前一情形中的相同 $V_+ = \kappa_+ B_{H_1^+,1/2}$，证明 (2.3)，如下所示。将 $f(\boldsymbol{u}) = f_1(\boldsymbol{u}) + f_1(\boldsymbol{u})$ 拆分，其中 $f_1(\boldsymbol{u}) = f(u_1, 0)$ $f_1(\boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{u}) - f(u_1, 0)$，相应地，$R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = R_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \tilde{R}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$。收敛 $R_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to \kappa_+^2 \mathrm{E}B_{H_1^+,1/2}(\boldsymbol{x})B_{H_1^+,1/2}(\boldsymbol{y})$ 对于˜任意 $\gamma > 0$，如上面的情形所示即可推出。因此，只需证明 $R_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \to 0$，或者

$$J_\lambda := \int_{\Pi^2} |\tilde{f}_1(\boldsymbol{u})|\,|D_{[\lambda x_1]}(u_1) D_{[\lambda^\gamma x_2]}(u_2)|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{u} \;=\; o(\lambda^{1-\upsilon_1+\gamma}). \tag{4.10}$$

我们有 $|\tilde{f}_1(\boldsymbol{u})| \le C\sum_{k=1}^{3} |h_{1,k}(\boldsymbol{u})|$，其中 $h_{1,1}(\boldsymbol{u}) := \rho(\boldsymbol{u}) - \rho(u_1, 0) = |u_2|^{\upsilon_2}$, $h_{1,2}(\boldsymbol{u}) := \rho(u_1, 0)(L(\boldsymbol{u}) - L(u_1, 0))$，且 $h_{1,3}(\boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u})\delta(\boldsymbol{u})$，其中 $\delta(\boldsymbol{u})$ 是一个有界函数，并且当 $|\boldsymbol{u}| \to 0$ 时趋于 0。因此，$J_\lambda \le C\sum_{k=1}^{3} J_{\lambda,k}$，其中 $J_{\lambda,k}$ 的定义与 (4.10) 中相同，只是将 $|\tilde{f}_1(\boldsymbol{u})|$ 替换为 $|h_{1,k}(\boldsymbol{u})|$。这里，

$$J_{\lambda,1} \;\le\; \int_{\Pi^2} |u_2|^{\upsilon_2} \frac{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\lambda x_1]u_1}|^2}{|u_1|^2|u_2|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{u} \;\le \lambda \int_{\mathbb{R}\times\Pi} \frac{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_1 x_1}|^2}{|u_1|^2}|u_2|^{\upsilon_2-2}\mathrm{d}\boldsymbol{u} \le C\lambda = o(\lambda^{1-\upsilon_1+\gamma}) \tag{4.11}$$

因为 $\gamma > \upsilon_1$。接下来，

$$\begin{aligned} J_{\lambda,2} \;&\le\; \int_{\Pi} |u_1|^{\upsilon_1} \frac{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\lambda x_1]u_1}|^2}{|u_1|^2}\mathrm{d}u_1 \times \int_{\Pi} |L(u_1,u_2) - L(u_1,0)| \frac{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\lambda^\gamma x_2]u_2}|^2}{|u_2|^2}\mathrm{d}u_2 \\ &\le\; C\lambda^{1-\upsilon_1+\gamma} \int_{\mathbb{R}} |u_1|^{\upsilon_1} \frac{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_1 x_1}|^2}{|u_1|^2}\mathrm{d}u_1 \times \int_{\mathbb{R}} \big|L\big(\frac{u_1}{\lambda}, \frac{u_2}{\lambda^\gamma}\big) - L\big(\frac{u_1}{\lambda}, 0\big)\big| \frac{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_2 x_2}|^2}{|u_2|^2}\mathrm{d}u_2 \\ &=\; o(\lambda^{1-\upsilon_1+\gamma}) \end{aligned} \tag{4.12}$$

根据控制收敛定理，以及以下事实：$\left|L\binom{u_1}{\lambda},\ \binom{u_2}{\lambda^\gamma}-L\binom{u_1}{\lambda},\ 0)\right|$有界且对任意 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}_0^2$都趋于 0（这是由 (2.8) 中 $\tilde{L}$ 的连续性及 $\gamma>\upsilon_1>\upsilon_1/\upsilon_2$这一事实得出的）。类似的论证还可推出 $J_{\lambda,\ 3}=o(\lambda^{1-\upsilon_1+\gamma})$，从而证明 (4.10) 以及子情形 $\gamma>\upsilon_1$ 中的收敛 (1.2)。

子情形 $\gamma<\upsilon_1$。</style}我们利用 (4.14) 中的 $,_0,\ d^2_{\lambda,\gamma}=\lambda$ 和 κ_- 来证明 (2.3)。将 $f(\boldsymbol{u})=f_2(\boldsymbol{u})+$ $\tilde{}\qquad\tilde{}$ $_f_2(\boldsymbol{u})\ f_2(\boldsymbol{u})$ 分解为：$=f(\boldsymbol{u})-f(0,u_2)$，相应地，$R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=R_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+R_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$。只需证明

$$R_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to\kappa_-^2(x_1\wedge y_1)\times\frac{1}{2}(1+\mathbb{I}(x_2=y_2))\quad\text{and}\quad\tilde{R}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\to 0. \tag{4.13}$$

为证明 (4.13) 中的第一个关系，注意到

$$R_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\ =\ \frac{1}{\lambda}\int_\Pi D_{[\lambda x_1]}(u)\overline{D_{[\lambda y_1]}(u)}\mathrm{d}u\times\int_\Pi f(0,v)D_{[\lambda^\gamma x_2]}(v)\overline{D_{[\lambda^\gamma y_2]}(v)}\mathrm{d}v=:J_1\times J_2,$$

其中

$$J_1\ \to\ \int_{\mathbb{R}}\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1u})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_1u})}{|u|^2}\mathrm{d}u=(x_1\wedge y_1)\int_{\mathbb{R}}\frac{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}|^2}{|u|^2}\mathrm{d}u$$

由控制收敛定理可得，且

$$\begin{aligned}J_2\ &=\ \int_\Pi\frac{f(0,v)}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}|^2}\big(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\lambda^\gamma x_2]v}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\lambda^\gamma y_2]v}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}([\lambda^\gamma x_2]-[\lambda^\gamma y_2])v}\big)\mathrm{d}v\\ &\to\ \int_\Pi\frac{f(0,v)}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}|^2}\mathrm{d}v\times\begin{cases}2, & x_2=y_2,\\ 1, & x_2\neq y_2,\end{cases}\end{aligned}$$

