arXiv:2301.02020v1 [math.CO] 5 Jan 2023

极值独立集重配置*

Nicolas Bousquet[1], Bastien Durain[1,2], Théo Pierron[1], and Stéphan Thomassé[2]

[1]里昂大学，里昂第一大学，*LIRIS* 法国国家科学研究中心 *UMR 5205*，*F-69621*，里昂，法国[2]里昂高等师范学院，计算机系，里昂，法国

摘要

独立集重配置问题研究的是：能否通过逐个改变顶点，将图中的一个给定独立集转换为另一个独立集，并确保中间过程中的集合始终保持独立。独立集上的极值问题已得到广泛研究：例如，众所周知，一个具有 n 个顶点的图至多有 $3^{n/3}$ 个最大独立集（并且这一界是紧的）。本文研究了在所有具有 n 个顶点的图中，大小为 k 的独立集的最短重配置序列的最大可能长度的渐近行为。

我们给出了 $k=2$ 的紧确界。我们还给出了一个次二次上界（利用超图移除引理），以及针对 $k=3$ 的一个几乎紧的构造。通过证明一个 $n^{2\lfloor k/3\rfloor}$ 下界，我们将结果推广到了 k 的更大取值。

1 引言

许多问题都可以形式化为如下形式：给定一个系统状态的描述，以及一个我们“更希望”系统处于其中的状态描述，能否在不“破坏”系统的前提下，将系统从当前状态转变为更理想的状态？如果可以，需要多少步？例如，这类问题自然会出现在数学谜题、运筹学、计算几何、生物信息学和量子计算等领域。过去几年里，这些问题从结构和算法两个角度都受到了广泛关注，并被纳入所谓的组合重配置框架 之中。关于组合重配置的更多背景知识，请参阅综述 [15, 11, 3]。

对于一个重配置问题，可以自然地定义<存储>构型图，其中顶点对应于解；若能通过一步将两个顶点相互转化，则它们之间存在一条边。构型图的结构性质在不同领域中以不同名称得到了研究，例如，研究其连通性（马尔可夫链不可约性）或哈密顿路径（超立方体的格雷码）。

独立集重配置。 给定一个简单无向图 G，顶点集合$S \subseteq V$（G）是一个独立集，当且仅当 S 中的顶点两两不相邻。寻找基数最大的独立集，即独立集问题，是算法图论中的一个基础问题。众所周知，该问题不仅是NP困难的，而且还是W[1]困难的，并且在 $\varepsilon > 0$为任意值时，除非P = NP [17]，否则无法在 O（$n^{1-\varepsilon}$）范围内近似求解。

我们将独立集视为放置在图的顶点上的一组令牌，且任意两个令牌都不相邻。这由此产生了两种自然的邻接关系，分别定义在

*本工作由 ANR 项目 GrR（ANR-18-CE40-0032）资助

独立集之间，也称为重配置步骤。在令牌跳跃（TJ）问题中，由 Kamiński 等人提出， [8], 单个重配置步骤包括先移除某个顶点 u 上的一个令牌，然后立即将其放回任意其他顶点 v，前提是没有两个令牌变得相邻。此时称该令牌从顶点 u 跳至顶点 v。在令牌滑动（TS）问题中，由 Hearn 和 Demaine 提出， [7], 如果一个独立集可以通过令牌从顶点 u 跳至顶点 v而变为另一个独立集，并且还要求 uv 是图中的一条边，则称这两个独立集相邻。此时称该令牌沿边 uv从顶点 u 滑至顶点 v 。注意，在 TJ 和 TS 问题中，独立集的大小都是固定的。一般而言，在令牌跳跃和令牌滑动问题中，给定一个图 G 以及它的两个独立集 I_s 和 I_t 。目标是确定是否存在一系列重配置步骤（称为重配置序列），能够将 I_s 变换为 I_t （其中重配置步骤取决于具体问题）。

我们可以用构型图重新表述这个问题。给定一个图 G ，我们可以定义构型图 $\mathcal{R}_k(G)$：它的顶点对应大小为 k 的独立集；若能通过一步操作将 I 变为 J （采用令牌跳跃变体），我们就在 I 和 J 之间添加一条边。当且仅当 I 和 J 属于 $\mathcal{R}_k(G)$的同一个连通分量时，才存在一条从 I 到 J 的重配置序列。

这两个问题都得到了广泛研究，只是名称各不相同。即使将范围限制在有界带宽（因此也具有有界路径宽度）的图 [16]和平面图 [7]上，它们仍是 PSPACE 完全问题。在二分图 [10] 上的复杂性也已为人所知（分别为 PSPACE 和 NP），并且在树 [4]和区间图 [2]等更简单的图类上，已有若干多项式算法。

本文始终主要关注令牌跳跃模型，但我们的所有下界也适用于令牌滑动版本。

构型图的直径与(6，3)问题。在许多情况下，即使构型图是连通的，其直径也不是多项式级的（这也是大多数重配置问题不属于 NP 的原因之一）。一项重要的研究方向着眼于寻找能够确保构型图连通的条件。然而，最短重配置序列可能长度的渐近行为尚未得到真正研究。关于“哪些有 n 个顶点的图拥有最多独立集？”这一问题，已有大量研究。相反，据我们所知，“哪些有 n 个顶点的图，其独立集构型图的直径最大？”这一问题尚未得到任何关注。

拥有最多最大独立集的 $3n$ 顶点图，是由若干互不相连的三角形组成的图，它有 3^n 个独立集。在这种情况下，我们很容易看出，只需 $O(n)$ 步，就能将任意一个最大独立集转换为另一个：将某个三角形中的一个顶点替换为另一个顶点即可（由于三角形彼此独立，因此替换时不会产生冲突）。因此，若某个图的独立集构型图具有最大直径，那么它的结构必然截然不同。本文探讨以下问题：在所有规模为 n 的图中，构型图（的一个连通分量）的最大可能直径是多少？如果固定所考虑的独立集大小 k，情况又会如何？

设 k、 n 为两个整数。我们用 $D(n,k)$ 表示所有具有 n 个顶点的图 G 中， $\mathcal{R}_k(G)$ 的连通分量的最大直径。本文主要旨在求出 $D(n,k)$ 的下界和上界。 $D(n,k)$ 有一个自然的上界，即大小为 k 的顶点子集的最大数量。我们将在第 2 节证明，这个上界无法达到，而 $D(n,k)$ 实际上至多为 $O(n^{k-1})$。更准确地说，我们将证明 $D(n,k) \leqslant \binom{n}{k-1}$。

