arXiv:2301.02024v1 [math.NA] 5 Jan 2023

电气工程中的端口哈密顿系统建模

A. Bartel、M. Clemens、M. G¨unther、B. Jacob 和 T. Reis

摘要 端口哈密顿建模框架能够构建保留能量守恒或耗散不等式等基本物理性质的模型。如果所有子系统均建模为端口哈密顿系统，且输入与输出之间呈线性关系，则整体系统也可以建模为端口哈密顿系统（PHS），从而保留底层子系统的性质。若耦合由斜对称矩阵给出（这在许多应用中很常见），则可以直接根据各子系统推导出整体系统，无需引入虚变量，也就避免了人为增加系统的复杂性。因此，PHS 框架尤其适用于多物理系统建模。

本文表明，端口哈密顿系统是哈密顿系统的自然推广，并将耦合端口哈密顿系统定义为常微分方程和微分代数方程。为突出其在电气工程应用中的适用性，我们针对 MNA 网络方程、电磁器件及其耦合系统推导了端口哈密顿系统（PHS）模型。

Andreas Bartel，Michael G¨unther 伍珀塔尔大学，IMACM，应用数学教席，Gaußstraße 20，D-42119 伍珀塔尔，电子邮箱： [bartel,guenther]@uni-wuppertal.de Markus Clemens 伍珀塔尔大学，IMACM，电磁理论教席，Rainer- Gruenter-Straße 21，D-42119 伍珀塔尔，电子邮箱：clemens@uni-wuppertal.de Birgit Jacob 伍珀塔尔大学，IMACM，泛函分析教席，Gaußstraße 20，D-42119 伍珀塔尔，电子邮箱：bjacob@uni-wuppertal.de Timo Reis 伊尔梅瑙工业大学，数学与自然科学学院，系统理论与偏微分方程教席，PF 10 05 65，D-98684 伊尔梅瑙，电子邮箱：timo.reis@tu-ilmenau.de

1 端口哈密顿系统建模概要

端口哈密顿系统（PHS）是哈密顿系统的一种推广

$$\dot{x} = J \cdot \nabla H(x), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

其中 $x = (p, q)$ 由广义位置 $q(t) \in \mathbb{R}^n$ 和动量 $p(t) \in \mathbb{R}^n$（其中 $t \in [0, T]$）构成，斜对称矩阵 J 定义为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

哈密顿量 $H(x) = H(p, q) = U(p) + V(q)$ 定义为势能与动能之和，它将 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 映射到，且二阶连续可微。哈密顿流 $\varphi(t; x_0)$, 即方程 (1) 在时间点 t 的解，以初始值 $x(0) = x_0$ 为起点，具有以下四种几何性质：

1. 哈密顿量守恒：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\varphi(t; x_0)) = (\nabla H(\varphi(t; x_0)))^\top J(\nabla H(\varphi(t; x_0))) = 0.$$

2. 时间可逆性：

$$\rho \circ \varphi(t; x_0) \circ \rho \circ \varphi(t; x_0) = x_0,$$

其中 $\rho(p, q) = (-p, q)$，这是哈密顿流的 ρ-可逆性的直接结果：$\rho \circ J\nabla H(\varphi(t; x_0))) = -J\nabla H(\rho \circ \varphi(t; x_0)))$。

3. 哈密顿流的辛结构：

$$\Psi(t)^\top J^{-1} \Psi(t) = J^{-1}, \qquad \Psi(t) := \tfrac{\partial \varphi(t; x_0)}{\partial x_0},$$

这是 J 斜对称性的直接结果。

4. 体积保持：

$$(\det \Psi(t))^2 = 1,$$

这可由第 3 点中的辛结构立即推出。

第一步推广：任意斜对称矩阵 J

如果在（1）中将 J 替换为任意斜对称矩阵，哈密顿量仍然保持不变。由于 x 将不再具有经典力学中广义位置和动量的特征，时间可逆性通常也不再成立。然而，当 J 规则时，流的辛结构仍然成立，而体积保持仍是哈密顿流的结果。