由勒贝格–黎曼定理 [26, 定理1.2] 以及 $f(0,v)|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}|^{-2}$ 的可积性可得。因此，(4.13) 中的渐近常数等于

$$\kappa_-^2\ :=\ 2\int_{\mathbb{R}}|(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})/u|^2\mathrm{d}u\times\int_\Pi f(0,v)|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}|^{-2}\mathrm{d}v. \tag{4.14}$$

为证明 (4.13) 中的第二个关系，与上文子情形中的做法类似，相应地写作 $\gamma>\upsilon_1$ ($|\tilde{f}_2)\boldsymbol{u},|\le C\sum_{k=1}^3|h_2(k)\boldsymbol{u}$ 和 $|(\ \tilde{R}_2,\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{x},\le\ C\sum_{k=1}^3\tilde{R}_3(k,\boldsymbol{x})$，其中 $\boldsymbol{x},1(h_2)$：$\boldsymbol{u}(=\ \rho)\ \boldsymbol{u}(0,-\rho)\ u_2,\ =\ |u_1|^{\upsilon_1},2(\ h_2)$：$\boldsymbol{u}=(0,\rho)(\ u_2(L)\ \boldsymbol{u}$ $(0,-L))$，且 $u_2,3(h_2)$：$\boldsymbol{u}(=\rho)\boldsymbol{u}(\delta)$，其中 $\boldsymbol{u}(\ \delta)$ 是一个有界函数，当 $\boldsymbol{u}$ 时趋于 0。于是 $|\boldsymbol{u}|\to 0,3(\tilde{},R_2)\ \boldsymbol{x}($ 1)，

$$\begin{aligned}|\tilde{R}_{2,1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})|\ &\le\ C\lambda^{-1}\int_{\Pi^2}|u_1|^{\upsilon_1}\frac{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\lambda x_1]u_1}|^2|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\lambda^\gamma x_2]u_2}|^2}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_1}|^2|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_2}|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\\ &\le\ C\lambda^{\gamma-\upsilon_1}\int_{\mathbb{R}}|u_1|^{\upsilon_1-2}|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1u_1}|^2\mathrm{d}u_1\times\int_{\mathbb{R}}|u_2|^{-2}|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2u_2}|^2\mathrm{d}u_2\\ &=\ O(\lambda^{\gamma-\upsilon_1})=o(1)\end{aligned} \tag{4.15}$$

and

$$|\tilde{R}_{2,2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})|\ \le\ C\int_\Pi|u_2|^{\upsilon_2-2}\mathrm{d}u_2\int_{\mathbb{R}}\big|L(\frac{u_1}{\lambda},u_2)-L(0,u_2)\big||(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1u_1})/u_1|^2\mathrm{d}u_1,=o(1), \tag{4.16}$$

证明 (4.13)。

子情形 $\gamma = \upsilon_1$。我们证明 (2.3)，其中 $V_0 = \kappa_+ B_{H_1^+,1/2} + \kappa_- B_{1/2,0}$ 是子情形。 $\gamma > \upsilon_1$ 和 $\gamma < \upsilon_1$ 中独立极限之和。将 $f(\boldsymbol{u}) = f_1(\boldsymbol{u}) + f_2(\boldsymbol{u}) + f_{12}(\boldsymbol{u})$ $f_{12}(\boldsymbol{u})$ 拆分为：$= f(\boldsymbol{u}) - f(u_1, 0) - f(0, u_2)$，相应地，$R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = R_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \tilde{R}_{12}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$。注意 $H_1^+ + (\upsilon_1/2) = 1/2$。收敛 $R_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \kappa_+^2 \mathrm{E} B_{H_1^+,1/2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) B_{H_1^+,1/2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 和 $R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \kappa_-^2 \mathrm{E} B_{1/2,0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) B_{1/2,0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 分别已在子情形 $\gamma > \gamma_0, \upsilon_i < 1, i = 1, 2$ 和 $\gamma < \gamma_0, \upsilon_1 < 1 < \upsilon_2$ 中证明。剩下需要证明

$$\tilde{R}_{12}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \to 0. \tag{4.17}$$

写作 $f(\boldsymbol{u}) = f_0(\boldsymbol{u}) T(\boldsymbol{u})$，其中 $f_0(\boldsymbol{u}) = \rho(\boldsymbol{u}) L(\boldsymbol{u})$ 和 $T(\boldsymbol{u}) := {}^{f_{(\boldsymbol{u})}/f_0(\boldsymbol{u})}\, \boldsymbol{u} \in \Pi^2$ 是连续函数，见假设 $(\mathrm{F})_{\mathrm{ND}}$。于是，$\tilde{f}_{12}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^2 \tilde{f}_{12,i}(\boldsymbol{u})$，其中

$$\tilde{f}_{12,1}(\boldsymbol{u}) := |u_1|^{\upsilon_1} (\widetilde{T}(\boldsymbol{u}) - \widetilde{T}(u_1, 0)), \qquad \tilde{f}_{12,2}(\boldsymbol{u}) := |u_2|^{\upsilon_2} (\widetilde{T}(\boldsymbol{u}) - \widetilde{T}(0, u_2)), \quad \widetilde{T}(\boldsymbol{u}) := L(\boldsymbol{u}) T(\boldsymbol{u}).$$

相应地，$\tilde{R}_{12}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^2 \tilde{R}_{12,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$。于是

$$\tilde{R}_{12,1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \;\le\; \int_{\mathbb{R}^2} |u_1|^{\upsilon_1} \delta_{\lambda,1}(\boldsymbol{u}) \prod_{j=1}^2 |(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}u_j x_j})/u_j|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{u}, \tag{4.18}$$