我们可以轻松证明，这个上界的数量级是紧的，因为对于 $k = 2$，如下结论成立，具体证明见第 3 节：

定理 1. $D(n,2) = n - 2$，且 n 个顶点的路径的补图是唯一的紧致例子。

人们自然会想知道，当 k取更大的值时，这个界是否仍然是紧的。答案是否定的，因为我们可以证明，对于每个 $k \geqslant 3$，这个上界实际上都可以略微改进。具体来说，我们将证明：

定理 2. 对于 $k \geqslant 3$，有 $D(n,k) = o(n^{k-1})$。

定理 2 的证明受到 (6, 3) 问题上界证明的启发，并基于超图移除引理的应用。若一个超图 $\mathcal{H}$ 不存在由 $\mathcal{H}$ 中任意 s 个顶点构成且至少包含 t 条超边的集合，则称其为 (s,t)-自由的。(6, 3) 问题（或称 Ruzsa–Szemerédi 问题）询问：一个有 n 个顶点的 (6, 3)-自由 3-一致超图最多能有多少条超边。Ruzsa-Szemerédi 所谓的 (6, 3) 定理 [13] 保证这个值为 $o(n^2)$。

这一提升（$o(n^{k-1})$ 相较于 $O(n^{k-1})$）看起来可能微不足道，但我们可以再次证明，它无法大幅改进。具体而言，我们证明以下结论成立：

定理 3。

$$D(n,3) = \Omega(n^2/e^{O(\sqrt{\log n})}).$$

数值 $n/e^{O(\sqrt{\log n})}$对应于目前已知的不含长度为 3 [1]的等差数列的 $[1,n]$子集的最大渐近规模。改进这个界也将意味着定理 3中的界得到改进。注意，对于 (6,3)-问题，最佳界也具有这一数量级 [13]。

3-重构问题实际上与 (6,3)-问题非常接近。事实上，若我们考虑 G 的 3-构型图中的一条最短路径，并且只考虑该路径上的偶数（或奇数）顶点，那么就得到一个由大小为 3 的超边构成的集合。容易验证，这个超边集合满足 (6,3)-性质。因此，我们的结果特别意味着：给定一个大小为 n 的集合，我们可以找到两个由 $n^2/e^{O(\sqrt{\log n})}$ 3-超边组成的集合 X_1, X_2，使得它们都不含 (6,3) 配置，但它们的并集呈“路径状”；也就是说，除至多两个作为路径端点的超边外，每条超边都与另外两条超边在两个顶点上相交。

定理3的证明思路是从一个团开始，然后删除边，从而在构型图中创建数量几乎呈线性增长、长度为线性的路径。证明中涉及的关键部分，是利用一组 S 没有大小为3的等差数列的整数，证明这些路径彼此独立（也就是说，它们之间在构型图中没有边）。最后，我们再用一个技巧将这些路径连接起来，以得到所声称的直径。请注意，构造$n/e^{O(\sqrt{\log n})}$ 超边 [13] 的经典方法无法轻易用于我们的构造，以解决(6,3)问题，因为该构造是三部的，因此难以重新连接成一个构型图。

对于较大的 k，我们尚无法证明下界与上界几乎相等。特别是，4-构型图是否可能具有超二次直径（而上界为 $o(n^3)$）仍是一个开放问题。我们猜想以下结论成立：

猜想 4。

$$D(n,4) = n^{3-o(1)}.$$

证明超二次直径的第一步，是确保存在一个图，其中包含大量 K_4 的副本，且任意两个副本都不共享一个三角形。最近，这一结论已被证明对任意 k值都成立。具体而言，Gower 和 Janzer 在 [5] 中证明，对于每个 k 和每个n，都存在一个有 n个顶点的图，其中包含 $n^{k-1-o(1)}$ 的 K_k 个副本，且每个 K_{k-1} 最多包含在一个 K_k中。这一结果或许表明 $D(n,\ k)\ = n^{k-1-o(1)}$。

为了让我们针对 $k = 3$ 的构造奏效，必须对其进行大幅修改。事实上，我们的构造很大程度上依赖于这样一个事实：我们可以找到一个图，其 3-构型图中线性路径的数量近似线性增长。要得到超二次下界，我们需要增加路径的数量或长度。我们尝试了这两种方法，但都没有成功。

不过，一般而言，我们能够证明以下结论成立：

定理 5. 对于每个整数 k，都有

$$D(n,k) = \frac{n^{2\lfloor k/3\rfloor}}{e^{O_k(\sqrt{\log n})}}$$

对于 $k = 4$，5，我们还可以确保下界是二次的。实际上，我们证明的结果略强一些，但渐近而言可以用定理 5.

定理 5 的证明思路是依次添加一个图（灵感来自定理 3 的构造），并以巧妙的方式将其与前一个图连接起来，从而使直径以二次速度增长，同时独立集的大小增加 3。请注意，只要存在巧妙的拼接方式，$k = 4$ 的超二次下界就可能改进这个一般下界。

请注意，定理 5 中的渐近估计 k取决于 k，因此当 k 是 n的线性函数时，可能不成立。构造使其 k-构型图中连通分量的直径达到最大值的图（不论 k的值如何），是 Core Challenge 2022 [14] 中针对具有10、50 和 100个顶点的图提出的问题。我们的团队提出了一种通用构造，并取得了最佳结果。用当前的形式主义重述，我们在 [14] 中的论述如下：

引理6。 对于每个整数 n，都存在一个具有 $10n$ 个顶点的图 G，使得其 $\mathcal{R}_{3n}(G)$ 是一条长度为 $\Theta(4^n)$的路径。特别地，$D(n, \frac{3n}{10}) = \Omega(2^{n/5})$。

请注意，我们还给出了一种构造，表明 $D(n, \frac{2n}{5}) = \Omega(2^{n/5})$（其常数略差于引理6中的常数）。粗略地说，这些图的构造方法是分别在具有10 个和 5 个顶点的路径补图之间添加边，方法类似于即将给出的引理18的证明。特别是，这两种构造可以结合起来，得到以下结论。

定理 7. 对于每个 n 以及每个满足 $3n/10 \leqslant k \leqslant 2n/5$ 的 k，$D(n,k) = \Omega(2^{n/5})$.

