arXiv:2301.02029v1 [math.GT] 5 Jan 2023

GROMOV-HAUSDORFF 度量空间中的流形极限

Friedrich Hegenbarth 和 DUŠAN D. REPOVŠ

摘要。我们应用 Gromov-Hausdorff 度量 d_G 来刻画某些广义流形。此前，我们已证明，相对于度量 d_G，广义 n-流形是由两个拓扑n-流形通过受控的同伦等价粘合而成的空间（即所谓的 2-补片空间）的极限。在本文中，我们研究 Mardešić 和 Segal 于 1966 年引入的所谓类流形广义 n-流形 X^n。这类流形的特征是：对于任意小的$\delta > 0$，存在从 X^n 到闭流形 M^n_δ 的 δ-映射 f_δ，即存在满射 $f_\delta\colon X^n \to M^n_\delta$，使得对于每个$u \in M^n_\delta$， $f_\delta^{-1}(u)$ 的直径小于 δ。我们证明，相对于度量 d_G，类流形广义 n-流形 X^n 是拓扑 n- 流形 M^n_i 的极限。此外，若拓扑 n- 流形 M^n_i 满足某个局部可缩条件$\mathcal{M}$（ϱ， n），则我们证明广义 n-流形 X^n 是可解消的。

1. 引言

本文延续了我们对广义 n-流形 $n \geq 5$ 刻画问题的系统研究（参见 Cavicchioli等人 [5, 6] 以及 Hegenbarth 和 Repovš [23, 24, 25, 26, 27, 28]）。这是一类非常重要的空间，在代数意义上与拓扑流形十分相似；然而在几何意义上，它们可能在任何一点都不是局部欧几里得的（例如参见 Cannon [4],Edwards [11], 和 Repovš [42, 43, 44]）。

定义 1.1. 广义 n-流形 X^n 是一个 n维度量绝对邻域收缩（*ANR*） X^n，其局部同调

$$H_*(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}),\ \textit{for every } x \in X.$$

2020 数学主题分类。 主要分类：53C23、55R20、57P10、57R65、57R67；次要分类：55M05、55N99、57P05、57P99。关键词与短语。
Gromov-Hausdorff 度量，Gromov 拓扑模空间，类流形广义流形，绝对邻域收缩，类胞映射， δ-映射，结构映射，受控手术序列， ε-同伦等价，2-补丁空间，周期手术谱 L。

我们只考虑定向的广义 n-流形无边界（即对每个 $x \in X^n$， $H_n(X^n, X^n \setminus \{x\}; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$）。全文中，我们假设 $n \geq 5$.

定义 1.2。给定任意 $\delta > 0$，度量空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射 f_δ: $X \to Y$ 称为 δ-映射，如果对每个点 $y \in Y$，其原像 $f_\delta^{-1}(y)$ 的直径为 $< \delta$。

半个多世纪以前，Mardešić 和 Segal [30, 定理 1]根据 δ-映射，对广义流形给出了一个非常优美的刻画结果。

定理 1.3。设 X^n 是一个紧致的 n 维度量绝对邻域收缩 *ANR*，并且对每个 $\delta > 0$，都存在一个 δ- 映射 f_δ： $X^n \to M_\delta^n$，将 X^n 映到某个（三角剖分的）定向闭拓扑 n 流形 M_δ^n 上。那么 X^n 是一个广义 n 流形。

定义 1.4。*Mardešić* 和 *Segal* 将这种广义 n 流形 X^n 称为类流形。我们将称这种映射 f_δ： $X^n \to M_\delta^n$ 为结构映射。

注 1.5. 由于每个拓扑 n-流形（不可光滑化的 *4*-流形除外）都允许把手体分解（见 *Quinn* [37]），因此下文将不再强调“可三角剖分”。

令 d_G 为*Gromov-Hausdorff*距离，它是所有紧致度量空间的等距类集合上的完备度量。（详情将在第 2 节给出，概述见 Ferry [14, §29]。）在我们先前的论文 Hegenbarth-Repovš [25, §4.3],中，我们证明了相对于度量 d_G，每个广义 n-流形 X^n 都是 Bryant 等人 [3]所定义的 2-补片空间的极限。

