国际十进分类号
517.5

**A.C. Сердюк** （乌克兰国家科学院数学研究所，基辅）**T.A. Степанюк** （乌克兰国家科学院数学研究所，基辅）**A.S. Serdyuk** （乌克兰国家科学院数学研究所，基辅）**T.A. Stepaniuk** （乌克兰国家科学院数学研究所，基辅）

arXiv:2301.02017v1 [math.CA] 5 Jan 2023

**高光滑周期函数卷积集合上的傅里叶和一致逼近**

**高光滑周期函数卷积集合上的傅里叶和一致逼近**

在由 $L_1$ 中函数 $\varphi$ 的 $(\psi,\beta)$ 积分所定义的 $2\pi$ 周期函数 $f$ 集合上，建立了 Lebesgue 型不等式，其中傅里叶和的偏差一致范数可通过函数 $\varphi$ 的三角多项式平均最佳逼近来表示。证明了当序列 $\psi(k)$ 比任意幂函数更快地趋于零时，所得估计在渐近意义下不可改进。

在若干重要情形下，我们为函数 $\varphi$ 的傅里叶和一致逼近的精确上确界建立了渐近等式；这些函数属于空间 $L_1$ 的单位球，其 $(\psi,\beta)$ 积分类由它们构成。

对于 $L_1$ 中函数 $\varphi$ 的 $(\psi,\beta)$ 积分所定义的 $2\pi$ 周期函数 $f$ 集合，我们建立了勒贝格型不等式，其中傅里叶和偏差的一致范数通过函数 $\varphi$ 的三角多项式最佳逼近来表示。我们证明，当序列 $\psi(k)$ 比任意幂函数都更快地趋于零时，所得估计是最佳的。

在一些重要情形下，我们建立了以下函数类上傅里叶和一致逼近的精确上界的渐近等式：这些函数是属于空间 $L_1$ 单位球的 $\psi$、$\beta$–积分函数 $\varphi$。

# 1 引言

设 $L_1$ 是由 $2\pi$–周期且在 $[0,2\pi$ 上可积的函数 $f$ 构成的空间，其范数由公式 $\|f\|_1=\int_{2\pi}|f(t)|dt$ 给出； $L_\infty$ 是由可测且本质有界的 $2\pi$–周期函数 $f$ 构成的空间，其范数为 $\|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}_t|f(t)|$； $C$ 是由连续的 $2\pi$–周期函数构成的空间，其中范数定义为 $\|f\|_C=\max_t|f(t)|$。

设 $\psi(k)$ 是任意固定的非负实数序列，且 $\beta$ 是固定的实数。记 $C_\beta^\psi L_1$ 为这样的 $2\pi$ 周期函数的集合：对所有 $x\in\mathbb{R}$，它们均可表示为卷积

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt,\ a_0\in\mathbb{R},\ \varphi\in L_1,\ \varphi\perp 1 \tag{1}$$

其生成核 $\Psi_\beta$ 具有如下形式

$$\Psi_\beta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\ \psi(k)\geq 0,\ \beta\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty. \tag{3}$$

若函数 $f$ 和 $\varphi$ 满足等式 (1)，则称该关系中的函数 $f$ 为函数 $f$ 的 $(\psi,\beta)$ 阶导数，记作 $f_\beta^\psi$。另一方面，等式 (1) 中的函数 $f$ 称为函数 $\varphi$ 的 $(\psi,\beta)$ 阶积分，记作 $\mathcal{J}_\beta^\psi\varphi$。$(\psi,\beta)$ 阶导数（$(\psi,\beta)$ 阶积分）的概念由 O.I. 斯捷潘涅茨引入 [24], [25], [26]。

将满足 $f_\beta^\psi\in B_1$ 的函数子集 $f$ 从 $C_\beta^\psi L_1$ 记为 $B_1$，其中 $B_1$ 是空间$L_1$中的单位球，也就是说

$$B_1:=\{\varphi:\ ||\varphi||_1\leq 1\},$$

。显然，条件 (3) 保证了形式为 (2) 的生成核 $\Psi_\beta(t)$ 的连续性，从而也保证了嵌入 $C_\beta^\psi L_1\subset C$ ($C_{\beta,1}^\psi\subset C$) 成立。

当 $\psi(k)=e^{-\alpha k^r}$, $\alpha>0$, $r>0$ 时，形式为 (2) 的核 $\Psi_\beta(t)$ 是广义泊松核，也就是说 $\Psi_\beta(t)=P_{\alpha,r,\beta}(t)$，其中

$$P_{\alpha,r,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\ \alpha>0,\ r>0,\ \beta\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

在此，集合 $C_\beta^\psi L_1$ 和 $C_{\beta,1}^\psi$ 分别记作 $C_{\beta}^{\alpha,r}L_1$ 和 $C_{\beta,1}^{\alpha,r}$，并称为广义Poisson积分集合；相应的 $(\psi,\beta)$–导数 $f_\beta^\psi$ 和 $(\psi,\beta)$–积分 $\mathcal{J}_\beta^\psi\varphi$ 分别记作 $f^{\alpha,r}_{\beta}$ 和 $\mathcal{J}^{\alpha,r}_{\beta}\varphi$。

所有阶数不高于 $n-1$ 的三角多项式 $t_{n-1}$ 所构成的空间记作 $\mathcal{T}_{2n-1}$。设 $E_n(f)_{L_1}$ 是用三角多项式 $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$ 在平均意义下得到的最佳逼近，即

$$E_n(f)_{L_1}=\inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|f-t_{n-1}\|_1.$$

用 $\rho_n(f;\,x)$ 表示函数 $f$ 的偏差，其中 $L_1$ 是其第 $n-1$ 阶傅里叶级数部分和 $S_{n-1}(f;\,\cdot)$

$$\rho_n(f;x):=f(x)-S_{n-1}(f;x). \tag{5}$$

$\|\rho_n(f;\,\cdot)\|_C$ 的范数可通过勒贝格不等式，用最佳一致逼近 $E_n(f)_C=\inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|f-t_{n-1}\|_C$ 从上方估计

$$\|\rho_n(f;\cdot)\|_C\le(1+L_{n-1})E_n(f)_C,\ n\in\mathbb{N},\ f\in C, \tag{6}$$

其中，$L_{n-1}$ 是傅里叶级数的勒贝格常数

$$L_{n-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_{n-1}(t)|dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(2n-1)t|}{\sin t}dt,$$

$$D_{n-1}(t):=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos kt=\frac{\sin(n-\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

同时，正如费耶所证明的，对于勒贝格常数 $L_n$，成立渐近等式 [3],

$$L_n=\frac{4}{\pi^2}\ln n+\mathcal{O}(1),\quad n\to\infty, \tag{7}$$

其中，$\mathcal{O}(1)$ 是关于 $n$ 一致有界的量。

关于差值 $L_n-\frac{4}{\pi^2}\ln(n+a)$、$a>0$ 在 $n\in\mathbb{N}$ 时的更精确估计，可参见文献 [1], [2], [4], [10], [23], [5] 等。

考虑到 (7)，不等式 (6) 可写成

$$\|\rho_n(f;\cdot)\|_C\le\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+\mathcal{O}(1)\right)E_n(f)_C,\quad f\in C. \tag{8}$$

尽管具有一般性，不等式 (8) 在整个空间 $C$ 上仍是阶数精确的。此外，它在渐近意义下无法改进，也就是说，公式 (8) 中的常数 $\frac{4}{\pi^2}$ 不能减小。

同时，对于函数 $f$，使用来自函数集合 $C^{\psi}_{\beta}L_1$ 或 $C^{\psi}_{\beta,1}$ 的函数应用不等式 (6) 和 (8) 可能效果不佳。更有甚者，存在序列 $\psi$，使得对于 $f\in C^{\psi}_{\beta}L_1$，上述不等式甚至在阶的意义上也不精确。为此，我们令 $\psi(k)=e^{-\alpha k}$，并考察由这些序列生成的

类 $C^{\psi}_{\beta,1} = C^{\alpha,1}_{\beta}$。如 [12] 中所示，对于所有 $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$，当 $n \to \infty$ 时，渐近等式成立

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,1}_{\beta,1})_C = \sup_{f \in C^{\alpha,1}_{\beta,1}} \|\rho_n(f;\cdot)\|_C = e^{-\alpha n}\left(\frac{1}{\pi(1-e^{-\alpha})} + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2}\right), \tag{9}$$

其中 $\mathcal{O}(1)$ — 关于 $\alpha, \beta, n$ 一致有界的量。

此外（例如，参见 [27, 第 48] 页），对于最佳逼近 $E_n(C^{\alpha,1}_{\beta})_C$，按阶估计是精确的

$$K^{(1)}e^{-\alpha n} \le E_n(C^{\alpha,1}_{\beta,1})_C \le K^{(2)}e^{-\alpha n}, \tag{10}$$

其中 $K^{(1)}$ і $K^{(2)}$ — 是某些正的常数。

那么对于 $f \in C^{\alpha,1}_{\beta}$，由 (9) 可得不等式

$$\|\rho_n(f;\cdot)\|_C \le e^{-\alpha n}\left(\frac{1}{\pi(1-e^{-\alpha})} + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\frac{e^{-\alpha}}{n(1-e^{-\alpha})^2}\right), \tag{11}$$

而采用经典的勒贝格不等式及估计 (8)，则只能得到较粗略的按阶估计

$$\|\rho_n(f;\cdot)\|_C \le e^{-\alpha n}\left(\frac{4K^{(2)}}{\pi^2}\ln n + \mathcal{O}(1)\right).$$

在文献 [28] O.I. Степанець 中，O.I. Степанець 考察了趋于零且比任何几何级数都慢的序列 $\psi(k)$，并为集合 $(\psi,\beta)$–可微函数 $C^{\psi}_{\beta}C \subset C^{\psi}_{\beta}L_1$建立了勒贝格不等式的类似形式（$C^{\psi}_{\beta}C$— 是 $2\pi$–周期函数 $f(x)$ 的集合，这些函数对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均可表示为 (1) 的形式，其中 $\varphi \in C$）；在这些不等式中，偏差范数 $\|\rho_n(f;\cdot)\|_C$可通过最佳逼近 $E_n(f^{\psi}_{\beta})_C$表示。所得的 [28]不等式不仅在所有集合 $C^{\psi}_{\beta}C$上渐近精确，而且在 $C^{\psi}_{\beta}C$中的某些重要子集上也渐近精确，特别是在类 $C^{\psi}_{\beta}C^0 = \left\{f \in C^{\psi}_{\beta}C\colon \|f^{\psi}_{\beta}\|_C \le 1\right\}$上。此后，关于在集合 $(\psi,\beta)$–可微函数上建立勒贝格型渐近精确不等式的研究，在文献 [29], [8], [9], [14],[30], [21], [22]中得以继续。