我们认为，这一下界适用于如此广泛的 k 取值范围，颇令人惊讶，因此提出以下问题。

问题 8. $\max_k D(n,\ k)$ 的渐近行为如何?

2 一般上界

我们先从 $D(n,\ k)$ 的一个初步上界开始本节。

引理 9. $D(n$<style id='5'>, $k)$
$\leqslant \binom{n}{k-1}$。

证明。 考虑图 G 中一个 n 顶点图的 k-构型图上的一条最短路径 $\mathcal{P}$ 。对于 $\mathcal{P}$ 的每条边，我们将其端点所对应的独立集的交集中的 $k-1$ 个顶点与之关联。这定义了一个从 $E(P)$ 到 G 的 $k-1$ 顶点集的映射。由于这样的集合有 n^{k-1} 个，我们只需证明该映射是单射。假设两条不同的边被映射到同一个 $k-1$ 顶点集 X 。那么 X 属于至少三个不同的独立集，而这些独立集是 $\mathcal{P}$ 的顶点。这三个独立集两两相邻，这不可能，因为 $\mathcal{P}$ 是一条最短路径。

□

我们将看到，对于 $k=2$，这个界是紧的。然而，当 k 增大时，这个界可以略微改进，概括如下文回顾的定理2 所示。

定理 2. 对于 $k \geqslant 3$，有 $D(n,k) = o(n^{k-1})$。

证明。 考虑一个图 G ，它有 n 个顶点，且其构型图的最大直径为 d。设 $\mathcal{P} = Z_1, Z_2, \ldots, Z_d$ 是 $\mathcal{R}_k(G)$ 中一条长度为 d 的最短路径。我们将$\mathcal{P}$ 中的节点划分为两个集合 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ ，其中 $\mathcal{P}_1$ （分别为 $\mathcal{P}_2$）是 $\mathcal{P}$ 中的奇数（分别为偶数）节点。注意，若考虑 $\mathcal{P}_i$ 中对应于 $i \leqslant 2$ 的两个子集，则它们的交集大小至多为 $k-2$（否则 $\mathcal{P}$ 就不是诱导的）。

对于每个 $i \leqslant 2$，令 H_i 为一个 $(k-1)$-均匀超图，其顶点与 G 的顶点相同，超边则是包含在某个 $\mathcal{P}_i$中的、大小为 $k-1$ 的独立集。此外，记 K 为具有 k 个顶点的 $(k-1)$-均匀超团。注意，根据构造，每个 $Z \in \mathcal{P}_i$ 都会在 H_i中恰好生成一个 K 副本。另请注意，这种 Z 的每个大小为 $k-1$ 的子集都恰好属于 $\mathcal{P}_i$ 中的一个独立集，因为否则这两个独立集就会相邻，这与 $\mathcal{P}$的极小性矛盾。现在我们区分两种情况：

情形 1. H_i 包含超过 n^{k-1} 个 K副本。
根据引理 9，由某个 $Z \in \mathcal{P}_i$至多生成 n^{k-1} ，因此存在一个 K 的副本，位于 H_i中，使得 $V(K) \notin \mathcal{P}_i$。现在考虑 K 中的三条超边 e_1、e_2和 e_3，它们两两交于 $k-2$ 个顶点（注意，这是可能的，因为 $k \geqslant 3$）。

根据构造，这些超边中的每一条都包含于 $\mathcal{P}_i$ 的某个元素中，因此存在x_1、x_2和 $x_3 \in V(G)$，使得 $e_j \cup \{x_j\} \in \mathcal{P}_i$ 对 $j=1$、2、3 均成立。特别地，每个 e_j 都是 G 的独立集，因此 $e_1 \cup e_2 \cup e_3$ 也是 G 的一个大小为 k 的独立集。因此，在 $\mathcal{R}_k(G)$ 中，所有$e_j \cup \{x_j\}$彼此之间的距离至多为 2，因为它们都与$e_1 \cup e_2 \cup e_3$相邻。这就产生了矛盾，因为 $\mathcal{P}$ 是一条最短路径，而 $\mathcal{P}_1$ （分别地， $\mathcal{P}_2$）只包含 $\mathcal{P}$ 中的偶数（分别地，奇数）顶点，因此三个独立集 $e_j \cup \{x_j\} \in \mathcal{P}_i$ 中必有两个（$j \leqslant 3$ ）之间的距离至少为 4。

情形 2. H_i 至多包含 $n^{k-1} = o(n^k)$ 个 K 的副本。
根据超图移除引理 [12, 6], ，存在一个由 H 的超边组成的集合 S ，使得$|S| = o(n^{k-1})$，且 $H-S$ 不包含 K 的副本。回想一下， S 的每条超边恰好包含在 $\mathcal{P}_1$ 的一个元素中，而 $\mathcal{P}_i$ 的每个元素都会在 H 中生成一个 K 的副本，因此我们得到$|\mathcal{P}_i| \leqslant |S| = o(n^{k-1})$。

最后，注意到对于每个 $i \leqslant 2$，都有 $d \leqslant 2|\mathcal{P}_i| = o(n^{k-1})$。 □

3 下界

3.1 大小为 2 的独立集

本节的主要目标是证明定理 1，下面我们将回顾该定理。

定理 1. $D(n,2) = n-2$，而且 n 个顶点的路径的补图是唯一的紧例。

因此，我们考虑图 G 中大小为 2 的独立集。注意，这些集合恰好是 G 的非边，即 $G=(V,\mathcal{P}_2(V)\setminus E)$ 的边。因此，我们得到以下观察。

观察 10。构型图 $\mathcal{R}_2(G)$ 是 G 的线图。

注意，对于每个图 G，$L(G)$ 中任意一条包含 p 个顶点的诱导路径，都对应于 G 中一条包含 p 条边的路径。特别地，我们得到两个推论。

观察 11。设 A,B 是 G 中大小为 2 的两个独立集，且 $a\in A, b\in B$。存在从 A 到 B 的 TJ 变换，当且仅当 a,b 属于 G 的同一个连通分量。

我们还可以得到以下结果，它说明引理 9 中的界是紧的：

引理 12。 对于每个 n 顶点图 G，

$$\operatorname{diam}(\mathcal{R}_2(G))=\operatorname{diam}(L(\overline{G}))\leqslant \operatorname{diam}(\overline{G})-1\leqslant n-2.$$