第二个推广步骤：向系统中加入耗散

允许流变为耗散的，我们可以将 (1) 推广为耗散哈密顿系统

$$\dot{x} = (J - R) \cdot \nabla H(x), \quad x(0) = x_0 \tag{2}$$

其中 $R \geq 0$ 为对称半正定矩阵。在这种情况下，流既不是辛的，也不再保体积，而哈密顿量的守恒则由耗散性条件取代

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t)) = (\nabla H(x))^\top \dot{x} = -(\nabla H(x))^\top R \nabla H(x) \leq 0 \\
&\Rightarrow H(x(t)) = H(x_0) - \int_0^t (\nabla H(x(\tau)))^\top R \nabla H(x(\tau)) \, \mathrm{d}\tau \leq H(x_0).
\end{aligned}$$

第三个推广步骤：通过输入和输出与环境耦合

允许输入和输出将系统与环境耦合后，我们得到一个由以下特征描述的线性端口哈密顿系统

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (J - R) \cdot \nabla H(x) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \\
y &= B^\top \nabla H(x)
\end{aligned}$$

其中输入为 $u(t) \in \mathbb{R}^p$，输出为 $y(t) \in \mathbb{R}^p$，端口矩阵为 $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$。此时耗散性不等式为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t)) &= (\nabla H(x))^\top \dot{x} = -(\nabla H(x))^\top R \nabla H(x) + (\nabla H(x))^\top B u(t)) \\
&= -(\nabla H(x))^\top R \nabla H(x) + y(t)^\top u(t) \leq y(t)^\top u(t) \\
\Rightarrow H(x(t)) &= H(x_0) - \int_0^t (\nabla H(x(\tau)))^\top R \nabla H(x(\tau)) \, \mathrm{d}\tau + \int_0^t y(\tau)^\top u(\tau) \mathrm{d}\tau \\
&\leq H(x_0) + \int_0^t y(\tau)^\top u(\tau) \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

第四个推广步骤：端口哈密顿微分代数方程系统

线性端口哈密顿系统可以轻松推广为如下端口哈密顿微分代数方程系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ex) = (J - R) \cdot z(x) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \tag{3a}$$

$$y = B^\top z(x) \tag{3b}$$

其中矩阵 $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可能是奇异矩阵，且非线性映射z： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足相容条件 $E^\top z = \nabla H$。现在

耗散性条件可表示为

$$\begin{aligned} H(x(t)) &= H(x_0) - \int_0^t z(x(\tau))^\top R \nabla z(x(\tau)) \,\mathrm{d}\tau + \int_0^t y(\tau)^\top u(\tau) \,\mathrm{d}\tau \\ &\leq H(x_0) + \int_0^t y(\tau)^\top u(\tau) \,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

端口哈密顿建模的关键点如下：存在一种简便的方法，可以将任意多个端口哈密顿微分代数方程系统耦合起来，使整体系统仍然是一个端口哈密顿微分代数方程系统，同时保持耗散性不等式。

考虑 r 自治端口哈密顿微分代数方程系统 tems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_i x_i) = (J_i - R_i) z_i(x_i) + B_i u_i, \tag{4a}$$

$$y_i = B_i^\top z_i(x_i) \tag{4b}$$

其哈密顿量为 r 哈密顿量 H_1、H_2、.....、H_r，并满足相容条件 $E_i^\top z_i = \nabla H_i$。如果输入和输出满足线性交互连接关系$Mu + Ny = 0$，对于聚合输入 $u = (u_1、u_2、.....、u_r)$ 和输出$y = (y_1、y_2、.....、y_r)$，则文献 [13] 已证明，可以将聚合系统写成联合端口哈密顿微分代数方程系统：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{u} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} J - R & B & 0 & 0 \\ -B^\top & 0 & I_m & -M^\top \\ 0 & -I_m & 0 & -N^\top \\ 0 & M & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(x) \\ \hat{u} \\ \hat{y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \hat{y}, \end{aligned}$$

其中 $z(x)^\top = (z_1(x_1)^\top、 z_2(x_2)^\top、.....、 z_r(x_r)^\top)$，引入新的虚变量 $\hat{}u$、$\hat{}y$，并令 $X = \mathrm{diag}(X_1、 X_2、.....、 X_r)$，其中 $X \in \{E, J, R, B\}$。端口哈密顿微分代数方程系统的这一耦合性质使端口哈密顿建模框架非常适用于多物理场应用。