其中 $\delta_{\lambda,1}(\boldsymbol{u}) := \big|\widetilde{T}\big(\frac{u_1}{\lambda}, \frac{u_2}{\lambda^{\upsilon_1}}\big) - \widetilde{T}\big(\frac{u_1}{\lambda}, 0\big)\big| \mathbb{I}(\boldsymbol{u} \in \lambda\Pi \times \lambda^{\upsilon_1}\Pi)$ 关于 $\lambda > 1$ 一致有界，并且将右端积分中的 $\delta_{\lambda,1}(\boldsymbol{u})$ 替换为 1 后，由于 $\upsilon_1 < 1$，该积分收敛。另请注意，$\delta_{\lambda,1}(\boldsymbol{u}) \to 0$，当 $T(\boldsymbol{u})$ $\boldsymbol{u} \in \Pi^2$ 连续且由于 $\upsilon_2 > 1$ 而有 $L\big(\frac{u_1}{\lambda}, \frac{u_2}{\lambda^{\upsilon_1}}\big) - L\big(\frac{u_1}{\lambda}, 0\big) \to 0$ 时。这证明了用 $\tilde{R}_{12,1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ 替代 $\tilde{R}_{12}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ 时的 (4.17)。$\tilde{R}_{12,2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \to 0$ 的证明与 (4.16) 类似，只需考虑到上述关于 $L(\boldsymbol{u})$ 和 $T(\boldsymbol{u})$ 的性质，将其中的 $\big|L\big(\frac{u_1}{\lambda}, u_2\big) - L(0, u_2)\big|$ 替换为 $\delta_{\lambda,2}(\boldsymbol{u}) := \big|\widetilde{T}\big(\frac{u_1}{\lambda}, u_2\big) - \widetilde{T}(0, u_2)\big| \to 0$。 —

—

情形 $\upsilon_i > 1, i = 1, 2, \gamma_0 = 1$. 由对称性，只需考虑情形 $\gamma \le 1$。按照前一种情形，将 $f(\boldsymbol{u}) = f_1(\boldsymbol{u}) + f_2(\boldsymbol{u}) + f_{12}(\boldsymbol{u})$ $R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = R_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + R_{12}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 分开。于是，$R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \kappa_-^2 \mathrm{E} B_{1/2,0}(\boldsymbol{x}) B_{1/2,0}(\boldsymbol{y})$，如 (4.13) 所示；而当 $\gamma < 1$ 时，$R_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ $\le C\lambda^{\gamma-1} \int_\Pi |u_1|^{\upsilon_1 - 2} \mathrm{d}u_1 \times \int_{\mathbb{R}} |(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}u_2 x_2})/u_2|^2 \mathrm{d}u_2 = O(\lambda^{\gamma-1}) = o(1)$ 可忽略；对于 $\gamma = 1$，类似于 (4.13)，我们有 $R_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \kappa_+^2 \mathrm{E} B_{0,1/2}(\boldsymbol{x}) B_{0,1/2}(\boldsymbol{y})$，其中

$$\kappa_+^2 := 2 \int_{\mathbb{R}} |(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}u})/u|^2 \mathrm{d}u \times \int_\Pi f(v, 0) |1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}v}|^{-2} \mathrm{d}v. \tag{4.19}$$

$R_{12}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \to 0$ 的证明与（4.16）中的证明相同。这就完成了第一部分的证明。

第二部分。情形 $\upsilon_1 = 1$，$\upsilon_2 < 1$，$\gamma_0 = 1/\upsilon_2$。首先令 $\gamma > 1/\upsilon_2$，$d_{\lambda,\gamma}^2 = \lambda^\gamma \log_+ \lambda$。按照上述情形，将 $f(\boldsymbol{u}) = f_1(\boldsymbol{u}) + \tilde{f}_1(\boldsymbol{u})$ 和 $R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = R_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + R_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 分拆。然后

$$\begin{aligned} R_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;\sim\; & \frac{1}{\log \lambda} \int_{\lambda\Pi} \frac{(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1 u_1})(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_1 u_1})}{|u_1|^2} \lambda f(u_1/\lambda, 0) \mathrm{d}u_1 \\ & \times \int_{\lambda^\gamma \Pi} \frac{(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2 u_2})(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_2 u_2})}{|u_2|^2} \mathrm{d}u_2 \;=:\; J_1 \times J_2, \end{aligned} \tag{4.20}$$

其中 $J_2 \to \kappa^2(x_2 \wedge y_2)$ $\kappa^2 := \int_{\mathbb{R}} |(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}u})/u|^2 \mathrm{d}u$，我们需要证明 J_1 的极限。我们有 $\lambda f(u_1/\lambda,\ 0) = \lambda L(1,\ 0)|u_1/\lambda|(1 + \delta(u_1/\lambda)) = L(1,\ 0)|u_1|(1 + \delta(u_1/\lambda))$，其中 $\delta(u)$ 是一个有界函数，当 $u \to 0$ 时趋于 0。

因此， $J_1 = J_1' + J_1''$，其中

$$J_1' := \frac{2L(1,0)}{\log\lambda}\mathrm{Re}\int_0^{\lambda\pi}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1u})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_1u})u^{-1}\mathrm{d}u \ \to\ 2L(1,0)\begin{cases}2, & x_1=y_1,\\ 1, & x_1\neq y_1\end{cases}$$

因为对任意 $x\neq 0$，$\lim_{\lambda\to\infty}\int_1^\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}u^{-1}\mathrm{d}u$ 均存在，并且 $|J_1''|\le C(\log\lambda)^{-1}$，$\int_0^{\lambda\pi}(u\wedge 1)^2u^{-1}\delta(u/\lambda)\mathrm{d}u\to 0$ 可通过将最后一个积分拆分到集合 $u/\lambda<\epsilon$ 和 $\epsilon\le u/\lambda\le\pi$ 上，按 (3.7) 的方法得到。因此， $R_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to\kappa_+^2\mathrm{E}B_{0,1/2}(\boldsymbol{x})B_{0,1/2}(\boldsymbol{y})$，其中

$$\kappa_+^2 = 4L(1,0)\kappa^2 = 4L(1,0)\int_{\mathbb{R}}|(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})/u|^2\mathrm{d}u. \tag{4.21}$$

~ ~ ~为证明 $R_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ 可以忽略，使用 (4.10) 后 $f_1(\boldsymbol{u})$ 的分解，使得 $|R_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})|\le C\sum_{k=1}^3\tilde{R}_{1,k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$，其中 $\tilde{R}_{1,k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=J_{\lambda,k}/\log\lambda$ 和 $J_{\lambda,k}$ 与上述证明中的定义相同。于是，$\tilde{R}_{1,1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=o(1)$，如 (4.11) 所示；而 $\tilde{R}_{1,2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\le C\int_{\mathbb{R}}(1+u_2^2)^{-1}\delta_\lambda(u_2)\mathrm{d}u_2$，参见 (4.12)，其中

$$\delta_\lambda(u_2) := \frac{1}{\log\lambda}\int_{|u_1|\le\lambda\pi}(1+|u_1|)^{-1}\big|L\big(\frac{u_1}{\lambda},\frac{u_2}{\lambda^\gamma}\big)-L\big(\frac{u_1}{\lambda},0\big)\big|\mathrm{d}u_1$$