注意，最后一个界仅当 G 是一条路径时才取到，由此完成定理 1 的证明。

由于直径是线性的，人们可能会想知道能否在线性时间内判断是否存在这样的变换（并找到它）。注意，我们不能简单地计算补图的线图并在其上运行广度优先搜索。事实上，即使广度优先搜索可以在相对于输入边数的线性时间内完成，这个边数也可能相对于原图的边数呈二次增长。然而，只对大度顶点诱导的图取补图，我们便可得到以下结论。

定理 13. 设 A,B 是 G 中大小为 2 的两个独立集。我们可以在 $O(|V(G)|+|E(G)|)$ 时间内判断是否存在从 A 到 B 的 *TJ* 变换。

证明。设 G 是一个 n-顶点、m-边图，s,t 是 G 中的两个顶点。我们首先用 $O(n+m)$ 时间预先计算 G 中各顶点的度。设 B 为度至少为 $\frac{n-1}{2}$ 的顶点集合，且 $S=V(G)\setminus B$。注意，根据鸽巢原理，S 中任意两个顶点都有一个共同的非邻点，因此它们在 G 中相连。将 S 中的所有顶点合并为单个顶点 x，并在 x 和 $y\notin S$ 之间添加一条边，当且仅当 y 与 S 中的某个顶点相邻；将所得图记为 H。容易验证，s 和 t 在 G 中之间存在路径，当且仅当它们在 H 中之间也存在这样的路径（如果 s 或 t 位于 S 中，则可将其替换为 x）。此外，容易在 $O(n+m)$ 时间内计算出图 H。

可以注意到，图 H 可能是稀疏的，因此其补图的大小可能为 $\Omega(|V(H)|^2)$。然而，请注意

$$(|V(H)|-1)\times\frac{n-1}{2}\leqslant\sum_{v\in B}\deg_G(v)\leqslant 2m,$$

因此 $|V(H)|=O(\frac{m}{n})$。特别地，可以在时间 $O(|V(H)|^2)=O(\frac{m^2}{n^2})=O(m)$ 内计算 H，并在 H 中进行广度优先搜索。□

请注意，我们提供的算法可以轻松调整为在变换存在时返回一个（可能并非最优的）变换。

3.2 大小为 3 的独立集的近似二次构造

本节余下部分将用于证明以下结果：

定理 3。

$$D(n,3)=\Omega(n^2/e^{O(\sqrt{\log n})}).$$

证明分为两个步骤。首先，我们证明存在一个图，其构型图是不交并，由 $n/e^{O(\sqrt{\log n})}$ 条线性长度的路径组成。然后，我们证明，从一个构型图不连通的图出发，我们可以（只需添加少量顶点）得到一个构型图连通的图，且其直径至少为初始构型图各连通分量直径之和。第一步针对 $k=3$，并基于这样一个事实：存在几乎具有线性大小的整数子集，其中不含长度为 3 的等差数列；而粘合过程具有一般性，对 k 的任意取值都成立。我们先来证明粘合引理。

引理 14。令 $k\geqslant 3$。令 G 为一个具有 n 个顶点的图，其 k-构型图包含 r个连通分量 $\mathcal{C}_1$、……、$\mathcal{C}_r$，其直径分别为 d_1、……、d_r。那么，存在一个至多有 $n+(3k-2)\cdot(r-1)$ 个顶点的图，其构型图的直径至少为 $(4k-4)(r-1)+\sum_{i\leqslant r}d_i$。

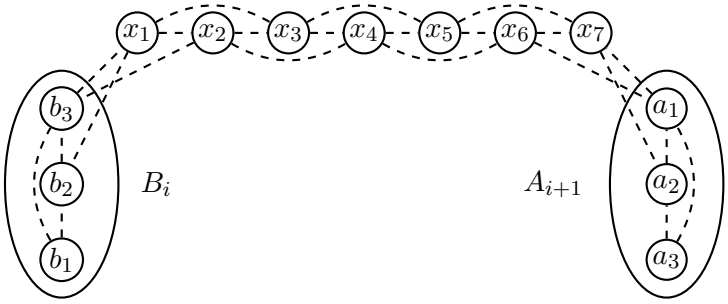

图 1：引理 14 中 $k=3$的构造，其中仅绘出了非边。

证明。对于每个 $i\leqslant r$，记 A_i 和 B_i 为连通分支 $\mathcal{C}_i$ 中距离为 d_i 的两个独立集，该连通分支属于 k-构型图。对于每个 i，记 a^i_j（分别为 b^i_j）为 A_i（分别为 B_i）的第 j个顶点。此外，我们假设 a^i_k 和 b^i_1 分别是从 A_i到 B_i的最短序列 P_i 中最先和最后被修改的顶点。注意，集合 $(A_1$、……、A_r、B_1、……、$B_r)$ 可能相交。

对于每个 $i\leqslant r-1$，我们创建 $3k-2$ 个新顶点 x^i_1，……，x^i_{3k-2}，以便在新图的构型图中连接 B_i和 A_{i+1}（构造示意见图 1）。我们首先添加新顶点与 $V(G)$ 之间的所有边；对于每个 $i\neq j$，无论 a、b如何，顶点 x^i_a 和 x^j_b 都相邻。此外，对于每个 $p<q\leqslant 3k-2$，x^i_p 与 x^i_q 相邻当且仅当 $q-p>k-1$。最后，我们删除以下边：对于每个 j，删除 x^i_j（分别为 x_{3k-2-j}）与 $b^i_{j'}$（分别为 $a^{i+1}_{k-j'}$）之间满足 $j'>j$的边。将所得图记为 H。

令 X_i 为顶点 $\{b^i_1,\ldots,b^i_k,x^i_1,\ldots,x^i_{3k-2},a^{i+1}_1,\ldots,a^{i+1}_k\}$ 构成的（有序）集合。我们先证明关于独立集结构的以下简单命题：