现在，我们考虑外部时变输入。为此，我们将输入和输出分为外部（上横线表示）和内部（上尖帽表示），即将 $B_i u_i$ 分为 $\bar{B}_i \bar{u}_i + \hat{}B_i \hat{}u_i$。于是，子系统 **(4)** 可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_i x_i) = (J_i - R_i) z_i(x_i) + \hat{B}_i \hat{u}_i + \bar{B}_i \bar{u}_i, \tag{5a}$$

$$\hat{y}_i = \hat{B}_i^\top z_i(x_i), \tag{5b}$$

$$\bar{y}_i = \bar{B}_i^\top z_i(x_i). \tag{5c}$$

对于由斜对称矩阵 $C = -C^\top$ 描述的（内部量）耦合关系 $\hat{}u + C\hat{}y = 0$（这在应用中很常见），这些系统可以写成压缩形式的联合端口哈密顿微分代数方程系统 [8]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ex) = (\tilde{J} - R)z(x) + \bar{B}\bar{u}, \tag{6a}$$

$$\bar{y} = \bar{B}^\top z(x) \tag{6b}$$

其中压缩后的斜对称矩阵为 $\tilde{J} = J - \hat{}_{BC}\hat{B}^\top$。请注意，在这种情况下，通过端口矩阵 B_i 建模的所有内部耦合现已转移至斜对称矩阵 $\tilde{J}$ 的非对角块元素中，即 $-\hat{}_{BC}\,\hat{B}^\top$。

端口哈密顿系统的系统理论处理可追溯至 Bernhard Maschke and Arjan van der Schaft （概述见 [12, 14] ），其中研究了由常微分方程支配的非线性系统。为便于阐述，我们将（a）不采用经由狄拉克结构的微分几何路径，（b）忽略从输入到输出的直通项，以及（c）仅考虑有限维系统，即常微分方程（ODE）和微分代数方程（DAE），而不考虑偏微分方程（PDE）。在仿真中，后者通常通过空间半离散化转换为 ODE 和 DAE。关于端口哈密顿系统的微分几何框架，参见 [15]; 关于端口哈密顿偏微分方程的介绍，参见 [11]。

本文的组织结构如下：下一节将介绍端口哈密顿微分代数方程系统，该系统允许存在一般的非线性耗散部分。第 3 节推导 MNA 网络方程的端口哈密顿微分代数方程表述，第 4 节则讨论电磁器件。第 5 节讨论耦合电磁/电路系统的端口哈密顿系统表述，该表述支持单体式以及弱耦合仿真方法。第 6 节以结论收尾。

2 端口哈密顿微分代数方程系统

在电气工程应用中，端口哈密顿建模的概念必须推广到耦合微分代数方程。这类方程：(a) 允许采用一般的非线性电阻部分 $r(z)$，而非 [13] 所采用的拟线性形式 Rz；(b) 根据系统约束，只需在子空间 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ 上是增生的。

以下形式的微分代数方程

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex(t) &= Jz(x(t)) - r(z(x(t))) + Bu(t), \\ y(t) &= B^\top z(x(t)) \end{aligned} \tag{7}$$

若满足以下条件，则称为端口哈密顿微分代数方程（PH-DAE） [8], :

- $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$、 $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$、 z、r： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$。
- 存在一个子空间 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ ，具有以下性质：

(i) 对于所有区间 $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ 和函数 $u : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$，只要方程 (7) 存在解 x: $\mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$，就有 $z(x(t)) \in \mathcal{V}$，对所有 $t \in \mathcal{I}$均成立。(ii) J在 $\mathcal{V}$上是斜对称的。也就是说，对于所有 v, $w \in \mathcal{V}$.，均有 $v^\top Jw = -w^\top Jv$。(iii) r 在 $\mathcal{V}$上是增生的。也就是说，对于所有 $v \in \mathcal{V}$，均有 $v^\top r(v) \geq 0$。

• 存在某个函数 $H \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$，使得对于所有 $x \in z^{-1}(\mathcal{V})$, $\nabla H(x) = E^\top z(x)$。