本文将证明关于类流形广义 n-流形的一项新的刻画结果——依据 Gromov-Hausdorff 度量 d_G，它们可由拓扑 n-流形逼近。

定理 1.6（逼近定理）。对于每个类流形广义 n-流形 X^n 以及每个 $\delta > 0$，都存在一个拓扑 n-流形 M_δ^n，使得 $d_G(X^n, M_\delta^n) < \delta$。

注 1.7. 广义 n-流形 X^n 上的度量由其到某个欧几里得 m空间 $\mathbb{R}^m$的一个固定嵌入 $X^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ 诱导，其中维数 $m \in \mathbb{N}$足够大。拓扑n-流形 M_δ^n上的度量则由其到 X^n 在$\mathbb{R}^m$ 中的一个小邻域 $N_{X^n}^m \subset \mathbb{R}^m$ 内的嵌入 $M_\delta^n \hookrightarrow N_{X^n}^m$诱导（更多细节见第 *2* 节）。

Edwards [11]得到了广义 n-流形 X^n 成为拓扑 n-流形的一个基本判据。第一个（充分）条件是存在一个类胞映射 $f\colon M^n \to X^n$，其中 M^n 是一个闭拓扑 n-流形，也称为X^n 的（类胞）解消（例如参见 Mitchell 和 Repovš [32]）。根据 Quinn 的唯一性结果（[36, 命题 3.2.3]），X^n 的任意两个解消 $f_1\colon M_1^n \to X^n$ 和$f_2\colon M_2^n \to X^n$ 等价；也就是说，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个同胚 $h_\varepsilon\colon M_1^n \to M_2^n$，使得 $d(f_1, f_2 \circ h_\varepsilon) < \varepsilon$.。第二个（充分）条件是一种一般位置性质，即所谓的 X^n 的不交圆盘性质（例如参见 Cavicchioli等 [6]）。

Quinn [38, 39] 发展了受控手术理论，并构造了一个手术障碍 $i(X^n) \in \mathbb{Z}$，用以判断广义 n- 流形 X^n 是否存在解消。方便起见，我们考虑 $I(X^n) := 1+8i(X^n)$，称为解消指标（它在从二次L谱过渡到对称L谱时自然出现，见 Ranicki [40]）。因此，$I(X^n) = 1$ 当且仅当 X^n 存在一个（类胞腔）解消。

目前尚无已知的通用方法可以计算 Quinn 的解消指标 $I(X^n)$，不像其他不变量那样有相应方法。本文将证明，对于某一类类流形广义 n-流形，该指标为零，从而证明它们是可解消的（见下文定理 1.9）。首先，我们需要引入一些记号（见 Ferry[14, §29]）。

定义 *1.8.* 若函数 $\varrho\colon [0, R) \to [0, \infty)$ 满足：对每个 t, $\varrho(t) \geq t$，且 ϱ 在 *0* 处连续，则称其为可缩函数。令 $\mathcal{M}(\varrho, n)$ 表示所有维数为 $\leq n$ 的紧致度量空间 M 的集合，其中对每个 $x \in M$，r-球 $B_r(x) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq r\}$ 都可在 $\varrho(r)$-球 $B_{\varrho(r)}(x)$ 内收缩至$\{x\}$。

以下是本文的第二个主要结果。

定理 1.9（解消定理）。设 X^n 是一个广义 n-流形，并固定一个嵌入 $i\colon X^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$，其中 $m \geq n \geq 5$。设 $\varrho\colon [0, R) \to [0, \infty)$ 是一个可缩函数，并假设对于每个充分小的 $\delta > 0$，，都存在一个结构映射 $f_\delta\colon X^n \to M_\delta^n$，使得相对于定理 *1.6* 中定义的度量，$M_\delta^n \in \mathcal{M}(\varrho, n)$。那么 X^n 是可解消的。