命题 1　5. 令 $i\leqslant r-2$。每个包含 $\{x^i_1,\ldots,x^i_{3k-2}\}$ 中一个顶点的 k-独立集 S ：

- 由 X_i 中连续的 k 个顶点组成，并且，

如果 $\mathcal{R}_k(H)$ 在 $\{x^i_2,\ldots,x^i_{3k-3}\}$ 中包含一个顶点，则 • 的度为 2。

证明。首先证明：如果独立集 S包含 $\{x^i_1,\ldots,x^i_{3k-2}\}$ 中的一个顶点，那么它就包含 X_i中的连续顶点。

如果 $S \subseteq \{x_1^i, \ldots, x_{3k-2}^i\}$，那么记 S中的第一个和最后一个顶点分别为 x_a^i 和 x_b^i。根据构造，由于 S 是一个独立集，我们必有 $b-a \leqslant k-1$。于是 S 只包含 x_a^i 和 x_b^i的非邻点，因此 $b-a=k-1$ 和 $S=\{x_a^i, \ldots, x_b^i\}$。所以从现在起，我们可以假设 S 包含 V中的一个顶点（G）。

由于 x_{k-1}^i、……、x_{2k-2}^i 都与 G 全邻接，集合 S不能包含这些顶点中的任何一个。又由于 $\{x_1^i, \ldots, x_{k-2}^i\}$与 $\{x_{2k-1}^i, \ldots, x_{3k-2}^i\}$ 全邻接，根据对称性，我们可以假设 S包含 $\{x_1^i, \ldots, x_{k-2}^i\}$ 中的顶点，但不包含 $\{x_{2k-1}^i, \ldots, x_{3k-2}^i\}$ 中的顶点。令 $a \leqslant k-1$ 表示满足 $x_a^i \in S$ 的最大索引。根据构造， x_a^i 与序列中排在它之前的 $k-1$ 个顶点均不相邻，并且与 $H \setminus X_i$ 中所有其他顶点全邻接。因此 $S=\{b_{a+1}^i, \ldots, b_k^i, x_1^i, \ldots, x_a^i\}$。

对于第二项，注意到 X_i 中每组连续的 k 个顶点确实构成一个独立集，并且与排序中紧邻其前和其后的 k 个顶点所对应的独立集相连。此外，每个与 $\{x_2^i, \ldots, x_{3k-3}^i\}$ 相交的独立集 S 至少包含 $\{x_1^i, \ldots, x_{3k-2}^i\}$ 中的两个顶点。因此， S 只与至少包含 $\{x_1^i, \ldots, x_{3k-2}^i\}$ 中一个顶点的独立集相邻。根据第一项，这些独立集由 X_i 中连续的 k 个顶点组成，因此 S 在 $\mathcal{R}_k$（H）中恰有两个邻点。 □

因此，将 k-构型图限制在 H 上的 X_i 会导出一条从 B_i 到 A_{i+1}、长度为 $4k-2$ 的路径 $\mathcal{P}_i$ 。对于每个 $i \leqslant r$，将这些路径与从 A_i 到 B_i 的最短重配置序列拼接起来，我们便得到一条从 A_1 到 B_r 、长度为 $(4k-2)(r-1)+\sum_{i \leqslant r} d_i$ 的重配置序列 $\mathcal{P}$ 。

为了完成证明，我们必须证明可以将序列 $\mathcal{P}$ 恰好缩短 $2(r-1)$ 步（且不存在更短的变换）。事实上，对于每个 $i \leqslant r-1$，考虑一条从 A_i 到 B_i 的最短重配置序列，其中 a_1^i 是在序列开始时从 A_i 中删除的顶点，而 b_1^i 是在序列结束时于 B_i 上最后移动的顶点（根据假设，这样的重配置序列存在）。若记 B_i' 为 B_i之前的独立集，则 B_i' 包含 $B_i \setminus \{b_1^i\}$。于是，在构型图中， B_i' 与 $(B_i \cup x_1^i) \setminus b_1^i$ 相邻，因此我们可以从 A_1 到 B_r的重配置序列中删除 B_i ，仍得到一条重配置序列。类似地，对于每个 $2 \leqslant i \leqslant r$，我们都可以在 A_i 上找到该序列的一条捷径。因此，我们可以将 $\mathcal{P}$ 缩短 $2(r-1)$ 步。

我们声称这种变换的长度最短。下面简要说明理由。考虑一个 H中的独立集，其中恰好包含一个 $\{x_j^i \mid i \leqslant r-1, j \leqslant 3k-2\}$顶点。根据命题 x_1^i 15 ，它应包含顶点 x_{3k-2}^i 或 i （对于某个 ）以及 $k-1$ 中的一个独立集的顶点，或 $\mathcal{C}_i$ 中的顶点。因此，它只能与 $\mathcal{C}_i$连通分支中的一个独立集、 $\mathcal{C}_{i+1}$ 中的一个独立集，或一个包含 X_i 中两个顶点的独立集相邻，这由命题15可知。

再次运用命题 15 可知，这意味着从一个仅包含 x_1^i （分别为x_{3k-3}^i）的独立集出发，我们只能到达 $\mathcal{C}_{i+1}$ （分别为 $\mathcal{C}_i$）中包含 $B_{i-1} \setminus b_1^{i-1}$（分别为$A_{i+1} \setminus a_k^{i+1}$ ）的独立集。 □

在证明可以得到几乎线性数量、且规模几乎线性的连通分支之前，我们需要介绍群论中的一些定义和结果。

设 S 是一个整数集。我们称 S 为无三项等差数列 ，如果其中不包含长度为 3 的等差数列，即不存在 $s_1 < s_2 < s_3$ 属于 S 使得 $s_2 - s_1 = s_3 - s_2$。确定 $[1, n]$ 的最大无三项等差数列子集的可能大小，是一个受到广泛研究的问题，其精确答案尚不为人所知。研究表明，在 $\mathbb{N}$ [9] 中不存在任何具有正密度的无三项等差数列集。不过，Behnrend 在 [1] 中证明，存在大小为 $n/e^{O(\sqrt{\log n})}$ 的 $\{1, \ldots, n\}$ 无三项等差数列子集。注意，如果 S 是无三项等差数列集，那么集合 $4S+1$ 也是无三项等差数列集。因此，存在一个大小为 $n/e^{O(\sqrt{\log n}}$ 的无三项等差数列序列)，其中只包含值模 4 余 1 的整数。本文后文将这样的集合称为奇数 无三项等差数列 序列。