本文将给出集合 $C^{\psi}_{\beta}L_1$ 上的 Lebesgue 型不等式，其中范数$\|\rho_n(f;\,x)\|_C$通过 $E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}$ 表示，并证明在以下情况下这些不等式在渐近意义下是不可改进的:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k)} = 0. \tag{12}$$

此外，在条件 (12) 下，本文还求得了卷积类上傅里叶级数和的科尔莫戈罗夫–尼科利斯基问题的解$C^{\psi}_{\beta,1}$，该问题旨在求出以下量的渐近等式

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,1}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C. \tag{13}$$

关于求解卷积类上傅里叶级数和的科尔莫戈罗夫–尼科利斯基问题，相关问题已在文献 [6], [11], [33], [35], [36], [24], [26], [12], [13], [20], [34], [15], [16] 等中得到研究。

## 2 主要结果

下面的结论成立。

**定理 2.1.** 设 $\sum k\psi(k) < \infty$, $\psi(k) \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. 则对于任意函数 $f \in C_\beta^\psi L_1$，不等式成立

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}. \tag{14}$$

此外，对于任意函数 $f \in C_\beta^\psi L_1$，都可以找到函数 $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f; n, x)$，属于集合 $C_\beta^\psi L_1$，使得 $E_n(\mathcal{F}_\beta^\psi)_{L_1} = E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}$ и，并且等式成立

$$\|\mathcal{F}(\cdot) - S_{n-1}(\mathcal{F};\cdot)\|_C = \left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) + \frac{\xi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)\right)E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}. \tag{15}$$

在（15）中，量 $\xi = \xi(f;\, n;\, \psi;\, \beta)$ 满足 $-2 \leq \xi \leq 0$。

定理 2.1 的证明。设 $f \in C_\beta^\psi L_1$。那么根据 (1)，在每一点 $x \in \mathbb{R}$ 处都有积分表示

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t)\Psi_{\beta,n}(x-t)dt, \tag{16}$$

де

$$\Psi_{\beta,n}(t) := \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),\ \beta \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

函数 $\Psi_{\beta,\,n}(t)$ 与任意不高于 $n-1$ 阶的三角多项式 $t_{n-1}$ 正交。因此，对于任意多项式 $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$，可得

$$\rho_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_n(t)\Psi_{\beta,n}(x-t)dt, \tag{18}$$

де

$$\delta_n(\cdot) = \delta_n(\psi, \beta, t_{n-1};\cdot) := f_\beta^\psi(\cdot) - t_{n-1}(\cdot). \tag{19}$$

在公式（18）中，选取作为 $t_{n-1}$ 的是函数$f_\beta^\psi$ 在空间 $L_1$ 中的最佳逼近多项式 $t_{n-1}^*$，即满足

$$\|f_\beta^\psi - t_{n-1}^*\|_1 = E_n(f_\beta^\psi)_{L_1},$$

那么，利用不等式

$$\left\| \int_{-\pi}^{\pi} K(t-u)\varphi(u)du \right\|_C \le \|K\|_{p'}\|\varphi\|_p, \tag{20}$$

$$\varphi \in L_p, \quad K \in L_{p'}, \quad 1 \le p \le \infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

（例如，参见 [7, 第 43] 页），得到

$$\|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \le \left\| \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_\beta^\psi(t)-t_{n-1}^*(t))\Psi_{\beta,n}(\cdot-t)dt \right\|_C \le \frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}\|_C E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}. \tag{21}$$

我们将求出范数 $\|\Psi_{\beta,n}\|_C$ 的双边估计。下面证明，对于所有 $n \in \mathbb{N}$ і 和 $\beta \in \mathbb{R}$，估计成立

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n) \le \|\Psi_{\beta,n}\|_C \le \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k). \tag{22}$$

(22) 中 $\|\Psi_{\beta,n}\|_C$ 的上界可直接由 (17) 得出。

为求出 $\|\Psi_{\beta,n}\|_C$ 的下界，将由公式 (17) 定义的函数 $\Psi_{\beta,n}(t)$ 表示为

$$\Psi_{\beta,n}(t) = g_{\psi,n}(t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right) + h_{\psi,n}(t)\sin\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{23}$$

де

$$g_{\psi,n}(t) := \sum_{k=0}^{\infty}\psi(k+n)\cos kt, \tag{24}$$

$$h_{\psi,n}(t) := -\sum_{k=0}^{\infty}\psi(k+n)\sin kt. \tag{25}$$

由于量 $\|\Psi_{\beta,n}\|_C$ 关于参数 $\beta$ 以 2 为周期，因此不妨设 $\beta \in [0,2]$。

记

$$t_0 := \frac{\beta\pi}{2n}, \quad \beta \in [0,2]. \tag{26}$$

由式（23）可得

$$\Psi_{\beta,n}(t_0) = g_{\psi,n}(t_0). \tag{27}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\|\Psi_{\beta,n}\|_C &\ge |\Psi_{\beta,n}(t_0)| = |g_{\psi,n}(t_0)| = |g_{\psi,n}(0)+(g_{\psi,n}(t_0)-g_{\psi,n}(0))| \\ &\ge |g_{\psi,n}(0)| - \left|(g_{\psi,n}\left(\frac{\beta\pi}{2n}\right)-g_{\psi,n}(0))\right| = \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) - \left|(g_{\psi,n}\left(\frac{\beta\pi}{2n}\right)-g_{\psi,n}(0))\right|.\end{aligned} \tag{28}$$

利用中值定理，可得

$$\left|g_{\psi,n}\left(\frac{\beta\pi}{2n}\right)-g_{\psi,n}(0)\right|\le\|g_{\psi,n}^{'}\|_C\frac{\beta\pi}{2n}\le\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n). \tag{29}$$

由 (28) 和 (29) 得到关系式 (22) 中范数 $\|\Psi_{\beta,n}\|_C$ 所需的下界估计

$$\|\Psi_{\beta,n}\|_C\ge\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n). \tag{30}$$

估计 (22) 可以写成如下公式

$$\|\Psi_{\beta,n}\|_C=\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\Theta_1\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n), \tag{31}$$

其中，对于量 $\Theta_1=\Theta_1(n,\beta,\psi)$，满足不等式

$$-1\le\Theta_1\le 0. \tag{32}$$

因此，由 (21) 和 (31) 得到定理 2.1 中的不等式 (14)。

证明定理 2.1 的第二部分。为此，我们需要对任意函数$\varphi\in L_1$ 找到函数 $\Phi(\cdot)=\Phi(\varphi,\cdot)\in L_1$，使得 $E_n(\Phi)_{L_1}=E_n(\varphi)_{L_1}$，且满足等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\Phi(t)-t_{n-1}^{*}(t)\right)\Psi_{\beta,n}(0-t)dt\right|\\&=\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\xi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)\right)E_n(\varphi)_{L_1},\end{aligned} \tag{33}$$

其中 $t_{n-1}^{*}$ 是函数 $\Phi$ 在空间 $L_1$ 中的 $n-1$ 次最佳逼近多项式。

在这种情况下，对于函数 $f\in C_\beta^\psi L_1$，存在函数 $\Phi(\cdot)=\Phi(f_\beta^\psi;\cdot)$，使得 $E_n(\Phi)_{L_1}=E_n(f_\beta^\psi)_{L_1}$，并且公式 (33) 成立，其中函数 $f_\beta^\psi$ 充当 $\varphi$。

我们来考察函数。

$$\mathcal{F}(\cdot)=\mathcal{J}_\beta^\psi(\Phi(\cdot)-\frac{a_0}{2}),$$

де

$$a_0=a_0(\Phi):=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(t)dt.$$

函数 $\mathcal{F}$ 是所求函数，因为 $\mathcal{F}\in C_\beta^\psi L_1$，并且

$$E_n(\mathcal{F}_\beta^\psi)_{L_1}=E_n(\Phi-\frac{a_0}{2})_{L_1}=E_n(\Phi)_{L_1}=E_n(f_\beta^\psi)_{L_1},$$

并且根据 (18) 和 (33)，有估计 (15)。

证明 (33)。设 $t^*$ —区间 $T = \left[\frac{\pi(1-\beta)}{2n},\ 2\pi + \frac{\pi}{(1-\beta}_{2n}\right))$ 中的一点，在该点函数$|\Psi_{-\beta,n}(t)|$取得最大值，即，

$$|\Psi_{-\beta,n}(t^*)| = \|\Psi_{-\beta,n}\|_C = \|\Psi_{\beta,n}\|_C.$$

令 $\Delta_k^n := \left[\frac{(k-1)\pi}{n} + \frac{\pi}{(1-\beta)\,2n},\ \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{(1-\beta}_{2n}\right)),\ k = 1, ..., 2n.$ 用 $k^*$ 表示满足 $t^* \in \Delta_{k^*}^n$的序号。由于函数 $\Psi_{-\beta,n}$ 绝对连续，因此对任意$\varepsilon > 0$，存在一个线段 $\ell^* = [\xi^*, \xi^* + \delta] \subset \Delta_{k^*}^n$，使得对任意 $t \in \ell^*$，不等式$|\Psi_{\beta,n}(t)| > \|\Psi_{\beta,n}\|_C - \varepsilon$成立。显然，mes $\ell^* = |\ell^*| = \delta < \frac{\pi}{n}$。

对任意 $\varphi \in L_1$ 和 $\varepsilon > 0$，考虑函数 $\Phi_\varepsilon(t)$，它在区间 $T$ 上由以下等式定义

$$\Phi_\varepsilon(t) = \begin{cases} E_n(\varphi)_{L_1} \frac{1-\varepsilon(2\pi-\delta)}{\delta} \operatorname{sign}\cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right), & t \in \ell^*, \\ E_n(\varphi)_{L_1} \varepsilon\ \operatorname{sign}\cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right), & t \in \mathrm{T} \setminus \ell^*. \end{cases} \tag{34}$$

