arXiv:2301.02030v1 [physics.flu-dyn] 5 Jan 2023

# 多孔壁管道中无黏流的稳定性

Ramkarn Patne[1]†

[1]印度理工学院海得拉巴分校化学工程系，Kandi，Sangareddy，特伦甘纳邦 502285，印度

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

本研究采用多孔层的非定常达西方程，考察了在非轴对称扰动作用下，流体无黏流经带多孔壁圆柱几何结构时的时间稳定性。通过对多孔层的扰动方程积分，推导出流体层与多孔层之间扰动能量交换项的表达式，并据此证明相关命题。研究表明，圆柱几何结构中的流动存在不稳定性的充要条件是流动中某处满足 $\frac{d}{dr}\left(\frac{r\frac{dV}{dr}}{n^2+k^2r^2}\right)(V-V_I) < 0$，其中 $V$和 $V_I$ 分别为轴对称基态速度剖面和流体层与多孔层界面处的速度。参数 $k$ 和 $n$ 分别为轴向波数和方位波数。此外，还推导了相速度（$c_r$）和增长率（$kc_i$）的界限。

所推导的命题用于确定具有多孔壁的滑动库埃特流、环形泊肃叶流和哈根-泊肃叶流的稳定性。分析首次揭示，这三种流动中均存在轴对称（$n = 0$）和非轴对称（$n \neq 0$）不稳定模态。管道中具有非多孔壁的哈根–泊肃叶流是线性稳定的。因此，此处预测的不稳定性完全是由壁面的多孔性质引起的。导致所预测不稳定性的机制，是流体层与多孔层之间的扰动能量交换。

关键词：

## 1. 引言

流经由相同流体饱和的多孔层的流动，常见于自然环境和工业环境中（Childs & Collis-George 1950；Discacciati 等人 2002；Goyeau 等人 2003；Liu 等人 2008；Hill & Straughan 2008；de Langre 2008；Lyubimova 等人 2016）。Nield（1977, 1983）、Chen & Chen（1988）和 Nield（1991）研究了覆盖在多孔层上方的流体的热对流。Chen & Chen（1988）预测，中性稳定性曲线存在双模态结构，其形态取决于深度比。他们在分析中将深度比定义为流体层厚度与多孔层厚度之比。

Sparrow 等人（1973）；Denga 和 Martinez（2005）；Chang 等人（2006）；Tilton 和 Cortelezzi（2006）；Hill 和 Straughan（2008）；Tilton 和 Cortelezzi（2008）对平面库埃特流和泊肃叶流流经多孔层时的线性稳定性进行了广泛研究，

† 通信邮箱：ramkarn@che.iith.ac.in

Chang 等人（2017年）；Samanta（2017）采用非定常 Brinkman 模型和 Darcy 模型进行了研究。Chang 等人（2006）采用非定常 Darcy 模型描述多孔层，研究其线性稳定性，并预测了三种不稳定模态。这三种不稳定模态根据其起源被分为流体层模态、多孔层模态和界面模态；其中，最后一种模态被认为源自界面处的剪切层。Tilton 和 Cortelezzi（2006，2008）研究了多孔层渗透率对不稳定性的影响。最近，Chang 等人（2017年）展示了库埃特分量对平面泊肃叶流流经多孔层时所产生不稳定性的稳定作用。Sparrow 等人（1973）；Denga 和 Martinez（2005）；Chang 等人（2006）；Tilton 和 Cortelezzi（2006）；Hill 和 Straughan（2008）；Tilton 和 Cortelezzi（2008）；Chang 等人（2017年）；Samanta（2017）采用双域方法，即将流体层和多孔层视为由界面分隔的独立层。Silin 等人（2011）；Ghosh等人（2019）采用单域连续体方法，研究覆盖多孔介质的流动的线性稳定性分析。在单域方法中，使用体积平均 Navier–Stokes 方程描述流体层和多孔层中的流动。

先前关于流经多孔层的流动稳定性的研究考察了平面流。在地球物理流（Li 和 Chen 2012）、生理过程（Bates 和 Harper 2002；Reyes-Aldasoro等人 2008）以及工业应用（Pangrle等人 1991；Nassehi 1998；Levenspiel 1999；Tilton等人 2012）中，具有多孔壁的圆柱几何内的流动具有重要意义。然而，据作者所知，尚无研究探讨这类流动的稳定性。本研究填补了这一重要空白，尽管研究范围仅限于无黏流极限。本分析也适用于具有多孔壁的圆柱几何内的入口流，或具有非均匀横截面的流动几何构型；后者是地球物理流的常见特征。对于入口流，速度剖面可能尚未充分发展；而对于横截面缓慢变化的流动几何构型，流动也可能不同于均匀横截面几何构型中的流动。由于缺乏解析速度剖面，对这类流动进行稳定性分析在数学上将极为复杂，计算成本也很高。因此，考虑任意速度剖面以获得关于流动稳定性的有意义结论，可能具有研究价值，也使本分析具有相关性。此外，Showkat Ali等人（2017年、2018a、b）已展示如何利用多孔层被动或半主动地控制流致噪声和振动。这些应用通常涉及高雷诺数流动，因此采用无黏流假设可能是合理的，本分析也因此具有意义。

平面无黏流经过刚性表面时，其稳定性的定性特征可从 Fjørtoft (1950)、Rayleigh (1880) 和 Høiland (1953) 的经典分析中得知。Squire (1933) 证明，对于经过刚性表面的流动，二维扰动会在比相应三维扰动更低的雷诺数下变得不稳定。因此，描述无黏平行流稳定性的方程可直接推导为一个二阶常微分方程，也称为“Rayleigh 方程”（Drazin & Reid 1981）。然而，对于圆柱几何中的流动，Squire (1933) 定理并不适用。因此，本研究假设扰动为非轴对称扰动。