现在设 p 是一个素数。众所周知，对于每个 $\alpha \in \{1, \ldots, p-1\}$， $k\alpha$ 模 p 的序列是一个周期为 p的周期序列。也就是说 $\{0, \alpha, \ldots, (p-1)\alpha\} = \{0, \ldots, p-1\}$

模 p。

我们断言以下结论成立：

引理16. 设 n 是一个素数。设 S 是一个奇数的、无 3-等差数列的序列，且其最大整数不超过 $n/8$。那么，存在一个有 $n-1$ 个顶点的图，其构型图是 $|S|$ 条长度为 $n-3$的路径的不交并。

证明. 设 G 是从一个有 n 个顶点的团中删去边 $(i, i+s)$ 和 $(i, i+2s)$ 后得到的图，其中 $s \in S$ 和 $i \leqslant n$均按模 n理解。

我们断言， $\mathcal{R}_3(G)$由 $|S|$ 个长度为 n的诱导圈组成。首先注意，对每个$s \in S$，都有 n 个独立集，即 $\{ks, (k+1)s, (k+2)s\}$ $(0 \leqslant k < n)$，它们诱导出一个环。特别地， $\mathcal{R}_3(G)$包含 $|S|$ 个长度为 n的环。

现在我们来证明，这个环的并是诱导的。为此，设 $I = \{a, b, c\}$ 和 $I' = \{a', b', c'\}$ 是两个独立集，满足 $c-b = b-a = s \in S$和 $c'-b' = b'-a' = s' \in S$ with$s \neq s'$。如果 $I \cap I'$包含两个元素 x和 y，那么注意到 $x-y \in \{\pm s, \pm 2s\} \cap \{\pm s', \pm 2s'\}$，这不可能，因为 s 和 s' 是小于 $n/8$ 且模 4 同余于 1 的不同整数。因此I 和 I' 不相邻。

最后，我们证明 $\mathcal{R}_3(G)$ 没有其他顶点。设 $\{a, b, c\}$ 是 G的一个独立集。如果 $b-a \in S$和 $c-b \in S$，那么 $c-a$是偶数且属于 $2S$，因此可以写成 $b-a = s, c-b = s'$和 $c-a = 2s'' = s'-s$。由于 S是无三项等差数列，我们有 $s = s' = s''$，进而 $b-a = c-b$（再进而 $\{a, b, c\}$是上述集合之一）。否则，$b-a$或 $c-b$不属于 S，因此 $c-a$ 模 4 同余于 0 或 3，进而 $c-a \notin S \cup 2S$，这就产生了矛盾。

因此， $\mathcal{R}_3(G)$ 是若干个彼此之间没有边相连的环的不交并。现在，如果我们从 G 中移除顶点 0，那么这些环都会变成路径（对每个 S，我们都会移除包含它的三个独立集），由此证明得证。 □

我们结合引理 14 和引理16 来证明定理 3。设 S 是一个大小为 $n/e^{O(\sqrt{\log n})}$ 的奇数3-等差数列自由序列。根据引理 14，存在一个以 $n-1$ 个顶点为顶点集的图 G，其 3-构型图有 $|S|$ 个直径为 $n-3$ 的连通分量。将引理16 应用于 G，我们得到一个新图，它有 $n-1+7 \cdot (|S|-1)$ 个顶点，且其 3-构型图的直径至少为 $8 \cdot (|S|-1) + |S| \cdot (n-3) = n^2/e^{O(\sqrt{\log n})}$，由此证明得证。

我们以如下问题结束本节，该问题将定理 13 推广到大小为 3 的独立集。

问题 17。 我们能否在（次）二次时间内计算直径，或判断两个大小为 3 的独立集之间是否存在变换?

3.3 一般下界

本节旨在将第 3.2 节中的构造推广到更大的 k取值。遗憾的是，对于较大的 k，我们未能得到与上界几乎匹配的下界，但仍然得到了以下结果。

定理 5。 对于每个整数 k，我们都有

$$D(n, k) = \frac{n^{2\lfloor k/3 \rfloor}}{e^{O_k(\sqrt{\log n})}}$$

我们先通过一个中间构造，介绍证明的大致思路。

引理18。 设 G 是一个独立数为 k 的图，且 $\mathcal{R}_k(G)$ 的直径为 d。那么对于每个整数 n，都存在一个含有 $|V(G)| + 6n + 2$ 个顶点的图 H，使得 $\mathcal{R}_{k+2}(H)$的直径至少为 $2dn$。

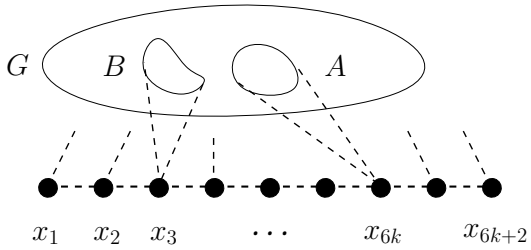

图 2：引理18的证明中的构造。为便于阅读，我们只表示了与 X中顶点关联的非边。

证明。 设 A 和 B 是 $\mathcal{R}_k(G)$中两个大小为 k 、距离为 d 的独立集。

我们构造 $6n+2$ 个顶点 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_{6n+2}\}$，它们诱导出一条路径的补图。对于每个 $1\leqslant \ell \leqslant n$，将顶点 $x_{6\ell-3}$ 和 $x_{6\ell}$ 分别连接到 $V(G)\setminus B$ 和 $V(G)\setminus A$。将所得的图记为 H （示意见图 2）。设 C、D 为独立集 $A\cup\{x_1,x_2\}$ 和 $A\cup\{x_{6n+1},x_{6n+2}\}$。由于 k 是 G 的独立数，且 X 是一条路径的补图，因此 H 的最大独立集大小为 $k+2$，并且它们都包含 $V(G)$中的 k 个顶点以及 X中的两个顶点。

特别地，在从 C 到 D 的每次变换中，X 中任意时刻都存在两个令牌，且这些令牌的移动对应于 $\mathcal{R}_2(X)$ 中的一条路径。因此，为了将令牌从 $\{x_1,x_2\}$ 滑动到 $\{x_{6n+1},x_{6n+2}\}$，每次变换都必须依次经过某些独立集 S_1，……，S_{6n+1}，使得 $S_i\cap X=\{x_i,x_{i+1}\}$。在所有这样的独立集中，我们选择 S_i 作为第一个这样的独立集。注意，对于每个 $i=3 \mod 6$（分别为 $0 \mod 6$），$S_i=B\cup\{x_i,x_{i+1}\}$（分别为 $S_i=A\cup\{x_i,x_{i+1}\}$）。因此，对于每个 $i=0$ 或 $3 \mod 6$，要将 S_i 变换为 S_{i+3}，至少需要 $d+3$ 步（因为我们需要将 A 变换为 B，再加上在 X 上滑动令牌三次）。