注 1. a) 端口哈密顿微分代数方程（7）系统给出了通常的能量平衡

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t)) = -z(x(t))^\top r(z(x(t))) + y(t)^\top u(t) \leq y(t)^\top u(t).$$

b) 端口哈密顿微分代数方程子系统现在表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_i x_i(t) = J_i z_i(x_i(t)) - r_i\big(z_i(x_i(t))\big) + B_i u_i(t), \tag{8a}$$

$$y_i(t) = B_i^\top z_i\big(x_i(t)\big) \tag{8b}$$

而不是（4），如果它们通过一个带有如前所述的反对称矩阵 $C = -C^\top$ 的斜对称耦合关系 $\hat{u} + C\hat{y} = 0$ 进行耦合，则可以将其凝聚为一个整体的端口哈密顿微分代数方程系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = \hat{J}z - r + \bar{B}\bar{u}, \tag{9a}$$

$$\bar{y} = \bar{B}^\top z \tag{9b}$$

其中反对称矩阵 $\hat{J}$ 再次由 $\hat{J} = J - \hat{B}\hat{C}\hat{B}^\top$ 给出。

3 电网络

我们考虑经典的电荷/磁通导向的改进节点分析网络方程 [8,9]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} 0&0&0&A_C&0 \\ 0&0&0&0&I \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \jmath_L \\ \jmath_V \\ q_C \\ \phi_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&-A_L&-A_V&0&0 \\ A_L^\top&0&0&0&0 \\ A_V^\top&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \jmath_L \\ \jmath_V \\ q_C \\ \phi_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_R g(A_R^\top e) \\ 0 \\ 0 \\ q_C - q(A_C^\top e) \\ \phi_L - \phi(\jmath_L) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \imath(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

其中， e、 $\jmath_L$ 和 $\jmath_V$ 分别表示节点电势、流经磁通储能元件的电流以及电压源的电压； q_C 和 Φ_l 表示电荷储能元件和磁通储能元件； $\imath(t)$和 $v(t)$表示独立电流源和电压源； g表示电阻电流； A_C、 A_L、 A_R、 A_V、 A_I分别表示电荷储能元件、磁通储能元件、电阻元件、电压源和电流源的关联矩阵。我们希望将其表述为端口哈密顿微分代数方程系统。为此，需要作出以下假设；这些假设在电路仿真中自然成立，参见 [8]:

(a) 健全性。电路图至少包含一条支路，且是连通的。此外，它既不包含 V-回路，也不包含 I-割集。等价地， A_V 和 $(A_C\, A_R\, A_L\, A_V)^\top$ 满列秩。

(b) 无源性。函数 q、 ϕ 和 g 满足

(i) $q\colon \mathbb{R}^{n_C} \to \mathbb{R}^{n_C}$ 和 $\phi\colon \mathbb{R}^{n_L} \to \mathbb{R}^{n_L}$ 是双射、连续可微的，且它们的雅可比矩阵

$$\widetilde{C}(u_C) := \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u_C}(u_C), \qquad \widetilde{L}(\jmath_L) := \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\jmath_L}(\jmath_L)$$

对所有 $u_C \in$ 都是对称正定的 $\mathbb{R}^{n_C}$、 $\jmath_L \in \mathbb{R}^{n_L}$.

(ii) $g\colon \mathbb{R}^{n_R} \to \mathbb{R}^{n_R}$ 连续可微，且其雅可比矩阵具有如下性质：对于所有 $u_R \in \mathbb{R}^{n_R}$， $\mathsf{d}_g\mathsf{d}_{u_R}(\overline{u_R}) + \mathsf{d}_g\mathsf{d}_{u_R}(\overline{u_R})^\top$ 均为正定。

若 $q\colon \mathbb{R}^{n_C} \to \mathbb{R}^{n_C}$ 和 $\phi\colon \mathbb{R}^{n_L} \to \mathbb{R}^{n_L}$ 满足这些假设，则存在二阶连续可微的非负函数 $V_C\colon \mathbb{R}^{n_C} \to \mathbb{R}$、 $V_L\colon \mathbb{R}^{n_L} \to \mathbb{R}$，并具有以下性质： V_C 和 V_L 的梯度分别是 q 和 ϕ 的反函数。也就是说，

$$\forall q_C \in \mathbb{R}^{n_C} : \nabla V_C(q_C) = q^{-1}(q_C), \quad \forall \phi_L \in \mathbb{R}^{n_L} : \nabla V_L(\phi_L) = \phi^{-1}(\phi_L).$$