~有界且当 $\lambda\to\infty$时趋于 0，对于任意固定的 $u_2\neq 0$，由 L 的连续性可知，这归因于 $\gamma\upsilon_2>1$。最后，$\tilde{R}_{1,3}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\le C(\log\lambda)^{-1}\int_{\lambda\Pi}(1+|u_1|)^{-1}\mathrm{d}u_1\int_{\mathbb{R}}\delta(u_1/\lambda,\ u_2/\lambda^\gamma)(1+u_2^2)^{-1}\mathrm{d}u_2+o(1)=o(1)$ 可通过将最后一个积分拆分到 $|u_1|<\epsilon\lambda$ 和 $|u_1|>\epsilon\lambda$上得到，并利用对任意小的 $\epsilon>0$，$\int_{\epsilon\lambda}^{\pi\lambda}u_1^{-1}\mathrm{d}u_1=\log(1/\epsilon)<\infty$。

接下来，令 $\gamma<1/\upsilon_2$，$d_{\lambda,\gamma}^2=\lambda^{2H(\gamma)}$，$2H(\gamma)=1+\gamma(1-\upsilon_2)$。注意，$\lambda^{\gamma\upsilon_2}f(u_1/\lambda,u_2/\lambda^\gamma)\to f_0(0,u_2)=L(0,1)|u_2|^{\upsilon_2}$。于是，$R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to\kappa_-^2\mathrm{E}B_{1/2,H_2^-}(\boldsymbol{x})B_{1/2,H_2^-}(\boldsymbol{y})$ 的推导与情形 $\upsilon_1\wedge\upsilon_2<1,\gamma<\gamma_0$相同，其中$\kappa_-^2=L(0,1)\int_{\mathbb{R}^2}|u_2|^{\upsilon_2}\prod_{j=1}^2|(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_j})/u_j|^2\mathrm{d}\boldsymbol{u}$，参见（4.9）。

令 $\gamma=1/\upsilon_2$，则 $d_{\lambda,\gamma}^2=\lambda^{2H(\gamma)}\log\lambda$，$2H(\gamma)=\frac{1}{\upsilon_2}$。我们有

$$R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ \sim\ \frac{1}{\log\lambda}\int_{\lambda\Pi\times\lambda^{1/\upsilon_2}\Pi}\prod_{i=1}^2\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_iu_i})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_iu_i})}{|u_i|^2}\lambda f(u_1/\lambda,u_2/\lambda^{1/\upsilon_2})\mathrm{d}\boldsymbol{u} \tag{4.22}$$

其中 $\lambda f(u_1/\lambda,u_2/\lambda^{1/\upsilon_2})=f_0(\boldsymbol{u})(1+\delta(u_1/\lambda,u_2/\lambda^{1/\upsilon_2}))=\sum_{k=1}^3 f_k(\boldsymbol{u})$，$f_1(\boldsymbol{u}):=L(\boldsymbol{u})|u_1|$，$f_2(\boldsymbol{u}):=L(\boldsymbol{u})|u_2|^{\upsilon_2}$，$f_3(\boldsymbol{u}):=f_0(\boldsymbol{u})\delta(u_1/\lambda,u_2/\lambda^{1/\upsilon_2})$，且 $\lim_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{0}}\delta(\boldsymbol{u})=0$。相应地，$R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sim\sum_{k=1}^3 R_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$；我们将证明 $R_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是主项，而 $R_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to 0, k=2,3$。事实上，

$$R_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ =\ \frac{1}{\log\lambda}\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi}\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1u})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_1u})}{|u|}h_\lambda(u)\mathrm{d}u,$$

其中 $h_\lambda(u):=\int_{|w|\le\lambda^{1/\upsilon_2}\pi}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2w})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_2w})|w|^{-2}L(u,\ w)\mathrm{d}w\to h(u)$（$\lambda\to\infty$），且其中

$$\begin{aligned} h(u) \ &:=\ \int_{\mathbb{R}}\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2w})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_2w})}{|w|^2}L(u,w)\mathrm{d}w \\ &\to\ L(1,0)\int_{\mathbb{R}}\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2w})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_2w})}{|w|^2}\mathrm{d}w = L(1,0)\kappa^2(x_2\wedge y_2)\end{aligned} \tag{4.23}$$

当 $|u|\to\infty$时，参见 (2.16)、(2.17) 可得最后一个等式。因此，收敛

$$R_1'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ :=\ \frac{1}{\log\lambda}\int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi}\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1u})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_1u})}{|u|}h(u)\mathrm{d}u \ \to\ \kappa_+^2\mathrm{E}B_{0,1/2}(\boldsymbol{x})B_{0,1/2}(\boldsymbol{y})$$

由 (4.20) 的推导可知，κ_+^2 取 (4.21) 中的值时结论成立，而 $R_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ 的相同极限只需稍作改动。接下来，$|R_2(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})| \le C(\log\ \lambda)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}(1+u_1^2)^{-1}(1+u_2^2)^{-1}|u_2|^{\upsilon_2}\mathrm{d}\boldsymbol{u} = O(1/\log\ \lambda)$。最后，$|R_3(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})| \le C(\log\ \lambda)^{-1}\big(\int_0^{\lambda\pi}(1+u)^{-1}\int_{\mathbb{R}}(1+w^2)^{-1}\delta(u/\lambda,\ w/\lambda^{1/\upsilon_2})\mathrm{d}w + O(1)\big) \to 0$ 与情形 $\gamma > 1/\upsilon_2$ 的推导相同。

情形 $\upsilon_1 = 1,\ \upsilon_2 > 1,\ \gamma_0 = 1$。令 $\gamma \ge 1,\ d_{\lambda,\ \gamma}^2 = \lambda^\gamma \log_+\lambda$。那么

$$R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ \sim\ \frac{1}{\log\lambda}\int_{\lambda\Pi\times\lambda^\gamma\Pi}\prod_{i=1}^{2}\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_iu_i})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_iu_i})}{|u_i|^2}\lambda f(u_1/\lambda, u_2/\lambda^\gamma)\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