因此，从 C到 D的重配置序列长度至少为 $2n(d+3)$，证明至此完成。

□

由于图 H 是在引理 18 中构造的，且其最大独立集的大小为 $k+2$，我们可以从路径的补图开始迭代这一过程，并证明以下结论成立：

推论 19。对于任意 k, $D(n,k)=\Omega_k(n^{\lfloor k/2\rfloor})$。

在引理 18的证明中，我们可以把索引为 0 模 3 的顶点视为收费站，迫使我们在 G 中进行大量修改，才能经过这些顶点。为了改进推论 19中的界，我们将推广引理 18。具体而言，我们不再将路径的补图拼接到 G 上并将独立集的大小增加 2，而是复制定理 3 中的图（稍作修改），并将独立集的大小增加 3。请注意，当我们有一个重构直径很大的图时，并不能直接将它与另一个图拼接，从而得到一个重构直径很大的图，因为我们必须谨慎安排收费站的位置。（这就是定理 3 中的图必须稍作修改，才能适用于我们的情形的原因。）因此，定理 5 的关键在于以下引理 18的类似结论。

引理 20. 设 n、k 为两个整数。设 G 是一个图，其最大独立集的大小为 k，且其 k-构型图的直径为 d。那么，存在一个至多有 $|V(G)|+3kn$ 个顶点的图，其$(k+3)$-重构直径至少为 $\frac{dn^2}{e^{O(\sqrt{\log n})}}$。

证明。 该构造的灵感来自第 3.2 节。令 S' 为3-AP-free 序列中最大的一个，其中$[1,n/64]$ 且 S 为集合 $8S'+1$。回想一下，$|S|=\frac{n}{e^{O(\sqrt{\log n})}}$。将 H所得到的图记为

将引理 16 应用于 S。回想一下， H的顶点可以标记为从 1 到 $n-1$，并满足：

1. 大小为 3 的独立集的值在模 8 意义下连续；2. 如果两个这样的集合在 $\mathcal{R}_3(H)$中相邻，那么它们的对称差中包含两个差值为 ± 3 （模 8）的元素。3. H 的每个顶点都至少出现在$\mathcal{R}_3(H)$每个连通分量中的一个独立集中。

设 A 和 B 是 $\mathcal{R}_k(G)$中距离为 d 的两个 G 独立集。记G' 为通过取 G 和 H 的一个副本并添加所有以下边所得到的图：

- 连接 $V(G) \setminus A$ 与 H 中模 8 余 0 的顶点。
- 连接 $V(G) \setminus B$ 与 H 中模 8 余 4 的顶点。

注意，由于 G 不存在大小超过 k的独立集，因此 G'中任意大小为 $k+3$的独立集都可分解为 G的 k个顶点和 H的 3 个顶点。特别地， G' 中从 I到 J的任意重配置序列都会导出 H中从 $I \cap V(H)$到 $J \cap V(H)$的重配置序列（ G的情形也同样成立）。因此， $\mathcal{R}_{k+3}(G')$的连通分量至少与$\mathcal{R}_3(H)$一样多。

令 $X_1, \ldots, X_r$ 为 $\mathcal{R}_3(H)$ 的一个连通分支，它诱导出一条路径。根据构造，我们可以假设 X_1 包含模 8 余 1、2 和 3 的顶点；由 (1) 和 (2) 可知，每个 X_i 都包含模 8 余 $i, i+1$ 和 $i+2$ 的顶点。将 r 至多缩减 7 后，我们甚至可以假设 X_r 也包含模 8 余 1,2 和 3 的顶点。因此， $X_1 \cup A$ 和 $X_r \cup A$ 是 G' 的独立集。

注意，若 $i = 1$ 模 4，则 X_i 与 $V(G)$ 之间没有边，因此 $X_i \cup A$ 与 $X_i \cup B$ 之间存在长度为 d 的重配置序列。因此，可以通过以下步骤从 $X_1 \cup A$ 到达 $X_r \cup A$： $X_1 \cup B, X_2 \cup B, X_3 \cup B, X_4 \cup B, X_5 \cup B, X_5 \cup A, \ldots$。

因此， $X_1 \cup A$ 和 $X_r \cup A$ 属于 $\mathcal{R}_{k+3}(G')$ 的同一个连通分量。现在来计算它们的距离（下界）。考虑 $X_1 \cup A$ 和 $X_r \cup A$之间一条最短的重配置序列。回想一下，这会得到 X_1 到 X_r 在 H中的一条（不一定最短的）重配置序列。根据 (3)，对于 H 中每个模 8 余 0 的顶点，我们可以选取一个包含它的集合 X_i，并将它们构成的子序列记为 X_{i_1}、……、 $X_{i_{n/8}}$（注意，由于根据 (1)，没有任何 X_i 能包含两个模 8 余 0 的顶点，因此该子序列定义良好）。

现在根据 (1) 和 (2)，注意到在每对 X_{i_j} 和 $X_{i_{j+1}}$之间的重配置序列中，必定存在某个包含一个模 8 余 4 顶点的独立集 $X_{i'_j}$。根据构造， G' 中包含每个 X_{i_j} （分别为 $X_{i'_j}$）的唯一独立集是 $X_{i_j} \cup A$ （分别为 $X_{i'_j} \cup B$）。因此， $X_{i_j} \cup A$ 和 $X_{i'_j} \cup B$ 之间的距离至少为 d，$X_{i'_j} \cup B$ 和 $X_{i_{j+1}} \cup A$之间的距离也至少为 d。

因此， $X_1 \cup A$ 与 $X_r \cup A$ 之间的距离至少为 $2d \times \binom{n}{8} - 1) = \frac{dn}{4} - 2d$。由于$\mathcal{R}_{k+3}(H)$至少包含 $|S|$ 个直径至少为 $\frac{dn}{4} - 2d$的连通分支，将引理 14 应用于G'，可得到一个具有 $|V(G')| + (3k-2)(|S|-1) = |V(G)| + n - 1 + (3k-2)(|S|-1)$ 个顶点且直径至少为 $(4k-4)(|S|-1) + |S|dn/4 - 2d|S|$ 的图；鉴于 $|S| = n/e^{O(\sqrt{\log n})}$，结论得证。