对于函数 $\Phi_\varepsilon(t)$，当 $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in (0, \frac{1}{2\pi})$) 充分小时，有如下等式:

$$\begin{aligned} \|\Phi_\varepsilon\|_1 &= E_n(\varphi)_{L_1} \frac{1-\varepsilon(2\pi-\delta)}{\delta} \int\limits_{\ell^*} \left|\operatorname{sign}\cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| dt \\ &\quad + E_n(\varphi)_{L_1} \varepsilon \int\limits_{\mathrm{T}\setminus\ell^*} \left|\operatorname{sign}\cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| dt \\ &= E_n(\varphi)_{L_1} \left(\frac{1-\varepsilon(2\pi-\delta)}{\delta}\delta + \varepsilon(2\pi-\delta)\right) = E_n(\varphi)_{L_1}. \end{aligned} \tag{35}$$

此外，根据 (34)

$$\operatorname{sign}\Phi_\varepsilon(t) = \operatorname{sign}\cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{36}$$

由于对于任意三角多项式 $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\int\limits_0^{2\pi} t_{n-1}(t) \operatorname{sign}\cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = 0,$$

因此，考虑到 (36)，等式成立

$$\int\limits_0^{2\pi} t_{n-1}(t) \operatorname{sign}\Big(\Phi_\varepsilon(t) - 0\Big) dt = 0, \quad t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}.$$

根据定理1.4.5, [7, 第28], 页的多项式 $t_{n-1}^* \equiv 0$ 是函数 $\Phi_\varepsilon$ 在空间 $L_1$的度量下的最佳逼近多项式，即 $E_n(\Phi_\varepsilon)_{L_1} = \|\Phi_\varepsilon\|_1$，因此由（35）可得 $E_n(\Phi_\varepsilon)_{L_1} = E_n(\varphi)_{L_1}$。

此外，对于函数 $\Phi_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\Phi_\varepsilon(t)-t_{n-1}^*(t))\Psi_{\beta,n}(-t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_\varepsilon(t)\Psi_{-\beta,n}(t)dt\\
=&\frac{1-\varepsilon(2\pi-\delta)}{\pi\delta}E_n(\varphi)_{L_1}\int_{\ell^*}\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\Psi_{-\beta,n}(t)dt\\
+&\frac{\varepsilon}{\pi}E_n(\varphi)_{L_1}\int_{\mathrm{T}\setminus\ell^*}\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\Psi_{-\beta,n}(t)dt.
\end{aligned}\tag{37}$$

考虑到 $\operatorname{sign}\ \Phi_\varepsilon(t)\ =(-1)^k$, $t\in\Delta_k^{(n)}$, $k=1,...,2n$, 以及嵌入 $\ell^*\subset\Delta_{k^*}^{(n)}$, 得到

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1-\varepsilon(2\pi-\delta)}{\pi\delta}E_n(\varphi)_{L_1}\int_{\ell^*}\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\Psi_{-\beta,n}(t)dt\right|\\
=&\left|(-1)^{k^*}\frac{1-\varepsilon(2\pi-\delta)}{\pi\delta}E_n(\varphi)_{L_1}\int_{\ell^*}\Psi_{-\beta,n}(t)dt\right|\\
\geq&\frac{1-\varepsilon(2\pi-\delta)}{\pi}E_n(\varphi)_{L_1}\left(\|\Psi_{\beta,n}\|_C-\varepsilon\right)\\
>&\frac{1-2\pi\varepsilon}{\pi}E_n(\varphi)_{L_1}\left(\|\Psi_{\beta,n}\|_C-\varepsilon\right)\\
=&\frac{1}{\pi}E_n(\varphi)_{L_1}\left(\|\Psi_{\beta,n}|_C-2\pi\varepsilon\|\Psi_{\beta,n}\|_C-\varepsilon+2\pi\varepsilon^2\right)\\
>&E_n(\varphi)_{L_1}\left(\frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}\|_C-\varepsilon\Big(2\|\Psi_{\beta,n}\|_C+\frac{1}{\pi}\Big)\right).
\end{aligned}\tag{38}$$

此外，不难确认,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\varepsilon}{\pi}E_n(\varphi)_{L_1}\int_{\mathrm{T}\setminus\ell^*}\operatorname{sign}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\Psi_{-\beta,n}(t)dt\right|\\
\leq&\frac{\varepsilon}{\pi}E_n(\varphi)_{L_1}\|\Psi_{\beta,n}\|_C(2\pi-\delta)<2\varepsilon E_n(\varphi)_{L_1}\|\Psi_{\beta,n}\|_C.
\end{aligned}\tag{39}$$

由公式 (37)–(39) 可得以下估计:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}(\Phi_\varepsilon(t)-t_{n-1}^*(t))\Psi_{\beta,n}(-t)dt\right|\\
>&E_n(\varphi)_{L_1}\left(\frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}\|_C-\varepsilon\Big(4\|\Psi_{\beta,n}\|_C+\frac{1}{\pi}\Big)\right).
\end{aligned}\tag{40}$$

选取 $\varepsilon$ 足够小，使得

$$\varepsilon<\frac{\pi\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)}{n\left(1+4\pi\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k)\right)}\tag{41}$$

并且为此 $\varepsilon$ 令

$$\Phi(t)=\Phi_{\varepsilon}(t). \tag{42}$$

函数 $\Phi(t)$ 就是所求函数，因为 $E_n(\Phi)_{L_1}=E_n(\varphi)_{L_1}$，并且根据 (22)、(40) 和 (41)

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\Phi(t)-t_{n-1}^{*}(t))\Psi_{\beta,n}(-t)dt\right| \\
&\geq\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)-\varepsilon\left(4\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{1}{\pi}\right)\right)E_n(\varphi)_{L_1} \\
&\geq\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)-\frac{\pi\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)}{n\left(1+4\pi\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k)\right)}\left(4\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{1}{\pi}\right)\right)E_n(\varphi)_{L_1} \\
&\geq\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)\right)E_n(\varphi)_{L_1}. \qquad (43)
\end{aligned}$$

由公式 (43)、(21) 和 (22) 可得 (33)。定理 2.1 得证。 □

显然，定理 2.1 中的公式 (14) 可以写成与公式 (15) 相同的形式，如下:

$$\|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\|_C\leq\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\Theta_1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)\right)E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}, \tag{44}$$

其中 $\Theta_1=\Theta_1(n,\beta,\psi)$ 满足不等式 (32)。

**定理 2.2.** 设 $\sum k\psi(k)<\infty$, $\psi(k)\geq 0$, $k=1,2,...$ 且 $\beta\in\mathbb{R}$。那么对所有 $n\in\mathbb{N}$，公式成立$_{k=1}$

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^{\psi})_C=\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\Theta_2}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n), \tag{45}$$

其中，对于量 $\Theta_2=\Theta_2(n,\beta,\psi)$，满足不等式 $-1\leq\Theta_2\leq 0$。

证明。根据（13）和（16）可得

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^{\psi})_C=\frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in B_1^0}\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\Psi_{\beta,n}(x-t)dt\right\|_C, \tag{46}$$

其中 $\Psi_{\beta,\ n}(\cdot)$ 由等式（17）定义，而 $B_1^0:=\{\varphi\in L_1:\ \ ||\varphi||_1\leq 1,\ \ \varphi\perp 1\}$.

考虑到集合 $B_1^0$ 对自变量平移的不变性，由（46）可得

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^{\psi})_C=\frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in B_1^0}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\Psi_{\beta,n}(t)dt. \tag{47}$$

根据对偶关系（例如，参见 [7]），可得

$$\sup_{\varphi\in B_1^0}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_{\beta,n}(t)\varphi(t)dt=\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\Psi_{\beta,n}(t)-\lambda\|_C, \tag{48}$$

为了求得 величина $\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\Psi_{\beta,n}(t)-\lambda\|_C$的双边估计，下面的命题将很有用，它也可以独立应用。

**引理 2.3.** 设 $\psi(k)\geq 0$, $\sum k\psi(k)<\infty$. 则对所有 $\beta\in\mathbb{R}$ 和 $n\in\mathbb{N}$，对于每个$^{k=1}$ *величина*

$$I_n^{(1)}=I_n^{(1)}(\psi,\beta):=\|\Psi_{\beta,n}\|_C, \tag{49}$$

$$I_n^{(2)}=I_n^{(2)}(\psi,\beta):=\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\Psi_{\beta,n}(t)-\lambda\|_C, \tag{50}$$

$$I_n^{(3)}=I_n^{(3)}(\psi,\beta):=\frac{1}{2}\left\|\Psi_{\beta,n}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-\Psi_{\beta,n}(t)\right\|_C \tag{51}$$

满足以下公式

$$I_n^{(j)}=\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\Theta_j\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n),\quad j=1,2,3, \tag{52}$$

其中，对于任意 *величина* $\Theta_j=\Theta_j(n,\beta,\psi)\quad j=1,2,3,$ 均满足双边估计

$$-1\leq\Theta_j\leq 0,\quad j=1,2,3.$$

引理 *2.3* 的证明。 由于

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\Psi_{\beta,n}(t)-\lambda\|_C\leq\|\Psi_{\beta,n}\|_C \tag{53}$$

i

$$\frac{1}{2}\left\|\Psi_{\beta,n}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-\Psi_{\beta,n}(t)\right\|_C\leq\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\Psi_{\beta,n}(t)-\lambda\|_C, \tag{54}$$

TO

$$I_n^{(3)}\leq I_n^{(2)}\leq I_n^{(1)},$$

因此，必　　由式（22）可得各个量 $I_n^{(j)}$、 $j=1$、2、3 的上界估计　　).