利用瑞利方程，Fjørtoft (1950) 指出，平面流中不稳定性存在的充要条件是：在流动中的某处，$D^2V(V - V_{inflexion})$ <0；其中，$V$ 为基态速度剖面，$V_{inflexion}$ 为拐点处的速度，而 $D^2$ 表示 $V$的二阶导数。Maslowe (1974) 将 Fjørtoft (1950) 定理推广到圆柱几何中的流动。需要指出的是，Maslowe (1974) 推导出的条件

更为一般，因为他的判据最初是针对外加旋转的哈根–泊肃叶流推导的。Lalas (1975) 进一步将 Maslowe (1974) 的分析推广到可压缩流。除了证明不稳定性的条件外，他还推导出了扰动增长率的界限。本文的分析不考虑外加旋转，因此这里得到的预测适用于基态速度沿轴向的流动几何构型。另一个经典结果由 Høiland (1953) 给出，他指出平面流中的不稳定扰动增长率存在一个上界，该上界为基态速度梯度绝对值的最大值。

Yeo & Dowling (1987) 和 Yeo (1994) 研究了 Fjørtoft (1950)、Rayleigh (1880) 和 Høiland (1953) 关于流经可变形表面的平面流的经典结果的推广。他们的分析表明，Høiland (1953) 的结果对于流经可变形表面的流动同样成立。然而，Fjørtoft (1950) 判据修正为$D^2V(V - V_w) < 0$，其中 $V_w$ 是壁面处的流体速度。Kumaran (1996) 和 Shankar & Kumaran (2000) 分别将 Maslowe (1974) 和 Lalas (1975) 的结果推广到流经可变形管的哈根–泊肃叶流，分别研究了轴对称扰动和非轴对称扰动。Kumaran (1996) 指出，流经可变形管的哈根-泊肃叶流不存在不稳定的轴对称无黏模态。然而，Shankar & Kumaran (2000) 表明，流经可变形管的哈根-泊肃叶流在非轴对称扰动下可能存在不稳定的无黏模态，从而说明了考虑非轴对称扰动的重要性。Shankar & Kumaran (2000) 的数值分析进一步证实了 Kumaran (1996) 和 Shankar & Kumaran (2000) 的预测。本文用于证明这些命题的方法与 Yeo & Dowling (1987) 、 Yeo et al. (1994) 、 Kumaran (1996) 和 Shankar & Kumaran (2000) 所用的方法相似，因此建立在已验证的程序基础之上。

流体流经多孔层时，会通过流体－多孔介质界面，在流动流体与多孔层内部的流动之间产生扰动能量交换。这种能量交换进而会改变流动流体的稳定性行为。本文推导了这种扰动能量交换的表达式，并将其表示为流体量的形式。随后利用扰动能量交换项，定性分析整个系统的稳定性。

本文其余部分安排如下。第2节推导非轴对称扰动的控制方程、边界条件，以及负责流体与多孔层之间扰动能量交换的扰动能量交换项。第3节证明相关命题。第4节展示这些命题在滑动库埃特流、环形泊肃叶流和哈根–泊肃叶流中的应用。最后，第5节陈述本研究得出的主要结论。

## 2. 控制方程

考虑一种密度为 $\rho$ 、黏度为 $\mu$ 的流体，如图1所示，它流经一个环形区域，该区域的外壁为由相同流体饱和的多孔层。设 $U(r)$ 和 $V(r)$ 分别为流体层和多孔层中任意的轴对称基态速度剖面。流体层范围为 $r = b$ 至 $r = a$，而多孔层范围为 $r = a$ 至 $r = a + H$。因此，流体层与多孔层在 $r = a$处形成界面。在 $r = a + H$处，假设存在一个刚性不透水表面。设 $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ 为多孔层中的平均速度场。连续性

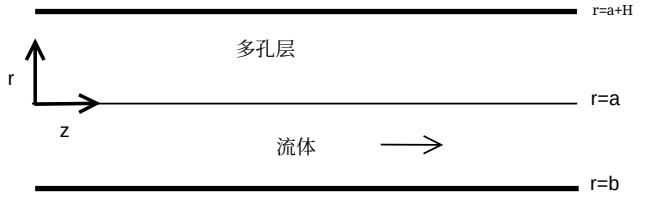


图1： 有量纲坐标下流动几何的侧视示意图。流体由运动圆柱在 $r = b$ 处施加的驱动力驱动，或由施加的压力梯度驱动。流体与多孔层在 $r = a$ 处形成界面，扰动能量交换通过该界面发生。对于哈根–泊肃叶流， $b = 0$ 和 $a = R$。请注意，为涵盖圆柱几何中的所有可能流动，图中仅展示了半个流动几何的侧视图。

多孔层的连续性方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2.1a}$$

多孔层中的流体流动采用达西模型描述（Nield 1977；Chen & Chen 1988；Chang 等人 2006；Chang 2005, 2006；Hill & Straughan 2008；Chang 等，2017），

$$\frac{\rho}{\epsilon}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p_m - \frac{\mu}{\kappa}\mathbf{u}, \tag{2.1b}$$

其中， $\epsilon$ 和 $\kappa$ 分别为多孔层的孔隙率和渗透率，$p_m$ 为孔隙压力。保留上述方程中的黏性项，是因为在相同外部驱动力下，由于分母中存在 $\kappa \ll 1$ ，多孔层中的流动黏性项将远大于流体中的黏性项（Childs & Collis-George 1950；Ochoa-Tapia & Whitaker 1995；Goyeau 等人 2003；Goharzadeh 等人 2005）。