其中 $\lambda f(u_1/\lambda,\ u_2/\lambda^\gamma) \to f_0(u_1,\ 0) = L(1,\ 0)|u|$ 由 $\gamma\upsilon_2 > 1$ 得出。于是 $R_{\lambda,\ \gamma}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) \to \kappa_+^2\mathrm{E}B_{0,\ 1/2}(\boldsymbol{x})B_{0,\ 1/2}(\boldsymbol{y})$，如 (4.20) 中所示，其中 κ_+^2 见 (4.21)。接下来，令 $\gamma < 1$。那么 $d_{\lambda,\ \gamma} = \lambda^{1/2}$ 并且

$$\begin{aligned} R_{\lambda,\gamma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ &\sim\ \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda}\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1u})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_1u})}{|u|^2}\mathrm{d}u \times \int_\Pi \frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda^\gamma x_2w})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^\gamma y_2w})}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}|^2}f(u/\lambda,w)\mathrm{d}w \\ &\sim\ \kappa_-^2\,\mathrm{E}B_{1/2,0}(\boldsymbol{x})B_{1/2,0}(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

如 (4.13) 中所示，其中 κ_-^2 见 (4.14)。

情形 $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \gamma_0 = 1$。根据对称性，(2.3) 中关于 $\gamma \ne 1$ 的收敛导出极限 $V_+ = \kappa_+B_{0,\ 1/2}$ 和 $V_- = \kappa_-B_{1/2,\ 0}$，其证明与 $\upsilon_1 = 1,\ \upsilon_2 > 1$ 的情形相同，其中 κ_+^2 见 (4.21)，且 $\kappa_-^2 = 4L(0,\ 1)\kappa^2$。下面证明，对于 $\gamma = 1$，(2.3) 趋于后述极限之和，从而得到

$$V_0 \ =\ \kappa_+B_{0,1/2} + \kappa_-B_{1/2,0}, \quad \text{with} \quad d_{\lambda,\gamma}^2 = \lambda\log_+\lambda,$$

其中 $B_{0,\ 1/2}$ 和 $B_{1/2,\ 0}$ 相互独立。按照（4.22）中的方法，我们看到 $f_\lambda(\boldsymbol{u}) := \lambda f(u_1/\lambda,\ u_2/\lambda) \to f_0(\boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{u})(|u_1| + |u_2|)$ 以及 $R_{\lambda,\ \gamma}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ 的渐近行为分别相当于两项之和

$$R_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ :=\ \frac{1}{\log\lambda}\int_{(\lambda\Pi)^2}L(u_1,u_2)|u_k|\prod_{j=1}^{2}\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_ju_j})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y_ju_j})}{|u_j|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{u}, \quad k = 1,2$$

它们分别趋于 $\kappa_+^2\mathrm{E}B_{0,1/2}(\boldsymbol{x})B_{0,1/2}(\boldsymbol{y})$ 和 $\kappa_-^2\mathrm{E}B_{1/2,0}(\boldsymbol{x})B_{1/2,0}(\boldsymbol{y})$。我们还需要验证，与 $f_\lambda(\boldsymbol{u}) - f_0(\boldsymbol{u})$ 相对应的项 $R_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 可以忽略，即 $|R_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le C(\log\ \lambda)^{-1}\int_{(\lambda\Pi)^2}(|u_1|+|u_2|)\delta(u_1/\lambda, u_2/\lambda)\ \prod_{j=1}^2(1+|u_j|^2)^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{u} \to 0$。这些细节与（4.22）中的类似，故略去。至此，第一部分和定理 2 的证明也告结束。□

注2。沿用时间序列中的术语 [13]，，渐近常数 $\kappa_\pm^2$ 可称为“长程方差”。值得注意的是，只有在“边缘效应”下对应于 $H_i^\pm = 0$ 或负依赖谱的 (4.14)、(4.19) 中，$\kappa_\pm^2$ 才取决于原点之外的谱密度，参见备注 3。显然，这些关于 $\kappa_\pm^2$ 的表达式对连续的 f 有意义（连续性可以放宽），但对任意可积或有界的 f则不然。另一方面，f 的连续性是协方差函数可求和的结果，因此在协方差短程依赖和负依赖下都会出现。

5 长程负依赖与双曲依赖

R回顾假设 (F)$_{\mathrm{LRND},2}$ 下谱密度的渐近形式：

$$f(\boldsymbol{u}) \ \sim\ f_0(\boldsymbol{u}) = \frac{L(\boldsymbol{u})}{|u_1|^{\upsilon_1} + |u_2|^{\upsilon_2}} \qquad |\boldsymbol{u}| \to 0, \tag{5.1}$$

其中 $L(\boldsymbol{u}) = L(-\boldsymbol{u})$ $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2_+$ 是连续的广义不变函数，满足

$$L(\boldsymbol{u}) \sim \ell\Big(\frac{|u_2|}{\rho(\boldsymbol{u})^{1/\upsilon_2}}\Big)^{\mu} \qquad (u_2 \to 0) \tag{5.2}$$

对于某个 $\mu \in (0,\ 1)$ $\ell > 0$。定义

$$\begin{aligned} H_1^+ &:= \frac{1}{2}\Big(1 + \big((\upsilon_1 + \frac{\mu\upsilon_1}{\upsilon_2}) \wedge 1\big)\Big), \quad H_2^+ := \frac{1}{2}\Big(1 - \big(\mu \wedge (\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} - \upsilon_2)\big)\Big), \\ H_1^- &:= \frac{1}{2}\big(1 + \upsilon_1 - \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2 \vee 1}\big), \qquad\qquad H_2^- := \frac{1}{2}\big(1 + (\upsilon_2 \wedge 1)\big) \end{aligned} \tag{5.3}$$

注意，(5.3) 中的 H_i^-，$i = 1,\ 2$ 与定理 1 的 (3.1) 中的相同，而当且仅当 $\mu = 0$ 时，(5.3) 中 H_i^+，$i = 1,\ 2$ 的表达式与 (3.1) 中的一致。另请注意，$H_1^{\pm}$，$H_2^- \in [1/2, 1]$，而 $H_2^+ = \frac{1}{2}(1 + \upsilon_2 - \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}) \in [1/2, 1]$ 对于 $\upsilon_1 \geq 1$；对于 $\upsilon_1 \leq 1$，我们有 $H_2^+ \in (0,\ 1/2]$。最后，(5.5) 中的 $H(\gamma)$ 是 γ，υ_i，$i = 1,\ 2$，μ，的连续函数，其值 $H(\gamma_0) = \frac{1}{2}(1 + \upsilon_1 + \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2})$ 在 $\gamma = \gamma_0$ 处为 $= \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$，且与定理 1 中的相同，与 μ 无关。

下面的定理排除了参数 $\mu, \upsilon_i, i = 1,2$ 的一些特定情形，这些情形可能需要额外的对数归一化因子。此外，当假设 $(F)_{LRND,1}$ 和 $(F)_{LRND,2}$ 同时成立时，缩放极限的问题仍未解决。