还需为 $I_n^{(3)}$ 找到一个下界。根据 (23)–(25) 和 (51)

$$
\begin{aligned}
I_n^{(3)} =& \frac{1}{2}\left\|\Psi_{\beta,n}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-\Psi_{\beta,n}(t)\right\|_C \\
\geq& \frac{1}{2}\left|\Psi_{\beta,n}\left(t_0+\frac{\pi}{n}\right)-\Psi_{\beta,n}(t_0)\right| \\
=& \frac{1}{2}\Big|g_{\psi,n}\Big(t_0+\frac{\pi}{n}\Big)\cos\Big(n\Big(t_0+\frac{\pi}{n}\Big)-\frac{\beta\pi}{2}\Big)+h_{\psi,n}\Big(t_0+\frac{\pi}{n}\Big)\sin\Big(n\Big(t_0+\frac{\pi}{n}\Big)-\frac{\beta\pi}{2}\Big) \\
& -\left(g_{\psi,n}(t_0)\cos\Big(nt_0-\frac{\beta\pi}{2}\Big)+h_{\psi,n}(t_0)\sin\Big(nt_0-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\right)\Big| \\
=& \frac{1}{2}\Big|-g_{\psi,n}\Big(t_0+\frac{\pi}{n}\Big)-g_{\psi,n}(t_0)\Big| = \frac{1}{2}\Big|g_{\psi,n}\Big(\frac{\beta\pi-2\pi}{2n}\Big)+g_{\psi,n}\Big(\frac{\beta\pi}{2n}\Big)\Big| \\
=& \frac{1}{2}\left|2g_{\psi,n}(0)+\left(g_{\psi,n}\Big(\frac{(\beta-2)\pi}{2n}\Big)-g_{\psi,n}(0)\right)+\left(g_{\psi,n}\Big(\frac{\beta\pi}{2n}\Big)-g_{\psi,n}(0)\right)\right| \\
\geq& |g_{\psi,n}(0)|-\frac{1}{2}\left|g_{\psi,n}\Big(\frac{(\beta-2)\pi}{2n}\Big)-g_{\psi,n}(0)\right|-\frac{1}{2}\left|g_{\psi,n}\Big(\frac{\beta\pi}{2n}\Big)-g_{\psi,n}(0)\right|,
\end{aligned}
\tag{55}
$$

其中，与之前一样，$t_0=\frac{\beta\pi}{2n}$, $\beta\in[0,2]$。

根据中值定理

$$
\left|g_{\psi,n}\Big(\frac{(\beta-2)\pi}{2n}\Big)-g_{\psi,n}(0)\right| \leq \|g'_{\psi,n}\|_C\frac{|\beta-2|\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n). \tag{56}
$$

类似地（见（29））

$$
\left|g_{\psi,n}\Big(\frac{\beta\pi}{2n}\Big)-g_{\psi,n}(0)\right| \leq \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n). \tag{57}
$$

合并（55）—（57），得到所需的 $I_n^{(3)}$ 下界

$$
I_n^{(3)} \geq \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)-\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n). \tag{58}
$$

引理 2.3 得证。 □

由公式（47）、（48）、（50）和（52）可知,

$$
\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^{\psi})_C = \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)+\frac{\Theta_2}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n).
$$

定理 2.2 得证。 □

需要指出，如果满足极限关系 (12)，则估计式 (14)、(15) 和 (45) 在 $n\to\infty$ 下为渐近等式，即当

$$
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n) = o\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\right), \quad n\to\infty. \tag{59}
$$

条件（59）将在下文证明适用于一系列重要情形，特别是当数列 $\psi(k)$ 在 $k\to\infty$ 比任意幂次数列$\frac{1}{k^r}$, $r>1$ 更快地趋于零时。

## 3 定理 2.2 的推论：关于解析函数类和整函数类

下面给出重要函数紧集 $C^{\psi}_{\beta\,1,}$ 的示例，对于这些函数紧集，公式可以写出 $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta\ ,1})_C$ 在 $n\to\infty$ 时的渐近等式。 (45)

考虑序列 $\psi(k)$ 满足达朗贝尔条件 $\mathcal{D}_q$, $q\in[0,1)$ 的情形:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=q,\quad \psi(k)>0. \tag{60}$$

若 $\psi(k)$ 在某个 $q\in[0,1)$ 下满足条件 (60)，则记作$\psi\in\mathcal{D}_q$。先设 $q=0$。

根据文献 [32], 中的定理 5，存在序列 $\psi\in\mathcal{D}_0$，使得对于函数 $f$，无论 $\beta\in\mathbb{R}$ 取何值，包含关系 $f\in C^{\psi}_{\beta}L_1$ 均成立，这一命题等价于包含关系 $f\in\mathcal{E}$，其中 $\mathcal{E}$ 是所有可在整个复平面上解析延拓的 $2\pi$–周期实值函数的集合。因此，当 $\psi\in\mathcal{D}_0$ 时，类 $C^{\psi}_{\beta\ ,\ 1}$ 属于 $2\pi$–周期实值$\mathbb{R}$ 整函数的集合。

$_{\infty}$**推论 3.1.** 设 $\sum\ k\psi(k)<\infty$, $\psi(k)\geq 0,\ k=1,2,...,\ n\in\mathbb{N}\,i\ \beta\in\mathbb{R}$, 则关于所有参数都成立一致估计$_{k=n+1}$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C=\frac{1}{\pi}\psi(n)+\frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}k\psi(k). \tag{61}$$

此外，若 $\psi\in\mathcal{D}_0$，则估计 (61) 在 $n\to\infty$ 时是渐近等式。

证明。 利用定理 2.2 的公式 (45)，可以写成

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C&=\frac{1}{\pi}\psi(n)+\mathcal{O}(1)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k+n)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)\right)\\&=\frac{1}{\pi}\psi(n)+\frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=1}^{\infty}(k+n)\psi(k+n)\\&=\frac{1}{\pi}\psi(n)+\frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}k\psi(k).\end{aligned}$$

由此，估计 (61) 得证。下面证明，当 $\psi\in\mathcal{D}_0$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}k\psi(k)=o\left(\psi(n)\right),n\to\infty. \tag{62}$$

选取编号 $n$，使得

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}<\frac{1}{2},\quad k=n,\ n+1,... \tag{63}$$

那么，根据 (63)，我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\psi(k)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\psi(n+1)+\frac{\psi(n+1)}{n}\sum_{j=2}^{\infty}(n+j)\prod_{\ell=1}^{j-1}\frac{\psi(n+\ell+1)}{\psi(n+\ell)}$$
$$<\psi(n+1)\left(2+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{2j}{2^{j-1}}\right)<\psi(n+1)\left(2+\frac{4}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{2^{j}}\right)<10\psi(n+1). \tag{64}$$

由于，根据 $\psi\in\mathcal{D}_0$

$$\psi(n+1)=o\left(\psi(n)\right),\quad n\to\infty, \tag{65}$$

因此由 (64) 和 (65) 可得 (62)。

推论 3.1 得证。 □

注意，带有另一种形式余项的渐近等式 (61) 先前已在 [12] 和 [13]中得到。当 $\psi\in\mathcal{D}_0$ 时， [12] 和[13]中的余项估计比公式 (61) 中的更精确。

满足条件 $\mathcal{D}_0$ 的序列的典型代表是序列$\psi(k)=e^{-\alpha k^{-r}}, r>1, \alpha>0$。对于由此类序列生成的类 $C^{\psi}_{\beta,1}=C^{\alpha,r}_{\beta,1}$，可得如下命题。

**推论 3.2**。设 $r>1$、 $\alpha>0$ 和 $\beta\in\mathbb{R}$。那么，当 $n\geq\left(\frac{3}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}}-1$、 $n\in\mathbb{N}$ 时，对于所有所考虑的参数，都有一致的估计

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_C=e^{-\alpha n^r}\Big(\frac{1}{\pi}+\mathcal{O}(1)e^{-\alpha r n^{r-1}}\Big(1+\frac{1}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\Big)\Big). \tag{66}$$

证明。 由公式 (61) 可得

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_C=\frac{1}{\pi}e^{-\alpha n^r}+\frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}ke^{-\alpha k^r}. \tag{67}$$

容易验证，当编号为 $n$ 且满足 $(n+1)^r>\frac{1}{\alpha r}$ 时

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}ke^{-\alpha k^r}<\frac{1}{n}\left((n+1)e^{-\alpha(n+1)^r}+\int_{n+1}^{\infty}te^{-\alpha t^r}dt\right). \tag{68}$$

分部积分后，得到

$$\int_{n+1}^{\infty}te^{-\alpha t^r}dt=\int_{n+1}^{\infty}t^2\frac{1}{\alpha r t^r}\left(-e^{-\alpha t^r}\right)'dt\leq\frac{1}{\alpha r(n+1)^r}\int_{n+1}^{\infty}t^2\left(-e^{-\alpha t^r}\right)'dt$$
$$=\frac{1}{\alpha r(n+1)^r}\left((n+1)^2e^{-\alpha(n+1)^r}+2\int_{n+1}^{\infty}te^{-\alpha t^r}dt\right). \tag{69}$$

由最后一个不等式可得

$$\left(1-\frac{2}{\alpha r(n+1)^r}\right)\int_{n+1}^{\infty} te^{-\alpha t^r}dt \le \frac{(n+1)^2 e^{-\alpha(n+1)^r}}{\alpha r(n+1)^r}, \tag{70}$$

这等价于

$$\begin{aligned}\int_{n+1}^{\infty} te^{-\alpha t^r}dt &\le \frac{e^{-\alpha(n+1)^r}}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\frac{\alpha r(n+1)^r}{\alpha r(n+1)^r-2}\\ &= \frac{e^{-\alpha(n+1)^r}}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\left(1+\frac{2}{\alpha r(n+1)^r-2}\right).\end{aligned} \tag{71}$$

由关系式 (68) 和 (71) 可得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} ke^{-\alpha k^r} = \mathcal{O}(1)\left(e^{-\alpha(n+1)^r}+\frac{e^{-\alpha(n+1)^r}}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\left(1+\frac{2}{\alpha r(n+1)^r-2}\right)\right). \tag{72}$$

合并 (67) 和 (72)，可得对于所有满足 $(n+1)^r > \frac{3}{\alpha}$ 的编号 $n$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_C =& \frac{1}{\pi}e^{-\alpha n^r}+\mathcal{O}(1)\left(e^{-\alpha(n+1)^r}+\frac{e^{-\alpha(n+1)^r}}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\left(1+\frac{2}{\alpha r(n+1)^r-2}\right)\right)\\ =& e^{-\alpha n^r}\left(\frac{1}{\pi}+\mathcal{O}(1)\left(e^{-\alpha r n^{r-1}}+\frac{e^{-\alpha r n^{r-1}}}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\right)\right).\end{aligned}$$