此外，若考虑多孔层的非定常 Brinkman 模型，则方程 (2.1b) 右端会增加一项 $\mu_e\nabla^2\mathrm{u}$，其中 $\mu_e$ 为有效黏度，其定义为 $\mu_e = \mu/\epsilon$ （Hill & Straughan 2008）。以多孔层的长度和速度为尺度，Brinkman 模型引入的项为 $\mu_e\nabla^2\mathrm{u} = \mu U_{max}/(\epsilon H^2)$，而方程 (2.1b) 右端的最后一项为 $\mu\mathrm{u}/\kappa = \mu U_{max}/\kappa$ ，其中 $U_{max}$ 为多孔层中的最大速度。这两项之比为 $\mu_e\nabla^2\mathrm{u}/(\mu\mathrm{u}/\kappa) = \kappa/(\epsilon H^2) = \delta^2/\epsilon \ll 1$ ，其中 $\delta$为达西数。因此，与非定常达西方程中的黏性项相比，非定常 Brinkman 模型引入的黏性项要小得多。进一步的尺度分析表明，在高雷诺数下，由于存在 $\kappa$，黏性项 $\mu\mathrm{u}/\kappa$ 仍与其他项相当。然而，Brinkman 黏性项 $\mu_e\nabla^2\mathrm{u}$ 可以忽略。因此，对于当前问题，非定常 Brinkman 方程并不比非定常达西方程更有优势。

### 2.1. 扰动能量交换项

为推导所需结果，首先将推导多孔层与流体层之间的扰动能量交换项，这需要用到多孔层中的扰动能量方程。为得到该能量方程，将扰动方程（2.1b）乘以 $\mathbf{u}'^*$ ，得到

$$\frac{\rho}{\epsilon}\mathbf{u}'^* \cdot \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\mathbf{u}'^* \cdot \nabla p'_m - \frac{\mu}{\kappa}\mathbf{u}'^* \cdot \mathbf{u}', \tag{2.2}$$

其中，上标 $*$ 表示复共轭。利用多孔层连续性方程（2.1a）的扰动形式，可以进一步改写上式的复共轭形式

$$\frac{\rho}{\epsilon}\mathbf{u}'^{*}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t}=-\nabla\cdot(p'_m\mathbf{u}'^{*})-\frac{\mu}{\kappa}\mathbf{u}'^{*}\cdot\mathbf{u}'. \tag{2.3}$$

接下来，对上述方程在体积（$\nu$）上积分，该体积在 $z$ 方向跨越一个波长，在 $\theta$ 方向从 0 延伸至 $2\pi$，并覆盖 $r$ 方向上的多孔层厚度，得到

$$\frac{\rho}{\epsilon}\int_\nu\mathbf{u}'^{*}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t}d\nu=-\int_s p'_m\mathbf{u}'^{*}\cdot\mathbf{n}ds-\frac{\mu}{\kappa}\int_\nu\mathbf{u}'^{*}\cdot\mathbf{u}'d\nu, \tag{2.4}$$

其中，$s$ 是位于 $r=a$ 和 $r=a+H$ 处的表面积。对压力项应用散度定理，将体积分转换为面积分。量 n 是流体层与多孔层界面的法向量。

为进行线性稳定性分析，将速度和压力等动力学量分解为基态和扰动态，如 $f(\mathbf{x}\ t)=F(x_3)+f'(\mathbf{x}\ t)$。这里，$f(\mathbf{x}\ t)$ 是任意动力学量，$F(r)$ 和 $f'(\mathbf{x}\ t)$ 分别是相应量的基态部分和扰动部分。这里，撇号表示微小扰动量。随后，将以下形式的正规模态代入线性化扰动方程（2.1）：

$$f'(\mathbf{x},t)=\tilde{f}(y)e^{i(kz+n\theta-kct)}, \tag{2.5}$$

˜其中 $k$和 $n$是（实）波数，$f(y)$ 是 $f'(\mathbf{x}\ t)$ 的特征函数。另一个参数 $c=c_r+ic_i$ 是复相速度，用于表征扰动的时间相速度和增长。因此，若至少有一个特征值满足条件 $c_i>0$，则认为流动在时间上不稳定。将正规模态 (2.5) 代入上述方程可得

$$\frac{-ik\rho c}{\epsilon}\int_\nu\tilde{\mathbf{u}}^{*}\cdot\tilde{\mathbf{u}}\,d\nu=-\int_s\tilde{p}_m\tilde{\mathbf{u}}^{*}\cdot\mathbf{n}ds-\frac{\mu}{\kappa}\int_\nu\tilde{\mathbf{u}}^{*}\cdot\tilde{\mathbf{u}}\,d\nu. \tag{2.6}$$

令 $K_e=\rho/(4\pi\epsilon\lambda)\int_\nu$ ˜$\mathbf{u}^{*}\cdot$ ˜$\mathbf{u}\,d\nu$为多孔层中扰动的动能积分，$D_e=\mu/(4\pi\kappa\lambda)\int_\nu$ ˜$\mathbf{u}^{*}\cdot$˜$\mathbf{u}\,d\nu$ 为扰动的黏性耗散积分，其中$\lambda=2\pi/k$ 是扰动的波长。

$$2ikcK_e=[(\tilde{p}_m\tilde{u}_r^{*})_{r=a}+(\tilde{p}_m\tilde{u}_r^{*})_{r=a+H}]+2D_e, \tag{2.7}$$