注1.10。我们回顾一下，广义 n流形X^n（分别地，拓扑 n流形 M_δ^n）上的度量由嵌入$X^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$（分别地，$M_\delta^n \hookrightarrow N_{X^n}^m \subset \mathbb{R}^m$）诱导。

作为一个应用，我们考虑 Ferry 的以下精彩结果 [14,命题 29.38]。

定理 1.11. 假设 $X=\lim\limits_{\longrightarrow}\{M_i^n\}$，其中 $\{M_i^n\}\subset\mathcal{M}(\varrho,n)$</style}，在 Gromov-Hausdorff 度量下。若 dim$X<\infty$，则 X 是一个广义 n-流形。

由此可由定理 1.9 得出，定理 1.11 中的空间 X 实际上是一个可解消广义 n-流形 X。关于 Gromov-Hausdorff 度量空间中极限的若干相关先前结果，参见 Dranishnikov 和 Ferry [7, 8] Dranishnikov 等人 [9], Engel [12], Ferry [13,15, 16], Ferry 和 Okun [18], Grove 等人 [22], Kawamura [29], 以及 Moore [33]。

我们以如下一个与定理 1.9 相关、非常有趣的开放问题结束引言。请回想，非可解消的广义 n-流形有很多——例如参见 Cavicchioli 等人[5]。那么，类流形广义 n-流形又如何呢?

问题 1.12。对于任意 $n\geq 5$，是否存在一个不可解消的类流形广义 n-流形?

2. 定理 1.6 的证明

设 X^n 是一个类流形广义 n-流形。对任意 δ >0，令 f_δ: $X^n\to M_\delta^n$ 为定义 1.4 中的结构映射。我们将引用 Eilenberg 提出的以下结果（例如参见 Ferry [14,推论 29.10]）。

命题2.1。对每个 $\delta>0$，都存在一个结构映射 $f_\delta\colon X^n\to M_\delta^n$ 和一个连续映射 $g_\delta\colon M_\delta^n\to X^n$，使得 $g_\delta\circ f_\delta\colon X^n\to X^n$ 与 $Id_{X^n}\colon X^n\to X^n$ δ-同伦。

这是一个特殊情形，在此情形下，以下事实也成立。

补充 2.2。命题 *2.1* 中的结构映射 $f_\delta\colon X^n\to M_\delta^n$ 是一个同伦等价，其逆映射为 $g_\delta\colon M_\delta^n\to X^n$。

命题*2.1*的证明：诱导映射

$$(f_\delta)_*\colon H_*(X^n;\mathbb{Z})\to H_*(M_\delta^n;\mathbb{Z})$$

是单射，因为 $g_\delta\circ f_\delta\sim Id_{X^n}$。因此复合映射

$$H_n(X^n;\mathbb{Z})\overset{(f_\delta)_*}{\to}H_n(M_\delta^n;\mathbb{Z})\overset{(g_\delta)_*}{\to}H_n(X^n;\mathbb{Z})$$

是恒等映射，$(g_\delta)_*\circ(f_\delta)_*=(Id_{X^n})_*$，并且我们有

$$H_n(M_\delta^n;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z},\ \ (g_\delta)_*([M_\delta^n])=[X^n],$$

只要我们恰当地选择基本类即可。由对偶性可知，诱导映射

$$(f_\delta)_*\colon H_*(X^n;\mathbb{Z})\to H_*(M_\delta^n;\mathbb{Z})$$

也满射，并且 $f_\delta\colon X^n \to M^n_\delta$和 $g_\delta\colon M^n_\delta \to X^n$的度数均为 1。特别是，由于映射 $f_\delta\colon X^n \to M^n_\delta$的度数为 1，因此现在可知诱导映射

$$(f_\delta)_*\colon \pi_1(X^n) \to \pi_1(M^n_\delta)$$

是满射（见 Browder [1, 命题1.2]）。由于 $(f_\delta)_*\colon \pi_1(X^n) \to \pi_1(M^n_\delta)$ 也是单射，因此它实际上是一个同构。