在此设定下，端口哈密顿微分代数方程修正节点分析网络方程可按如下方式推导：首先消去方程 $\phi_L - \phi(\jmath_L) = 0$: $\jmath_L = \phi^{-1}(\phi_L)$；其次，将方程 $q_C - q(A_C^\top e) = 0$替换为 $A_C^\top e - q^{-1}(q_C) = 0$。最终得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E :=} \underbrace{\begin{bmatrix} q_C \\ \phi_L \\ e \\ \jmath_V \end{bmatrix}}_{x :=} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -A_L & 0 & -A_V \\ A_L^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_V^\top & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J :=} \underbrace{\begin{bmatrix} e \\ \phi^{-1}(\phi_L) \\ q^{-1}(q_C) \\ \jmath_V \end{bmatrix}}_{z(x)} \\ &\quad - \underbrace{\begin{bmatrix} A_R g(A_R^\top e) \\ 0 \\ A_C^\top e - q^{-1}(q_C) \\ 0 \end{bmatrix}}_{r(z(x)) :=} + \underbrace{\begin{bmatrix} -A_I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}}_{B :=} \underbrace{\begin{bmatrix} \imath(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{u(t) :=},\end{aligned} \tag{10}$$

这是一个类型为 (7) 的端口哈密顿微分代数方程，其子空间为 $\mathcal{V}$，哈密顿量 $H(x)$ 由 $H(x) = V_C(q_C) + V_L(\phi_L)$ $\mathcal{V} = \left\{ \left(e, \jmath_L, u_C, \jmath_V\right)^\top \in \mathbb{R}^n \middle| A_C^\top e = u_C \right\}$. 给出

注释 2。a) 如果关于健全性和无源性的假设成立，则端口哈密顿系统微分代数方程表述具有电荷/磁通导向 MNA 网络方程的指标性质：当且仅当其既不包含LI割集，也不包含除 C环以外的 CV环时，指标为 1；否则为 2。

b) 如果通过电压/电流源耦合由端口哈密顿微分代数方程修正节点分析网络方程给出的 r 子电路，则整体系统可以写成类型（10）的端口哈密顿微分代数方程修正节点分析网络方程。

4 电磁器件

在 [5], 中，只要满足以下条件，电磁器件的麦克斯韦网格方程就可构建为线性端口哈密顿微分代数方程系统：(a) 器件的三维区域是连通且有界的，并被完美导电材料包围；(b) 介电常数 ϵ 和磁导率 μ 为对称正定矩阵，电导率 σ 为对称半正定矩阵；(c) 空间离散化采用了有限积分技术 [6]，并使用正交交错网格单元：

$$\begin{bmatrix} M_\mu & 0 \\ 0 & M_\epsilon \end{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{e} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -C \\ C^\top & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_\sigma \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ X_S \end{bmatrix} \hat{u}_2, \tag{11a}$$

$$\hat{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ X_S \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{e} \end{bmatrix} = X_S^\top \hat{e}. \tag{11b}$$

此处 C 表示离散旋度算子，材料矩阵 M_ϵ、M_μ和 M_σ 分别表示离散化的介电常数、磁导率和电导率分布，e 为电网格电压向量 e， h 为磁网格电压向量 h，而（对偶网格面）源电流 u_2 作为输入。该输入分配在位置 X_S处。事实上， X_S 将内部网格边映射到外部网格节点。此外，相应的电网格电压 y_2 构成输出。电磁器件的哈密顿量为 $H_1 = \frac{1}{2}$ （$\tilde{e}^\top M_\epsilon \tilde{e} + \tilde{h}^\top M_\mu \tilde{h}$）。