其中面积分已完成积分。假设在$r=a+H$处存在不可渗透边界（Chang 等人 2006；Hill & Straughan 2008；Chang 等，2017），则扰动必须为零。因此，项 $(\tilde{p}_m\tilde{u}_r^{*})_{r=a+H}$ 将为零；下标表示相应量在指定 $r$ 值处的取值。因此，流动流体与多孔层之间的扰动能量交换项为：

$$(\tilde{p}_m\tilde{u}_r^{*})_{r=a}=2\left(ikcK_e-D_e\right). \tag{2.8}$$

### 2.2. 流体的扰动方程

L设流体中的速度场为 $\mathbf{v}=(v_r,v_\theta,v_z)$。连续性方程 is

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0. \tag{2.9a}$$

流体的欧拉方程为

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\nabla p, \tag{2.9b}$$

其中 $p$ 是流体中的压力场。将正规模态 (2.5) 代入 (2.9) 得到

$$\frac{1}{r}D(r\tilde{v}_r) + \frac{in}{r}\tilde{v}_\theta + ik\tilde{v}_z = 0, \tag{2.10a}$$

$$\rho ik(V-c)\tilde{v}_r + D\tilde{p} = 0, \tag{2.10b}$$

$$\rho ik(V-c)\tilde{v}_\theta + \frac{in}{r}\tilde{p} = 0, \tag{2.10c}$$

$$\rho ik(V-c)\tilde{v}_z + \rho DV\tilde{v}_r + ik\tilde{p} = 0, \tag{2.10d}$$

其中 $D = d/dr$。将正规模态代入后得到的多孔层扰动方程对后续分析没有帮助，因此为简洁起见不予列出。

进一步处理上述流体方程 (2.10)，可得流体层的类瑞利方程（Shankar & Kumaran 2000）

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}\frac{d}{dr}(r\tilde{v}_r)\right] - \tilde{v}_r - \frac{r\tilde{v}_r}{V-c}\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2+k^2r^2}\right) = 0. \tag{2.11}$$

本问题的边界条件如下。在 $r = b$ 处，对于哈根–泊肃叶流，利用轴对称性；对于滑动库埃特流和环形泊肃叶流，利用不可渗透性，可得

$$\tilde{v}_r = 0. \tag{2.12a}$$

在流体–多孔层界面 ($r = a$) 处，界面条件为（Hill & Straughan 2008；Chang 等，2017）

$$\tilde{v}_r = \tilde{u}_r, \tag{2.12b}$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}_m, \tag{2.12c}$$

在 $r = a + H$ 处，假设壁面不透水，因此，

$$\tilde{u}_r = 0. \tag{2.12d}$$

利用流体-多孔层界面处的法向速度和压力连续条件 (2.12)，可将扰动能量交换项 (2.8) 表示为流体层扰动的形式，得到

$$(\tilde{p}_m\tilde{u}_r^*)_{r=a} = (\tilde{p}\tilde{v}_r^*)_{r=a}. \tag{2.13}$$

为得到 $\tilde{p}$ 的表达式，将方程 (2.10c) 乘以 $(in/r)$，并将方程 (2.10d) 乘以 $(ik)$。然后将所得方程相加。利用连续性方程 (2.10a) 并代入 $\psi = -ik\tilde{v}_r/r$，得到

$$\tilde{p} = \frac{\rho k^2 r}{n^2+k^2r^2}\left[-(V-c)D\psi + DV\psi\right], \tag{2.14}$$

其中 $\psi$ 是流函数。在 $r = a$ 处，扰动能量交换项因此变为

$$(\tilde{p}_m\tilde{u}_r^*)_{r=1} = \frac{i\rho k^3}{n^2+k^2}\left[-(V_I-c)D\psi_I\psi_I^* + DV_I|\psi_I|^2\right], \tag{2.15}$$

其中，下标 $I$ 表示在流体-多孔层界面（即 $r = a$ 处）取值的量。此后，假定流体的最大和最小速度 $V_{max}$ 和 $V_{min}$ 均为正。

## 3. 命题

### 3.1. *Proposition 1*

命题：只有在以下条件下，穿过多孔管道的无黏流才是不稳定的

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2+k^2r^2}\right)(V-V_I)<0, \tag{3.1}$$

在流场中的某处。

证明：用流函数 $\psi$ 表示的方程 (2.11) 为

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}D\psi\right]-\frac{\psi}{r}-\frac{\psi}{V-c}\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2+k^2r^2}\right)=0. \tag{3.2}$$

将上述方程乘以 $\psi^*$ 并在流体区域上积分，得到

$$\int_a^b\left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}|D\psi|^2+\frac{|\psi|^2}{r}+\frac{|\psi|^2}{V-c}\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2+k^2r^2}\right)\right]dr=-\frac{\psi_I^*D\psi_I}{n^2+k^2},, \tag{3.3}$$

利用方程 (2.15) 和 (2.8)，上式可化为

$$\begin{aligned}\int_a^b\left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}|D\psi|^2+\frac{|\psi|^2}{r}+\frac{|\psi|^2}{V-c}\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2+k^2r^2}\right)\right]dr\\ =\frac{1}{V_I-c}\left[\frac{2}{i\rho k^3}\left(ikcK_e-D_e\right)-\frac{DV_I}{n^2+k^2}|\psi|^2\right].\end{aligned} \tag{3.4}$$

将上式乘以 $(V_I-c)$，并取所得方程的虚部，可得

$$\begin{aligned}c_i\int_a^b\left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}|D\psi|^2+\frac{|\psi|^2}{r}+\frac{|\psi|^2}{|V-c|^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2+k^2r^2}\right)(V-V_I)\right]dr\\ =-\frac{2}{\rho k^2}\left(c_iK_e+\frac{D_e}{k}\right)\end{aligned} \tag{3.5}$$

检查上式可知，不稳定扰动仅存在于流场中的某处，if

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2+k^2r^2}\right)(V-V_I)<0, \tag{3.6}$$

由此证明了该命题，因为 $K_e$ 和 $D_e$ 均为正定。该命题等价于 Fjørtoft (1950) 关于刚性表面附近平面流的定理，以及 Maslowe (1974)；Lalas (1975) 关于刚性壁圆柱几何中流动的条件。