现在，按照上面的论证，我们可以证明 $f_\delta\colon X^n \to M^n_\delta$在以群环为系数的同调中诱导出同构。因此，由 Ferry [13, 定理7.4] 可知，$f_\delta\colon X^n \to M^n_\delta$确实是一个同伦等价，其逆映射为 $g_\delta\colon M^n_\delta \to X^n$。命题2.1的证明至此完成。□

定义2.3。 任意紧致度量空间 X 和 Y 之间的 *Gromov-Hausdorff*距离定义如下：对于紧致度量空间中的任意闭子集 X和 $Y\,(Z,d),$ 以及任意 $\delta > 0,$ ，定义它们的邻域

$$N_\delta(X) := \{z \in Z \mid d(z,X) < \delta\},$$

and

$$N_\delta(Y) := \{z \in Z \mid d(z,Y) < \delta\}$$

并定义如下距离

$$d_Z(X,Y) := \inf\{\delta > 0 \mid X \subset N_\delta(Y)\ and\ Y \subset N_\delta(X)\}$$

and

$$d_G(X,\ Y) := \inf\{d_Z(X,\ Y) \mid X,$$

Y *are isometrically embedded in* $Z\}$，其中 Z 遍历所有紧致度量空间。

注记2.4。 *Gromov-Hausdorff*收敛是度量空间的一种收敛概念，是经典*Hausdorff*收敛的推广。*Gromov-Hausdorff*距离由*Edwards* [10] 于*1975*年引入，随后于*1981*年由*Gromov* [21] 重新发现并推广（另见*Tuzhilin* [46]）。

为了确定结构映射 $f_\delta\colon X^n \to M^n_\delta$ 的 $d_G(X^n, M^n_\delta)$，度量的选择很重要。我们选择一个嵌入 $X^n \hookrightarrow \mathbf{R}^m$，并在 X^n 上取由$\mathbf{R}^m$诱导的度量。需要注意的是， $f_\delta\colon X^n \to M^n_\delta$是结构映射这一性质不依赖于 M^n_δ上的度量选择。我们将在下文作出适当选择。

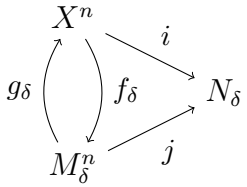
设 $f_\delta\colon X^n \to M^n_\delta$是一个结构映射，其逆映射为 $g_\delta\colon M^n_\delta \to X^n$，并且对于给定的小 $\delta > 0$， $g_\delta \circ f_\delta$ 与 Id_{X^n} 是 δ-同伦的（见命题2.1）。下文中，令

$$i\colon X^n \hookrightarrow N_\delta := N_\delta(X^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m)$$

表示 X^n 到 $\mathbf{R}^m$ 中 X^n 的一个 δ-邻域 N_δ 内的包含映射。

由于根据假设，X^n 是类流形，因此对于任意小的 $\delta' > 0$，存在一个嵌入 $j\colon M^n_\delta \hookrightarrow N_\delta$，使得 $d(i \circ g_\delta, j) < \delta'$（参见 Rourke 和 Sanderson 的《映射的一般位置定理》5.4] [45, ）。这些映射可用下图表示

(2.1)



我们在 M^n_δ 上选取由 $j(M^n_\delta) \subset \mathbf{R}^m$ 诱导的度量。由于

$$d(i \circ g_\delta, j) < \delta',$$

我们可以推出如下结论

$$d(i(x), j(M^n_\delta)) \leq d(i(x), (i \circ g_\delta \circ f_\delta)(x)) + d((i \circ g_\delta \circ f_\delta)(x), j(M^n_\delta)) < \delta + \delta',$$