推论 3.2 得证。 □

公式 (66) 的余项以略有不同的形式写出，该公式已在 [12] 和 [13] 中得到。与此同时，[12] 和 [13] 中的估计包含了比 (66) 中更精确的余项估计。

以下设 $q \in (0,1)$。根据文献 [32]，中的定理 3，存在序列 $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$，使得对于函数 $f$，包含关系 $C^{\alpha}_{,\beta}{}^{1}L_1$ 对任意 $\beta \in \mathbb{R}$ 成立，当且仅当包含关系 $f \in \mathcal{A}$ 成立，其中 $\mathcal{A}$ 是所有在实轴上取实值的 $2\pi$–周期函数的集合，这些函数可解析延拓到复平面的某个带状区域 $|\mathrm{Im} z| < c$, $c > 0$。因此，类 $C^{\psi}_{\beta\,1}$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$ 由在带状区域 $|\mathrm{Im}\, z| < c$ 内解析的周期函数组成，并且 $c = \ln\frac{1}{q}$（例如，参见 [25, 第 32] 页）。

序列 $\psi(k) = e^{-\alpha k}$, $\alpha > 0$ 属于集合 $\mathcal{D}_q$，当 $q = e^{-\alpha}$ 时，相应的类 $C^{\psi}_{\beta\ ,\ 1} = C^{\alpha}_{,\ \beta}{}^{1}_{1}$，由泊松核生成

$$P_{\alpha,1,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\ \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}. \tag{73}$$

由定理 2.2，对于类 $C^{\alpha}_{,\ \beta}{}^{1}_{1}$，可得以下结论。

**推论 3.3**。 设 $\alpha>0$ 和 $\beta\in\mathbb{R}$。那么，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，等式成立

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,1}_{\beta,1})_C = e^{-\alpha n}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-e^{-\alpha}}+\frac{\Theta}{n}\frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2}\right), \tag{74}$$

其中，量 $\Theta=\Theta(n,\ \alpha,\ \beta)$ 满足不等式 $-1\le\Theta\le 0$ .

证明 。令 $q=e^{-\alpha}$。于是，由定理 2.2 可知，对所有 $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(C^{\alpha,1}_{\beta,1})_C =&\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}q^k+\frac{\Theta}{n}\sum_{k=0}^{\infty}kq^{k+n}\\ =&\frac{1}{\pi}\frac{q^n}{1-q}+\frac{\Theta}{n}\left(\sum_{k=n}^{\infty}kq^k-n\sum_{k=n}^{\infty}q^k\right)\\ =&\frac{1}{\pi}\frac{q^n}{1-q}+\frac{\Theta}{n}\left(\frac{nq^n(1-q)+q^{n+1}}{(1-q)^2}-\frac{nq^n}{1-q}\right)\\ =&\frac{1}{\pi}\frac{q^n}{1-q}+\frac{\Theta}{n}\frac{q^{n+1}}{(1-q)^2},\end{aligned} \tag{75}$$

其中用到了下列等式:

$$\sum_{k=n}^{\infty}kq^k=\frac{nq^n(1-q)+q^{n+1}}{(1-q)^2},\quad q\in(0,1),\quad n\in\mathbb{N}.$$

推论 3.3 得证。 □

估计式 (74) 对量 $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,\ r}_{\beta\ 1,\ })_C$的渐近等式作了уточ化，这些等式已在 [12] 和 [13] 中得到。关于量 $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta\ ,\ 1})_C$ 在 $\psi\in\mathcal{D}_q$, $q\in(0,1)$ 时的渐近等式，见下述命题。

**推论 3.4.** 设 $\psi\in\mathcal{D}_q$, $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. 那么对所有满足以下条件的指标 $n$ ，

$$\frac{1}{n}+\varepsilon_n<\frac{1-q}{2}, \tag{76}$$

∂e

$$\varepsilon_n:=\sup_{k\ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|, \tag{77}$$

相对于所有所讨论参数的一致估计成立 κa

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C=\psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)}+\mathcal{O}(1)\Big(\frac{q}{n(1-q)^2}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\Big)\right). \tag{78}$$

证明。 由文献 [30] 中的引理 1可知，当 $\psi\in\mathcal{D}_q$, $0<q<1$, $n\in\mathbb{N}$时，等式成立

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)=\psi(n)\left(\frac{1}{q^n}\sum_{k=n}^{\infty}q^k+r_n\right), \tag{79}$$

其中，对于余数 $r_n$ ，对所有满足以下条件的编号 $n$

$$\varepsilon_n<\frac{1-q}{2} \tag{80}$$

估计成立

$$|r_n| \le \frac{\varepsilon_n}{(1-q-\varepsilon_n)(1-q)} \le \frac{2\varepsilon_n}{(1-q)^2}. \tag{81}$$

显然，如果 $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0<q<1$，那么数列 $k\psi(k)$ 也满足条件$\mathcal{D}_q$，因此再次由引理 1 可得 [30]

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k\psi(k) = (n+1)\psi(n+1)\left(\frac{1}{q^{n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty} q^k + r^*_{n+1}\right), \tag{82}$$

其中余项 $r^*_{n+1}$ 对于所有满足以下条件的指标 $n$

$$\varepsilon^*_{n+1} := \sup_{k\ge n+1}\left|\frac{\psi(k+1)(k+1)}{\psi(k)k} - q\right| < \frac{1-q}{2} \tag{83}$$

估计成立

$$\left|r^*_{n+1}\right| \le \frac{2\varepsilon^*_{n+1}}{(1-q)^2}. \tag{84}$$

根据量 $\varepsilon_n$ 和 $\varepsilon^*_{n+1}$ 的定义（见 (77) 和 (83)），可得

$$\varepsilon^*_{n+1} \le \sup_{k\ge n+1}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right| + \frac{1}{n+1} = \varepsilon_{n+1} + \frac{1}{n+1} < \varepsilon_n + \frac{1}{n}. \tag{85}$$

由 (85) 可见，不等式 (76) 成立即可保证不等式 (80) 和 (83) 成立，进而保证等式 (79) 和 (82) 中余项满足估计 (81) 和 (84)。

于是，由定理 2.2 的估计 (45) 以及等式 (79) 和 (82) 可知，对于所有满足条件 (76) 的指标$n$，以下关系成立

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C =& \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n)\\
=& \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\frac{1}{q^n}\sum_{k=n}^{\infty} q^k + r_n\right) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\psi(k)\\
=& \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\frac{1}{1-q} + \mathcal{O}(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right) + \mathcal{O}(1)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} k\psi(k) - \sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\right)\\
=& \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\\
&+\mathcal{O}(1)\psi(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{q^{n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty} q^k + \frac{\varepsilon^*_{n+1}}{(1-q)^2}\right) - \frac{1}{q^{n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty} q^k + \frac{\varepsilon_{n+1}}{(1-q)^2}\right)\\
=& \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right) + \mathcal{O}(1)\psi(n+1)\left(\frac{1}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n + \frac{1}{n}}{(1-q)^2}\right)\\
=& \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}\frac{1}{n(1-q)^2}\right)\right)\\
=& \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q}{n(1-q)^2}\right)\right).
\end{aligned} \tag{86}$$

推论 3.4 已得证。 □

渐近等式 (78) 最早由 [12] 和 [13] 在相关研究中确立。

## 4 定理 2.2 的推论：关于无限次可微函数类

在本小节中，我们假设生成集合$C_\beta^\psi L_1$ 和$C_\beta^\psi{}_{,\,1}$的序列 $\psi(k)$ 是某些正的连续下凸函数 $\psi(t)$ 在自然数集上的限制，这些函数的自变量 $t \geq 1$ 连续，并且当$t \to \infty$时趋于零。所有这类函数 $\psi$ 的集合记作 $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}=\left\{\psi\in C[1,\infty)\colon \psi(t)>0, \psi(t_1-2\psi((t_1+t_2)/2)+\psi(t_2)\geq 0\ \forall t_1,t_2\in[1,\infty),\ \lim_{t\to\infty}\psi(t)=0\right\}. \tag{87}$$

遵循 O. I. Stepanets 的做法（例如，参见 [26, 第 160] 页），我们为每个函数 $\psi \in \mathfrak{M}$ 对应定义特征函数

$$\eta(t)=\eta(\psi;t)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$$

та

$$\mu(t)=\mu(\psi;t)=\frac{t}{\eta(t)-t},$$

其中 $\psi^{-1}$ 是 $\psi$ 函数的反函数，并令

$$\mathfrak{M}_\infty^+=\{\psi\in\mathfrak{M}:\ \mu(t)\uparrow,\ \ t\to\infty\}.$$

Чepe用 $\mathfrak{M}^\alpha$ 表示所有满足以下条件的 $\psi \in \mathfrak{M}$ 函数的子集:

$$\alpha(t)=\alpha(\psi;t):=\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|},\ \ \psi'(t):=\psi'(t+0), \tag{88}$$

当 $t \to \infty$ 时趋于零:

$$\mathfrak{M}^\alpha=\left\{\psi\in\mathfrak{M}:\ \ \lim_{t\to\infty}\alpha(\psi;t)=0\right\}. \tag{89}$$

根据文献 [31], 中的定理 2，存在序列 $\psi \in \mathfrak{M}^\alpha$ （或 $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$），使得对于函数 $f$，包含关系 $f \in C_\beta^\psi L_1$ 对任意 $\beta \in \mathbb{R}$ 都成立，这一命题等价于包含关系 $f \in D^\infty$，其中 $D^\infty$ 是所有无限次可微的 $2\pi$-周期实值函数的集合。因此，当 $\psi \in \mathfrak{M}^\alpha$（或 $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$）时，类 $C_\beta^\psi{}_{,\,1}$ 是无限次可微周期函数类。同一文献还证明了以下包含关系

$$\mathfrak{M}_\infty^+\subset\mathfrak{M}^\alpha\subset\mathfrak{M}^\infty=\left\{\psi\in\mathfrak{M}:\ \forall r>0\ \ \lim_{t\to\infty}t^r\psi(t)=0\right\}, \tag{90}$$