### 3.2. 命题 2

命题：不稳定无黏扰动的相速度实部（$c_r$）必须满足以下条件：

$$V_{min}<c_r<V_{max}. \tag{3.7}$$

证明：为证明此命题，作如下代换

$$f=-\frac{\psi}{(V-c)}, \tag{3.8}$$

据此，方程（2.11）可改写为

$$-\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}(V-c)^2Df\right]+\frac{1}{r}(V-c)^2f=0. \tag{3.9}$$

将上述方程乘以 $f^*$，并在 $r$ 区域上积分，

$$\int_a^b (V-c)^2 \left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}|Df|^2+\frac{1}{r}|f|^2\right] dr = -\frac{(V_I-c)^2}{n^2+k^2} f_I^* Df_I. \tag{3.10}$$

对于流经刚性表面的流动，上述方程右端的项将为零。因此，项 $-\frac{(V_I-c)^2}{n^2+k^2} f_I^* Df_I$)纯粹是由多孔层的存在所引起的。利用方程 (3.8) 和 (2.15) 可得

$$-\frac{(V_I-c)^2}{n^2+k^2} f_I^* Df_I = \frac{2}{i\rho k^3 (V_I-c^*)} \left(ikcK_e - D_e\right). \tag{3.11}$$

将上述等式代入方程 (3.10)，得到

$$\int_a^b (V-c)^2 \left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}|Df|^2+\frac{1}{r}|f|^2\right] dr = \frac{2}{i\rho k^3 (V_I-c^*)} \left(ikcK_e - D_e\right). \tag{3.12}$$

上述方程的虚部为

$$\begin{aligned} & c_i \int_a^b (V-c_r) \left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}|Df|^2+\frac{1}{r}|f|^2\right] dr \\ &= \frac{c_r(D_e+2kc_iK_e)-(D_e+kc_iK_e)V_I}{\rho k^3} \frac{1}{|V_I-c|^2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

检查上述方程可知，对于不稳定扰动 $c_i > 0$,$c_r > V_I$。然而，如果 $c_r > V_{max}$，则由于上述方程的左端，假设 $c_i > 0$ 将导致矛盾。因此，对于不稳定的无黏模态，$V_{max}$ 是上界。通过对称的论证可知，不稳定扰动的 $c_r$ 下界为 $V_{min}$，从而证明了该命题。该命题等价于 Rayleigh 对流经刚性表面的平面流所得的界（Yeo & Dowling 1987）。

### 3.3. 命题3

陈述：无黏流流经多孔层时，其特征值满足 $|c|^2$ <$max(V^2)$。

证明：为证明此命题，将方程 (3.12) 乘以 $c^*$，然后对所得方程取虚部，可得

$$c_i \int_a^b (V^2-|c|^2) \left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}|Df|^2+\frac{1}{r}|f|^2\right] dr = \frac{2c_iV_I}{\rho k^3|V_I-c|^2} \left(kc_iK_e + D_e\right). \tag{3.14}$$

上述方程右端的量对于不稳定扰动为正。对于 $c_i > 0$，左端也必须为正，这意味着 $|c|^2 < V^2$，从而证明了该命题。

### 3.4. 命题4

.

$Sta$命题：不稳定扰动的时间增长率 ($kc_i$) 满足

$$kc_i \leqslant \frac{1}{2} max \left|\frac{k^2r^2DV^2}{n^2+k^2r^2}\right|. \tag{3.15}$$

证明：与上面的命题 2 类似，为证明此命题，令

$$g = \frac{\psi}{\sqrt{V-c}}. \tag{3.16}$$

代入后，瑞利方程 (2.11) 可重新整理为

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}(V-c)Dg\right] \\ -g&\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2+k^2r^2}\right)+\frac{1}{r}(V-c)+\frac{r}{n^2+k^2r^2}\frac{DV^2}{4(V-c)}\right]=0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Mu将上述方程乘以 $g^*$，并在流体区域内积分，得 ves

$$\begin{aligned} &\int_a^b |g|^2\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2+k^2r^2}\right)+\frac{1}{r}(V-c)+\frac{r}{n^2+k^2r^2}\frac{DV^2}{4(V-c)}\right]dr \\ &+\int_a^b\left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}(V-c)\right]|Dg|^2dr=-\frac{1}{n^2+k^2}(V_I-c)Dg_Ig_I^*. \end{aligned} \tag{3.18}$$

利用方程 (2.15) 和 (3.16)，上述方程的右端变为

$$\begin{aligned} &\int_a^b |g|^2\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2+k^2r^2}\right)+\frac{1}{r}(V-c)+\frac{r}{n^2+k^2r^2}\frac{DV^2}{4(V-c)}\right]dr \\ &+\int_a^b\left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}(V-c)\right]|Dg|^2dr \\ &=\frac{2}{i\rho k^3|V-c|}\left(ikcK_e-D_e\right)-\frac{1}{2(n^2+k^2)}DV_I|g_I|^2. \end{aligned} \tag{3.19}$$

取上述方程的虚部，并将所得方程乘以 $k^2c_i$，得

$$\begin{aligned} &c_i^2\int_a^b\frac{k^2r}{n^2+k^2r^2}|Dg|^2dr+\int_a^b|g|^2\left[\frac{k^2c_i^2}{r}-\frac{k^2r}{n^2+k^2r^2}\frac{DV^2c_i^2}{4|V-c|^2}\right]dr \\ &=\frac{-2c_i}{\rho|V-c|}\left(c_iK_e+\frac{D_e}{k}\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