即,

$$i(X^n) \subset N_{\delta+\delta'}(j(M^n_\delta) \subset \mathbb{R}^m)$$

（另见下文注 2.5）。

当然，N_δ和 $N_{\delta+\delta'}(j(M^n_\delta) \subset \mathbf{R}^m)$属于 $\mathbf{R}^m$ 的一个紧子集Z，其度量为诱导度量。我们得到如下

$$d_G(X^n, M^n_\delta) \leq d_Z(X^n, M^n_\delta) < \delta + \delta'.$$

现在可以将 δ 和 δ' 取得任意小，因此我们完成了定理 1.6 的证明。□

注 2.5. 回忆

$$d(z, A) := \inf\{d(z, a) \mid a \in A\},$$

其中 $A \subset Z$ 是度量空间 Z的一个紧子集。对于 z，$z' \in Z$，不等式

$$d(z', a) \leq d(z, z') + d(z, a)$$

推出不等式

$$d(z', A) \leq d(z', z) + d(z, A),$$

上文中所用的。

3. 定理 1.9 的证明

本节中，我们将应用受控手术序列来证明定理 1.9。关于这一重要主题的更多详情，请参阅 Bryant 等人 [2], Cavicchioli 等人。 [6], Ferry [17, 19, 20], Mio [31],Pedersen 等人 [34], Pedersen 和 Yamasaki [35], Quinn [38, 39], Ran- icki 和 Yamasaki [41],以及 Yamasaki [47]。

令 L 表示周期 L-谱，即 $\mathbb{L}_0 = \mathbb{Z} \times G/TOP$，而 $\mathbb{L}^+$ 是其连通覆盖谱，其中 $\mathbb{L}_0^+ = G/TOP$。现在，若$\mathcal{S}_\varepsilon \begin{pmatrix} X^n \\ \downarrow Id \\ X^n \end{pmatrix} \neq \emptyset$，则存在一个正合列

$$\cdots \to H_{n+1}(X^n;\mathbb{L}^+) \to H_{n+1}(X^n;\mathbb{L}) \to \mathcal{S}_\varepsilon \begin{pmatrix} X^n \\ \downarrow Id \\ X^n \end{pmatrix} \to H_n(X^n;\mathbb{L}^+) \to \dots$$

$\mathcal{S}_\varepsilon \begin{pmatrix} X^n \\ \downarrow Id \\ X^n \end{pmatrix}$ 的元素是 ε-同伦等价 $M^n \xrightarrow{h} X^n$（在 X^n中度量）的等价类，其中 M^n是一个闭（定向）拓扑 n-流形。

定义 3.1. 两个元素

$$M_1^n \xrightarrow{h_1} X^n, M_2^n \xrightarrow{h_2} X^n \in \mathcal{S}_\varepsilon \begin{pmatrix} X^n \\ \downarrow Id \\ X^n \end{pmatrix}$$

称为 ε-相关的，若存在一个同胚 $\varphi\colon M_1^n \to M_2^n$，使得 $h_2 \circ \varphi$ 与 h_1是 ε-同伦的。

注 3.2. ε-相关并不构成等价关系，但它是以下断言的一部分：存在一个仅依赖于 X^n、的 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于每个 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$，它都成为等价关系。

对于 $p+q = n+1$，由谱序列可得

$$E_{pq}^2 = H_p(X^n;\pi_q(\mathbb{L})) \Rightarrow H_{p+q}(X^n;\mathbb{L})$$

and

$$E_{pq}^{+2} = H_p(X^n;\pi_q(\mathbb{L}^+)) \Rightarrow H_{p+q}(X^n;\mathbb{L}^+)$$

that

$$E_{pq}^{+2} = E_{pq}^2,$$

因此

$$H_{n+1}(X^n;\mathbb{L}^+) \cong H_{n+1}(X^n;\mathbb{L}).$$

此外， $H_n(X^n;\mathrm{L}^+) \to H_n(X^n;\mathrm{L})$ 必须是单射。由此可知，如果

$$\mathcal{S}_\varepsilon \begin{pmatrix} X^n \\ \downarrow Id \\ X^n \end{pmatrix} \neq \emptyset.$$

那么它只由一个元素组成

$$\operatorname{card}\left[\mathcal{S}_\varepsilon \begin{pmatrix} X^n \\ \downarrow Id \\ X^n \end{pmatrix}\right] = 1.$$

命题 3.3。 设 X^n 是一个广义 n-流形。那么 $I(X^n) = 1$ 当且仅当

$$\mathcal{S}_\varepsilon \begin{pmatrix} X^n \\ \downarrow Id \\ X^n \end{pmatrix} \neq \emptyset,$$