定理 3. 设 X *in* (1.1) 是定义在 $\mathbb{Z}^2$ *in* (1.3) 上的平稳线性随机场，其谱密度为 f，且满足假设 $(F)_{LRND,2}$。此外，设 $\upsilon_1 \neq 1, \upsilon_1 + \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} \neq 1$。则：

- (1.2) 中的缩放极限对任意 $\gamma > 0$ 均存在，且满足 (2.1)，其中 $\gamma_0 = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$，非平衡极限由下式给出

$$V_+ := \kappa_+ B_{H_1^+, H_2^+}, \qquad V_- := \kappa_- B_{H_1^-, H_2^-}, \tag{5.4}$$

其中 $H_i^{\pm}, i = 1,2$ 与 (5.3) 中相同。渐近常数 κ_+ 定义于 (5.6)、(5.7)，而 κ_- 与定理 *1* 中相同。

- 平衡极限 $V_0 := V_{0,\ 1/\rho}$ 由 (2.12) 给出。
- (1.2) 中的归一化由 $d_{\lambda,\ \gamma} := \lambda^{H(\gamma)}$ 给出，其中

$$H(\gamma) := \begin{cases} H_1^+ + \gamma H_2^+, & \gamma \geq \gamma_0, \\ H_1^- + \gamma H_2^-, & \gamma \leq \gamma_0. \end{cases} \tag{5.5}$$

- 随机场 X 在 $\gamma_0 = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ 处发生尺度转变。

证明。由于 (5.5) 满足 $H(\gamma) > 1/2\ (\forall\, \gamma > 0)$，因此林德伯格判据 (2.4) 如定理 1 中所述成立。对于 $\gamma \leq \gamma_0$，定理 3 的结果及其证明与定理 1 的完全一致。关于 (2.3) 的后续证明仅限于 $\gamma > \gamma_0$，并分为以下三种情形。

情形 $\upsilon_1 + \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} < 1$。根据 (5.1)-(5.2)，对于 $\gamma > \upsilon_1/\upsilon_2$，我们有

$$f(u_1/\lambda, u_2/\lambda^{\gamma}) \sim \frac{\lambda^{\upsilon_1}}{|u_1|^{\upsilon_1}} \times \ell\Big|\frac{\frac{u_2}{\lambda^{\gamma}}}{|\frac{u_1}{\lambda}|^{\upsilon_1/\upsilon_2}}\Big|^{\mu} = \ell\lambda^{2H(\gamma)-1-\gamma} \prod_{j=1}^{2} |u_j|^{1-2H_j^+}$$

在 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}_0^2$ 中逐点成立。于是，(2.3) 中的极限在 $V_\gamma=V_+=\kappa_+B_{H_1^+,H_2^+}$ 下的推导与定理 1 类似，

$$\kappa_+^2 \;=\; \ell\prod_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}}|(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})/u|^2|u|^{1-2H_j^+}\,\mathrm{d}u. \tag{5.6}$$

情形 $\upsilon_1<1<\upsilon_1+\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$. Then $(2H_1^+,\ 2H_2^+)=(1+\upsilon_1+\frac{\mu\upsilon_1}{\upsilon_2},\ 1-\mu)$ if $\mu<\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}-\upsilon_2$, $=(2,\ 1+\upsilon_2-\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1})$ if $\mu>\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}-\upsilon_2$. $\mu<\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}-\upsilon_2$ 的极限 $V_+=\kappa_+B_{H_1^+,\,H_2^+}$ 的证明与上述情形 $\upsilon_1+\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}<1$ 相同，故略去。接下来，令 $\mu>\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}-\upsilon_2$. 。由于 $\gamma>\upsilon_1/\upsilon_2$，我们看到

$$\lambda^{-\gamma\upsilon_2}f\big(\frac{u_1}{\lambda^{\gamma\upsilon_2/\upsilon_1}},\frac{u_2}{\lambda^{\gamma}}\big)\to f_0(\boldsymbol{u}),\quad \lambda^{-1}D_{[\lambda x]}\big(\frac{u_1}{\lambda^{\gamma\upsilon_2/\upsilon_1}}\big)\to x,\quad \lambda^{-\gamma}D_{[\lambda^\gamma x]}\big(\frac{u_2}{\lambda^{\gamma}}\big)\to\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu_2}}{-\mathrm{i}u_2}$$

对任意 $u_i\neq0,\ i=1,\ 2,\ x>0$逐点成立。我们还有 $\int_{\mathbb{R}}g_+(u_1,\ u_2)\mathrm{d}u_1=|u_2|^{1-2H_2^+}\int_{\mathbb{R}}f_0(u,\ 1)\mathrm{d}u$，其中最后一个积分由于 (5.2) 和 $\mu>\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}-\upsilon_2$ 而收敛。然后，$V_+=\kappa_+B_{1,\ H_2^+}$ 可由 [24, Thm.3.1] 推出。μ 两种情形下的渐近常数 κ_+ 由下式给出

$$\kappa_+^2 \;=\; \begin{cases}\ell\prod_{j=1}^2\int_{\mathbb{R}}|(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})/u|^2|u|^{1-2H_j^+}\,\mathrm{d}u, & \mu<\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}-\upsilon_2,\\ \int_{\mathbb{R}}\big|(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}v})/v\big|^2|v|^{1-2H_2^+}\,\mathrm{d}v\times\int_{\mathbb{R}}g_+(u,1)\mathrm{d}u, & \mu>\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}-\upsilon_2.\end{cases} \tag{5.7}$$

情形 $\upsilon_1>1$。在此情形下，结果不依赖于 μ，并且与定理 1 中的结果完全一致，包括证明。定理 3 的证明至此结束。 □

接下来，我们将引言中提到的双曲依赖形式化。设

$$f(\boldsymbol{u})=f_{0,\mathrm{hyp}}(\boldsymbol{u})(1+o(1)),\quad |\boldsymbol{u}|\to0,\quad \text{where}\quad f_{0,\mathrm{hyp}}(\boldsymbol{u}):=L(\boldsymbol{u})\prod_{i=1}^{2}|u_i|^{-\upsilon_i},\qquad \boldsymbol{u}\in\Pi^2, \tag{5.8}$$

$|\upsilon_i|<1,\ i=1,\ 2$ 和

$$L(\boldsymbol{u}):=\tilde{L}\Big(\frac{u_1}{(|u_1|^{|\upsilon_1|}+|u_2|^{|\upsilon_2|})^{1/|\upsilon_1|}},\frac{u_2}{(|u_1|^{|\upsilon_1|}+|u_2|^{|\upsilon_2|})^{1/|\upsilon_2|}}\Big) \tag{5.9}$$