对于不稳定扰动 $c_i>0$，可将上述方程改写；注意到$c_i^2\leqslant|V-c|^2$，可得

$$\begin{aligned} &\int_a^b\frac{1}{r}|g|^2\left[k^2c_i^2-\frac{1}{4}max\left|\frac{k^2r^2DV^2}{n^2+k^2r^2}\right|\right]dr \\ &\leqslant\frac{-2c_i}{\rho|V-c|}\left(c_iK_e+\frac{D_e}{k}\right). \end{aligned} \tag{3.21}$$

对于不稳定扰动，上述方程的右侧为负，因此，

$$kc_i\leqslant\frac{1}{2}max\left|\frac{k^2r^2DV^2}{n^2+k^2r^2}\right|^{\frac{1}{2}}, \tag{3.22}$$

由此证明了该命题。对于流经刚性表面的平面流，该命题等价于 Høiland 定理；对于圆柱几何中的流动，该命题则等价于 Lalas（1975）关于增长率的条件。

## 4. 应用

本节将应用上述推导出的命题，探究以下三类流动中的无黏失稳模态。

### 4.1. 滑动库埃特流

滑动库埃特流流经一个从 $r = b$ 延伸至 $r = a$ 的环隙，以及一个从 $r = a + H$ 延伸的多孔壁。位于 $r = b$ 的圆柱以恒定速度 $V_b$ 运动。由此产生的流动具有对数速度剖面，其有量纲形式为

$$V = A_1 log(r) + A_2, \tag{4.1}$$

$$A_1 = \frac{a\,\alpha\,V_b}{\sqrt{\kappa} + a\,\alpha\,log(b/a)}, \tag{4.2}$$

$$A_2 = \frac{V_b(\sqrt{\kappa} - a\,\alpha\,log(a))}{\sqrt{\kappa} + a\,\alpha\,log(b/a)}, \tag{4.3}$$

其中， $\alpha$ 是 Beavers & Joseph（1967）常数。应用命题 3.1，

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2 + k^2 r^2}\right)(V - V_I) = -\frac{2\,a\,\alpha\,k^2\,r\,V_b^2(-\sqrt{\kappa} + a\,\alpha\,log(a/r))}{(n^2 + k^2 r^2)^2(-\sqrt{\kappa} + a\,\alpha\,log(a/r))^2}. \tag{4.4}$$

因此，根据命题 3.1，要使不稳定性存在，必须满足条件 $r < a\,exp(-\sqrt{\kappa}/(a\alpha))$。由于流体区域位于 $r \in [b, a]$，因此满足该条件的唯一方式是 $\sqrt{\kappa}/(a\,\alpha) > 1$，用无量纲形式表示即为 $h > A\,\alpha/\delta$。这里， $A = a/(b - a)$、 $h = H/(b - a)$ 和 $\delta = \sqrt{\kappa}/H$ 分别表示流体-多孔层界面的无量纲位置、多孔层的无量纲厚度和达西数。总之，要引发不稳定性，多孔壁必须具有最小厚度。需要指出的是，流经达西多孔层的平面库埃特流是线性稳定的。然而，根据本文的分析，流经多孔层的滑动库埃特流是线性不稳定的，这表明曲率在触发不稳定性方面的作用。

### 4.2. 哈根–泊肃叶流

多孔壁管道中的哈根–泊肃叶流，其基态速度剖面形式如下

$$V = \frac{1}{4}A_1 r^2 + A_2, \tag{4.5a}$$

$$A_1 = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}, \tag{4.5b}$$

$$A_2 = \frac{1}{4}A_1\left[-4\kappa + \frac{2\sqrt{\kappa}R}{\alpha} - R^2\right], \tag{4.5c}$$

其中 $dp/dx$ 为施加的压力梯度。请注意，对于哈根–泊肃叶流， $b = 0$ 和 $a = R$。应用命题 3.1 所需的量为

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2 + k^2 r^2}\right)(V - V_I) = -\frac{4A_1^2 n^2 r(R^2 - r^2)}{(n^2 + k^2 r^2)^2}. \tag{4.6}$$

上述方程右端在流体区域内为负或零。因此，根据命题 3.1，该流动可能出现轴对称（$n = 0$）和非轴对称（$n \neq 0$）无黏失稳模态。管道中的哈根-泊肃叶流

在不透水壁面条件下是线性稳定的。因此，此处预测的不稳定性完全是由多孔壁的存在所致。

### 4.3. 环形泊肃叶流

多孔壁环形泊肃叶流的基态速度剖面形式如下

$$V = \frac{1}{4}A_1 r^2 + A_2 log(r) + A_3, \tag{4.7a}$$

$$A_1 = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}, \tag{4.7b}$$

$$A_2 = \frac{aA_1}{4}\frac{(a^2\alpha - \alpha\, b^2 - 2\, a\, \sqrt{\kappa} + 4\, \alpha\, \kappa)}{\sqrt{\kappa} + a\, \alpha\, log(b/a)}, \tag{4.7c}$$

$$A_3 = -\frac{A_1}{4}\frac{b^2(\sqrt{\kappa} - a\, \alpha\, log(a)) + a(a^2\alpha - 2\, a\, \sqrt{\kappa} + 4\, \alpha\, \kappa)log(b)}{\sqrt{\kappa} + a\, \alpha\, log(b/a)}. \tag{4.7d}$$

该量为,

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2 + k^2 r^2}\right)(V - V_I) = -\frac{r(2\, A_2 k^2 - A_1 n^2)(4\, A_3 + A_1(4\kappa + r^2) + 4A_2 logr)}{4(n^2 + k^2 r^2)^2}. \tag{4.8}$$