这意味着，函数 $\psi(t)$ 在 $\mathfrak{M}^\alpha$ 处比任意幂函数更快地趋于零。

对于满足条件 $\eta(n) - n > 2$ 的量 $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C$, $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$，已知精确的渐近等式

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C \asymp \psi(n)(\eta(n) - n), \tag{91}$$

与阶数为 $n-1$ 的三角多项式最佳一致逼近的精确阶估计相一致

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}} \|f - t_{t_{n-1}}\|_C$$

即（例如，见 [17]）

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C \asymp \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C \asymp \psi(n)(\eta(n) - n), \tag{92}$$

（此处及下文，对于正数列 $A(n)$ 和 $B(n)$，记号 $A(n) \asymp B(n)$ 表示存在正数常数 $K_1$ 和 $K_2$，使得 $K_1 B(n) \le A(n) \le K_2 B(n)$, $n \in \mathbb{N}$。）

如 [ 中所示 27，页码 166] ，对任意函数 $\psi$ 属于 $\mathfrak{M}^+_\infty$，都成立如下阶估计 ь

$$\eta(t) - t \asymp \lambda(t),\ t \ge 1, \tag{93}$$

其中 $\lambda(t)$ 是如下形式的特征函数

$$\lambda(t) = \lambda(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}. \tag{94}$$

考虑到 (91)，可以写成

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C \asymp \psi(n)\lambda(n). \tag{95}$$

下面的命题给出了量 $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta 1,}\ )_C$，$\psi \in \mathfrak{M}^\alpha$ 的强渐近表达式，条件是对 $\alpha(t)$ 和 $\lambda(t)$ 施加某些自然限制。

**定理 4.1.** 设 $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathfrak{M}$ 和特征函数 (88) 和 (94) 满足条件

$$\alpha(t) \downarrow 0, \tag{96}$$

$$\lambda(t) \uparrow \infty, \quad t \to \infty. \tag{97}$$

那么对所有满足以下条件的 $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha(n) \le \frac{1}{4} \tag{98}$$

估计成立

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \psi(n)\lambda(n)\left(\frac{1}{\pi} + \frac{\xi_1}{\lambda(n)} + \xi_2\alpha(n)\right), \tag{99}$$

其中 $-1 \le \xi_1 \le 1 + \frac{1}{\pi}$和 $-4 \le \xi_2 \le \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$。

定理 *4.1* 的证明。为了估计 $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta\,1,\,})_C$，我们将使用定理 2.2 中的公式 (45)。为此，我们需要估计级数 $\Sigma_1 = \sum \psi(k)$ 和$_{k=n\infty}\Sigma_2 = \sum k\psi(k)$。$_{k=n}$

由于函数 $\psi \in \mathfrak{M}$ 单调递减，我们看到

$$\int_n^{\infty} \psi(t)dt \le \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \le \psi(n) + \int_n^{\infty} \psi(t)dt, \tag{100}$$

因此，

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) = \int_n^{\infty} \psi(t)dt + \Theta_4\psi(n), \quad 0 \le \Theta_4 \le 1. \tag{101}$$

$_{\infty}$积分 $\int \psi(t)dt$ 的估计由下述命题推出，该命题本身也可能具有独立的意义。

**引理 4.2.** 设 $\psi \in \mathfrak{M}$, $\lambda(t)$ 单调不减，而 $\alpha(t)$ 在 $[1,\infty)$ 上单调不增。那么对于所有满足 $\alpha(a) < 1$ 的 $a \ge 1$，估计式

$$\lambda(a)\psi(a) \le \int_a^{\infty} \psi(t)dt \le \lambda(a)\psi(a)\left(1 + \frac{\alpha(a)}{1-\alpha(a)}\right). \tag{102}$$

引理 *4.2* 的证明。由于根据包含关系 $\psi \in \mathfrak{M}$，函数 $\psi(t)$ 在 $[1,\infty)$ 上局部绝对连续，因此，结合 $\lambda(t)$ 的单调不减性，可得到所需的下界

$$I_1 := \int_a^{\infty} \psi(t)dt = \int_a^{\infty} -\psi'(t)\lambda(t)dt \ge \lambda(a)\int_a^{\infty}(-\psi'(t))dt = \psi(a)\lambda(a), \tag{103}$$

另一方面，考虑到函数 $\alpha(t)$ 单调不增，并应用分部积分法，可得

$$\begin{aligned} I_1 = \int_a^{\infty} \psi(t)dt = \int_a^{\infty} \alpha(t)(-\psi'(t)t)dt \le \alpha(a)\int_a^{\infty}(-\psi'(t)t) \\ = \alpha(a)\left(\psi(a)a + \int_a^{\infty}\psi(t)dt\right) = \psi(a)\lambda(a) + \alpha(a)I_1. \end{aligned} \tag{104}$$

由 (104) 得到

$$I_1 \le \frac{\lambda(a)\psi(a)}{1-\alpha(a)} = \lambda(a)\psi(a)\left(1 + \frac{\alpha(a)}{1-\alpha(a)}\right). \tag{105}$$

由（103）和（105）可得（102）。引理 4.2 得证。

□

在 $a=n$、 $n\in\mathbb{N}$ 下应用引理 4.2，并根据条件（98），可写为

$$I_1=\int_a^{\infty}\psi(t)dt=\psi(n)\lambda(n)\left(1+\Theta_5\alpha(n)\right),\quad 0\le\Theta_5\le\frac{4}{3}. \tag{106}$$

因此，考虑到 (101) 和 (106)，当 $\alpha(n)\le\frac{1}{4}$

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)=\psi(n)\lambda(n)\left(1+\frac{\Theta_4}{\lambda(n)}+\Theta_5\alpha(n)\right),\quad 0\le\Theta_5\le\frac{4}{3},\ 0\le\Theta_4\le 1. \tag{107}$$

接下来，我们求出 $\Sigma_2=\sum_{k=n}^{\infty}k\psi(k)$ 的估计。根据 (98)，函数 $t\psi(t)$ 在 $[n,\infty)$ 上递减，因此

$$\int_n^{\infty}t\psi(t)dt\le\sum_{k=n}^{\infty}k\psi(k)\le n\psi(n)+\int_n^{\infty}t\psi(t)dt, \tag{108}$$

并且，因此，

$$\sum_{k=n}^{\infty}k\psi(k)=\int_n^{\infty}t\psi(t)dt+\Theta_6 n\psi(n),\quad 0\le\Theta_6\le 1. \tag{109}$$

为了估计积分 $I_2=\int t\psi(t)dt$，我们再次使用分部积分法，并考虑 (90) 以及 $\alpha(n)$ 不增这一条件

$$\begin{aligned}I_2=\int_n^{\infty}t\psi(t)dt=\int_n^{\infty}t^2\frac{\psi(t)}{-t\psi'(t)}(-\psi'(t))dt\le\alpha(n)\int_n^{\infty}t^2(-\psi'(t))dt\\ =\alpha(n)\left(n^2\psi(n)+2I_2\right),\end{aligned} \tag{110}$$

由最后几个关系式及条件 (98)，可得

$$I_2\left(1-2\alpha(n)\right)\le\alpha(n)n^2\psi(n)$$

并且，因此，考虑到条件 (98)，可得

$$\begin{aligned}I_2\le&\psi(n)n^2\alpha(n)\frac{1}{1-2\alpha(n)}=\psi(n)n^2\alpha(n)\left(1+\frac{2\alpha(n)}{1-2\alpha(n)}\right)\\ \le&\psi(n)n^2\alpha(n)\left(1+4\alpha(n)\right)=\psi(n)n\lambda(n)(1+4\alpha(n)).\end{aligned} \tag{111}$$

另一方面，考虑到条件 (106)，

$$I_2=\int_n^{\infty}t\psi(t)dt\ge n\int_n^{\infty}\psi(t)dt\ge\psi(n)n\lambda(n). \tag{112}$$

合并 (111) 和 (112) 可得，在 $\alpha(n) \le \frac{1}{4}$ 时

$$\int_n^\infty t\psi(t)dt = \psi(n)n\lambda(n)\left(1+\Theta_7\alpha(n)\right), \quad 0 \le \Theta_7 \le 4. \tag{113}$$

由公式 (109) 和 (113) 可得，在条件 (94) 和 (98) 下

$$\sum_{k=n}^\infty k\psi(k) = \psi(n)n\lambda(n)\left(1+\Theta_7\alpha(n)+\frac{\Theta_6}{\lambda(n)}\right), \quad 0 \le \Theta_7 \le 4, \ \ 0 \le \Theta_6 \le 1. \tag{114}$$

利用估计 (108) 和 (107)，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^\infty k\psi(k+n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^\infty k\psi(k+n)\\
=&\frac{1}{n}\left(\sum_{k=n}^\infty k\psi(k) - n\sum_{k=n}^\infty \psi(k)\right)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{k=n}^\infty k\psi(k) - \sum_{k=n}^\infty \psi(k)\\
=&\psi(n)\lambda(n)\left(1+\Theta_7\alpha(n)+\frac{\Theta_6}{\lambda(n)}\right) - \psi(n)n\lambda(n)\left(1+\Theta_5\alpha(n)+\frac{\Theta_4}{\lambda(n)}\right)\\
=&\psi(n)\lambda(n)\left((\Theta_7-\Theta_5)\alpha(n)+\frac{\Theta_6-\Theta_4}{\lambda(n)}\right).
\end{aligned} \tag{115}$$

根据定理 2.2 中的公式 (45) 以及估计 (107) 和 (115)，可得对于所有满足不等式 (98) 的指标 $n$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,1})_C =&\frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^\infty \psi(k) + \Theta_2\frac{1}{n}\sum_{k=1}^\infty k\psi(k+n)\\
=&\frac{1}{\pi}\psi(n)\lambda(n)\left(1+\frac{\Theta_4}{\lambda(n)}+\Theta_5\alpha(n)\right)+\Theta_2\psi(n)\lambda(n)\left(1+\frac{\Theta_6-\Theta_4}{\lambda(n)}+(\Theta_7-\Theta_5)\alpha(n)\right)\\
=&\psi(n)\lambda(n)\left(\frac{1}{\pi}+\frac{\Theta_4/\pi+\Theta_2(\Theta_6-\Theta_4)}{\lambda(n)}+\left(\frac{\Theta_5}{\pi}+\Theta_2(\Theta_7-\Theta_5)\right)\alpha(n)\right).
\end{aligned} \tag{116}$$