是对应于广义齐次函数 $\rho(\boldsymbol{u})=|u_1|^{|\upsilon_1|}+|u_2|^{|\upsilon_2|},\ \boldsymbol{u}=(u_1,\ u_2)\in\mathbb{R}_0^2$ 的广义不变函数。设

$$H_i:=\frac{1}{2}(1+\upsilon_i),\qquad i=1,2. \tag{5.10}$$

(5.8) 中的函数类分别包含分数积分谱密度 $\prod_{i=1}^2|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_i}|^{-\upsilon_i}$，它们在空间统计中发挥重要作用 [5, 14, 17]。如果 $L(\boldsymbol{u})$ 与 0 和 ∞ 相隔一定距离，那么 (5.8) 中的谱密度会根据 $\upsilon_i,\ i=1,\ 2$ 的符号而具有（谱）长程依赖、负依赖或长程非依赖性质；但当 $\upsilon_i\neq0$ 时，它还会在坐标轴 $u_i=0$ 上发散或趋于零，并且属于不同于定理1–3中所讨论的另一类。引入一个高斯随机场

$$V_{0,\mathrm{hyp}}(\boldsymbol{x}) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^2}\prod_{j=1}^{2}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_jx_j}}{\mathrm{i}u_j}\sqrt{f_{0,\mathrm{hyp}}(\boldsymbol{u})}Z(\mathrm{d}\boldsymbol{u}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_+^2, \tag{5.11}$$

其中 $Z(\mathrm{d}\boldsymbol{u})$ 是与 (2.12) 中相同的白噪声。当 $L(\boldsymbol{u})=\ell>0$ 是一个常数函数时，随机场 $V_{0,\ \mathrm{hyp}}$ 是分形布朗表面的一个倍数：$V_{0,\ \mathrm{hyp}}=\kappa\ell B_{H_1,\ H_2}$ 其中 $H_i,\ i=1,\ 2$ 由 (5.10) 给出，且 $\kappa>0$ 如 (2.17) 所示。

定理 4。 设其为定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上、具有 (1.3) 形式的平稳线性随机场，谱密度为 (5.8)-(5.9)，其中 $\upsilon_i \in \tilde{(}-1$, 1) $i = 1$,2 且 $L(\boldsymbol{x})$ 是严格正连续函数。那么：

- *(1.2)* 中的缩放极限对任意 $\gamma > 0$ 均存在，并且满足

$$V_\gamma = \begin{cases} \kappa_\gamma B_{H_1,H_2}, & \gamma \neq \frac{|\upsilon_1|}{|\upsilon_2|}, \\ V_{0,\mathrm{hyp}}, & \gamma = \frac{|\upsilon_1|}{|\upsilon_2|}, \end{cases} \tag{5.12}$$

其中 H_i、$i = 1$、*2* 与 *(5.10)* 中相同，并且

$$\kappa_\gamma^2 := \prod_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}} |(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}u})/u|^2 |u|^{1-2H_j} \mathrm{d}u \times \begin{cases} L(1,0), & \gamma > \frac{|\upsilon_1|}{|\upsilon_2|}, \\ L(0,1), & \gamma < \frac{|\upsilon_1|}{|\upsilon_2|}. \end{cases} \tag{5.13}$$

- (1.2) 中的归一化由 d_λ 给出，$\gamma := \lambda^H(\gamma) H(\gamma) := H_1 + \gamma H_2$.

- 随机场 X 不会出现尺度转变。

我们省略定理 4 的证明，因为它与 [24] 及前面的证明相似。对于 $\mathrm{sign}(\upsilon_1) = \mathrm{sign}(\upsilon_2)$，高斯性判据 (2.4) 与定理 1 和定理 2 中的情形相同；对于 $\upsilon_1 \upsilon_2 < 0$，由 (5.8) 可得 $|\widehat{a}(\boldsymbol{u})| \leq C \prod_{i=1}^{2} |u_i|^{-\upsilon_i/2}$，因此 (2.4) 同理成立。在 $\gamma = \frac{|\upsilon_1|}{|\upsilon_2|}$ 处不存在尺度转变，这一点由 (5.12)–(5.13) 以及以下事实显而易见：根据 L 的正性假设，$L(1,0) > 0$，$L(0,1) > 0$ （若 $L(1,0)$ 和 / 或 $L(0,1)$ 为零，则最后一个结论可能不成立）。

本文最后，我们就本工作的可能拓展提出两点看法。

备注 3。 更一般的标度方案与“边缘效应”。 在更抽象的框架中，随机场通常以测试函数为指标，并据此定义标度运算；参见 [8, 9, 11]。相应地，可以研究积分的各向异性标度极限

$$S_{\lambda,\gamma}(\phi) := \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\lambda^{-\Gamma} \boldsymbol{t}) X(\lceil \boldsymbol{t} \rceil) \mathrm{d}\boldsymbol{t} \tag{5.14}$$

其中，(1.3) 中的 X 扩展为 $\mathbb{R}^2$；$\lceil \boldsymbol{t} \rceil := (\lceil t_1 \rceil, \lceil t_2 \rceil)$ $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$，而重新标度后的函数为 $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，$\lambda^{-\Gamma} \boldsymbol{t} := (\lambda^{-1} t_1, \lambda^{-\gamma} t_2)$ $\Gamma := \mathrm{diag}(1, \gamma)$，其中给定 $\gamma > 0$，且每个 ϕ 均取自某个（测试）函数类 Φ。(1.1) 中的和对应于 (5.14)，其中示性函数为 $\phi(\boldsymbol{t}) = \mathbb{I}(\boldsymbol{t} \in]\mathbf{0}, \boldsymbol{x}])$。对于 (5.14)，缩放极限 d_λ^{-1} ,$\gamma(S_\lambda$,$\gamma(\phi)$ –ES_λ,$\gamma(\phi))$ d $\longrightarrow V_\gamma(\phi)$ 是一个以 $\phi \in \Phi$ 为指标的随机场。受 (5.14) 启发，针对不同随机场类的各向同性（$\gamma = 1$）标度极限已在 $\mathbb{R}^d$ 上得到研究，参见 [9, 3, 15] 及其他论文。将定理 1–4 推广到 (5.14) 中积分泛函的缩放极限，考虑适当的测试函数类 Φ （其中包含一般有界集 $A \subset \mathbb{R}^2$ 的示性函数 $\phi(\boldsymbol{t}) = \mathbb{I}(\boldsymbol{t} \in A)$），是一个有趣的问题。特别值得关注的是负依赖随机场 X 的情形；依据 [16, 28], ，预计会出现“边缘效应”，从而产生“存在于” A 的边界或 ϕ 的不连续集上的缩放极限 V_γ。