与滑动库埃特流或哈根-泊肃叶流不同，由于上述方程右端结构复杂，无法直接判断环形泊肃叶流的稳定性。然而，可以证明环形泊肃叶流不稳定，证明如下。环形泊肃叶流的稳定性特征受两个渐近极限所界定。第一个渐近极限对应于 $b \to a$，这意味着流动为平面泊肃叶流，因为两个圆柱彼此足够接近，曲率效应可以忽略。但根据 Chang 等人（2006）；Hill 和 Straughan（2008）；Chang 等人（2017）；Samanta（2017）的分析，流经多孔层的平面泊肃叶流是不稳定的。因此，在窄间隙极限下，环形泊肃叶流是线性不稳定的。另一个渐近极限对应于 $b \to 0$ 且 $a$ 有限的情形，即哈根-泊肃叶流；根据第4.2节，该流动是线性不稳定的。因此，带有多孔壁的环形泊肃叶流是线性不稳定的。

## 5. 结论

本文研究了圆柱几何中具有多孔壁的无黏流在非轴对称扰动作用下的时间稳定性。命题 3.1 表明，不稳定性存在的充要条件是流场中某处满足 $\frac{d}{dr}\left(\frac{rDV}{n^2+k^2r^2}\right)(V - V_I) < 0$，由此推导出平面流中 Fjørtoft (1950) 定理的等价形式。根据命题 3.2，不稳定扰动相速度的实部满足 $V_{min} < c_r < V_{max}$。命题 3.3 给出了特征值绝对值的上界 $|c|^2 < max(V^2)$。命题 3.4 发现，不稳定扰动的时间增长率满足 $kc_i \leqslant \frac{1}{2}max\left|\frac{k^2r^2DV^2}{n^2+k^2r^2}\right|^{\frac{1}{2}}$，这与 Høiland (1953) 定理等价。

随后利用推导出的命题，研究带多孔壁的滑动库埃特流、环形泊肃叶流和哈根-泊肃叶流的稳定性。分析揭示了轴对称和非轴对称失稳模态的存在

前提是滑动库埃特流中多孔壁的无量纲厚度（$h$）满足 $h > A\alpha/\delta$。由非定常达西方程描述的多孔层上方平面库埃特流是线性稳定的。因此，本研究预测的不稳定性源于滑动库埃特流中的曲率。研究还发现，环形泊肃叶流对轴对称和非轴对称扰动均不稳定。重要情形，即哈根-泊肃叶流，对轴对称和非轴对称无黏失稳模态均不稳定。因此，本研究首次表明，带多孔壁的三种流动，即滑动库埃特流、环形泊肃叶流和哈根-泊肃叶流，均为线性不稳定。需要指出的是，刚性管道中的哈根–泊肃叶流是线性稳定的。因此，此处预测的不稳定性完全是由管壁的多孔性质所致。

为量化多孔壁在圆柱几何中流动失稳过程中的作用，需要开展数值稳定性分析。数值稳定性分析还可能揭示除本文预测的无黏模态之外的其他不稳定模态。此外，还可以针对流经带多孔壁管道的 Hagen–Poiseuille 流开展实验，以探究所预测的不稳定性。因此，对本研究所预测的不稳定性进行数值稳定性分析和实验探究，可能是进一步理解带多孔壁圆柱几何中流动稳定性的下一步。

## 利益声明

作者声明不存在利益冲突。

## REFERENCES

Bates, D. O. & Harper, S. J. 2002 血管内皮生长因子对血管通透性的调节。 *Vascul Pharmacol* **39**, 225–237. Beavers, G. S. & Joseph D. D. 1967 *J.* 自然 *Fluid Mech.* **30** 197 207 可渗透壁面处的边界条件。, – .Chang, M. 2005 水平平面库埃特流作用下叠置流体层与多孔层中的热对流。 *Phys. Fluids* **17**, 064106–1–064106–7.Chang, M. 2006 平面泊肃叶流作用下叠置流体层与多孔层中的热对流。 *Phys. Fluids* **18**, 035104–1–035104–10.Chang, M., Chen, F. & Straughan, B. 2006 覆盖在多孔层上的流体中的泊肃叶流不稳定性。 *J. Fluid Mech.* **564**, 287–303.Chang, T.-Y., Chen, F. & Chang, M.-H. 2017 覆盖在多孔层上的流体层中平面泊肃叶－库埃特流的稳定性。 *J. Fluid Mech.* **826**, 376–395.Chen, F. & Chen, C. F. 1988 下覆流体层的水平多孔层中指状对流的起始。 *Trans. ASME C: J. Heat Transfer* **110**, 403–409. Childs, E. C. & Collis-George N. 1950 *Proc. Roy.* 多孔 *Soc. London Ser. A.* **201** 392 405 材料的渗透率。, , – .Denga, C. & Martinez, D. M. 2005 部分填充多孔介质的通道中伯曼流的线性稳定性。 *Phy. Fluids* **17**, 024102.Discacciati, M., Miglio, E. & Quarteroni, A. 2002 地表水流与地下水流耦合的数学模型与数值模型。 *Appl. Numer. Maths* **43**, 57–74. Drazin, P.G. & Reid, W.H. 1981 *Hydrodynamic Stability*。剑桥：剑桥大学出版社。Fjørtoft, R. 1950 积分定理在推导层流及斜压圆形涡旋稳定性判据中的应用。 *Geofys. Publ.* **17**, 1–52. Ghosh, S., Loiseau, J. C., Breugem, W. P. & Brandt, L. 2019 均匀横流下平面库埃特－泊肃叶流的稳定性。 *Eur. J. Mech. B/Fluids* **75**, 29–43.