由于量 $\xi_1 = \frac{\Theta_4}{\pi} + \Theta_2(\Theta_6-\Theta_4)$ 满足估计

$$-1 \le \xi_1 \le 1+\frac{1}{\pi},$$

而对于 $\xi_2 = \frac{\Theta_5}{\pi} + \Theta_2(\Theta_7-\Theta_5)$，则有估计

$$-4 \le \xi_2 \le \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{\pi}\right),$$

因此由 (116) 可推出 (99)。定理 4.1 得证。 □

我们给出定理 4.1 的一个推论，适用于 $\psi(t) = e^{-\alpha t^{-r}}$, $\alpha > 0$, $0 < r \le 1$ 的情形，即类 $C^{\psi}_{\beta,\,1}$ 是广义Poisson积分 $C^{\alpha,\,r}_{\beta\,1,\,}$ 的类。容易验证，对于所 указанных $\psi(t)$，对所有 $t \ge 1$,

$$\lambda(t) = \frac{t^{1-r}}{\alpha r}, \quad \alpha(t) = \frac{1}{\alpha r t^{r}}. \tag{117}$$

由 (117) 可见，定理 4.1 的条件 (96) 和 (97) 均成立。同时，不等式 $\frac{1}{\alpha r n^{r}} \le \frac{1}{4}$ 成立等价于条件 (98) 成立。因此，由定理 4.1 可得如下结论。

**推论 4.3**。 设 $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$。那么对于所有 $n \ge \left(\frac{4}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}}$，以下估计对所有所讨论的参数均一致有界

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1})_C = e^{-\alpha n^{r}} n^{1-r}\Big(\frac{1}{\pi \alpha r} + \mathcal{O}(1)\Big(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^{r}} + \frac{1}{n^{1-r}}\Big)\Big). \tag{118}$$

需要指出的是，在对 $n$ 稍加严格的限制下，形式如 (118) 的估计已见于文献 [18]–[20]。上述文献中给出了量 $\mathcal{O}(1)$ 通过绝对常数表示的双边估计。

下面举出几个将定理 4.1 应用于不同的 $\psi$ （属于 $\mathfrak{M}$）的例子，这些函数满足条件 (96) 和 (97)。

我们将考察如下形式的 $\psi(t)$

$$\psi(t) = (t+2)^{-\ln\ln(t+2)}, \quad t \ge 1, \tag{119}$$

$$\psi(t) = e^{-\ln^2(t+1)}, \quad t \ge 1, \tag{120}$$

$$\psi(t) = e^{-\frac{t+2}{\ln(t+2)}}, \quad t \ge 1. \tag{121}$$

对于上述函数 $\psi(t)$，求出特征函数 $\lambda(t)$ 和 $\alpha(t)$。计算结果如下表所示:

| № | 函数 $\psi(t)$ | $\alpha(t)$ | $\lambda(t)$ |
|---|---|---|---|
| 1. | $(t+2)^{-\ln\ln(t+2)}$ | $\frac{t+2}{t}\frac{1}{1+\ln\ln(t+2)}$ | $\frac{t+2}{1+\ln\ln(t+2)}$ |
| 2. | $e^{-\ln^2(t+1)}$ | $\frac{t+1}{t}\frac{1}{2\ln(t+1)}$ | $\frac{t+1}{2\ln(t+1)}$ |
| 3. | $e^{-\frac{t+2}{\ln(t+2)}}$ | $\frac{\ln^2(t+2)}{t(\ln(t+2)-1)}$ | $\frac{\ln^2(t+2)}{\ln(t+2)-1}$ |

由定理 4.1 以及表中列出的 $\alpha(t)$ 和 $\lambda(t)$ 的取值，可得在$n \to \infty$ 时，若 $\psi$ 具有 (119)–(121) 的形式，则 величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta\,,1})_C$ 的渐近等式。

**推论 4.4.** 设 $\psi(k) = (k+2)^{-\ln\ln(k+2)}$, $k = 1,\ 2,$ ..... $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$。那么当 $n \to \infty$时，渐近等式成立

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \frac{1}{\pi}\psi(n)\frac{n}{\ln\ln(n+2)} + \mathcal{O}(1)\psi(n)\frac{n}{(\ln\ln(n+2))^2}. \tag{122}$$

**推论 4.5.** 设 $\psi(k) = e^{-\ln^2(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots\ldots \beta \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$。那么当 $n \to \infty$ 时，渐近等式成立

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \frac{1}{2\pi}\frac{\psi(n)n}{\ln(n+1)} + \mathcal{O}(1)\psi(n)\frac{n}{\ln^2(n+1)}. \tag{123}$$

**推论 4.6.** 设 $\psi(k) = e^{-\frac{k+2}{k+2\ln()}}$, $k = 1, 2, ...,$ $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 那么当 $n \to \infty$ 时，渐近等式成立

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C = \frac{1}{\pi}\psi(n)\ln(n+2) + \mathcal{O}(1)\psi(n). \tag{124}$$

注意，当 $\psi \in \mathfrak{M}$ 且 $t \to \infty$ $\alpha(t) \to 0$ 和 $\lambda(t) \to \infty$ 并且附加条件是函数 $\psi(t)$ 在整个 $[1, \infty)$ 上可微时，保证估计式 (15) 和 (45) 为渐近等式的极限关系 (12) 总是成立。

事实上，应用洛必达法则，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_n^{\infty}\psi(t)dt}{\psi(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\psi(n)}{|\psi'(n)|} = \lim_{n\to\infty}\lambda(n) = \infty, \tag{125}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_n^{\infty}t\psi(t)dt}{n\psi(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n\psi(n)}{\psi(n)+n\psi'(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda(n)}{1-\alpha(n)} = \infty. \tag{126}$$

那么，考虑到 (101) 和 (109)，渐近等式成立

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k) = \int_n^{\infty}\psi(t)dt + \mathcal{O}(1)\psi(n), \tag{127}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty}k\psi(k) = \int_n^{\infty}t\psi(t)dt + \mathcal{O}(1)n\psi(n). \tag{128}$$

使用公式 (125)–(109) 并应用洛必达法则，得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\psi(k+n)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\psi(k) - \sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\psi(k)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\psi(k)} - 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\int\limits_n^{\infty}t\psi(t)dt}{\int\limits_n^{\infty}\psi(t)dt} - 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n\psi(n)}{\int\limits_n^\infty \psi(t)dt - n\psi(n)} - 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{-\int\limits_n^\infty \psi(t)dt}{\int\limits_n^\infty \psi(t)dt - n\psi(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{-2\psi(n) - n\psi'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\psi(n)}{-n\psi'(n)}}{1 - \frac{2\psi(n)}{-n\psi'(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{1-\alpha(n)} = 0. \tag{129}$$

由此，等式 (12) 得证。

## 5 关于勒贝格不等式的评论

在第 3 和第 4 小节中，给出了定理 2.2 对快速递减序列 $\psi(k)$ 的推论；对于这些序列，公式 (45) 是渐近等式，或者说，等价地，条件 (12) 成立。显然，在第 3 和第 4 小节讨论的所有特殊情形中，对于 $\psi(\cdot)$，也容易得到形如 (44) 的渐近最优勒贝格型不等式。我们这里只陈述定理 2.1 的若干推论。首先，给出关于 $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$,$\alpha > 0$ 和 $r > 0$ 的相应结论。$r > 1$, $r = 1$ 和 $r \in (0,1)$ 的情形单独讨论。

**推论 5.1.** 设 $r > 1$, $\alpha > 1$和 $\beta \in \mathbb{R}$。那么当 $n \geq \left(\frac{3}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}} - 1$时，对于任意函数$f \in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}L_1$，不等式成立

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \leq e^{-\alpha n^r}\left(\frac{1}{\pi} + \mathcal{O}(1)e^{-\alpha n^{r-1}}\left(1 + \frac{1}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\right)\right) E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}. \tag{130}$$

此外，对于任意函数 $f \in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}L_1$，都可以找到函数 $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f;n,x)$，它属于集合 $C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}L_1$，且满足 $E_n(\mathcal{F}^{\alpha}_{,\beta}{}^{r})_{L_1} = E_n(f^{\alpha}_{,\beta}{}^{r})_{L_1}$，并且等式成立

$$\|\mathcal{F}(\cdot) - S_{n-1}(\mathcal{F}(\cdot);\cdot)\|_C = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{1}{\pi} + \mathcal{O}(1)e^{-\alpha n^{r-1}}\left(1 + \frac{1}{\alpha r(n+1)^{r-2}}\right)\right) E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}. \tag{131}$$

在 (130)和 (131) $\mathcal{O}(1)$ 中，— 是对所有参数一致有界的量。

不等式 (130) 的类似形式以及公式 (131)（它证明了该不等式在渐近意义下不可改进），其中余项以略有不同的形式表示，见于 [9]。

**推论 5.2**。 设 $\alpha > 0$、 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$。则对于任意函数 $f \in C^{\alpha}_{,\ \beta}{}^{1}L_1$ 不等式成立

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \leq \frac{1}{\pi}\frac{e^{-\alpha n}}{1-e^{-\alpha}} E_n(f^{\alpha,1}_{\beta})_{L_1}. \tag{132}$$

此外，对于任意函数 $f \in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{1}L_1$，都可以找到一个函数 $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f;n,x)$，它属于集合 $C^{\alpha}_{,\beta}{}^{1}L_1$，并满足 $E_n(\mathcal{F}^{\alpha}_{,\beta}{}^{1})_{L_1} = E_n(f^{\alpha}_{,\beta}{}^{1})_{L_1}$，且等式成立

$$\|\mathcal{F}(\cdot) - S_{n-1}(\mathcal{F}(\cdot);\cdot)\|_C = e^{-\alpha n}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-e^{-\alpha}} + \frac{\xi}{n}\frac{1}{(1-e^{-\alpha})^2}\right) E_n(f^{\alpha,1}_{\beta})_{L_1}, \tag{133}$$