5 耦合电磁/电路系统

将电磁器件与电路耦合时，只需定义输入、输出和耦合方程。对于电路而言，电磁器件产生流入网络的电流 $\jmath_E$，并通过关联矩阵汇集到电路的相应节点

A_E。因此，电路部分可写为（其中我们再次将输入分为外部输入 $\imath$、 v和内部输入）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_C \\ \phi_L \\ e \\ \jmath_V \\ \jmath_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_L & 0 & -A_V & -A_E \\ A_L^\top & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_V^\top & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_E^\top & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ \jmath_L \\ u_C \\ \jmath_V \\ \jmath_E \end{bmatrix} \tag{12a}$$

$$- \begin{bmatrix} A_R g(A_R^\top e) \\ 0 \\ A_C^\top e - u_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \imath(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\hat{u}_1,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_{1,1} \\ \bar{y}_{1,2} \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix} e \\ \jmath_L \\ u_C \\ \jmath_V \\ \jmath_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_I^\top e \\ -\jmath_V \\ \jmath_E \end{bmatrix} \tag{12b}$$

哈密顿量为： $H_2 = V_C(q_C) + V_L(\phi_L)$。

耦合关系如下 [5]: 电路的输入 $\hat{u}_1$ 由电磁器件的电压降给出，即

$\hat{u}_1 = -X_S^\top \tilde{e} = -\hat{y}_2$; 另一方面，磁性装置的输入 $\hat{u}_2$ 由电流 $\hat{u}_2 = \jmath_E = \hat{y}_1$ 给出。总之，输入与输出之间存在以下斜对称关系:

$$0 = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

由于系统由两个端口哈密顿微分代数方程系统 (11) 和 (12) 组成，并满足斜对称线性耦合条件 (13)，因此整体系统可写成凝聚端口哈密顿微分代数方程系统 (9)，其哈密顿量为 $H = H_1 + H_2$，矩阵则如上所述进行了扩展。

6 仿真策略

通常，对耦合电磁/电路系统进行数值仿真有两种可行的方法:

a) 整体方法。凝聚系统 (9) 可根据指数，采用任何适用于指数-1和指数-2系统的积分格式求解。为在离散层面上也保持耗散不等式，经典的——

耦合格式 [13] 和可追溯至 [7] 的离散梯度格式是首选方法。这种策略也称为强耦合。b) 整体式多速率方法。事实上，我们面对的是这样的模型：其中的子系统可能具有相差悬殊的时间尺度。这会带来所谓的多速率潜力，此时采用为每个子系统使用固有步长的格式将更有利。这样，每个子系统都可以按照自身的时间尺度进行采样。参见例如 [2, 10]。

c) 弱耦合。由于耦合方程仅仅是输出与输入之间的一一对应关系，因此可以将其代入。此外，忽略外部源产生的输出后，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} A_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_C \\ \phi_L \\ e \\ \jmath_V \\ \jmath_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_L & 0 & -A_V & -A_E \\ A_L^\top & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_V^\top & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_E^\top & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ \jmath_L \\ u_C \\ \jmath_V \\ \jmath_E \end{bmatrix} \tag{14a}$$

$$- \begin{bmatrix} A_R g(A_R^\top e) \\ 0 \\ A_C^\top e - u_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \imath(t) \\ v(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\hat{y}_2,$$

$$\hat{y}_1 = \jmath_E \tag{14b}$$

and

$$\begin{bmatrix} M_\mu & 0 \\ 0 & M_\epsilon \end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{e} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -C \\ C^\top & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_\sigma \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ X_S \end{bmatrix}\hat{y}_1 \tag{15a}$$

$$\hat{y}_2 = X_S\tilde{e}. \tag{15b}$$

此处，动态迭代格式 [1] 是首选方法，因为常微分方程-微分代数方程耦合不会带来稳定性约束 [4]。此外，雅可比迭代或高斯-赛德尔迭代格式的每一步本身都定义了一个端口哈密顿微分代数方程系统 [8]。

算子分裂方法通常不适用于微分代数方程，这一点从如下线性端口哈密顿微分代数方程 (3a) 可轻易看出：$z(x) = x$ 和 $B = 0$。李-特罗特分裂方法可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ex) = Jx, \quad x(0) = x_0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ew) = -Rw. \quad w(0) = x(T),$$

从而第一步可以使用辛积分器，第二步则使用耗散格式。然而，矩阵铅笔 $\{E, J\}$ 或$\{E, R\}$ 可能是奇异的，因此无法为相应子问题定义唯一解，即使

整体系统的矩阵铅笔 $\{E, J-R\}$ 是正则的。即便这种情况没有发生，例如，第一个问题也可能无法针对任意选取的相容初始值给出唯一解。对于

$$E = \operatorname{diag}(1,0,1), \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \operatorname{diag}(0,1,1), \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