□

作为直接推论，我们得到定理5。

4 结论

让我们以这一简单的说明开始结论：

引理 21. 设 G 是一个图。存在一个与 G 顶点数相同的超图 G'，使得 $\mathcal{R}_3(G')$ 是一条路径，并且 $\mathcal{R}_3(G)$ 与 $\mathcal{R}_3(G')$ 的连通分量的最大直径相同。

证明。 我们首先任意向 G 添加边，同时保持 $\mathcal{R}_3(G)$ 中连通分支的最大直径不变。最后，我们证明 $\mathcal{R}_3(G)$ 是一条路径。设 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{R}_3(G)$ 中长度最长的最短路径。

假设 $\mathcal{R}_3(G)$ 中存在一个不在 $\mathcal{P}$ 中的节点 $Z = \{u, v, w\}$。对于每个 $x \neq y \in Z$，将边 xy 添加到 G 会减小 $\mathcal{R}_3(G)$ 中 $\mathcal{P}$ 所在连通分支的直径。因此，必定存在一个包含 x 和 y 的独立集 $\mathcal{P}$。

因此，我们可以假设 $\mathcal{P}$ 包含三个独立集 $\{u, v, a\}$，$\{u, w, b\}$ 和 $\{v, w, c\}$，它们两两不同，因为 $Z \notin \mathcal{P}$。由于 $\mathcal{P}$ 是一条最短路径，且这些集合都是 Z 的邻点，它们必定在 $\mathcal{P}$ 中相邻。因此，我们有 $a = b = c$。然而，$\{u, v, a\}$，$\{v, w, a\}$ 和 $\{u, w, a\}$ 在 $\mathcal{R}_3(G)$ 中诱导出一个三角形，这与 $\mathcal{P}$ 是诱导的矛盾。 □

请注意，通过我们的构造得到的所有图也都满足：它们的构型图是路径。我们猜想以下结论普遍成立：

猜想 22. 对于每个 $k \geqslant 2$ 和每个 n，都存在一个具有 n 个顶点的图 G，使$D(n, k)$ 达到最大值，且 $\mathcal{R}_k(G)$ 是一条路径。

请注意，该结果对于 $k = 2$ (因为路径的补图是紧的)以及 $k = 3$ 均成立，后者已在引理21中证明。

另一个有趣的问题如下。我们已经指出，(6,3) 问题的下界和上界，分别对应于 $\mathcal{R}_3(G)$可能达到的最大直径的下界和上界。这两个问题是否等价（相差一个乘法常数）？ 虽然对于某个图 G，若存在更大的直径，便可立即推出 (6,3) 问题有更好的上界（只需考虑一条最短路径上的偶数顶点），但反过来并不显然。

致谢。 这项工作的起源要归功于CoRe 编程挑战 [14] 该挑战在 2022年 的主题是寻找具有最大独立集重构直径的、含有 10、50 和 100 个顶点的图。

参考文献

[1] F. A.Behrend. 不包含三个项构成等差数列的整数集合。《美国国家科学院院刊》，32(12):331–332, 1946.

[2] M. Bonamy 和 N. Bousquet。弦图上的令牌滑动。载于 H. L. Bodlaender 和 G. J. Woeginger 编，计算机科学中的图论概念——第*43*届国际研讨会，*WG 2017*，埃因霍温，荷兰，*2017*年*6*月*21*日至*23*日，修订精选论文，收录于《计算机科学讲义》第10520卷《计算机科学讲义》，第127–139页。施普林格，2017年。

[3] N. Bousquet、A. E. Mouawad、N. Nishimura 和 S. Siebertz。关于独立集和（连通）支配集重配置问题的参数化复杂性的综述。*CoRR*，abs/2204.10526，2022年。[4] E. D. Demaine、M. L. Demaine、E. Fox-Epstein、D. A. Hoang、T. Ito、H. Ono、Y. Otachi、R. Uehara 和 T. Yamada。树上滑动令牌的线性时间算法。《理论计算机科学》，600：132–142，2015年10月。[5] W. Gowers 和 B. Janzer。团的 Ruzsa–Szemerédi 问题和彩虹图兰问题的推广。《组合学、概率与计算》，30(4)：591–608，2021年。[6] W. T. Gowers。超图正则性与多维Szemerédi定理。《数学年刊》，第897–946页，2007年。[7] R. A. Hearn 和 E. D. Demaine。通过非确定性约束逻辑计算模型证明滑块拼图及其他问题的 PSPACE完全性。《理论计算机科学》，343(1-2)：72–96，2005年。[8] M. Kamiński、P. Medvedev 和 M. Milanič。独立集可重配置问题的复杂性。《理论计算机科学》，439：9–15，2012年。[9] R. Klaus。关于若干整数集合。《巴黎科学院院刊，数学系列 *I*》，234(388-390)：19，1952年。[10] D. Lokshtanov 和 A. E. Mouawad。二部图上独立集重配置的复杂性。《*ACM*算法汇刊》，15(1)：7:1–7:19，2019年。[11] N. Nishimura。重配置导论。《算法》，11(4)：52，2018年。[12] V. Rödl、B. Nagle、J. Skokan、M. Schacht 和 Y. Kohayakawa。超图正则性方法及其应用。《美国国家科学院院刊》，102(23)：8109–8113，2005年。[13] I. Z. Ruzsa 和 E. Szemerédi。不存在由六个点构成三个三角形的三元系。《组合学（凯斯特海伊，*1976*年），*Bolyai János* 数学学会论文集》，18：939–945，1978年。[14] T. Soh、Y. Okamoto 和 T. Ito。Core Challenge 2022：求解器和图描述。*CoRR*，abs/2208.02495，2022年。[15] J. van den Heuvel。变化的复杂性。《组合学综述*2013*》，409：127–160，2013年。[16]M. Wrochna。有界带宽和树深度下的重配置。*CoRR*，2014年。arXiv:1405.0847。[17] D. Zuckerman。线性度提取器以及最大团和色数的不可近似性。《计算理论》，3(1)：103–128，2007年。