注4。不协调的缩放与依赖轴。对于式 (1.3) 中的线性长程依赖随机场 X X，将 X 的依赖轴定义为平面上 $a(\boldsymbol{t})$ 衰减速率最慢的方向。在谱

术语中，我们可以将依赖轴定义为当 $|\boldsymbol{x}| \to 0$ 时谱密度 $f(\boldsymbol{x})$ 增长速率最快的方向。在假设 $\mathbf{(F)}_{\mathrm{LRD}}$ 下，具有此类依赖轴的 $\upsilon_1 \neq \upsilon_2$ 与某一坐标轴重合。式 (1.2) 中的标度涉及边平行于坐标轴的矩形。沿用 [20] 中的术语，我们可以说，式 (1.2) 和定理 1 中的标度与 X 的依赖轴相协调。 [20] 指出，式 (1.3) 中线性长程依赖随机场的不协调的缩放可能会显著改变式 (1.2) 中的缩放极限以及标度转变点 γ_0。我们预计，本文中的谱方法或可对各种依赖假设下的不协调缩放极限进行全面处理。

致谢

作者感谢 Vytaut˙e Pilipauskait˙e 提供的宝贵意见，并感谢 Remigijus Lapinskas 协助绘制图 1 中的图表。

参考文献

[1] Ayache, A., Leger, S. 和 Pointer, M.（2002）分数布朗片。*Potential Anal.* **17**，41–53。[2] Bierm´e, H., Meerschaert, M.M. 和 Scheffler, H.P.（2007）算子标度稳定随机场。*Stoch. Process.Appl.* **117**，312-332。[3] Bierm´e, H., Estrade, A. 和 Kaj, I.（2010）自相似随机场与重标度随机球模型。*J. Theoret.Probab.* **23**，1110–1141。[4] Bierm´e, H., Durieu, O. 和 Wang, Y.（2017）算子标度高斯随机场的不变性原理。*Ann.Appl. Probab.***27**，1190–1234。[5] Boissy, Y., Bhattacharyya, B.B., Li, X. 和 Richardson, G.D.（2005）分数自回归空间过程的参数估计。*Ann. Statist.* **33**，2533–2567。[6] Damarackas, J. 和 Paulauskas, V.（2017）无限方差随机场的谱协方差与极限定理。*J. Multiv. Anal.* **153**，156-175。[7] Damarackas, J. 和 Paulauskas, V.（2021）关于随机场的 Lamperti 型极限定理与尺度转变。*J. Math. Anal. Appl.***497 (1)**:124852。[8] Dobrushin, R.L.（1979）高斯及其从属自相似随机广义场。*Ann. Probab.* **7**，1–28。[9] Dobrushin, R.L.（1980）自模型广义随机场及其重整化群。载于：R.L. Dobrushin 和 Ya.G. Sinai（编），多分量随机系统，第153–198页。Dekker，纽约。[10] Fyodorov, Y.V., Khoruzhenko, B.A. 和 Simm, N.J.（2016）赫斯特指数为 $H = 0$的分数布朗运动与高斯酉系综。*Ann. Probab.* **44**，2980–3031。[11] Gel'fand, I.M. 和 Vilenkin, N.Ya.（1964）《广义函数》第4卷：调和分析的应用。Academic Press。

[12] Genton, M.G., Perrin, O. 和 Taqqu, M.S.（2007）随机场的自相似性与 Lamperti 变换。Stoch. Models 23, 397–411。[13] Giraitis, L., Koul, H.L. 和 Surgailis, D.《长记忆过程的大样本推断》。帝国理工学院出版社，伦敦，2012。[14] Guo, H., Lim, C. 和 Meerschaert, M.（2009）各向异性随机场的局部 Whittle 估计量。J. Multiv. Anal. 100, 993–1028。[15] Kaj, I., Leskel¨a, L., Norros, I. 和 Schmidt, V.（2007）长程依赖随机场的缩放极限。Ann. Probab. 35, 528–550。[16] Lahiri, S.N. 和 Robinson, P.M.（2016）长程依赖空间线性过程的中心极限定理。Bernoulli 22, 345–375。[17] Leonenko, N.N. 和 Taufer, E.（2013）空间自回归过程的解聚。空间统计 3, 1–20。[18] Pilipauskait˙e, V. 和 Surgailis, D.（2016）随机粒子模型的各向异性标度及其在网络流量中的应用。应用概率杂志 53, 857–879。[19] Pilipauskait˙e, V. 和 Surgailis, D.（2017）长程依赖非线性随机场的尺度转变。随机过程及其应用 127, 2751–2779。[20] Pilipauskait˙e, V. 和 Surgailis, D.（2021）具有一般依赖轴的 $\mathbb{Z}^2$ 上线性随机场的缩放极限。载于：Vares, M.E., Fernandez, R., Fontes, L.R. 和 Newman, C.M.（编）《非平衡态 3：庆祝 Vladas Sidoravicius》。概率学进展，第683–710页。Birkh¨auser，巴塞尔。[21] Pilipauskait˙e, V. 和 Surgailis, D.（2022）L´evy 驱动分数随机场的局部标度极限。Bernoulli 28, 2833-2861。[22] Pipiras, V. 和 Taqqu, M.S.（2017）《长程依赖与自相似性》。剑桥大学出版社，剑[23] 桥。˙Puplinskait[24] e, D. 和 Surgailis, D.（2016）自回归随机场的聚合与各向异性长程依赖。Bernoulli 22, 2401–2441。˙Puplinskait[25] e, D. 和 Surgailis, D.（2015）长程依赖高斯随机场的尺度转变。Stoch. Process. Appl. 125, 2256–2271。[25] Samorodnitsky, G.（2016）《随机过程与长程依赖》。施普林格，纽约。[26] Stein, E.M 和 Weiss, G.（1971）《欧几里得空间上的傅里叶分析导论》。普林斯顿：普林斯顿大学出版社。[27] Surgailis, D.（2019） $\mathbb{Z}^3$上长程依赖线性随机场的各向异性标度极限。J. Math. Anal. Appl. 472, 328–351。[28] Surgailis, D.（2020） $\mathbb{Z}^2$上负相关线性随机场的标度转变与边缘效应。Stochas- tic Process. Appl. 130, 7518–7546。