即，对每个 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$，都存在一个 ε-同伦等价 $M^n \xrightarrow{h} X^n$。

证明。 证明是标准的，参见例如 Mio [31, §3] 或 Bryant 等人 [2,第 444] 页。□

为了证明定理 1.9，我们必须证明，对于每个 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$，对每个 $\mathcal{M}(\varrho, n)$-类广义流形 X^n，都存在一个 ε-同伦等价 $h_\varepsilon\colon M^n \to X^n$。这由定理 1.6 和 Ferry [14, 定理 29.20] 得出。

定理 *3.4.* 设 $\varrho\colon [0, R) \to [0, \infty)$ 是一个可缩函数，且 Y 和 Z 是任意紧致度量空间。那么对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得若 Y、$Z \in \mathcal{M}(\varrho, n)$ 和 $d_G(Y, Z) < \delta$，则 Y 和 Z 是 ε-同伦等价的。这里，$\delta = \delta(\varepsilon, \varrho)$ 取决于 ε 和 ϱ，但不取决于 Y, Z。

下面进一步说明：我们通过将 X^n 嵌入到某个 R^m 中的嵌入 $X^n \hookrightarrow \mathrm{R}^m$，为广义 n-流形 X^n 赋予度量，其中 N 取充分大的值，见定理 1.6 和注 1.7。根据 Ferry 定理 29.14]，带有此度量的 X^n 属于 $\mathcal{M}(\varrho, n)$，其中某个可缩函数 $\varrho\colon [0, R) \to [0, \infty)$ 满足条件。

根据假设，现在我们可以选取一个序列 $\{\varepsilon_i > 0\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得

$$\lim_{i\to+\infty} \varepsilon_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty,$$

然后运用定理 3.4，得到一个序列

$$\{\delta_i := \delta_i(\varepsilon_i, \varrho) > 0\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

由定理 1.6，存在一个闭拓扑n流形序列 $\{M^n_{\delta_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\varrho, n)$。关于通过将每个 $M^n_{\delta_i}$嵌入到 $\mathbf{R}^m$中的广义 n流形 X^n 的一个小邻域 $N^m_{X^n}$ 而得到的度量 $M^n_{\delta_i} \hookrightarrow N^m_{X^n} \subset$，满足

$$d_G(M^n_{\delta_i}, X^n) < \delta_i, \quad \text{for every} \quad i \in \mathbb{N}.$$

因此，每个拓扑 n-流形 $M^n_{\delta_i}$ 都与 ε_i-同伦等价于 X^n。这证明了定理 1.9。□

致谢

本研究得到了斯洛文尼亚研究机构的资助，项目编号为 P1-0292、J1-4031、J1-4001、N1-0278、N1-0114 和 N1-0083。我们感谢审稿人的意见和建议。

参考文献

[1] F. Browder，庞加莱空间、其正规纤维化与手术，《数学创刊》17 (1972), 191-202. MR 0326743[2] J.L. Bryant、S. Ferry、W. Mio 和 S. Weinberger，同调流形的拓扑，《数学年刊》143 (2) (1996), 435-467. MR 1394965[3] J.L. Bryant、S. Ferry、W. Mio 和 S. Weinberger，同调流形去奇异化，《几何与拓扑》11 (2007), 1289-1314. MR 2326946[4] J.W. Cannon，识别问题：什么是拓扑流形？《美国数学会通报》84 (1978), no. 5, 832-866. MR 0494113[5]A. Cavicchioli、F. Hegenbarth 和 D. Repovš，关于 4k 维广义流形的构造，《高维流形拓扑学》，F.T. Farrell 和 W. Lueck 编，世界科技出版公司，新加坡，2003，pp. 103- 124. MR 2048717[6] A. Cavicchioli、F. Hegenbarth 和 D. Repovš，高维广义流形：手术与构造，《数学讲座系列》**23**，欧洲数学学会，苏黎世，2016. MR 3558558[7] A.N. Dranishnikov 和 S. C. Ferry，拓扑流形的类胞映像及 Gromov-Hausdorff 空间中的流形极限，预印本，纽约州立大学宾汉姆顿分校，1994.[8] A.N. Dranishnikov 和 S.C. Ferry，流形上的类胞映射与拓扑结构群，预印本，纽约州立大学宾汉姆顿分校，2007.[9] A.N. Dranishnikov、S.C. Ferry 和 S. Weinberger，有限维度量拓扑学中的无限维现象，《剑桥数学杂志》8 (2020), no. 1, 95-147. MR 4085433[10] D.A. Edwards，超空间的结构，《拓扑学研究》，北卡罗来纳大学夏洛特分校会议论文集，北卡罗来纳州夏洛特，1974，学术出版社，纽约，1975，pp. 121-133. MR 0401069[11] R.D. Edwards，流形与类胞映射的拓扑，《国际数学家大会论文集》（赫尔辛基，1978），芬兰科学院，赫尔辛基，1980.pp. 111-127. MR 0562601