其中，对于量 $\xi = \xi(f;\, n;\, \alpha;\, \beta)$，不等式 $-2 \le \xi \le 0$ 成立。

估计式 (132) 和 (133) 细化了关于泊松积分集合上傅里叶和的一致偏差的估计，这些估计见于文献 [14] i [8]。

**推论 5.3.** 设 $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}i$ $n \in \mathbb{N}$。那么对所有 $n \ge \left(\frac{4}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}}$，任意函数 $f \in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}L_1$ 都满足不等式

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \le e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left(\frac{1}{\pi\alpha r} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}}\right)\right) E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}. \tag{134}$$

此外，对于任意函数 $f \in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}L_1$，都可以找到函数 $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f;\, n, x)$，它属于集合 $C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}L_1$，且满足 $E_n(\mathcal{F}^{\alpha}_{,\beta}{}^{r})_{L_1} = E_n(f^{\alpha}_{,\beta}{}^{r})_{L_1}$，并且有等式

$$\|\mathcal{F}(\cdot) - S_{n-1}(\mathcal{F}(\cdot);\cdot)\|_C = e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left(\frac{1}{\pi\alpha r} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}}\right)\right) E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}. \tag{135}$$

在(134) 和(135) $\mathcal{O}(1)$ 中，—是关于所有参数都一致有界的量。

在对 $n$施加稍严格的限制时，形如 (134) 和 (135) 的公式早已在 [21]中得到。

**推论 5.4**。设 $\psi \in \mathcal{D}_{\varphi}$, $q \in (0{,}1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$。那么，对于所有满足不等式(77) 的 $n$，任意函数 $f \in C^{\psi}_{\beta}L_1$ 均满足不等式

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \le \psi(n) \left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^2} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}. \tag{136}$$

此外，对于任意函数 $f \in C^{\psi}_{\beta}L_1$，都可以找到函数 $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f;\, n, x)$，它属于集合 $C^{\psi}_{\beta}L_1$，并满足 $E_n(\mathcal{F}^{\psi}_{\beta})_{L_1} = E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}$；且当它满足(76) 时，有等式成立

$$\|\mathcal{F}(\cdot) - S_{n-1}(\mathcal{F}(\cdot);\cdot)\|_C = \psi(n) \left(\frac{1}{\pi(1-q)} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^2} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}. \tag{137}$$

在(136) 和(137) 中，量 $\varepsilon_n$ 由等式(77)定义，而 $\mathcal{O}(1)$ 是关于所有参数均一致有界的量。

**定理 5.5**。设 $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathfrak{M}$ 和特征函数 $\alpha(t)$ 及 $\lambda(t)$ 具有(88)的形式，并满足条件(94) (96) 和(97)。那么对于所有满足 $n \in \mathbb{N}$ 的 $\alpha(n) < \frac{1}{4}$，任意函数 $f \in C^{\psi}_{\beta}L_1$ 均满足不等式

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C \le \psi(n)\lambda(n) \left(\frac{1}{\pi} + \frac{\xi_3}{\lambda(n)} + \xi_4\alpha(n)\right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}, \tag{138}$$

其中 $0 \le \xi_3 \le \frac{4}{3\pi}$, $0 \le \xi_4 \le \frac{1}{\pi}$。

此外，对于任意函数 $f \in C^{\psi}_{\beta}L_1$，都可以从集合 $C^{\psi}_{\beta}L_1$ 中找到函数 $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(f;\, n, x)$，使得 $E_n(\mathcal{F}^{\psi}_{\beta})_{L_1} = E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}$，并且对于满足 $n \in \mathbb{N}$ 的 $\alpha(n) < \frac{1}{4}$，等式成立

位置 平等

$$\|\mathcal{F}(\cdot)-S_{n-1}(\mathcal{F}(\cdot);\cdot)\|_C=\psi(n)\lambda(n)\left(\frac{1}{\pi}+\frac{\xi_5}{\lambda(n)}+\xi_6\alpha(n)\right)E_n(f_\beta^\psi)_{L_1},\tag{139}$$

其中 $-2\le\xi_5\le 2+\frac{1}{\pi}$, $-8\le\xi_6\le\frac{4}{3}\left(2+\frac{1}{\pi}\right)$。

不等式 (138) 是公式 (14) 和 (107) 的推论，而等式 (139) 则由 (15)、(107) 和 (115) 得出。

1. Н.И. Ахиезер, 《逼近理论讲义》, Мир, 莫斯科（1965）。2. В.К. Дзядык, 函数多项式一致逼近理论导论, Наука, 莫斯科（1977）。3. L. Fejer, 勒贝格常数与发散的傅里叶级数, 纯粹与应用数学杂志**138**, 22–53（1910）。4. П.В. Галкин, 勒贝格常数的估计, 苏联科学院数学研究所论文集, **109**, 3–5（1971）。5. В.В. Жук, Г.И.Натансон, 三角级数与逼近理论基础, 列宁格勒大学出版社（1983）。6. A. Kolmogoroff, 关于可微函数傅里叶级数余项的增长阶, （德文）数学年刊（2）, **36**, 第2期, 521–526（1935）。7. Н.П. Корнейчук, 逼近理论中的精确常数, Наука, 莫斯科（1987）。8. А.П. Мусієнко, А.С. Сердюк, 解析函数集合上*Vallee Poussin*和的*Lebesgue*型不等式, 《乌克兰数学杂志》, **65**, 第4期, 522-537（2013）。9. А.П. Мусієнко, А.С. Сердюк, 整函数集合上*Vallee Poussin*和的*Lebesgue*型不等式, 《乌克兰数学杂志》, **65**, 第5期, 642–653（2013）。10. Г.И. Натансон, 关于*Vallee–Poussin*和的勒贝格常数估计, 《函数与集合理论中的几何问题》, 加里宁（1986）。11. С. М. Никольский, 平均意义下用三角多项式逼近函数, 《苏联科学院学报：数学辑》, **10**, 第3期, 207–256（1946）。12. А.С. Сердюк, 在一致度量下用傅里叶和逼近解析函数类, 《乌克兰数学杂志》, **57**, 第8期, 1079–1096（2005）。13. А.С. Сердюк, 在空间度量下用傅里叶和逼近解析函数类 $L_p$, 《乌克兰数学杂志》, **57**, 第10期, 1395–1408（2005）。

14. A.C. Сердюк，A.П. Мусієнко，逼近*Poisson*积分时*Vallee Poussin*和的*Lebesgue*型不等式，《乌克兰国家科学院数学研究所论文集》，**7**，第1期：函数逼近理论及相关问题，基辅：乌克兰国家科学院数学研究所，298–316（2010）。15. A.S. Serdyuk，I.V. Sokolenko，高光滑性指数可微函数类的傅里叶和逼近，泛函分析与拓扑学方法，**25**，第4期，381–387（2019）。16. A.C. Сердюк，I. B. Соколенко，用傅里叶和逼近具有高光滑性指数的魏尔–纳迪亚意义下可微函数类，《乌克兰数学杂志》，**74**，第5期，685–700（2022）。17. A.C. Сердюк，一致度量与积分度量下无限次可微函数类的最佳逼近估计，《乌克兰数学杂志》，**66**，第9期，1244–1256（2014）。18. A.C. Сердюк，T.A. Степанюк，*Poisson*积分卷积类的傅里叶和一致逼近，《乌克兰国家科学院学报》，第11期，10–16（2016）。19. A.C. Сердюк，T.A. Степанюк，用傅里叶和在空间度量下逼近广义*Poisson*积分类 $L_s$，《乌克兰数学杂志》，**69**，第5期，695-704（2017）。20. A.S. Serdyuk，T.A. Stepanyuk，广义*Poisson*积分类的傅里叶和一致逼近，Analysis Mathematica，**45**，第1期，201–236（2019）。21. A.S. Serdyuk，T.A. Stepanyuk，广义*Poisson*积分集合上傅里叶和的渐近最佳*Lebesgue*型不等式，FILOMAT，**34**，第14期，4697–4707（2020）。22. A.S. Serdyuk，T.A. Stepanyuk，关于广义*Poisson*积分类上的*Lebesgue*不等式，Jaen J. Approx. **12**，25–40（2021）。23. И.А. Шакиров，傅里叶算子范数的双边估计，《乌法数学杂志》，**10**，第1期，96–117（2018）。24. А.И. Степанец，周期函数分类及其傅里叶级数的收敛速度，《苏联科学院通报：数学辑》，**50**，第1期，101–136（1986）。25. А.И. Степанец，周期函数的分类与逼近，科学思想出版社，基辅（1987）。26. А.И. Степанец，逼近理论方法：分2部分，乌克兰国家科学院数学研究所论文集，乌克兰国家科学院数学研究所，基辅，**40**，第I部分（2002）。

27. А.И.Степанец. 逼近理论方法：分2部分，乌克兰国家科学院数学研究所论文集，乌克兰国家科学院数学研究所，基辅，**40**，第I部分（2002）。28. A.I. Stepanets, 关于勒贝格不等式在$(\psi,\beta)$可微函数类上的应用，《乌克兰数学杂志》，**41**，第4期，435–443（1989）。29. А.И. Степанец, А.С. Сердюк, 泊松积分的勒贝格不等式，《乌克兰数学杂志》，**52**，第6期，798-808（2000）。30. А.И. Степанец, А.С. Сердюк 解析函数类上的傅里叶和逼近与最佳逼近，《乌克兰数学杂志》，**52**，第3期，.375–395（2000）。31. О.І. Степанець, А.С. Сердюк, А.Л. Шидліч关于周期函数无限可微性的若干新判据，《乌克兰数学杂志》，**59**，第10期，1399–1409（2007）32. А.И. Степанец, А.С. Сердюк, А.Л. Шидлич, 无限可微函数的分类《乌克兰数学杂志》，**60**，第12期，1686–1708（2008）。33. С. Б. Стечкин 可微函数的傅里叶级数余项估计。多项式与样条对函数的逼近,《论文集》，《苏联科学院数学研究所论文集》，**145**，126–151（1980）。34. С.А. Теляковский，关于三角多项式的范数及用其傅里叶级数的线性平均逼近可微函数。*I*，苏联科学院数学研究所论文集，**62**，61–97（1961）。35. С.А. Теляковский，用傅里叶级数部分和逼近可微函数，《数学札记》，**4**，第3期，291–300（1968）。36. С.А. Теляковский，用傅里叶和逼近高光滑度函数，《乌克兰数学杂志》，**41**，第4期，510–518（1989）。