所有矩阵铅笔 $\{E, J-R\}$、$\{E, J\}$ 和 $\{E, R\}$ 都是正则的，但第一步会得到 $x_1 \equiv 0 \neq 1$。

可以通过将微分代数方程改写为一个底层常微分方程以及由显式计算得到的后续代数变量来克服这一问题。对于网络方程，支路定向回路割集方法可用于定义此类端口哈密顿微分代数方程系统，参见 [5]。另一种避免上述问题的方法是采用基于算子分裂的动态迭代方法。在后一种情况下，不会出现稳定性问题，并且可以实现单调收敛 [3]。

7 结论

端口哈密顿系统提供了一种建模框架，能够保留基本的物理属性。它尤其适用于多物理场应用，因为端口哈密顿子系统的适当耦合会形成一个整体端口哈密顿系统。在电气工程中，我们已表明，电网络和电磁器件都可以表示为端口哈密顿系统；耦合电磁/电路系统则形成带有斜对称耦合的耦合端口哈密顿系统，并可改写为一个整体端口哈密顿系统。在仿真中，整体方法适用于前者，而弱耦合方法适用于后者。仍有许多问题尚待解决，例如如何将分布端口恰当地整合到端口哈密顿系统建模中。

致谢 Michael G¨unther 谨此感谢欧盟地平线2020研究与创新计划通过玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号：765374，ROMSOC）提供的资助。

参考文献

1. Arnold, M., G¨unther, M.：耦合微分代数方程的预条件动态迭代。《BIT》41（2001），1–25。

2. A. Bartel, M. G¨unther：多速率格式——数值分析对应用需求的回应，载于：M. G¨unther, W. Schilders（编），《受工业挑战启发的新数学》，施普林格，2022年，第5–27页。3. Bartel, B., G¨unther, M., Jaob, B., Reis, T.：基于算子分裂的线性端口哈密顿系统动态迭代。已投稿。4. Bartel, A., Brunk, M., G¨unther, M., Sch¨ops, S.：电路与分布式器件耦合问题的动态迭代。《SIAM科学计算杂志》

35 2 315 335 2013 = 2013 = 10 1137 120867111, ( ), B -B ( ) 年, 5 doi . / 。Diab, M.：具有耦合场-电路微分代数方程应用的偏微分代数系统分裂方法。博士论文，柏林洪堡大学（2022年）。6. Weiland, T.：采用有限差分法的时域电磁场计算，《数值建模国际期刊：电网络、器件与场》9，295–319（1996年）。7. Gonzalez, O.：时间积分与离散哈密顿系统。《非线性科学杂志》6，1432–1467（1996年）。8. G¨unther, M., Bartel, A., Jacob, B., Reis, T.：耦合微分代数方程电路仿真中的动态迭代格式与端口哈密顿表述。《电路理论与应用国际期刊》49，430–452（2021年）。9. G¨unther, M., Feldmann, U.：基于CAD的电路建模 I：网络方程的数学结构与指标。《数学调查：工业》8，97–129（1999年）。10. G¨unther, M., Sandu, A.，《数值数学》133，497–524（2016年）。11. Jacob, B., Zwart, H.J.：无限维空间上的线性端口哈密顿系统。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔（2012年）。12. D. Jeltsema 和 A.J. van der Schaft。端口哈密顿系统理论：介绍性概述。

Foundations and Trends in Systems and Control 1 2 3 173 387, , 2014

（ - ）： –。13. Mehrmann, V., Morandin, R.：端口哈密顿描述系统的保结构离散化。2019年IEEE第58届决策与控制会议（CDC），6863–6868（2019年）。14. A.J. van der Schaft。端口哈密顿系统：非线性物理系统的网络建模与控制。载于 K. Schlacher 和 H. Irschnik，编，*Advanced Dynamicsand Control of Structures and Machines*，*CISM courses and lectures*第444卷，第127–167页。施普林格，维也纳，2004年。15. van der Schaft, A.：端口哈密顿系统：介绍性综述。载于 M. Sanz-Sole, J. Soria, J. L. Varona, J. Verdera（编），《国际数学家大会论文集》第III卷（第1339–1365页）。欧洲数学会出版社（2006年）。