[12] T.L. Engel，沿流形路径的变形与刚性，纽约州立大学宾汉姆顿分校博士论文，1991. ProQuest Dissertations & Theses Global (303991612).[13] S.C. Ferry，将流形映射到多面体，预印本，纽约州立大学宾汉姆顿分校，2003.[14] S.C. Ferry，《几何拓扑笔记》，预印本，罗格斯大学，新泽西州皮斯卡塔韦，1992-1993. https://sites.math.rutgers.edu/∼sferry/ps/geotop.pdf[15] S. Ferry，Gromov-Hausdorff 空间中流形的拓扑有限性定理，《杜克数学杂志》74 (1994), no. 1, 95-106. MR 1271464[16] S. Ferry，Gromov-Hausdorff 空间中的多面体极限，《拓扑学》37 (1998), 1325-1338. MR 1632944[17] S.C. Ferry，Z 上的 ε-δ 手术，《几何专论》148 (2010), 71-101. MR 2011m:57030 [18] S.C. Ferry 和 B.L. Okun，以黎曼度量逼近拓扑度量，《美国数学会会刊》123 (1995), no. 6, 1865-1872. MR1246524[19] S.C. Ferry 和 E.K. Pedersen，挤压结构，预印本，纽约州立大学宾汉姆顿分校，1992.[20] S.C. Ferry 和 E.K. Pedersen，ε-手术理论，《Novikov 猜想、指标定理与刚性》，第 2 卷（奥伯沃尔法赫，1993），伦敦数学学会讲义系列，227，剑桥大学出版社，剑桥，1995，pp. 167-226. MR 1388311[21] M. Gromov，《黎曼流形的度量结构》，J. Lafontaine 和 P. Pansu 编，数学文本，CEDIC，巴黎，1981. MR 0682063 [22] K. Grove、P. Petersen 和 J. Wu，通过受控拓扑得到的几何有限性定理，《数学创刊》99 (1990), 205-213；勘误，《数学创刊》104 (1991), 222-223. MR1029396[23] F. Hegenbarth 和 D. Repovš，Bryant-Ferry-Mio-Weinberger 广义流形构造，《奇异同调流形》，奥伯沃尔法赫，2003，《几何与拓扑专著》**9**，几何与拓扑出版社，考文垂，2006，pp. 17-32. MR 2222488[24] F. Hegenbarth 和 D. Repovš，受控同伦等价与流形结构集，《美国数学会会刊》142 (2014), 3987-3999. MR 3251739[25] F. Hegenbarth 和 D. Repovš，广义流形与庞加莱对偶复形及拓扑流形之间的关系，《应用拓扑学》239 (2018), 126-141.[26] F. Hegenbarth 和 D. Repovš，受控手术与 L-同调，《地中海数学杂志》16 (2019), no. 3, art. 79, 22 pp. MR 3945264[27] F. Hegenbarth 和 D. Repovš，关于 Steenrod L-同调、广义流形与手术，《爱丁堡数学学会会刊》（2）63 (2020), no. 2, 579-607. MR 4085040 [28] F. Hegenbarth 和 D. Repovš，广义流形、正规不变量与 L-同调，《爱丁堡数学学会会刊》（2）64 (2021), no. 3, 574-589. MR 4330277[29] K. Kawamura，关于 LC^n 紧致空间的刻画及其与 Gromov-Hausdorff 收敛的关系，《加拿大数学通报》37 (1994), no. 4, 505-513. MR 1303678