Goharzadeh, A., Khalili, A. & Jørgensen, B. B. 2005 流体−多孔介质界面处的过渡层厚度。 *Phys. Fluids* **17**, 057102. Goyeau, B., Lhuillier, D., Gobin, D. & Velarde, M. 2003 流体−多孔介质界面处的动量输运。 *Int. J. Heat Mass Transfer* **46**, 4071–4081. Hill,
A. A. & Straughan B. 2008 *J.* 覆盖在多 *Fluid Mech.* **603** 137 149
孔介质上的流体中的泊肃叶流。, – . Høiland, E. 1953 关于线性流动的二维扰动。 *Geofys. Publ.* **18**, 1. Kumaran, V. 1996 柔性管道中无黏流的稳定性。 *J. Fluid Mech.* **320**, 1 17– .Lalas,
D. P. 1975 *J. Fluid Mech.* 可压缩旋流 **69** 65 72
的“Richardson”判据。, – .de Langre, E. 2008 风对植物的影响。 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **40**, 141–168.Levenspiel, O. 1999 *Chemical Reaction Engineering*。纽约：John Wiley & Sons。Li,
D. & Chen, J. 2012 *Mechanics of Oil and Gas Flow in Porous Media*。石油工业出版社。Liu, R.,
Liu, Q. S. & Zhao, S. C. 2008 流体−多孔介质系统中平面泊肃叶流的不稳定性。 *Phys. Fluids* **20**, 104105. Lyubimova, T. P., Lyubimov, D. V., Baydina, D. T., Kolchanova,
E. A. & Tsiberkin,
K. B. 2016 不可压缩液
体在饱和多孔介质上方的平行平面流动不稳定性。 *Phys. Rev. E* **94**, 013104. Maslowe,
S. 1974 *J.* 刚性旋转流 *Fluid Mech.* **64** 307 317
动对非轴对称扰动的不稳定性。, – .Nassehi, V. 1998 横流膜过滤中Navier-Stokes流与Darcy流耦合的建模。 *Chemical Engineering Science* **53**(6), 1253–1265. Nield,
D. A. 1977 *J.* 覆盖在多孔 *Fluid Mech.* **81** 513 522
介质层上的流体层中的对流起始。, – .Nield, D. A. 1983 Rayleigh-Darcy问题的边界修正：Brinkman方程的局限性。 *J. Fluid Mech.* **128**, 37–46.Nield, D. A. 1991 Brinkman-Forchheimer方程在模拟饱和多孔介质内及界面处流动时的局限性。 *Intl J. Heat Fluid Flow* **12**, 269–272.
Ochoa-Tapia, J.A. & Whitaker, S. 1995 多孔介质与均匀流体边界处的动量传递：II. 与实验的比较。 *Int. J. Heat* , – .
*Mass Transf.* **38** 2647 2655
Pangrle, B. J., Alexandrou, A. N., Dixon, A. G. & Dibiasio, D. 1991 多孔管壳系统中的层流分析。 *Chemical Engineering Science* **46**, 2847 2855– .Rayleigh,
Lord 1880 *Proc. Lond.* 论某些流体 *Math. Soc.* **11** 57
运动的稳定性或不稳定性。, . Reyes-Aldasoro, C. C., Wilson, I., Prise, V. E., Barber,
P. R., Ameer-Beg, M.,
Vojnovic ,
B. Cunningham, V. J. & Tozer, G. M. 2008 根据体内p22大鼠肉瘤的多光子荧光显微图像估算肿瘤表观血管通透性。 *Microcirculation* **15**, 65–79. Samanta, A. 2017 滑移对流经多孔通道的液流线性稳定性的影响。*Phy. Fluids* **29**, 094103. Shankar, V. & Kumaran, V. 2000 柔性管道中的流体流动对非轴对称扰动的稳定性。 *J. Fluid Mech.* **408**, 291–314. Showkat Ali, S. A., Azarpeyvand,
M. & da Silva, C. R. I. 2017 用于空气动力学和气动声学目的的多孔处理实验研究。 *AIAA* pp. 2017–3358. Showkat Ali, S. A., Azarpeyvand, M. & da Silva, C. R. I. 2018*a* 利用流向小翼操控尾缘流动。 *J. Fluid Mech.* **850**, 83–119. Showkat Ali, S. A., Azarpeyvand, M., Szóke,
Máté & da Silva, C. R. I. 2018*b* 边界层流动与可渗透壁面的相互作用。 *Phys. Fluids* **30**, 085111.
Silin, N., Converti, J., Dalponte, D. & Clausse, A. 2011 被易渗透多孔介质部分阻隔的两平行平面之间的流动不稳定性。
*J. Fluid Mech.* , – .
**689** 417 433
Sparrow, E. M., Beavers, G. S., Chen, T. S. & Lloyd, J. R. 1973 可渗透壁面管道中层流状态的破坏。 *J. Appl. Mech.* **40**, 337–342.

Squire, H. B. 1933 平行壁面间黏性流体流动的三维扰动稳定性。 *Proc. R. Soc. Lond. A* **142**, 621–628. Tilton, N. & Cortelezzi, L. 2006 通道流中壁面渗透性的失稳效应：线性稳定性分析。 *Phy. Fluids* **18**, 051702. Tilton, N. & Cortelezzi, L. 2008 多孔壁通道中压力驱动流的线性稳定性分析。 *J. Fluid Mech.* **604**, 411–445. Tilton, N., Martin, D., Serre, E. & Lueptow, R. M. 2012 一种结合达西定律的多孔管和通道流动新解。 *Conference: North American Membrane Society Meeting* . Yeo,

K.S. 1994 关于柔性壁上方流动无黏稳定性的注记。 *J. Fluid Mech.* **279**, 165 168– .Yeo, K.S. & Dowling, A.P. 1987 被动柔性壁上方无黏流的稳定性。*J. Fluid Mech.* **183**, 265–292. Yeo, K.S., Khoo, B.C. & Chong, W.K 1994 柔性壁上边界层流动的线性稳定性：流动载荷引起的壁面平均状态的影响。

*J. Fluids* , .

*Structures* **8** 529