[30] S. Mardešić和J. Segal, ε-映射与广义流形, 《密歇根数学杂志》13 (4) (1967), 171-182. MR 0211407[31] W. Mio, 同调流形, 《手术理论综述》第1卷, 《数学年刊研究》145, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 2000年, 第323-343页。MR 1747540[32] W.J.R. Mitchell和D. Repovš, 类胞映射的拓扑学, 《卡利亚里大学理学院学报》增刊58 (1988), 265-300. MR 92f:54012[33] T.E. Moore, Gromov-Hausdorff收敛到非流形, 《几何分析杂志》5 (1995), 第3期, 411-418. MR 1360828[34] E.K. Pedersen、F. Quinn和A. Ranicki, 局部基本群平凡时的受控手术, 《高维流形拓扑学》, F.T. Farrell和W. Lück编, 世界科学出版社, 埃奇沃特, 新泽西州, 2003年, 第421-426页。MR 2005e:57077[35] E.K. Pedersen和M. Yamasaki, 受控L理论中的稳定性, 《奇异同调流形》, 奥伯沃尔法赫2003, 《几何与拓扑专著》9, 几何与拓扑出版社, 考文垂, 2006年, 第67-86页。MR 2222491[36] F.S. Quinn, 映射的端, I, 《数学年刊》(2) 110 (1979), 第2期, 275-331. MR 0549490[37] F.S. Quinn, 映射的端, III。4维与5维。《微分几何杂志》17 (1982), 第2期, 503-521. MR 0679069[38] F.S. Quinn, 同调流形的消解与流形的拓扑刻画, 《数学创刊》72 (2) (1983), 267-284; 勘误, 《数学创刊》85 (3) (1986), 653. MR 85b:57023, MR 87g:57031[39] F.S. Quinn, 同调流形消解的一个障碍, 《密歇根数学杂志》34 (2) (1987), 285-291. MR 88j:57016[40] A.A. Ranicki, 代数 L理论与拓扑流形, 《剑桥数学论丛》102, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1992年。MR 1211640 [41] A. Ranicki和M. Yamasaki, 受控L理论, 《奇异同调流形》, 奥伯沃尔法赫2003, 《几何与拓扑专著》9, 几何与拓扑出版社, 考文垂, 2006年, 第105-153页。MR 2222493[42] D. Repovš, 拓扑流形识别问题, 《几何与代数拓扑学》, J. Krasinkiewicz、S. Spież和H. Toruńczyk编, PWN出版社, 华沙, 1986年, 第77-108页。MR 89d:57024[43]D. Repovš, 在拓扑空间中判别高维拓扑流形, 《拓扑与流形几何日》, 博洛尼亚, 1990年, M. Ferri编, 博洛尼亚大学, 1992年, 第113-143页。MR 1196725[44] D. Repovš, 拓扑流形识别问题: 综述, 《古代数学杂志》17:3 (1994), 538-548. MR 96d:57024[45] C. Rourke、B. Sanderson, 《分片线性拓扑学导论》, 《数学及其边缘领域成果》第69卷, 施普林格出版社, 纽约-海德堡, 1972年。MR 0350744[46]A. Tuzhilin, 谁发明了Gromov-Hausdorff距离? arXiv:1612.00728 [math.MG][47] M. Yamasaki, 受控手术理论, 《数学实验》13 (2000), 第1期, 113-124. MR 1755658

“费里德里戈·恩里克斯”数学系，米兰大学，20133 米兰，意大利

电子邮箱地址: friedrich.hegenbarth@unimi.it

卢布尔雅那大学教育学院与数学与物理学院 & 数学、物理与力学研究所，斯洛文尼亚卢布尔雅那 1000

电子邮箱地址: dusan.repovs@guest.arnes.si